Université de Monastir
ISIMM – Dept. Maths
Section : ING$_1$-INFO

A. U. : 2025 - 2026
Maths : réseaux de neurones

DM n^{o}1 (Perceptron)

Rappels

Etant donnée une matrice $W \in \mathbb{R}^{1\times n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et $\beta \in \mathbb{R}$. On appelle perceptron linéaire de poids W, noté P_W, l'application

$$P_W : X \ni \mathbb{R}^{n\times 1} \mapsto P_W(X) \in \{-1, 1\}$$

définie par

$$P_W(X) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad WX \geq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1}$$

et perceptron affine de poids W et de biais β, noté $P_{W,\beta}$, l'application

$$P_{W,\beta} : X \ni \mathbb{R}^{n\times 1} \mapsto P_{W,\beta}(X) \in \{-1, 1\}$$

définie par

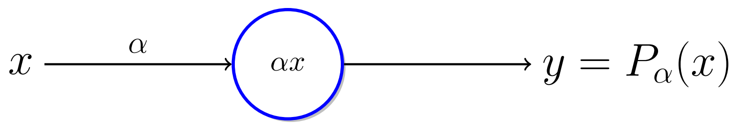
$$P_{W,\beta}(X) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad WX + \beta \geq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2}$$

EXERCICE I

1. Considérons $W_\sharp = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\beta = \frac{1}{2}$.
   (a) Représenter schématiquement $P_{W_\sharp,\beta}$ et P_W.
   (b) Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, comparer $P_{W_\sharp,\beta}(X_\sharp)$ et $P_W(X)$ où $X_\sharp = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.
   (c) Donner une interprétation géométrique pour cette comparaison.
2. Généraliser cette comparaison pour $W \in \mathbb{R}^{1\times n}$ ($n \geq 2$) et $\beta \in \mathbb{R}$.

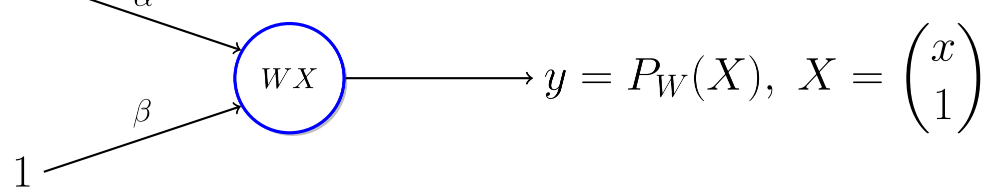
EXERCICE II

A) On considère un perceptron linéaire P_W où $W = (\alpha), \alpha \in \mathbb{R}$; dans ce cas on écrira P_α et pour $X = (x) \in \mathbb{R}$, $X = x$ tout simplement.



1. Existe-t-il $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P_\alpha(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$?
2. Existe-t-il $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P_\alpha(x) = -1 \ \forall x \in \mathbb{R}$?
3. Existe-t-il $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}_+ \\ -1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}_-^* \end{cases}$?
4. Existe-t-il $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}_- \\ -1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$?

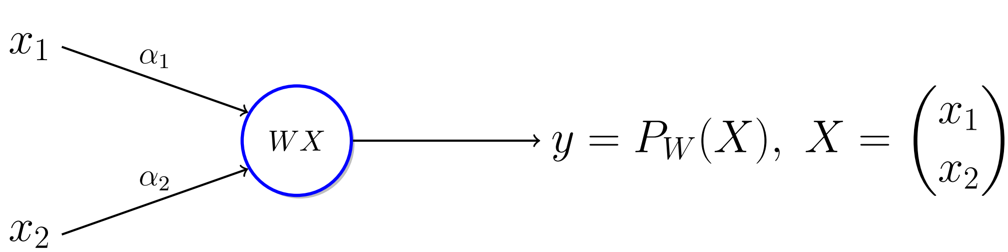
B) On considère un perceptron linéaire P_W où $W = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.



1. Existe-t-il W tel que $P_W(X) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$?
2. Existe-t-il W tel que $P_W(X) = -1 \ \forall x \in \mathbb{R}$?
3. Existe-t-il W tel que $P_W(X) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ -1 & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$?
4. Existe-t-il W tel que $P_W(X) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ -1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$?

EXERCICE III

On considère un perceptron linéaire P_W où $W = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$.



1. Trouvez W pour que P_W nous permette de classifier l'ensemble de données suivant :

Entrée $X = (x_1, x_2)$	$\rightarrow$	Label L
$x_1 \in \mathbb{R}_+, x_2 \in \mathbb{R}_+$	$\rightarrow$	1
$x_1 \in \mathbb{R}_-^*, x_2 \in \mathbb{R}_-^*$	$\rightarrow$	-1

2. Trouvez W pour que P_W nous permette de classifier l'ensemble de données suivant :

Entrée $X = (x_1, x_2)$	$\rightarrow$	Label L
$x_1 \in \mathbb{R}_-, x_2 \in \mathbb{R}_+$	$\rightarrow$	1
$x_1 \in \mathbb{R}^*+, x_2 \in \mathbb{R}_-^*$	$\rightarrow$	-1

3. Trouvez W pour que P_W nous permette de classifier l'ensemble de données suivant :

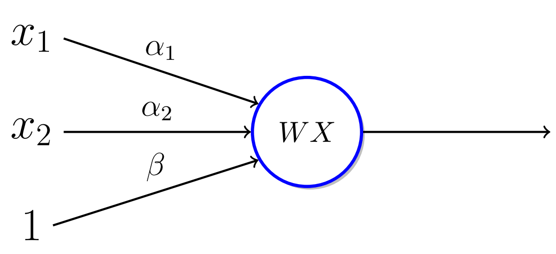
Entrée X	$\rightarrow$	Label L
$(1, 1)^\top$	$\rightarrow$	1
$(0, 1)^\top$	$\rightarrow$	-1
$(1, 0)^\top$	$\rightarrow$	1
$(0, 0)^\top$	$\rightarrow$	1

4. Trouvez W pour que P_W nous permette de classifier l'ensemble de données suivant :

Entrée X	$\rightarrow$	Label L
$(1, 1)^\top$	$\rightarrow$	-1
$(0, 1)^\top$	$\rightarrow$	1
$(1, 0)^\top$	$\rightarrow$	1
$(0, 0)^\top$	$\rightarrow$	1

EXERCICE IV

On considère un perceptron linéaire P_W où $W = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}$.



$$y = P_W(X),\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Trouvez le poids W pour que le perceptron P_W calcule la fonction ET logique.
2. Trouvez le poids W pour que le perceptron P_W calcule la fonction OU logique.
3. Essayer de trouver des poids W pour la fonction XOR.