Tarea Teórica 3

Phanor Castillo

Universidad Javeriana Cali

Árboles y Grafos

Dr. Carlos Ramírez y Dr. Camilo Rocha

Punto 2.

***a.* Prove that the root of G is an articulation point of G if and only if it has at least two children in G.**

Tomado de ap-slides de Carlos Ramírez.

Demostración:

Como el teorema está planteado como una doble implicación se debe demostrar la implicación en ambos sentidos.

(=>) Suponemos que r es un punto de articulación de G.

- Si la cantidad de hijos de r en T es 0, entonces o bien G esta desconectado o r es el único vértice del grafo G. Por la suposición de que G es conexo, la única opción entonces es que r es el único vértice del grafo G. Pero esto no puede ser cierto dado que r es un punto de articulación: si se quita el único vértice de un grafo, este no se desconecta.
- Si la cantidad de hijos de r en T es 1, entonces supongamos que s es el hijo de r en T. Sean u, v cualesquiera vértices en G (diferentes a r). Dado que G es conexo, sabemos que u, v son descendientes de r en T. Dado que s es el único hijo de r, podemos observar que u, v también son descendientes de s en T (posiblemente alguno de ellos o los dos sean s —no importa). Note que cualquier camino en T entre u y v que pase por r puede convertirse en un camino entre u y v que no pase por r. Es decir, al eliminar r de G no se desconecta ningún par de vértices.

En cualquiera de los dos casos es imposible que r sea un punto de articulación. Es decir, r en T debe tener al menos dos hijos.

(<=) Suponemos que r tiene al menos dos hijos en T.

- Sean u y v vértices de dos subárboles distintos de r en T. Hacia una contradicción suponga que r no es un punto de articulación de G. Es decir, hay un camino entre u y v en

G que no pasa por r. Note que, si u fue descubierto primero que v en la construcción de T, necesariamente v debe ser un descendiente de u en T. Sin embargo, esto contradice el hecho de que u y v están en distintos subárboles de r en T. Luego, no existe tal camino entre u y v sin pasar por r en G. En consecuencia, r debe ser un punto de articulación en G.

b. Let v be a nonroot vertex of G. Prove that v is an articulation point of G if and only if v has a child s such that there is no back edge from s or any descendant of s to a proper ancestor of v.

Tomado de ap-slides de Carlos Ramírez.

Demostración:

Como el teorema está planteado como una doble implicación se debe demostrar la implicación en ambos sentidos.

(=>) Suponemos que u es un punto de articulación.

- El objetivo es demostrar que hay un hijo s tal que no existe un back edge desde s o desde algún descendiente de s en T a un ancestro propio de u. Hacia una contradicción, suponga cualquier hijo s de u en T es tal que existe al menos un back edge desde s o alguno de sus descendientes en T a un ancestro propio de u. Sean v y w vértices de G, distintos a u. El análisis se hace por casos:
    1. Caso en que v y w no son descendientes de u. Como el grafo es conexo existe un camino entre v y w que pasa por la raíz T.
    2. Caso en que v es descendiente de u en T y w no lo es. Se tiene que hay un camino de v a un ancestro de u y de este ancestro hay un camino a w.
    3. Caso en que v, w son descendientes de u. Acá hay dos casos: (i) v, w hacen parte del mismo subárbol de u en T. En este caso hay un camino entre v y w sin pasar por u y (ii) v, w hacen parte de diferentes subárboles de u. Por suposición (i.e.,

back edges') hay un camino de v a un ancestro propio de u; igual para w. Dado que G es conexo, entonces hay un camino entre estos dos ancestros (puede ser el mismo) y, en consecuencia, hay un camino entre v y w.

(<=) Suponemos que u tiene al menos un hijo s tal que no existe un back edge desde s o desde algún descendiente de s en T a un ancestro propio de u.

- Sea v un descendiente de s en T (puede ser s mismo) y w un vértice que no hace parte de los descendientes de s en T (hay al menos uno porque u no es raíz en T). Note que cualquier camino entre v y w en G necesariamente pasa por u. Es decir, al eliminar u de G, los vértices v y w se desconectan. Luego, u es un punto de articulación de G.

c. Let $v.low = min \begin{cases} v.d. \\ w.d : (u, w) \; is \; a \; back \; edge \; for \; some \; descendant \; u \; of \; v. \end{cases}$

Show how to compute v:*low* for all vertices $v \in V$ in O(E) time.