

Regression Linéaire

Dimitri DELPECH, Timothé FADENIPO,
Matthis ARVOIS, Ismael MADOU GAGI GREMA,
Cheikh LO

2025-03-16

Contents

1	Introduction	3
2	Revue empirique	3
3	Zoom tour à tour sur les composantes de notre base de données.	6
3.1	Cement (voir annexe fig 1)	6
3.2	Blast Furnace Slag (voir annexe fig 2)	6
3.3	Fly Ash (voir annexe fig 3)	6
3.4	Water (voir annexe fig 4)	6
3.5	Superplasticizer (voir annexe fig 5)	6
3.6	Coarse Aggregate (voir annexe fig 6)	7
3.7	Fine Aggregate (voir annexe fig 7)	7
3.8	Age (voir annexe fig 8)	7
3.9	Concrete Compressive Strength (voir annexe fig 9)	7
4	Analyse Bivariée : Expliquons la résistance à la compression du béton par nos variables.	7
4.1	Quantité de ciment et résistance du béton. (voir annexe fig 12) . . .	8
4.2	Additif chimique et eau. (voir annexe fig 13)	8
4.3	L'age, une variable importante. (voir annexe fig 14)	9
4.4	La resistance à la compression du béton peut-elle s'expliquer grâce au laitier de haut fournaux ? (voir fig 15)	9
4.5	Les cendres volantes peuvent-elles expliquer la resistance du béton ? (voir annexe fig 16)	10

4.6	L'eau, un facteur de résistance ? (voir Annexe fig 17)	10
4.7	Superplasticité et Résistance (voir annexe fig 18)	11
4.8	Granulats grossiers et résistance à la compression (voir annexe fig 19)	11
4.9	Une relation floue entre les granulats fins et résistance à la compression. (voir annexe fig 20)	11
5	Ingénierie des Données	12
5.1	Détection des valeurs aberrantes	12
5.2	Analyse des corrélations	13
5.3	Synthèse de l'Ingénierie des Données	14
6	Analyse Multivariée	14
6.1	Histogramme des valeurs propres	14
6.2	Analyse sur les 2 Premiers Axes	16
6.3	Interprétation du Troisième Axe	17
6.4	Implications pour la Modélisation de la Résistance du Béton	18
7	Modélisation Linéaire	19
8	Conclusion	28
9	Annexe	28
9.1	Analyse univariée	28
9.2	Analyse bivariée	37
9.3	Analyse multivariée	43

List of Figures

List of Tables

1	Tableau des résultats de la régression linéaire	19
2	Durbin-Watson Test Results	20
3	Breusch-Pagan Test Results	21
4	Shapiro-Wilk Normality Test Results	22
5	A tibble: 6 x 6	22

1 Introduction

(en cours)

2 Revue empirique

La résistance du béton est une propriété reconnue depuis longtemps. Si le béton est un élément important du développement de nos sociétés, c'est qu'il possède une résistance mécanique, en particulier à la compression, qui a permis aux architectes et concepteurs de concevoir des structures de plus en plus importantes et durables dans le temps. La propriété de la résistance du béton reste la propriété la plus importante du matériau pour du point de vue de l'ingénieur. Depuis longtemps, la relation entre la composition du béton et la résistance au béton fait écho dans le monde du génie civil et intéresse de nombreux chercheurs de ce domaine. Cependant aucune théorie fondamentale et universellement adoptée n'existe, en la matière, au-delà de la notion commune de rapport eau/ciment. Cette première partie a pour but de mettre en lumière les effets des variables explicatives sur la variable cible en l'occurrence sur la résistance à la compression du béton en se basant sur les travaux effectués dans ce sens.

Bien que dans toute approche fondamentale de la résistance à la compression, la nature du granulat représente un rôle secondaire néanmoins ceci reste important pour notre étude. Dans les années 1960, Walker et Bloem ont publié dans leur article (Effect of Aggregate size on properties of concrete, journal of AIC, septembre) un résultat assez percutant. Il s'agit de la démonstration de l'effet négatif du volume de la dimension maximale sur la résistance. Trois effets du granulat sur la résistance du béton ont été énumérés à savoir un effet d'adhérence ; l'effet de confinement et l'effet plafond (le Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées, numéro 219, en janvier-février 1999, pages 41 à 52.).

A part son rôle important dans le phénomène de l'hydratation, l'eau est l'un des facteurs les plus importants au niveau de l'ouvrabilité du béton. L'augmentation du dosage en eau augmente la fluidité du béton et entraîne la diminution de la concentration en solides. Cependant, l'introduction excessive de l'eau provoque la chute de la résistance mécanique et sa durabilité (effect on composition parameters on fresh state properties of self-compacting concrete N.Bouhamou et al.). Le bulletin publié par FEBELCEM (Fédération de l'Industrie Cimentière Belge) avec l'auteur Ir C.Ployaert que la durabilité d'un béton dépend d'une faible porosité. De plus, pour les surfaces de bétonnage non coffrées sont les plus critiques du fait de leur exposition au soleil et au vent. Le contrôle de leur protection efficace contre toute évaporation intempestive de l'eau nécessaire à l'hydratation du ciment

revêt d'une grande importance. D'où la liaison importante entre la résistance à la compression et l'eau.

Puis dans l'article publié par le département de génie civil à l'université de Mostaganem en Algérie, le rôle de superplastifiant a été mis en exergue. Le volume d'eau augmente avec l'augmentation du dosage en superplastifiant. L'une des explications avancées est l'augmentation de la viscosité de l'eau due au superplastifiant. De plus, il est noté que l'augmentation du dosage en superplastifiant a engendré une augmentation du taux de ségrégation statique dans le cas où le dosage est élevé entraînant ainsi une réduction de l'homogénéité du béton et par conséquent une réduction sa résistance à la compression. Par ailleurs, un dosage modéré en superplastifiants apporte un bénéfice supplémentaire, particulièrement aux premiers âges (48h, 72h), en raison d'une meilleure compacité et d'une dispersion plus efficace des grains de ciment.

Ensuite, Mehta et Monteiro (2014) soulignent que l'augmentation de la teneur en ciment améliore significativement la résistance mécanique, en particulier dans les premiers jours de durcissement. De même, Siddique et al. (2011) ont observé une corrélation positive entre la teneur en ciment et la résistance à la compression, confirmant que cette relation est particulièrement marquée dans les premières phases de durcissement. Toutefois, au-delà d'un certain seuil, une concentration excessive de ciment peut entraîner des effets négatifs, notamment une élévation de la chaleur d'hydratation et une augmentation du retrait, favorisant ainsi l'apparition de fissures (Neville, 2011). Il a également spécifié qu'il existe une diminution dans l'efficacité du ciment en appliquant de très haut dosage même en présence de superplastifiant dans ADDIS B.J , Alexandre M.G (1994) . Le dosage du ciment dans le béton est très souvent relié à ses propriétés mécaniques et sa durabilité (effect on composition parameters on fresh state properties of self-compacting concrete N.Bouhamou et al.).

Par ailleurs, le laitier de haut fourneau est souvent utilisé pour remplacer une partie du ciment afin d'améliorer certaines propriétés du béton. Plusieurs études ont montré que son ajout réduit la résistance du béton dans les premiers jours, car sa réaction est plus lente que celle du ciment classique. Cependant, à plus long terme, il aide à renforcer le béton grâce à une réaction chimique qui produit des éléments solides supplémentaires, améliorant ainsi sa résistance (Jin et al., 2003).

De plus, l'utilisation des cendres volantes pour remplacer une partie du ciment a aussi un impact sur la résistance du béton. D'après Tan et al. (2016), leur ajout réduit la résistance dans les premiers jours, car elles réagissent plus lentement que le ciment. Toutefois, avec le temps, elles renforcent la structure du béton et améliorent sa durabilité grâce à une réaction chimique progressive. Zhao et

al. (2019) précisent que leur effet dépend de la quantité utilisée et de la finesse des particules, ce qui influence directement la résistance finale du béton.

En outre, Les granulats fins, communément appelés “Fine Aggregate”, constituent la fraction sableuse dans la formulation du béton. On considère généralement qu’il s’agit de particules de dimensions inférieures à 5 mm. La quantité de granulats fins, principalement constitués de sable, influence la résistance du béton. Selon Chatterji (2013), une bonne proportion de granulats fins améliore la compacité du mélange, réduit la porosité et augmente la résistance à la compression. Cependant, un excès de sable peut affaiblir la structure en diminuant la cohésion entre les particules de ciment et les granulats plus gros (Neville, 2011). Concrètement, une teneur adéquate en sable améliore le contact entre la pâte cimentaire et les grains, réduisant la porosité et favorisant ainsi un meilleur transfert des contraintes. Il est donc essentiel de trouver un équilibre pour garantir une répartition homogène des matériaux et optimiser la résistance du béton. Quant à l’étude du bulletin des laboratoires des ponts et chaussées (1999) intitulée “Influence du granulat sur la résistance à la compression des bétons”, elle révèle qu’entre 60 % et 75 % de volume total d’aggrégats, une variation de la proportion de granulats fins peut entraîner un écart de l’ordre de 2 à 3 MPa en résistance à la compression. La raison tient à la formation d’une couche de pâte cimentaire plus ou moins épaisse selon la quantité de sables incorporée, conditionnant ainsi la compacité et la performance mécanique du béton. Enfin, L’âge du béton (Age) se définit comme la durée écoulée depuis le coulage et le compactage jusqu’à la réalisation des essais mécaniques, habituellement exprimée en nombre de jours (1, 2, 7, 28, etc.). Il revêt une grande importance, car plus le béton mûrit, plus la réaction d’hydratation du ciment se poursuit, consolidant la microstructure et augmentant de manière significative la résistance en compression. Plusieurs études, dont celles de Neville (2011), Mindess et Young (2019), montrent que la résistance du béton augmente avec le temps en raison du processus d’hydratation du ciment. La majeure partie du gain de résistance se produit au cours des 28 premiers jours, période pendant laquelle le ciment continue de réagir avec l’eau pour former une structure solide. Cependant, le taux de durcissement ralentit après cette période, bien que certaines formulations, notamment celles contenant du laitier ou des cendres volantes, puissent encore voir leur résistance s’améliorer au-delà de 90 jours. Selon les observations présentées dans un mémoire de recherche intitulé “Impact du superplastifiant sur les propriétés physico-mécaniques du ciment” à l’université de Blida 1(2022-2023), la résistance à la compression connaît une croissance rapide entre 1 et 7 jours, passant de 20 % de la résistance ultime à près de 70 % autour de la première semaine . Typiquement, un saut d’environ 10 MPa (environ 50 %) est constaté entre 2 et 7 jours. Après ce cap, le rythme de durcissement ralentit, mais on atteint souvent plus de 90 % de la résistance finale à 28 jours.

3 Zoom tour à tour sur les composantes de notre base de données.

3.1 Cement (voir annexe fig 1)

L'histogramme montre une distribution étalée avec plusieurs pics, indiquant une variabilité dans les proportions de ciment utilisées. Les valeurs les plus courantes se situent entre 100 et 400 kg/m³. Cette répartition suggère que différentes formulations de béton nécessitent des proportions de ciment variées, influençant potentiellement la résistance finale du béton.

3.2 Blast Furnace Slag (voir annexe fig 2)

La majorité des valeurs sont proches de zéro, suggérant que le blast furnace slag est rarement utilisé en grande quantité. Cependant, quelques observations montrent une présence significative de ce composant, ce qui pourrait indiquer des formulations spécifiques cherchant à améliorer certaines propriétés du béton, comme la durabilité ou la résistance aux sulfates.

3.3 Fly Ash (voir annexe fig 3)

La distribution est fortement biaisée vers zéro, montrant que le fly ash est peu utilisé dans la majorité des échantillons. Seules quelques observations présentent des valeurs plus élevées, ce qui indique que cet additif est employé dans des mélanges spécifiques, probablement pour optimiser la maniabilité ou réduire les coûts en substituant une partie du ciment.

3.4 Water (voir annexe fig 4)

La répartition est relativement normale avec un pic autour de 200 kg/m³, ce qui indique une quantité d'eau standardisée dans la plupart des mélanges. Une consommation d'eau bien contrôlée est essentielle pour assurer une bonne hydratation du ciment et éviter une porosité excessive pouvant affaiblir le matériau.

3.5 Superplasticizer (voir annexe fig 5)

La plupart des valeurs sont proches de zéro, ce qui signifie que le superplasticizer est peu utilisé dans de nombreux échantillons. Cependant, certaines observations indiquent une utilisation plus importante, ce qui peut être lié à des mélanges nécessitant une meilleure fluidité tout en réduisant le rapport water/ciment pour maximiser la résistance finale.

3.6 Coarse Aggregate (voir annexe fig 6)

Le coarse aggregate suit une distribution centrée autour de 950-1000 kg/m³, ce qui montre une standardisation dans son utilisation. La présence d'une quantité relativement constante de coarse aggregate est essentielle pour garantir la stabilité et la résistance mécanique du béton tout en minimisant la fissuration.

3.7 Fine Aggregate (voir annexe fig 7)

La distribution est également centrée autour de 750-800 kg/m³, suggérant une utilisation homogène du fine aggregate dans les différents mélanges de béton. Une quantité bien maîtrisée de fine aggregate améliore la compacité du béton et influe sur sa capacité de mise en œuvre et son imperméabilité.

3.8 Age (voir annexe fig 8)

L'âge du béton est majoritairement faible, avec une concentration autour de 28 jours. Quelques échantillons présentent des âges plus avancés, jusqu'à un an. Cela reflète l'importance de la période de cure du béton, puisque la résistance continue d'augmenter avec le temps grâce à l'hydratation prolongée du ciment.

3.9 Concrete Compressive Strength (voir annexe fig 9)

La concrete compressive strength suit une distribution proche d'une loi normale, avec un pic autour de 40 MPa. Cela indique une variabilité contrôlée de la résistance du béton. La concrete compressive strength étant un paramètre clé, cette distribution montre que la plupart des mélanges atteignent une performance attendue, bien qu'il existe des échantillons avec des valeurs plus élevées ou plus faibles en fonction des formulations utilisées.

4 Analyse Bivariée : Expliquons la résistance à la compression du béton par nos variables.

La matrice de corrélation en annexe va nous aider à voir les différents liens de corrélation potentiels entre nos variables. Dans cette partie, nous allons étudier et essayer de trouver les couples de variables significativement dépendants. Il est important de trouver tous les couples liés afin d'expliquer de manière optimale comment les variables de notre base peuvent influencer sur la résistance à la compression du béton.

4.1 Quantité de ciment et résistance du béton. (voir annexe fig 12)

Nous allons ici examiner si la quantité de ciment utilisée pour créer le béton est significativement reliée à la résistance à la compression du béton. En effet, nous pouvons d'abord observer la distribution de ces deux variables à l'aide du graphique ci-dessous :

Cette visualisation des données nous donne une première impression du lien potentiel entre ces deux variables. En étudiant plus précisément ces deux variables avec un test de corrélation de Pearson, on se rend compte qu'il y a un lien significatif : ces deux variables sont positivement liées.

On peut alors dire que plus la quantité de ciment utilisée pour la fabrication du béton est grande, plus la résistance à la compression de ce béton sera importante. Le test final a donné un coefficient de corrélation ρ de Pearson égal à **0,5** (annexe), ce qui indique un lien relativement fort et non négligeable. Ainsi, une fabrication de béton comprenant une grande quantité de ciment favoriserait grandement sa résistance à la compression.

4.2 Additif chimique et eau. (voir annexe fig 13)

Dans le processus de fabrication du béton, il est parfois nécessaire d'ajouter un additif chimique pour améliorer sa fluidité et sa maniabilité. La réflexion porte ici sur la corrélation entre l'ajout de cet additif chimique et la quantité d'eau utilisée pour la fabrication : y aurait-il un quelconque lien entre ces deux variables ?

Pour ce faire, il semble juste d'examiner les différents ajouts d'additif en fonction de la quantité d'eau utilisée pour chaque béton. Le graphique ci-dessous illustre cette relation, et nous pouvons aisément supposer qu'il existe une corrélation entre ces deux variables. En effet, dans l'ensemble, on remarque une diminution de l'ajout d'additif lorsque la quantité d'eau augmente.

Pour avoir une certitude, nous effectuons alors un test de corrélation de Kendall, qui nous indique, premièrement, qu'il existe un lien significatif entre ces deux variables et, deuxièmement, que le coefficient de corrélation τ étant de **-0.53** (annexe), la négativité de la liaison est prouvée.

En clair, plus la quantité d'eau utilisée pour la fabrication du béton est importante, moins d'additif chimique a été ajouté lors de cette fabrication. Ce lien fort nous aidera dans la suite de notre étude.

4.3 L'âge, une variable importante. (voir annexe fig 14)

Il serait tout à fait naturel de penser que l'âge ait une quelconque importance sur la résistance à la compression du béton. En effet, l'imaginaire collectif nous amène d'abord à penser que ce béton, en conséquence de l'âge, deviendrait de plus en plus fragile et, de ce fait, moins résistant à la compression. Notre hypothèse serait alors de dire que l'âge est négativement lié à la résistance à la compression du béton, *i.e.*, plus l'âge augmente, moins le béton est résistant.

Dans un premier temps, l'observation de la distribution du temps par rapport à la compression nous aiderait à confirmer ou infirmer l'hypothèse de cette partie. Voyons le graphique ci-dessous.

Cette première visualisation ne nous permet pas de déterminer s'il existe réellement un lien entre ces deux variables. Une exagération pourrait peut-être nous amener à supposer l'existence d'une relation quadratique entre elles, mais cette hypothèse ne peut être vérifiée dans cette partie.

En conséquence, il est nécessaire de réaliser un test de corrélation.

Le test effectué nous permet de constater que notre hypothèse est infirmée, car il existe bien un lien significatif entre ces deux variables, et la corrélation indique que ce lien est positif. Cette corrélation est positive mais modérée, avec un coefficient de Kendall τ de 0,449 (voir annexe). Les valeurs croissent significativement ensemble, bien que certaines exceptions subsistent.

4.4 La résistance à la compression du béton peut-elle s'expliquer grâce au laitier de haut fournaux ? (voir fig 15)

On examine ici la relation entre le laitier de haut fourneau et la résistance à la compression du béton :

Ce graphique ne suggère aucun lien de corrélation entre la quantité de laitier de haut fourneau et la résistance à la compression du béton, mis à part une légère baisse de la résistance du béton lorsque la quantité de laitier de haut fourneau augmente. Afin de détecter une potentielle relation de dépendance, il pourrait être judicieux d'effectuer un test de corrélation de Spearman.

En effet, ce test nous fournit une p-value inférieure à 0.05 et un coefficient ρ de 0.16. Ces valeurs indiquent qu'il existe bien un lien significatif positif entre ces deux variables, mais cette corrélation reste faible compte tenu de la proximité de ρ avec zéro.

4.5 Les cendres volantes peuvent-elles expliquer la résistance du béton ? (voir annexe fig 16)

Pour tenter de répondre à cette question, on peut d'abord examiner la distribution de la quantité de cendres volantes en fonction de la résistance à la compression du béton.

La représentation de la distribution de notre variable à expliquer par rapport à la variable explicative suggère une légère corrélation linéaire négative. On pourrait alors en déduire que plus la quantité de cendres volantes augmente, moins le béton résiste à la compression.

Pour s'assurer de la justesse de cette analyse, nous réalisons un test de corrélation de Spearman, qui met en évidence un lien significatif entre ces deux variables. Comme indiqué dans notre interprétation, ce lien est négatif, avec un coefficient ρ de -0.19, indiquant ainsi une corrélation faible mais non négligeable.

4.6 L'eau, un facteur de résistance ? (voir Annexe fig 17)

Dans l'imaginaire collectif, il est tout à fait logique de penser que si l'on ajoute de l'eau lors de la création du béton, celui-ci sera moins résistant que si l'on ne le fait pas. Cependant, il est indispensable d'incorporer une certaine quantité d'eau. L'objectif est donc de trouver un juste milieu dans cette quantité. Examinons d'abord la distribution de la résistance des bétons par rapport à leur résistance à la compression :

Comme dans la partie précédente, le graphique est relativement désordonné, mais on peut tout de même y relever une légère dépendance négative, comme mentionné dans l'introduction de l'étude de cette dépendance. Pour être sûr de nos analyses, il serait nécessaire d'effectuer un test de corrélation de Spearman.

Le résultat de ce test indique qu'il existe bien une corrélation avec un coefficient de corrélation de -0.31, ce qui montre un lien négatif non négligeable entre ces deux variables.

En conclusion, moins il y a d'eau dans la création du béton, plus celui-ci sera résistant. Cependant, les points situés à l'extrémité gauche du graphique suggèrent qu'un minimum d'eau est tout de même nécessaire pour que le béton atteigne une résistance suffisante.

4.7 Superplastificité et Résistance (voir annexe fig 18)

Le superplastifiant, utilisé dans les mélanges de béton, joue un rôle essentiel en améliorant la fluidité du béton sans ajout d'eau supplémentaire. Ce composant chimique permet d'augmenter la densité du béton, contribuant ainsi à une meilleure résistance à la compression.

Visuellement, le graphique ne permet pas de tirer de conclusions claires sur la relation entre la quantité de superplastifiant et la résistance à la compression du béton. Bien que la tendance semble indiquer une augmentation initiale de la résistance avec l'ajout de superplastifiant, la distribution des points reste dispersée. De plus, la présence de nombreux points proches du début de la courbe rend difficile l'identification d'une tendance nette.

Le test de Kendall révèle une corrélation positive modérée ($\tau = 0.249$) entre la quantité de superplastifiant et la résistance à la compression du béton. Cette corrélation est significative, comme en témoigne la p-value extrêmement faible, bien inférieure à 0.05. Cela suggère que, de manière générale, une augmentation de la quantité de superplastifiant dans le mélange de béton pourrait être associée à une amélioration de sa résistance à la compression.

4.8 Granulats grossiers et résistance à la compression (voir annexe fig 19)

Les granulats grossiers, qui comprennent des particules de grande taille comme des graviers ou des pierres concassées, contribuent à la résistance à la compression du béton en réduisant les vides dans le mélange, augmentant ainsi sa compacité.

Le graphique représente la relation entre les granulats grossiers et la résistance à la compression du béton. La répartition des données semble dispersée. On peut néanmoins observer un lien quadratique entre ces deux variables, mais il est difficile d'en tirer une conclusion plus approfondie.

Le test de corrélation de Kendall a donné un coefficient τ de -0.124. Bien que la p-value soit très faible ($3.318e-09$), ce faible τ indique une relation négative mais modérée. Cela signifie qu'il existe bien une certaine corrélation entre ces deux variables.

4.9 Une relation floue entre les granulats fins et résistance à la compression. (voir annexe fig 20)

La présence de granulats fins améliore la compacité du mélange, ce qui peut influencer ses propriétés, notamment la résistance à la compression. Ils remplissent

les espaces entre les granulats plus grossiers.

Le graphique des granulats fins ne permet pas de tirer de conclusions claires concernant la relation entre cette variable et la résistance à la compression, aucune tendance évidente n'y apparaît.

Les résultats du test de corrélation de Kendall indiquent une relation significative entre la quantité de granulats fins et la résistance du béton. Le coefficient τ étant négatif, cela signifie que lorsque la proportion de granulats fins diminue, la résistance à la compression tend à augmenter. Cette observation suggère qu'un excès de granulats fins pourrait réduire la compacité du mélange.

5 Ingénierie des Données

La base de données contient **1030 observations et 9 variables numériques** initialement. Dans cette partie, nous préparons les données pour garantir leur qualité et leur pertinence. Cette étape comprend deux étapes principales :

- **Détection et traitement des valeurs aberrantes** à l'aide de boxplots.
- **Analyse des corrélations** pour éviter la redondance des variables.

5.1 Détection des valeurs aberrantes

Les valeurs aberrantes peuvent fausser l'analyse et influencer la modélisation. Les **boxplots** (voir Analyse univariée) permettent d'identifier des observations extrêmes.

Certaines variables comme **Cement**, **Fly Ash** et **Coarse Aggregate** ont une distribution homogène et sont conservées sans modification.

La variable **Water** présente quelques valeurs extrêmes. Plutôt que de les exclure, nous analysons leur impact.

La variable **Superplasticizer** contient des valeurs très éloignées du reste des observations. Pour éviter toute influence excessive, ces valeurs extrêmes sont exclues en utilisant la règle des $1.5 \times \text{IQR}$:

```
# Calcul des seuils avec la règle des 1.5*IQR pour Superplasticizer
Q1_sp <- quantile(bdd$super_plast, 0.25)
Q3_sp <- quantile(bdd$super_plast, 0.75)
IQR_sp <- Q3_sp - Q1_sp

seuil_sup_sp <- Q3_sp + 1.5 * IQR_sp
```

```
# Filtrer les valeurs aberrantes pour Superplasticizer
bdd_ing <- bdd %>% filter(super_plast <= seuil_sup_sp)
```

Concernant **Blast Furnace Slag**, quelques valeurs sont élevées mais restent plausibles. Elles sont conservées sans modification.

La variable **Age** présente des valeurs extrêmes qu'il faut filtrer. En utilisant la règle des $1.5 \times \text{IQR}$, nous identifions les observations anormalement élevées et les supprimons pour assurer une meilleure cohérence des données :

```
# Calcul des seuils avec la règle des 1.5*IQR pour Age
Q1_age <- quantile(bdd_ing$age, 0.25)
Q3_age <- quantile(bdd_ing$age, 0.75)
IQR_age <- Q3_age - Q1_age

seuil_sup_age <- Q3_age + 1.5 * IQR_age

# Filtrer les valeurs aberrantes pour Age
bdd_ing <- bdd_ing %>% filter(age <= seuil_sup_age)
```

5.2 Analyse des corrélations

L'objectif est d'identifier les variables fortement corrélées entre elles pour éviter la **multicolinéarité** dans le modèle.

La **matrice de corrélation** (voir Analyse bivariée) permet d'observer les liens entre les différentes variables.

La variable cible **y_concrete_compressive** présente des corrélations notables avec certaines variables explicatives : - **cement (0.50)** : Forte corrélation positive, suggérant une relation directe entre la quantité de ciment et la résistance à la compression.

- **cater (-0.29)** : Corrélation négative, ce qui est cohérent avec l'hypothèse qu'un excès d'eau diminue la résistance du béton.

- **super_plast (0.37)** : Corrélation indiquant que cet additif pourrait améliorer la résistance du béton.

- **age (0.33)** : Relation positive, confirmant que la résistance augmente avec le temps.

Certaines variables explicatives montrent également des **corrélations importantes entre elles**, ce qui peut poser problème : - **water et super_plast (-0.65)** : Corrélation négative forte, ce qui est logique car le superplastifiant permet de

réduire la quantité d'eau nécessaire.

- **blast_furnace et fly_ash (-0.32)** : Corrélation négative modérée, indiquant que ces composants sont parfois utilisés en substitution l'un de l'autre.

Nous devons **évaluer l'impact de ces relations dans le modèle**. Si deux variables sont trop fortement corrélées, l'une d'elles pourrait être supprimée pour éviter des problèmes de multicolinéarité.

Ces observations pourront nous aider lors de la sélection des variables dans la prochaine étape.

5.3 Synthèse de l'Ingénierie des Données

Après le traitement des valeurs aberrantes et l'analyse des corrélations, la base de données passe de **1030 à 961 observations**.

Les valeurs extrêmes des variables **Age** et **Superplasticizer** ont été supprimées en appliquant la règle des $1.5 \times \text{IQR}$, garantissant une meilleure cohérence des données.

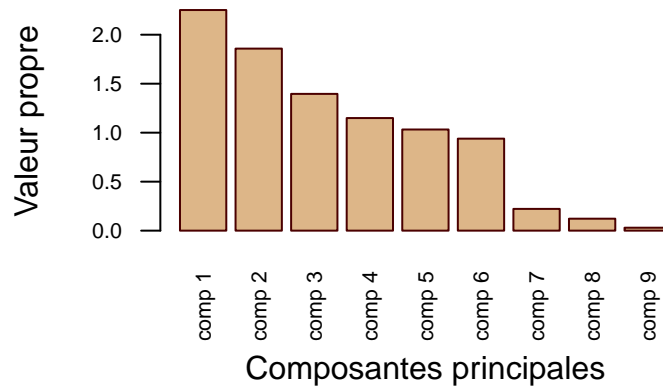
L'analyse des corrélations a révélé des relations notables entre plusieurs variables, notamment une forte corrélation entre **Water et Superplasticizer (-0.65)** et un lien important entre **Cement et la résistance à la compression (0.50)**.

6 Analyse Multivariée

Dans cette partie, nous allons étudier l'ensemble des variables en utilisant une analyse en composantes principales (ACP). La variable à expliquer ("y_concrete_compresive") est également considérée comme active, aux côtés des huit autres variables explicatives.

6.1 Histogramme des valeurs propres

```
## Warning: package 'FactoMineR' was built under R version 4.4.2
```

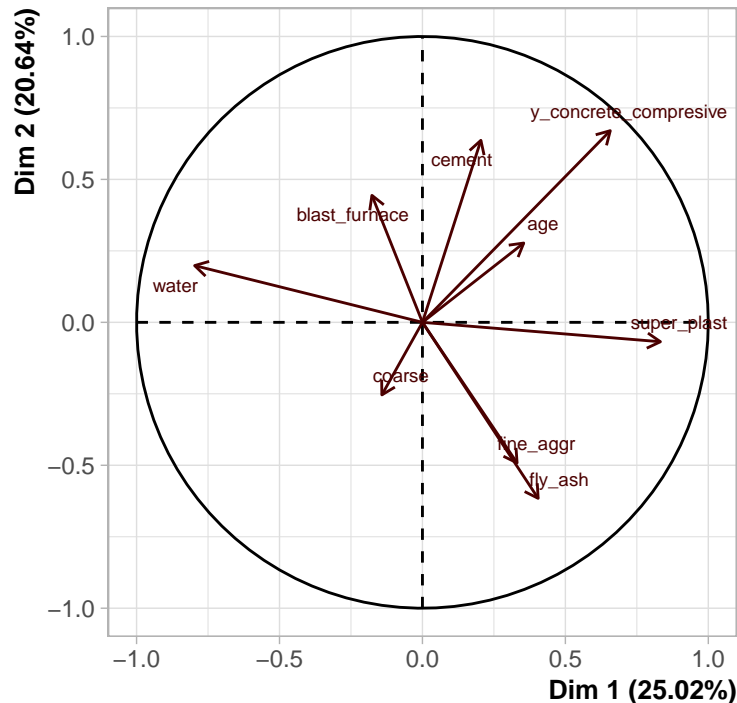


Le graphique illustre l'histogramme des valeurs propres issu de l'ACP, permettant d'identifier le nombre d'axes principaux à retenir.

- Le premier axe capte une part importante de la variance totale.
- Le deuxième axe conserve également une proportion significative d'information.
- Le troisième axe ajoute un complément notable de variance.
- À partir du quatrième axe, la contribution devient plus marginale.

En appliquant la **règle du coude**, il est pertinent de retenir les **trois premiers axes** pour l'analyse.

6.2 Analyse sur les 2 Premiers Axes



Le cercle de corrélation met en évidence les relations entre les variables étudiées, projetées sur les deux premiers axes principaux de l'ACP. Ces axes capturent ensemble **45,67 %** de la variance totale des données (**25,02 % pour Dim 1** et **20,64 % pour Dim 2**).

6.2.1 Interprétation du Premier Axe (Dim 1 : 25,02 %)

Le premier axe distingue **les formulations riches en eau (water)** de celles utilisant **des superplastifiants (super_plast)**.

- **water** (28,20 % de contribution, $\cos^2 = 0.62$) est la deuxième variable la plus influente sur Dim 1. Son orientation négative indique qu'une teneur élevée en eau tend à être associée à une baisse de la résistance à la compression.
- **super_plast** (30,77 % de contribution, $\cos^2 = 0.69$) est projetée dans la direction opposée à **water**, traduisant son rôle de réduction du besoin en eau, favorisant ainsi la résistance. c'est la variable la plus influente sur cet axe.
- **fly_ash** (7,3 % de contribution, $\cos^2 = 0.16$) et **fine_aggr** (4,86% de contribution, $\cos^2 = 0.11$) ne sont pas bien projetées sur cet axe.
- **age** (5,57 % de contribution, $\cos^2 = 0.13$) est aussi bien représenté sur Dim 1,

confirmant que la résistance du béton augmente avec le temps de durcissement.

- **y_concrete_compressive** (19,17 % de contribution, $\cos^2 = 0.43$) est bien projetée sur Dim 1 ainsi que son \cos^2 indique qu'elle est très bien représentée sur cet axe.

6.2.2 Interprétation du Deuxième Axe (Dim 2 : 21,52 %)

Le deuxième axe distingue **les formulations riches en ciment (cement) et associées à une plus grande résistance (y_concrete_compressive)** des formulations utilisant **une proportion plus élevée des cendres volantes ('fly_ash') et les granulats fins (fine_aggr)**.

- **y_concrete_compressive** (24.70 % de contribution, $\cos^2 = 0.45$) est la variable la plus influente sur Dim 2. Cela signifie que la résistance à la compression est fortement expliquée par cette dimension.
- **cement** (21.78 % de contribution, $\cos^2 = 0.40$) est bien représentée sur Dim 2, indiquant que la quantité de ciment influence fortement la résistance mécanique. **-fly_ash** (20.39% de contribution et $\cos^2 = 0.38$) et **fin_aggr** (13.01% de contribution et $\cos^2 = 0.24$) contribuent plus sur cet axe que sur le premier et elles sont très bien représentées sur cet axe contrairement au premier axe, suggérant que ces composants influencent la résistance du béton de la même façon puisque les flèches de ces deux variables sont confondues.
- **coarse** (5.05 % de contribution, $\cos^2 = 0.10$) et **blast_furnace** (10.61% de contribution et un $\cos^2 = 0.10$) ne sont pas bien projetées sur cet axe et contribuent faiblement à la construction de cette dimension. Elles pourraient être expliquées par le troisième axe.

6.3 Interprétation du Troisième Axe

6.3.1 Dim(1-3) : 40.5% % de la Variance Totale (Voir annexe : fig 21)

Le troisième axe distingue **les formulations riches en laitier du haut fourneau (blast_furnace) et associées à une plus grande résistance (y_concrete_compressive)** des formulations utilisant **une proportion plus élevée des granulats grossiers (Coarse) et du ciment (Cement)**. ces deux axes représentent 40.5% de la variance totale.

-blast_furnace (38.12% de contribution et $\cos^2 = 0.53$) constitue la variable la plus influente et impacte positivement la résistance à la compression du béton. une hausse du laitier haut fourneau renforce la résistance.

-Coarse (avec 32.5% de contribution et $\cos^2 = 0.45$) représente la deuxième variable la plus importante et contribue en grande partie à la construction de cet axe. elle est

projetée dans la direction opposée à `blast_frunace` et `y_concrete_compressive`, suggérant que les formulations contenant une proportion élevée de granulats grossiers sont associées à une résistance plus faible.

- Enfin, nous avons la variable **Cement** qui est également bien représentée ($\cos^2 = 0.27$) et contribue à la hauteur de 19.46% à la construction de cet axe.

6.3.2 Dim(2-3) : 36.14 % de la Variance Totale (Voir annexe : Partie 22)

Le troisième axe distingue **les formulations riches en laitier du haut fourneau (`blast_frunace`) et associées à une plus grande résistance (`y_concrete_compressive`)** des formulations utilisant **une proportion plus élevée des granulats grossiers (`Coarse`) et du ciment (`Cement`)**. ces deux axes représentent 40.5% de la variance totale.

nous remarquons la même conclusion que l'analyse des axes 1-3. Retenons que la variable `age` (**age**) n'est pas bien représentée sur les trois premiers axes mais on remarque qu'elle est très bien représentée sur le quatrième axe avec 40.72% de contribution et 0.46 comme qualité de représentation. compte tenu de la mauvaise représentation de la variable cible sur cet axe, nous pouvons conclure que l'âge n'influence pas de manière significative la résistance à la compression du béton.

Cette ACP met en évidence trois dimensions principales dans la composition du béton :

1. **Axe 1 (Dim 1)** : Opposition entre l'eau et les superplastifiants.
2. **Axe 2 (Dim 2)** : Opposition entre ciment et cendres volantes, granulats fins.
3. **Axe 3 (Dim 3)** : Opposition entre laitier du haut fourneau et granulats grossiers, ciment

6.4 Implications pour la Modélisation de la Résistance du Béton

- L'opposition entre `water` et `super_plast` sur Dim 1 indique qu'un **terme d'interaction** entre ces deux variables pourrait être testé dans le modèle linéaire.
- `fine_aggr` et `fly_ash` étant bien projetées sur Dim 2, leurs interactions avec `cement` pourraient être pertinentes pour examiner leurs effets combinés sur la compacité et la résistance.
- `age` étant bien représentée sur Dim 4, une interaction avec `Cement` pourrait être étudiée pour voir comment l'évolution du béton avec le temps est

influencée par le ciment.

- `y_concrete_compressive` étant principalement projeté sur Dim 2, un modèle linéaire devrait inclure **cement**, **blast_furnace**, **fly_ash**, **fine_aggr** comme facteurs explicatifs car d'après nos analyses, ce sont les variables susceptibles d'influer sur la résistance à la compression.
- L'opposition entre **coarse** et **super_blast** sur Dim 2 suggère qu'un effet combiné de ces deux variables pourrait influencer la résistance mécanique.

7 Modélisation Linéaire

Table 1: Tableau des résultats de la régression linéaire

Coefficient	Estimate	Std_Error	t_value	Pr
(Intercept)	-23.163756	26.588421	-0.871	0.383851
cement	0.119785	0.008489	14.110	< 2e-16
blast_furnace	0.103847	0.010136	10.245	< 2e-16
fly_ash	0.087943	0.012585	6.988	5.03e-12
water	-0.150298	0.040179	-3.741	0.000194
super_plast	0.290687	0.093460	3.110	0.001921
coarse	0.018030	0.009394	1.919	0.055227
fine_aggr	0.020154	0.010703	1.883	0.059968
age	0.114226	0.005427	21.046	< 2e-16

Interprétation des p-values

Les résultats de la régression montrent que :

- **Intercept** : La p-value est de **0.38**, ce qui est **supérieur à 0.05**. Nous retenons donc l'**hypothèse H0**, selon laquelle cette valeur n'est **pas significative**.
- **Variables significatives ($p < 0.05$)** : **cement**, **blast_furnace**, **fly_ash**, **water**, **super_plast** et **age**. Nous acceptons l'**hypothèse H1**, qui indique que ces variables ont un **effet significatif** sur la résistance du béton.
- **Variables non significatives au seuil de 5 %** : **coarse** et **fine_aggr**. Toutefois, elles deviennent **significatives pour un seuil de 10 %**.

Ces résultats suggèrent que certaines variables ont un impact plus marqué sur la **résistance à la compression du béton**, tandis que d'autres jouent un rôle moins déterminant.

Au regard de ces variables significatives, nous avons constaté des effets divers sur la

variable réponse. Pour la variable **Cement**(ciment), on remarque un effet positif sur la variable réponse qui n'est rien d'autre que la résistance à la compression. La valeur de cette relation est de l'ordre de 0.119785, cela signifie que si le ciment augmente d'une unité alors la résistance à la compression augmente moins proportionnellement que l'augmentation du ciment (0.12 unité). Ensuite, pour la variable **blast_furnace** (laitier de haut fourneau), la relation est positive. Cela signifie qu'une hausse de la variable en question d'une unité entraîne une augmentation de 0.12 unité de la variable cible. Puis, on s'intéresse à la variable **fly_ash** (cendres volantes) qui est positivement corrélée avec la variable endogène (0.087943). Cela pourrait être traduit comme étant une augmentation moins proportionnelle de la résistance comparé aux cendres volantes. De plus, nous remarquons une relation négative entre la variable **water** et la résistance à la compression. Cette relation est de l'ordre de -0.15 c'est-à-dire que l'augmentation de l'eau d'une unité entraîne une baisse de la résistance de 0.15. ce qui rejoint notre conclusion de l'analyse multivariée. Par ailleurs, la relation de notre variable cible avec la variable **super_plast** est de 0.29, qui est la relation la plus importante dans notre modèle. Cette relation est positive, ce qui signifie que l'additif chimique est très important pour augmenter la résistance de notre béton. Cela confirme nos propos suite à l'analyse multivariée. Enfin, on s'aperçoit que la variable **age** est positivement corrélée avec la variable réponse, ce qui confirme les résultats des revues qui stipulent qu'avec la résistance augmente avec le temps.

Test de Durbin-Watson

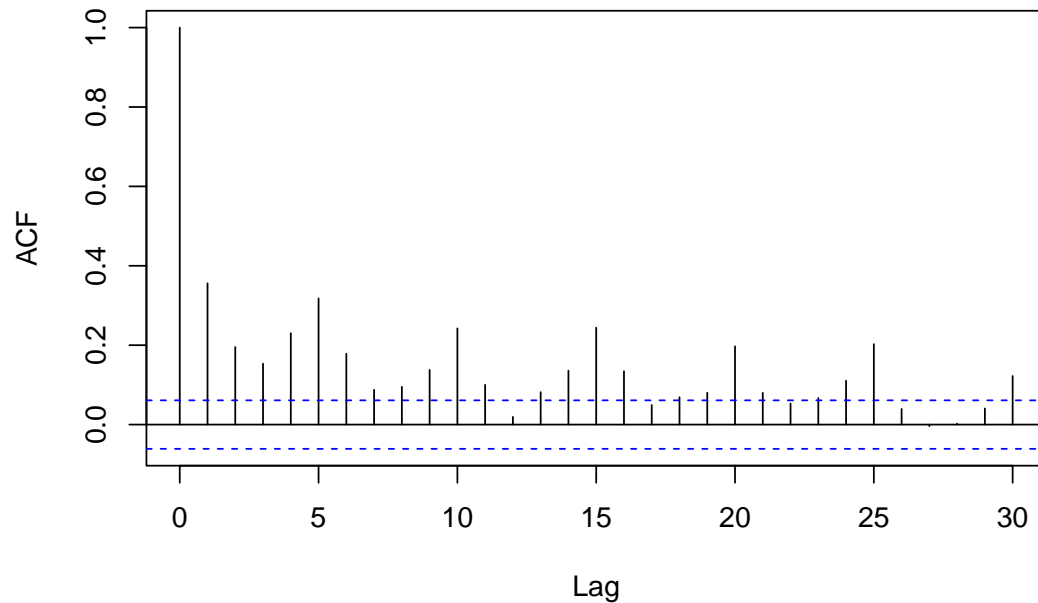
Table 2: Durbin-Watson Test Results

Description	Valeur
DW	1.2815
p-value	< 2.2e-16
Alternative hypothesis	true autocorrelation is not 0

- **Durbin-Watson statistic (DW) : 1.2815**
- **p-value : < 2.2e-16**
- **Hypothèse alternative : L'autocorrélation des erreurs est différente de 0.**

La p-value étant inférieure à 0.05, nous rejetons l'**hypothèse H0** et acceptons l'**hypothèse H1**, ce qui signifie que **les erreurs sont fortement corrélées**.

Autocorrélation des erreurs



On remarque que plusieurs barres sortent de l'intervalle de confiance, ce qui vient soutenir la conclusion du test de Durbin-Watson selon laquelle les erreurs sont **autocorrélées**.

Test de Breusch-Pagan

Table 3: Breusch-Pagan Test Results

Description	Valeur
Breusch-Pagan statistic (BP)	140.25
Degrés de liberté (df)	8
p-value	$< 2.2e-16$

- Breusch-Pagan statistic (BP) : 140.25
- Degrés de liberté (df) : 8
- p-value : $< 2.2e-16$

D'après les résultats du **test de Breusch-Pagan**, nous acceptons l'hypothèse **H1**,

ce qui signifie que **l'erreur est hétéroscédastique**. Cela indique qu'il existe une **dépendance** entre la variance des erreurs et les **variables explicatives**.

Test de Normalité de Shapiro-Wilk

Table 4: Shapiro-Wilk Normality Test Results

Description	Valeur
Shapiro-Wilk statistic (W)	0.99532
p-value	0.002986

- **Shapiro-Wilk statistic (W) : 0.99532**
- **p-value : 0.002986**

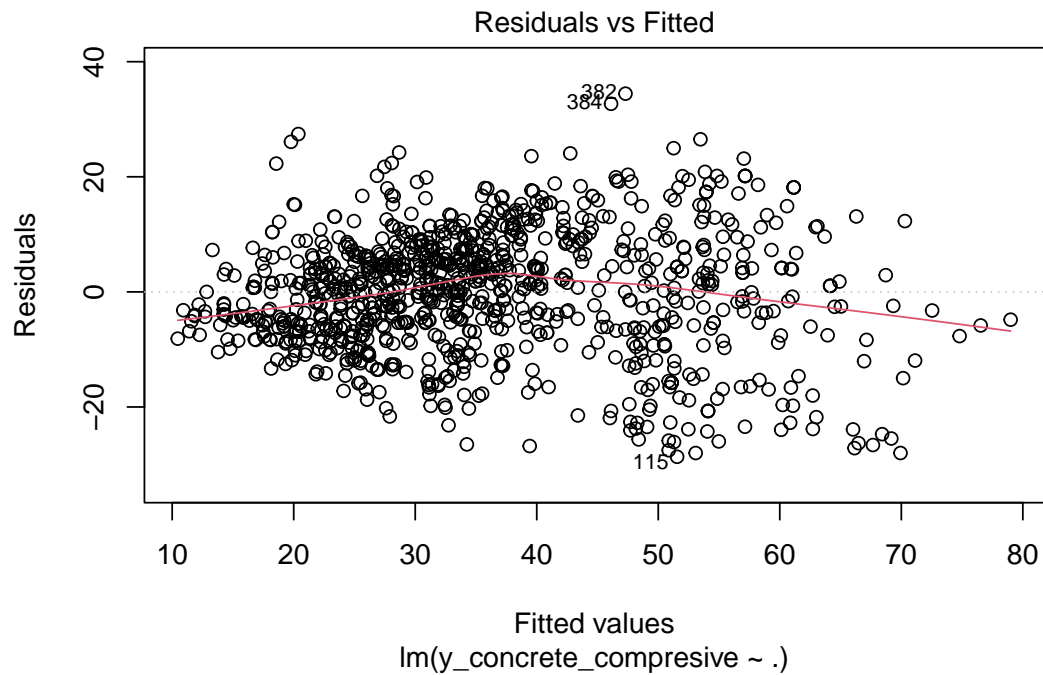
D'après les résultats du **test de Shapiro-Wilk**, la p-value est **inférieure au seuil de 5 %**.

Nous rejetons donc l'**hypothèse nulle (H0)** de normalité des erreurs.

Par conséquent, **les erreurs ne suivent pas une distribution normale**.

Table 5: A tibble: 6 x 6

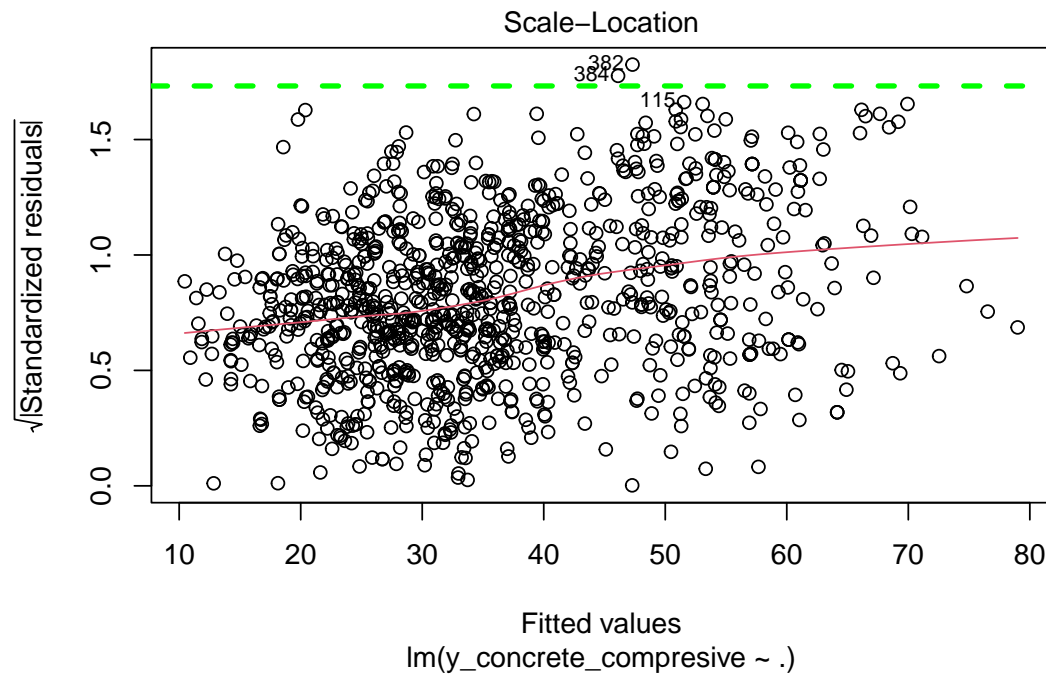
.fitted	.resid	.hat	.sigma	.cooks	.std.resid
53.5	26.50	0.01370	10.4	0.010200	2.570
53.7	8.14	0.01290	10.4	0.000902	0.788
56.8	-16.50	0.01700	10.4	0.004950	-1.600
67.7	-26.60	0.02870	10.4	0.022100	-2.600
60.9	-16.60	0.03060	10.4	0.009230	-1.620
26.9	20.20	0.00694	10.4	0.002940	1.950



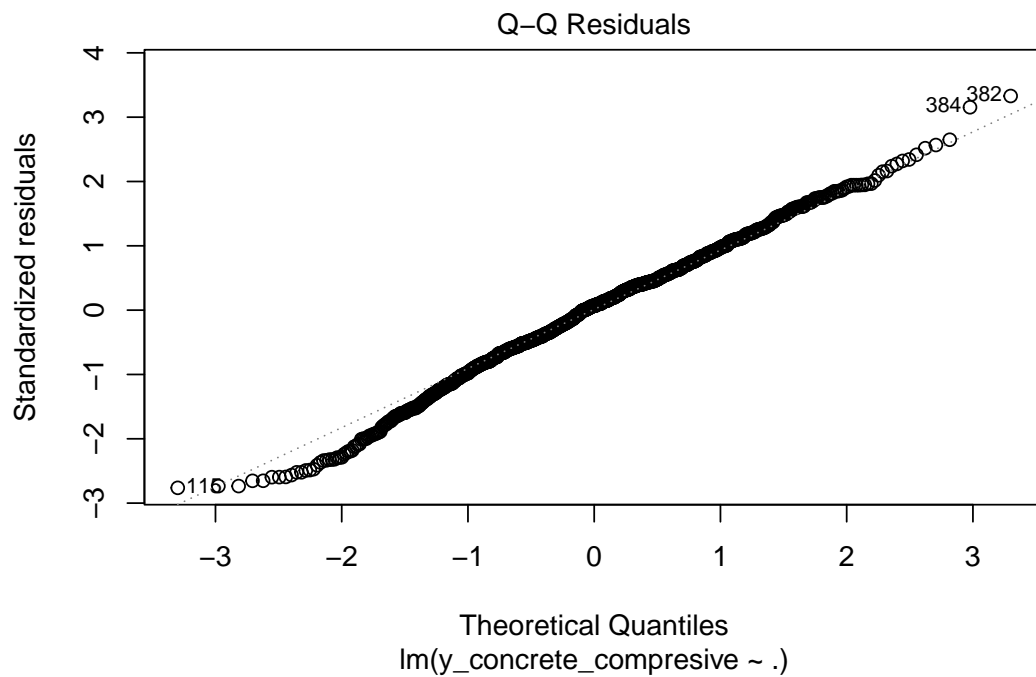
D'après ce plot, il **n'existe aucune linéarité** entre la variable réponse et les variables explicatives.

La **courbe rouge n'est pas horizontale**, ce qui indique que la relation **n'est pas linéaire**.

Les observations **382, 384 et 115** sont les **bétons présentant les plus grandes valeurs en termes de résidus**.

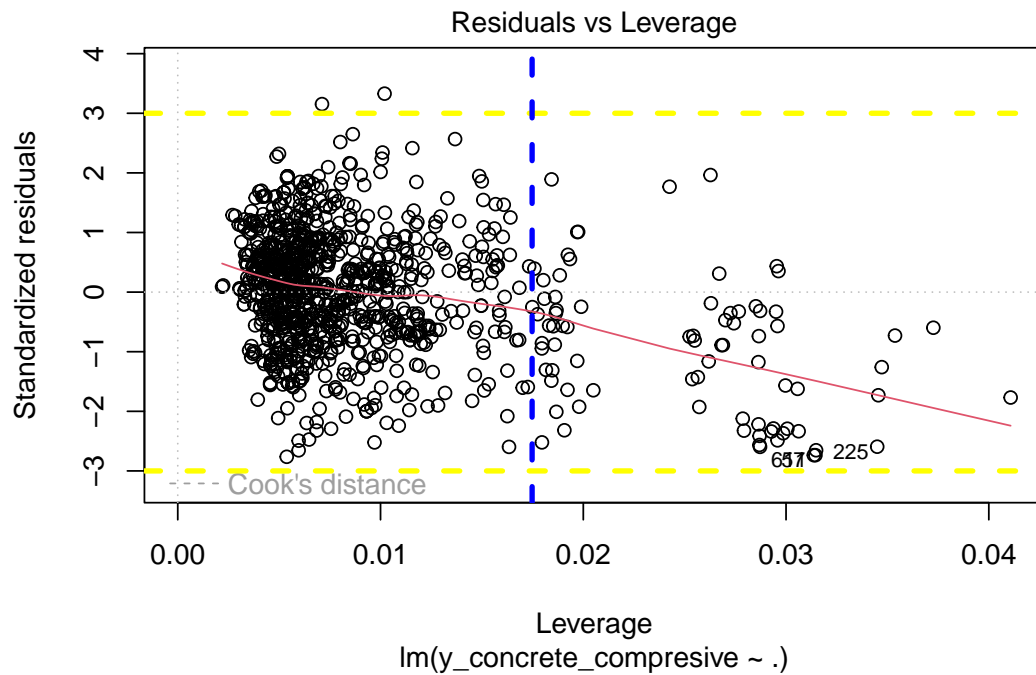


Dans notre cas, la **courbe rouge n'est pas horizontale** et ne sépare pas les points de manière homogène de part et d'autre. Cela indique que **les erreurs ne sont pas homogènes**, ce qui confirme la conclusion du **test de Breusch-Pagan**.



Ce plot de l'**hypothèse de normalité** montre que plusieurs points **ne suivent pas la ligne**, bien qu'ils en soient proches.

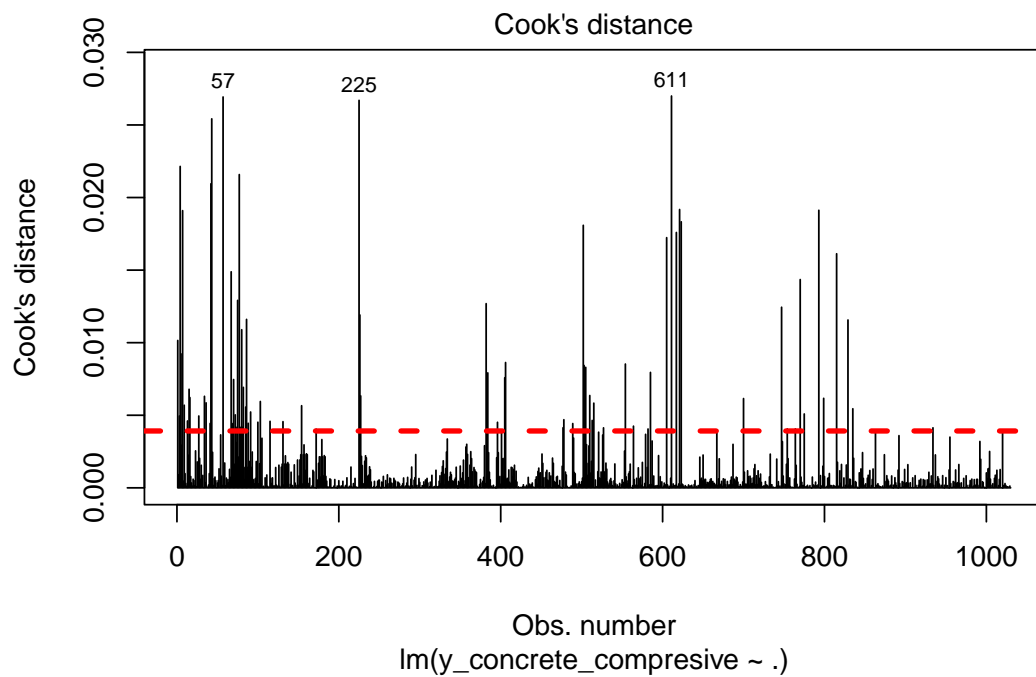
Cela confirme les résultats du **test de normalité de Shapiro-Wilk**, indiquant que les erreurs **ne suivent pas une distribution normale**.



Tous les points situés à droite de la droite verticale bleue sont des **points leviers extrêmes**,
c'est-à-dire des **valeurs extrêmes** des variables explicatives.

De plus, tous les points en dehors de l'intervalle formé par les pointillés **jaunes** sont des **outliers**,
c'est-à-dire des **valeurs extrêmes** de la variable cible.

Dans notre cas, nous avons **deux outliers** et **plusieurs points leviers extrêmes**.



Suite à l'observation des résultats donnés par le graphique, on remarque que **plusieurs points dépassent la ligne** formée par les **pointillés rouges**, qui représente le seuil à partir duquel un point est **considéré comme influent**.

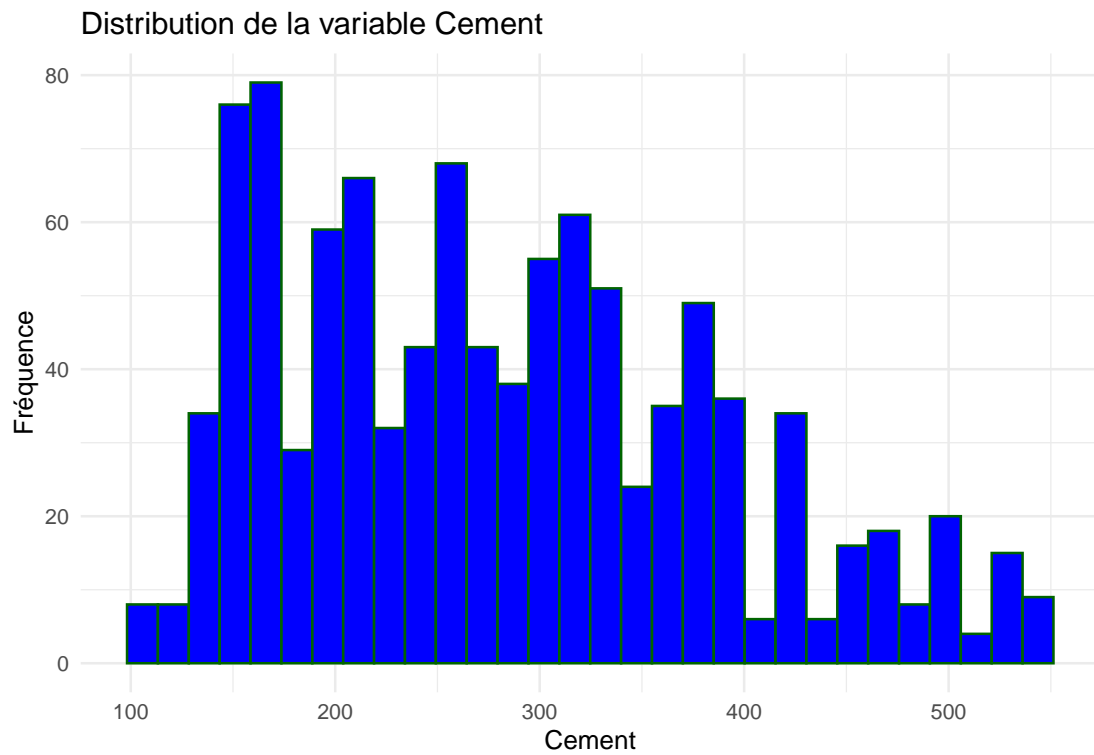
Les **bétons 57, 225 et 611** sont les **plus influents**.

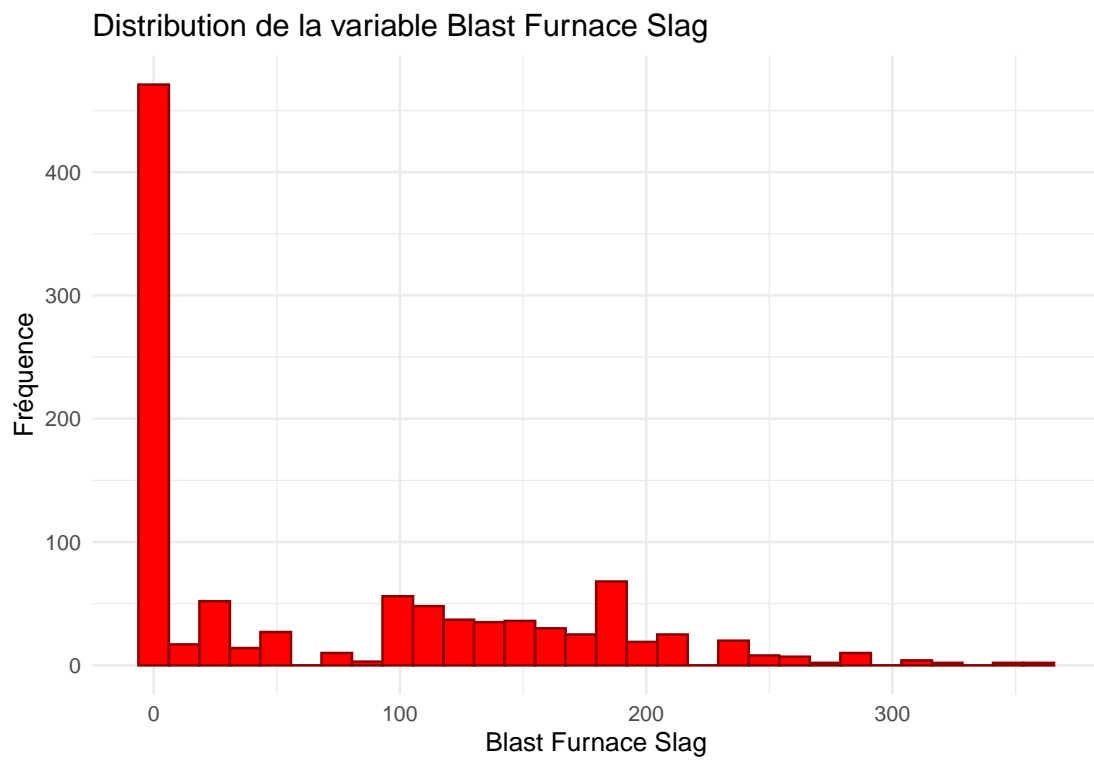
8 Conclusion

9 Annexe

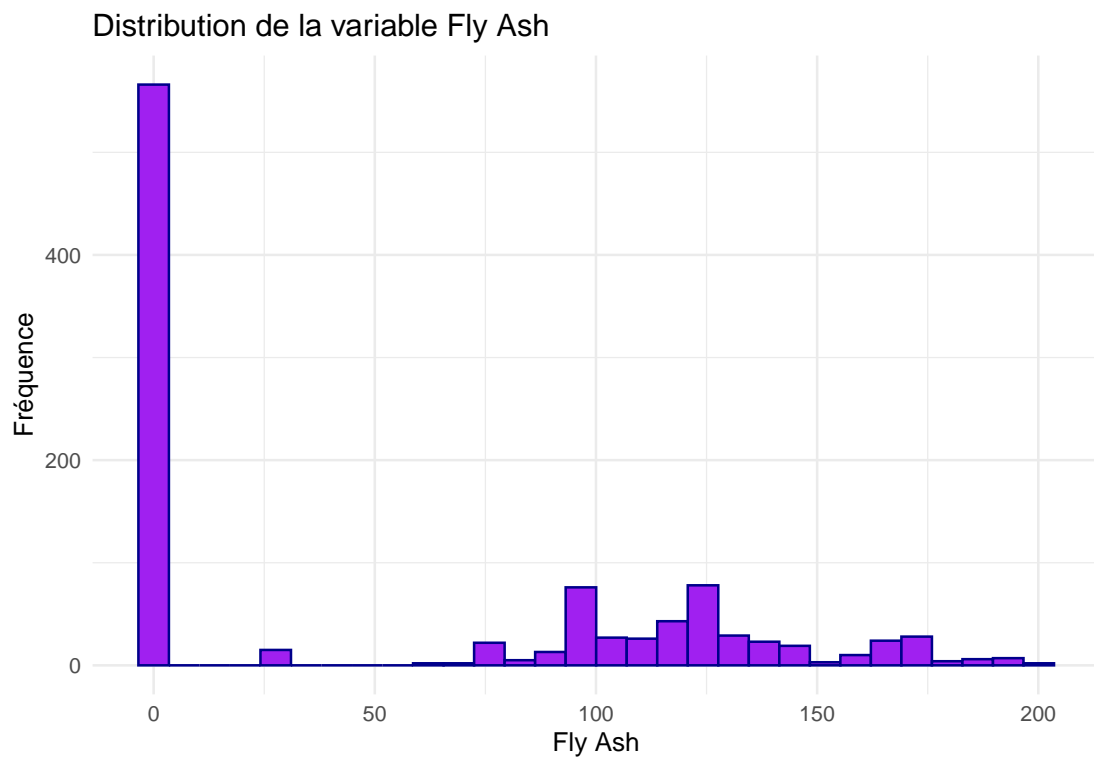
9.1 Analyse univariée

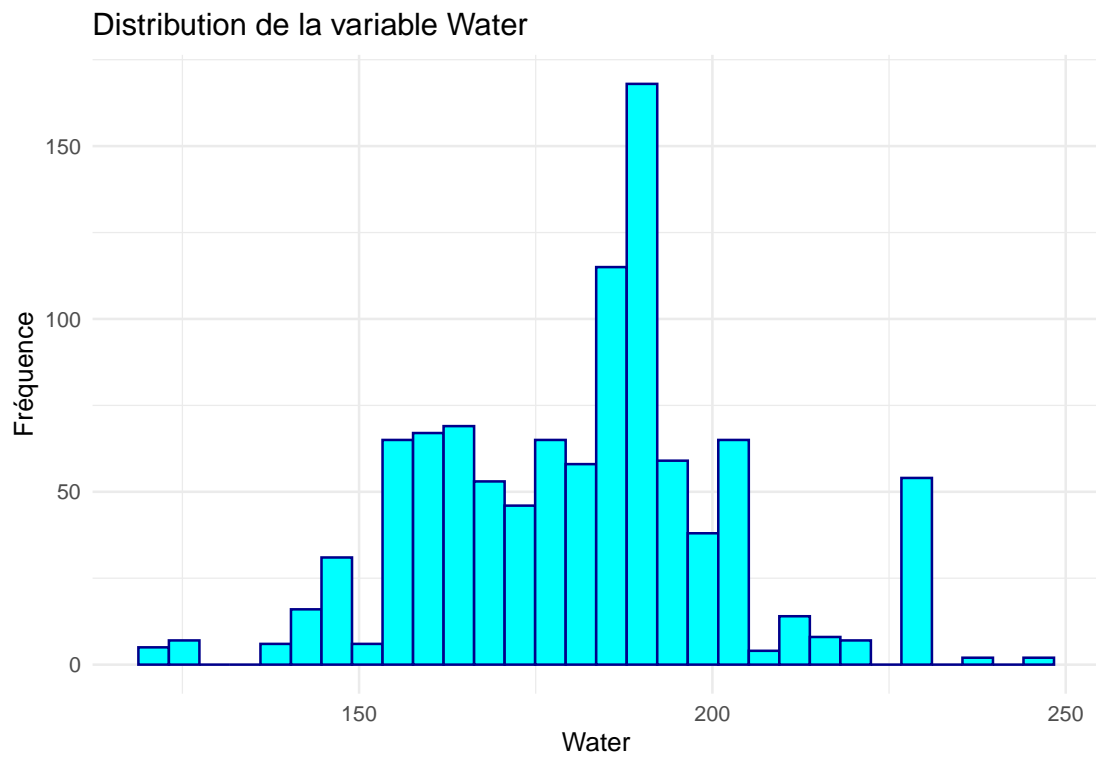
9.1.1 Fig 1 : Histogramme pour la variable Cement

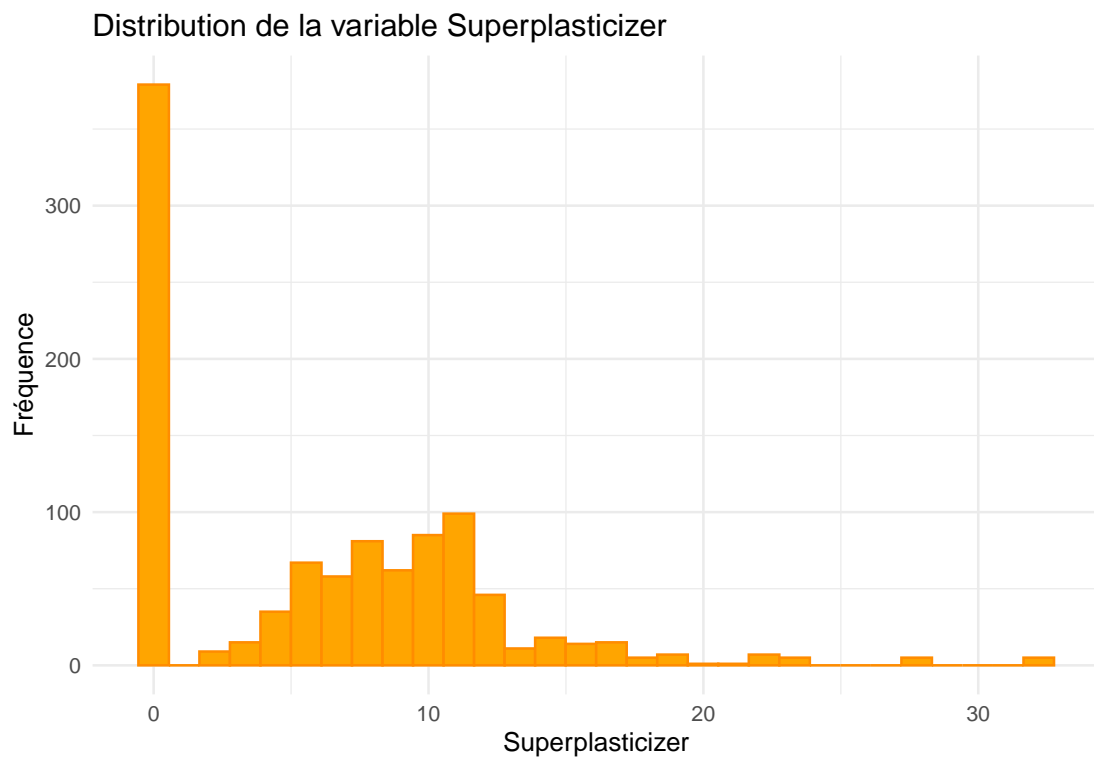


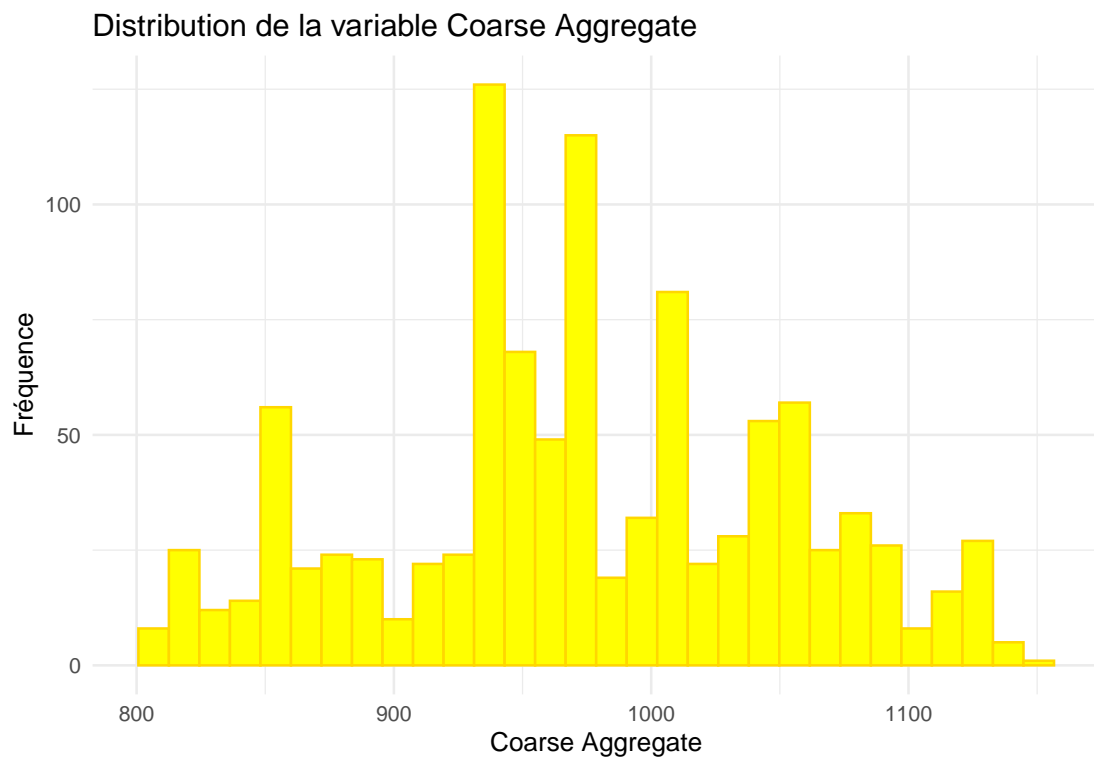
9.1.2 Fig 2 : Histogramme pour la variable Blast Furnace Slag

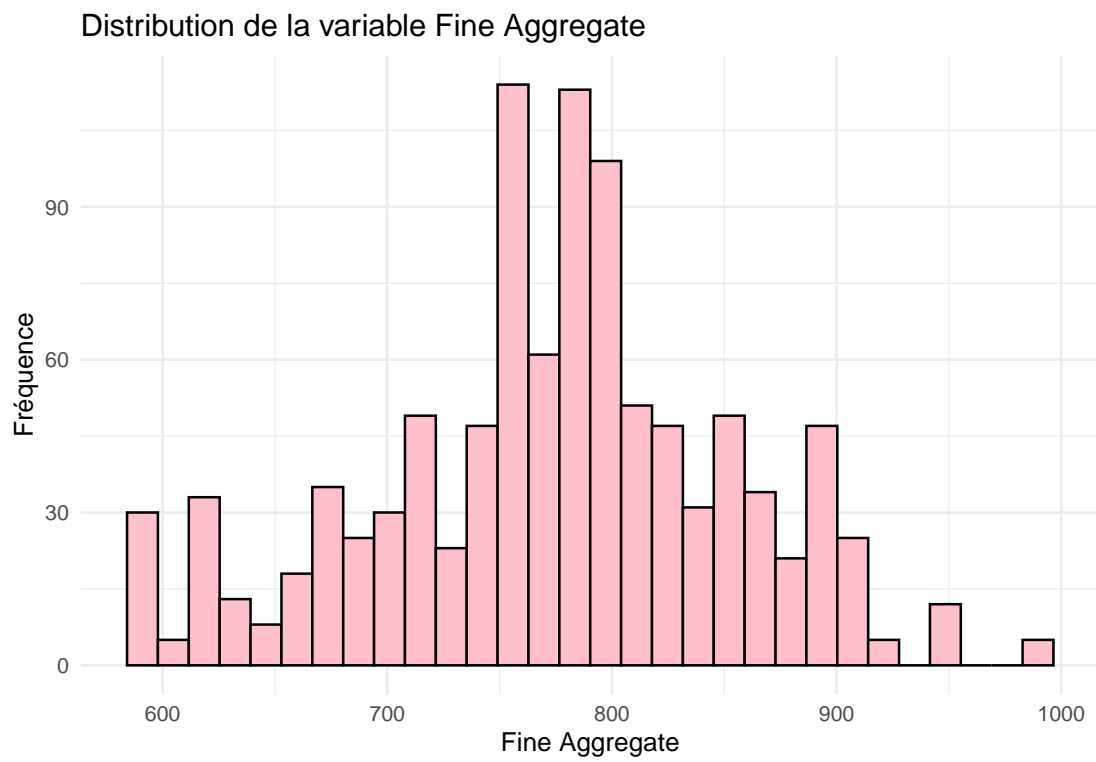
9.1.3 Fig 3 :Histogramme pour la variable Fly Ash

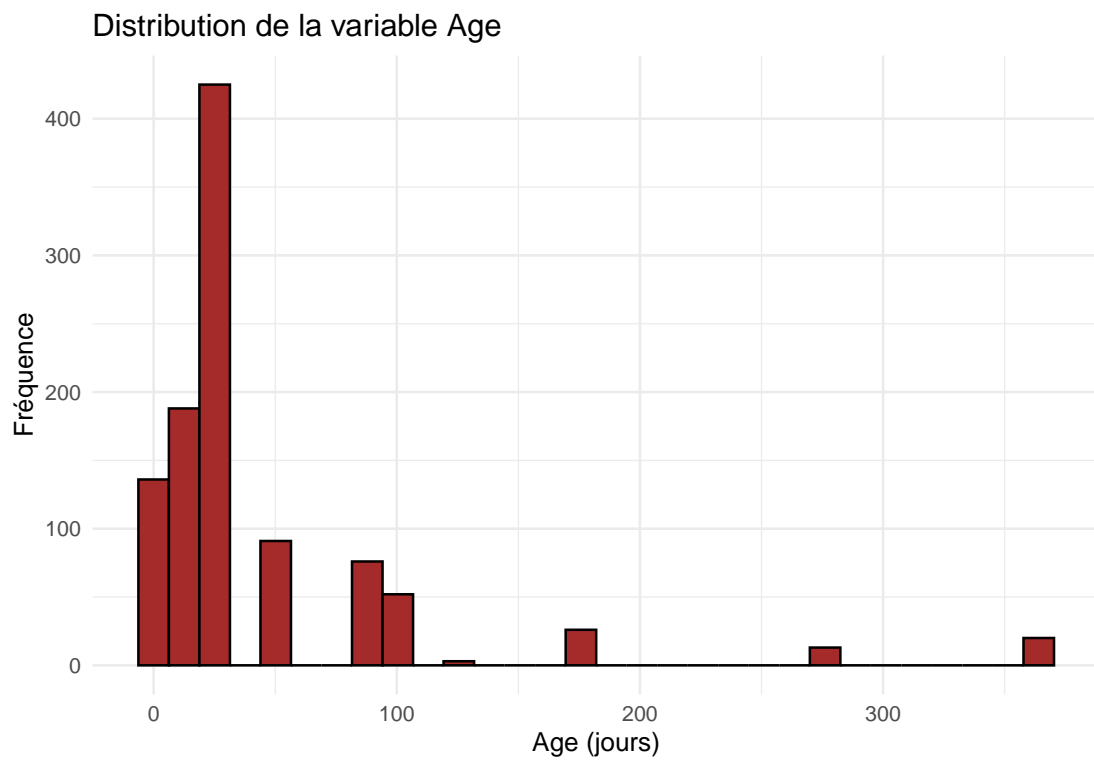


9.1.4 Fig 4: Histogramme pour la variable Water

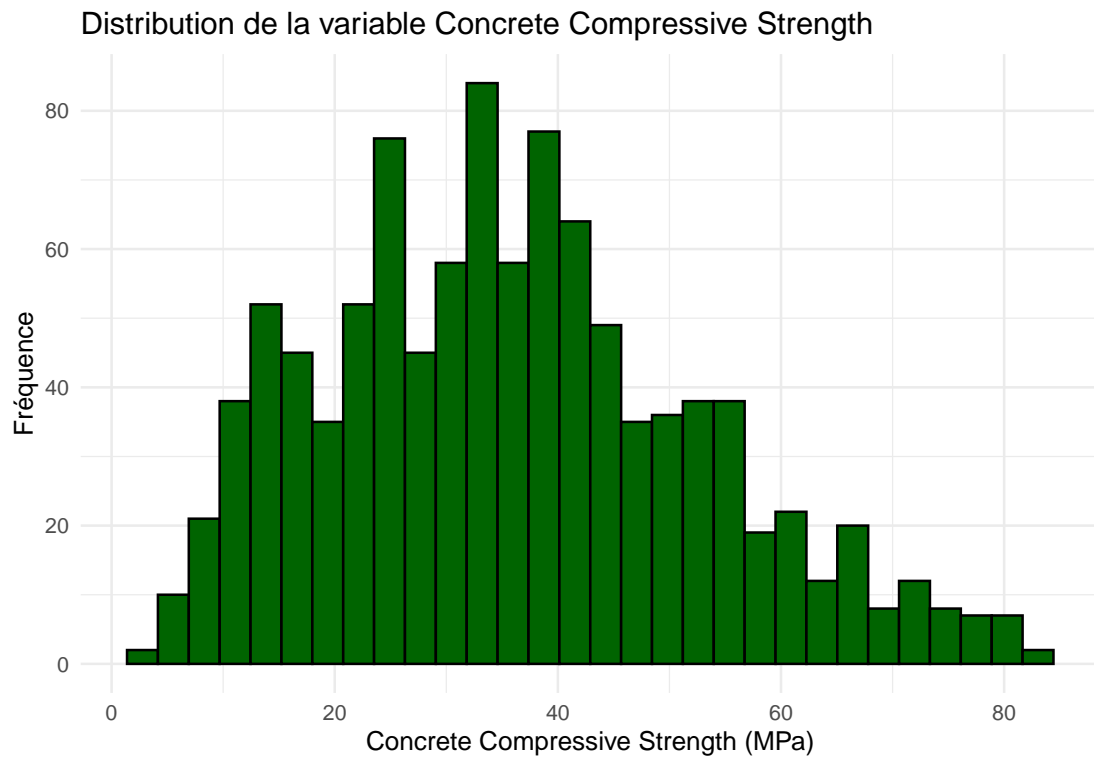
9.1.5 Fig 5 : Histogramme pour la variable Superplasticizer

9.1.6 Fig 6 : Histogramme pour la variable Coarse Aggregate

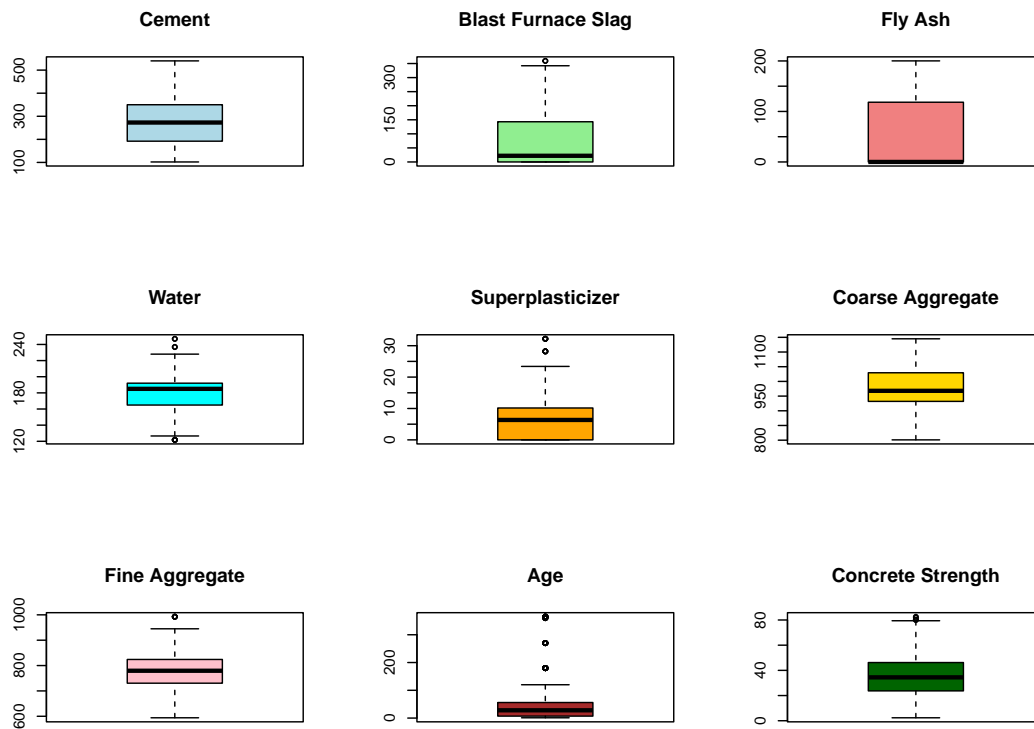
9.1.7 Fig 7 : Histogramme pour la variable Fine Aggregate

9.1.8 Fig 8 : Histogramme pour la variable Age

9.1.9 Fig 9 : Histogramme pour la variable Concrete Compressive Strength



9.1.10 Fig 10 : Détection des valeurs aberrantes (Boxplots)



9.2 Analyse bivariee

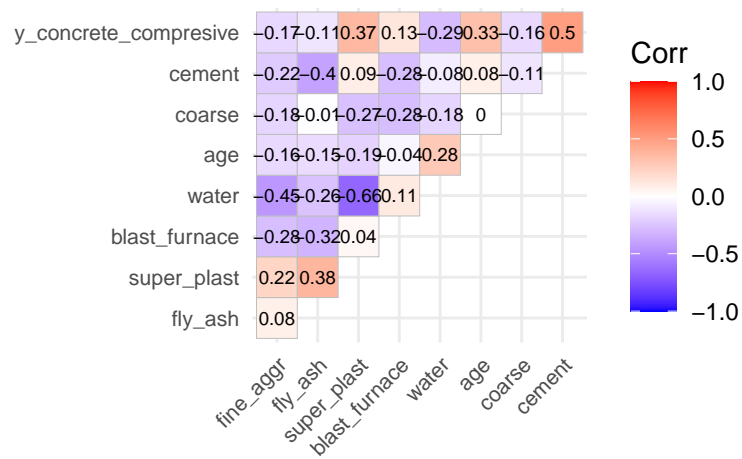
9.2.1 Fig 11 :Matrice de corrélation

```
##          cement blast_furnace  fly_ash  water
## cement      1.00000000 -0.27519344 -0.397475440 -0.08154361
## blast_furnace -0.27519344  1.00000000 -0.323569468  0.10728594
## fly_ash      -0.39747544 -0.32356947  1.000000000 -0.25704400
## water        -0.08154361  0.10728594 -0.257043997  1.00000000
## super_plast   0.09277137  0.04337574  0.377339559 -0.65746444
## coarse       -0.10935604 -0.28399823 -0.009976788 -0.18231167
## fine_aggr    -0.22272017 -0.28159326  0.079076351 -0.45063498
## age          0.08194726 -0.04424580 -0.154370165  0.27760443
## y_concrete_compresive 0.49783272  0.13482445 -0.105753348 -0.28961348
##
##          super_plast  coarse  fine_aggr  age
## cement      0.09277137 -0.109356039 -0.22272017  0.081947264
## blast_furnace 0.04337574 -0.283998230 -0.28159326 -0.044245801
```

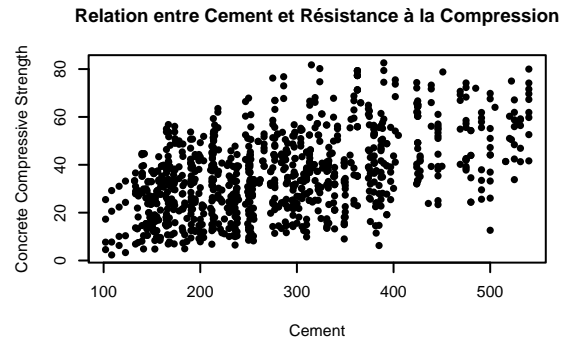
```

## fly_ash          0.37733956 -0.009976788  0.07907635 -0.154370165
## water           -0.65746444 -0.182311668 -0.45063498  0.277604429
## super_plast     1.00000000 -0.266302755  0.22250149 -0.192716518
## coarse          -0.26630276  1.000000000 -0.17850575 -0.003015507
## fine_aggr       0.22250149 -0.178505755  1.00000000 -0.156094049
## age             -0.19271652 -0.003015507 -0.15609405  1.000000000
## y_concrete_compresive 0.36610230 -0.164927821 -0.16724896  0.328876976
##
##                y_concrete_compresive
## cement                0.4978327
## blast_furnace         0.1348244
## fly_ash               -0.1057533
## water                -0.2896135
## super_plast           0.3661023
## coarse               -0.1649278
## fine_aggr            -0.1672490
## age                  0.3288770
## y_concrete_compresive 1.0000000

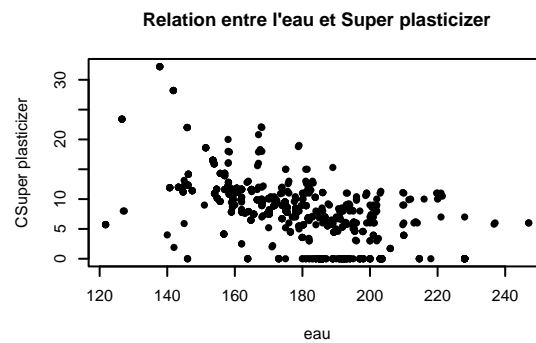
```



9.2.2 Fig 12 : Nuage des points entre le ciment et la resistance à la compression



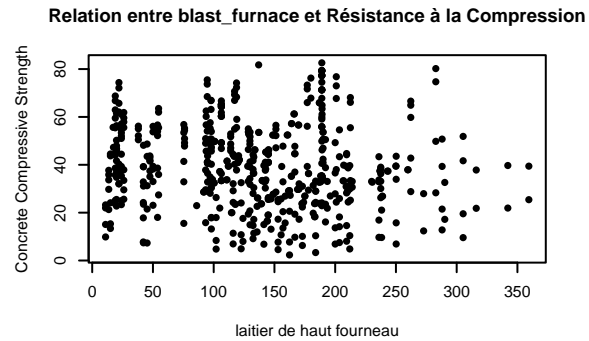
9.2.3 Fig 13 : Relation entre l'eau et Super plasticizer



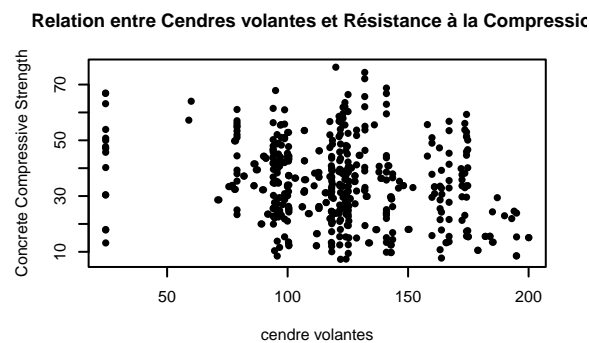
9.2.4 Fig 14 : Relation entre l'age et la resistance



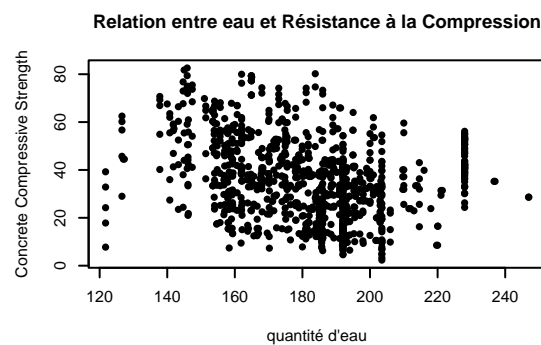
9.2.5 Fig 15 : Relation entre laitier haut fourneau et Résistance à la Compression



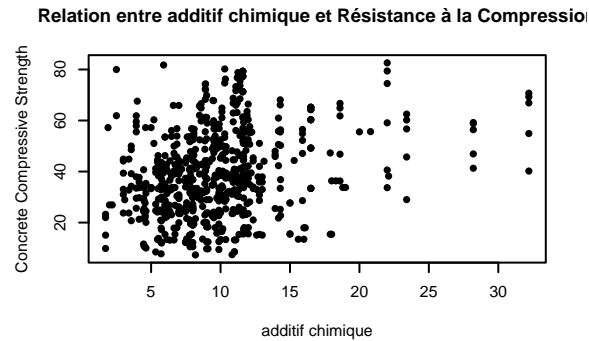
9.2.6 Fig 16 : Relation entre Cendres volantes et Résistance à la Compression



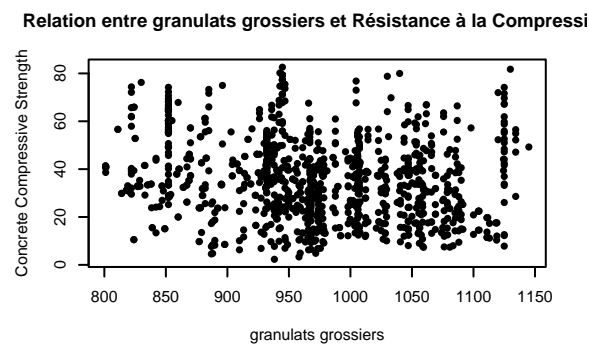
9.2.7 Fig 17 : Relation entre eau et Résistance à la Compression



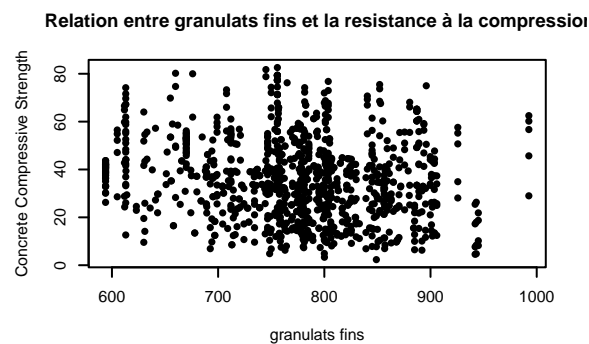
9.2.8 Fig 18 : Relation entre additif chimique et Résistance à la Compression



9.2.9 Fig 19 : Relation entre granulats grossiers et Résistance à la Compression



9.2.10 Fig 20 : Relation entre granulats fins et la resistance à la compression



test corrélation entre variable à expliquer et cement

```
cor.test(bdd$cement, bdd$y_concrete_compressive, method = "pearson")
```

```
##
## Pearson's product-moment correlation
##
## data: bdd$cement and bdd$y_concrete_compressive
## t = 18.405, df = 1028, p-value < 2.2e-16
## alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
## 0.4504473 0.5424213
## sample estimates:
## cor
## 0.4978327
```

#test de pearson car ont une distribution pseudo-normale

test de corrélation entre variable water et SuperPlasticizer

```
cor.test(bdd$water, bdd$super_plast, method = "kendall")
```

```
##
## Kendall's rank correlation tau
##
## data: bdd$water and bdd$super_plast
## z = -23.914, p-value < 2.2e-16
## alternative hypothesis: true tau is not equal to 0
## sample estimates:
## tau
## -0.528651
```

#test de Kendall car n'ont pas de distribution pseudo- normale

test de corrélation entre variable water et y

```
cor.test(bdd$age, bdd$y_concrete_compressive, method = "kendall")
```

```
##
## Kendall's rank correlation tau
##
## data: bdd$age and bdd$y_concrete_compressive
## z = 19.826, p-value < 2.2e-16
## alternative hypothesis: true tau is not equal to 0
```

```
## sample estimates:
```

```
##      tau
```

```
## 0.4490164
```

```
#test de Kendall car n'ont pas de distribution pseudo- normale
```

9.3 Analyse multivariée

9.3.1 Contribution des variables

```
# Tableau des contributions des variables
```

```
par(cex = 0.65)
```

```
contrib_var <- as.data.frame(res_pca$var$contrib)
```

```
print(contrib_var)
```

##	Dim.1	Dim.2	Dim.3	Dim.4	Dim.5
## cement	1.8570924	21.8162521	19.4630539	17.0024498	0.3034758
## blast_furnace	1.3854568	10.6144114	38.1264598	0.8844007	4.7645646
## fly_ash	7.2754889	20.3973975	1.3084478	9.8815857	4.0570219
## water	28.2000179	2.1202816	1.4847945	2.0723167	4.4435413
## super_plast	30.7756668	0.2472336	6.2022982	0.9015953	8.4701606
## coarse	0.8939835	3.4632950	32.5054492	12.5162699	10.6005496
## fine_aggr	4.8648268	13.0123250	0.2499000	13.1394718	39.0454823
## age	5.5749786	4.1403732	0.4309223	40.7207759	28.1887145
## y_concrete_compressive	19.1724883	24.1884306	0.2286743	2.8811343	0.1264894

9.3.2 Tableau des \cos^2 des variables sur

```
# Tableau des cos2 des variables
```

```
par(cex = 0.65)
```

```
cos2_var <- as.data.frame(res_pca$var$cos2)
```

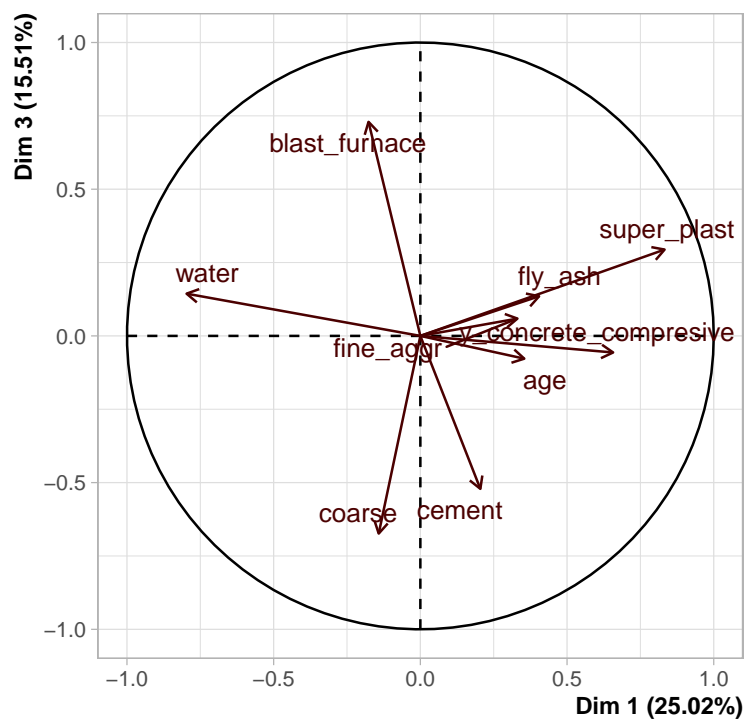
```
print(cos2_var)
```

##	Dim.1	Dim.2	Dim.3	Dim.4	Dim.5
## cement	0.04181872	0.405352873	0.271676732	0.19539670	0.003132659
## blast_furnace	0.03119825	0.197219125	0.532191509	0.01016377	0.049182696
## fly_ash	0.16383224	0.378990105	0.018264082	0.11356182	0.041879015
## water	0.63501880	0.039395503	0.020725633	0.02381562	0.045868900
## super_plast	0.69301824	0.004593679	0.086575320	0.01036137	0.087434082
## coarse	0.02013106	0.064349119	0.453730143	0.14384032	0.109425235
## fine_aggr	0.10954803	0.241773118	0.003488251	0.15100232	0.403050903

```
## age 0.12553950 0.076929445 0.006015067 0.46797404 0.290980829
## y_concrete_compressive 0.43173343 0.449428700 0.003191970 0.03311077 0.001305699
```

9.3.3 Fig 21 : PCA sur la dimension 1-3

```
plot.PCA(
  res_pca,
  axes = c(1, 3),
  choix = "var",
  col.var = "#4B0000",
  col.quant.sup = "#0000FF",
  label = "all",
  title = "",
  addgrid.col = "#DDB688"
)
```



9.3.4 Fig 22 : PCA sur la dimension 2-3

```

# Représentation des variables sur le plan factoriel (axes 1 et 3)
plot.PCA(
  res_pca,
  axes = c(2, 3),
  choix = "var",
  col.var = "#4B0000",
  col.quanti.sup = "#0000FF", # Couleur pour la variable quantitative supplémentaire
  label = "all",
  title = "",
  addgrid.col = "#DDB688"    # Couleur de la grille
)

```

