Sistemas Dinámicos

Prof. Leonardo R. Laura-Guarachi

January 20, 2020

Contents

1

Introducción

1. Verificar por sustitución directa que la solución diferencial es el que se indica.

   a) $x'(t) = t^2 - 1, \quad x(t) = \frac{1}{3}t^3 - t + \frac{8}{3}$.

   b) $x'(t) = \frac{2x(t)}{t}, \;\; x(t) = t^2$.

   c) $x'(t) = 4x(t) - 8, \;\; x(t) = 3e^{4t} + 2$.

   d) $x'(t) = -\frac{t}{x(t)}, \;\; x(t) = \sqrt{6 - t^2}$.

2. Verificar que $x_1(t) = e^{-t}\sin(t)$ y $x_2(t) = e^{-t}\cos(t)$ son soluciones de la ecuación diferencial

$$x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = 0.$$

3. Suponga que una pequeña ciudad tiene $100,000$ habitantes. La población crece a una tasa de $4\,\%$, mientras que al mismo tiempo, $8,000$ habitantes emigran anualmente. La ecuación diferencial que modela este fenómeno es

$$p'(t) = 0{,}04p(t) - 8000,$$

donde $p(t)$ es es la población en el tiempo t. Verificar que la solución es

$$p(t) = 200,000 - 100,000e^{0,04t}.$$

¿En qué tiempo la población deja de existir?

2

Ecuaciones diferenciales lineales

2.1. Ecuaciones de primer orden

Hallar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones.

1. $x' + t^2 x = 5t^2, \quad x(0) = 6.$
2. $tx' + 2x = 3t, \quad x(0) = 0.$
3. $(2t+1)x' = 4t + 2x.$
4. $(tx + e^t)dt - tdx = 0.$
5. $x' - 3x = e^{3t} + e^{-3t}.$
6. $(t \ln t)x' + x = 2 \ln t, \quad x(e) = 0.$

2.2. Ecuaciones de segundo orden

Determinar la solución general.

1. $x'' - 4x' + 4x = 0.$
2. $x'' + x' + 4x = 0.$

3. $x'' - 5x' + 6x = 0$.
4. $x'' + 9x = 0$.
5. $x'' - 2x' = 0$.
6. $x'' - 3x' - 4x = 2t^2$.
7. $x'' + x = 9e^{-t}$.
8. $x'' - 4x = \cos 2t$.
9. $x'' + 7x = te^{3t}$.
10. $x'' - x' = 6 + e^{2t}$.

2.3. Ecuaciones de Bernoulli

Resolver las siguientes ecuaciones.

1. $x' + 2x = x^2 e^t$.
2. $(t+1)(x' + x^2) = -x$.
3. $tx' + 2x + t^5 x^3 e^t = 0$.
4. $xy' + y = y^2 \ln x$.
5. $dt + (t + x^2)dx = 0$.
6. $(tx + t^2 x^3)x' = 1$.

3

Ecuaciones diferenciales no lineales

3.1. Ecuaciones separables

1. Resolver las ecuaciones de variable separable.

   a) $x' = \frac{t^2}{x}$.

   b) $x' = \frac{t^2}{x(1+t^2)}$.

   c) $txdx = \sqrt{x^2+1}dt$.

   d) $x' = (x-1)(t+1)$.

   e) $e^t dt - (1+e^t)xdx = 0, \quad x(0) = 1$

2. Muestre que al resolver la ecuación $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{1+x^2}$ separando variables se obtiene la ecuación implícita

$$\ln|x| + \frac{x^2}{2} = t + c.$$

   No hay manera de despejar x. Ademas, $x = 0$ es una solución que no está dada por dicha ecuación.

3.2. Ecuaciones homogéneas

Resolver las ecuaciones homogéneas.

1. $(t-x)dt+(t+x)dx=0$.
2. $x^2+t^2x'=txx'$.
3. $(t^2+x^2)x'=2tx$.
4. $(x+\sqrt{tx})dt-tdx=0$.
5. $x'=\frac{t}{x}+\frac{x}{t}, \quad x(-1)=0$.

3.3. Ecuaciones exactas

En cada caso determinar si la ecuación es exacta. En caso afirmativo, hallar su solución.

1. $(2t+3)+(2x-2)x'=0$.
2. $(x-t)dt+tdx=0$.
3. $(2tx^2+2x)+(2t^2x+2t)x'=0$.
4. $(1+x^2\sin 2t)dt-2x\cos^2 t dx$.
5. $(t\ln x+tx)dt+(x\ln t+tx)dx=0$.

4

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

4.1. Valores y vectores propios

Hallar la solución general.

1. $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 8x - y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = 5x + 2y, \\ y' = -4x - y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 4y - x. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 2y - 3x, \\ y' = y - 2x. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = -5x - y. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = x + y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = 2x - y + z, \\ y' = x + 2y - z, \\ z' = x - y + 2z. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = x + z - y, \\ y' = x + y - z, \\ z' = 2x - y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = 2x - y - z, \\ y' = 3x - 2y - 3z, \\ z' = 2z - x + y. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x' = x, \\ y' = 2y - 3z, \\ z' = x + 3y + 2z. \end{cases}$

4.2. Exponencial de matrices

Determinar la exponencial de la matriz A y la solución del sistema $x' = Ax$.

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

4.3. Sistemas no homogéneos

Hallar la solución general.

1. $\begin{cases} x' = x + y + \sin t, \\ y' = -x + y + \cos t. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = y + 2e^t, \\ y' = x + t^2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = 2x + 4y - 8, \\ y' = 3x + 6y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \\ y' = 2x - 2y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = 2x + y - 2z - t + 2, \\ y' = -x + 1, \\ z' = x + y - z - t + 1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = y - z + t, \\ y' = x - z + 1, \\ z' = 2x + 2y - 3z + t + 1. \end{cases}$

5

Análisis de estabilidad

5.1. Estabilidad de sistemas lineales

Determinar la estabilidad de origen y dibujar el diagrama fase de cada uno de los siguientes sistemas.

1. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = -2x + y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = -x + 3y, \\ y' = -x + y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = 3x, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = -2x - 5y, \\ y' = 2x + 2y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = -6x + 4y. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = -6x - 5y, \\ y' = -2x - 5y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = x - 3y + 4z, \\ y' = 4x - 7y + 8z, \\ z' = 6x - 7y + 7z. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = 2x - y + 2z, \\ y' = 5x - 3y + 3z, \\ z' = -x - 2z. \end{cases}$

9. $x'' + ax' + (a-1)x = 0.$

10. $x'' + 2(1-a)x' - 2ax = 0.$

5.2. Teorema de Hartman-Grobman

Determinar la estabilidad del punto crítico $(0,0)$ de los siguientes sistemas.

1. $\begin{cases} \dot{x} = & x - 2y + x^2y, \\ \dot{y} = & 3x - 2y + xy^2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = & x + 2y + x^2y \\ \dot{y} = & xy^2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = & -2x + 4\sin^2 y, \\ \dot{y} = & x - 3y + 3x^2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = & -x + 3y + x^3 \sin y, \\ \dot{y} = & -x - 4y + 1 - \cos y^4. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = & 4y - 3x^3, \\ \dot{y} = & -3x - 7y^2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = & -2y - 3x^4, \\ \dot{y} = & 2x - 2y^4. \end{cases}$

5.3. Función de Lyapunov

Para confirmar el tipo de estabilidad del origen en cada sistema, construir una función de Lyapunov de la forma

$$V(x,y) = ax^2 + by^2 + cx^4 + dy^4.$$

1. Asintóticamente estable

a) $\begin{cases} \dot{x} = & -x^3 + xy^2, \\ \dot{y} = & -2x^2y - y^3. \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dot{x} = & 2y^3 - x^5, \\ \dot{y} = & -x - y^3 + y^5. \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dot{x} = & -y - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^3, \\ \dot{y} = & x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y^3. \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dot{x} = & -2x - 3y, \\ \dot{y} = & x - y. \end{cases}$

2. Estable

a) $\begin{cases} \dot{x} = & -x^3 + 2y^3, \\ \dot{y} = & -2xy^2. \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dot{x} = & y + x^2y^2 - \frac{1}{4}x^5, \\ \dot{y} = & -2x - x^3y - \frac{1}{2}y^3. \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dot{x} = & xy - x^3 + y, \\ \dot{y} = & x^4 - x^2y - x^3. \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dot{x} = & -x - y - x^3 - y^2, \\ \dot{y} = & x - y + xy. \end{cases}$

3. Inestable

a) $\begin{cases} \dot{x} = & x^3 - y^3, \\ \dot{y} = & 2xy^2 + 4x^2y + 2y^2. \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dot{x} = & x + 2xy^2, \\ \dot{y} = & -2y + 4x^2y^3. \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dot{x} = & x + x^3, \\ \dot{y} = & -y - y^3. \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dot{x} = & -y + x^5, \\ \dot{y} = & x + y^5. \end{cases}$

4. Para $a \in \mathbb{R}$. Estudiar la estabilidad del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = & ax - 2y + 2x^3 \\ \dot{y} = & 2x + ay + 4x^2y + 2y^3. \end{cases}$$

Sugerencia: considerar los casos $a > 0$, $a = 0$ y $a < 0$.

6

Ecuaciones en diferencia

6.1. Sistemas lineales

1. Resolver las siguientes ecuaciones.

   a) $x_{t+1} - (t+1)x_t = 0, \quad x_0 = c.$

   b) $x_{t+1} - 3^t x_t = 0, \quad x_0 = c.$

   c) $x_{t+1} - e^{2t} x_t = 0, \quad x_0 = c.$

   d) $x_{t+1} - \frac{t}{t+1} x_t = 0, \quad x_1 = c.$

   e) $x_{t+1} - \frac{1}{2} x_t = 2, \quad x_0 = c.$

   f) $x_{t+1} - \frac{t}{t+1} x_t = 4, \quad x_1 = c.$

2. Determinar una solución particular para las siguientes ecuaciones.

   a) $x_{t+2} - 5x_{t+1} + 6x_t = 1 + t.$

   b) $x_{t+2} + 8x_{t+1} + 12x_t = e^t.$

   c) $x_{t+2} - 5x_{t+1} + 4x_t = 4^t - t^2.$

   d) $x_{t+2} + x_{t+1} - 12x_t = t2^t.$

3. Resolver el sistema $x_{t+1} = Ax_t$, para las siguientes matrices A.

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

d) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$

6.2. Estabilidad

1. Calcular la órbita de $x_0 = 0$ en cada uno de los sistemas. Clasificar la órbita como punto fijo, ciclo, tiende al infinito o ninguno de los anteriores.

    1. $x_{t+1} = x_t^2 - 2.$
    2. $x_{t+1} = \cos(x_t).$
    3. $x_{t+1} = x_t^2 + 1.$
    4. $x_{t+1} = -x_t^2 + x_t + 2.$
    5. $x_{t+1} = 4x_t(1 - x_t) + 1.$
    6. $x_{t+1} = -\frac{1}{2}x_t^2 + 1.$

2. Determinar los puntos fijos y clasificar como atractor, repelente o neutral.

    1. $f(x) = x^2 - 2x.$
    2. $f(x) = x^3 - x.$
    3. $f(x) = 3x(1 - x).$
    4. $f(x) = 1/x.$
    5. $f(x) = 1/x^2.$
    6. $f(x) = x^2 - 3.$

3. Esbozar el diagrama fase y determinar la estabilidad del sistema $x_{t+1} = Ax_t$, para las siguientes matrices A.

    1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$
    2. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$

3. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

6. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}25 & 1 \end{bmatrix}$.