



"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Licenciatura en Física

Física Computacional I

---

### Actividad 9

*"Teoría de Estabilidad de las Soluciones de las  
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias"*

---

Ismael Espinoza Arias

Profesor Carlos Lizárraga Celaya

Hermosillo, Sonora a abril 06 de 2021

# Introducción y Antecedentes

En matemáticas, la teoría de estabilidad estudia la estabilidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos, es decir, examina cómo difieren las soluciones bajo pequeñas modificaciones de las condiciones iniciales.

La estabilidad es muy importante en física y ciencias aplicadas, ya que en general en los problemas prácticos las condiciones iniciales nunca se conocen con toda precisión, y la predictibilidad requiere que pequeñas desviaciones iniciales, no generen comportamientos cualitativamente muy diferentes a corto plazo. Cuando la diferencia entre dos soluciones con valores iniciales cercanos puede acotarse mediante la diferencia de valores iniciales, se dice que la evolución temporal del sistema presenta estabilidad.

## Estabilidad de ecuaciones diferenciales

Debido a que toda ecuación diferencial puede reducirse a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden equivalente, el estudio de la estabilidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales puede reducirse al estudio de la estabilidad de los sistemas de ecuaciones diferenciales. Consideremos por ejemplo un sistema de ecuaciones autónomo no lineal dado por:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}(t)), \quad \text{siendo: } \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0) = 0$$

Donde  $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$  es el vector de estado del sistema,  $\mathcal{D}$  un conjunto abierto que contiene al origen y  $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua. Sin pérdida de generalidad, se puede asumir que el origen es un punto de equilibrio (si el punto de equilibrio fuera otro punto se puede hacer un cambio de variable y redefinir la función  $f$  para que coincida con el origen):

1. El punto origen es **estable en el sentido de Lyapunov**, si para cada  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  tal que, si  $\|\mathbf{x}(0)\| < \delta$ , entonces  $\|\mathbf{x}(t)\| < \epsilon$ , para cualquier  $t \geq 0$ .
2. El punto origen es **estable asintóticamente** si es estable en el sentido de Lyapunov y existe  $\delta > 0$  tal que si  $\|\mathbf{x}(0)\| < \delta$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0$ .
3. El punto origen es **estable exponencialmente** si es asintóticamente estable y si existen  $\alpha, \beta, \delta > 0$  tales que si  $\|\mathbf{x}(0)\| < \delta$ , entonces  $\|\mathbf{x}(t)\| \leq \alpha \|\mathbf{x}(0)\| e^{-\beta t}$ , para  $t \geq 0$ .

## Importación de bibliotecas

Empezamos importando nuestras bibliotecas, el primer paso para empezar con cualquier actividad.

```
#ESPINOZA ARIAS ISMAEL
#Date: 28/03/2021
#ACTIVIDAD 9
#COMENZAMOS CON NUESTRO CÓDIGO
#IMPORTAMOS NUESTRAS BIBLIOTECAS
import numpy as np
import scipy.linalg as la
from numpy.linalg import matrix_power as mpow
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint, solve_ivp
from mpl_toolkits import mplot3d
from scipy import integrate, linalg
import pylab as plt

%matplotlib inline
```

Donde podemos ver que las bibliotecas utilizadas, son numpy, scipy, matplotlib, pylab, ect.

## Realización de la actividad

Ahora para la actividad, vamos a definir nuestros valores, así como los vectores, matrices, eigenvectores, entre otras cosas más.

```

def Valores( M ):
    ...

    Parámetros
    -----
    M : Matriz a la que se le va sacar los diferentes valores

    Regresa
    -----
    Los Eigenvalores
    El Delta
    La Traza
    El determinante

    ...

    eigvals, eigvecs = la.eig(M)
    tr = np.trace(M)
    det = la.det(M)
    Delta = (tr)**2 - (4*det)
    print("Eigenvectores", eigvecs)
    print()
    print('Eigenvalores:', eigvals)
    print()
    print("Traza de A1:", tr)
    print()
    print("Determinante de A1:", det)
    print()
    print("Delta de A1:", Delta)
    print()

```

## Ejercicio 1

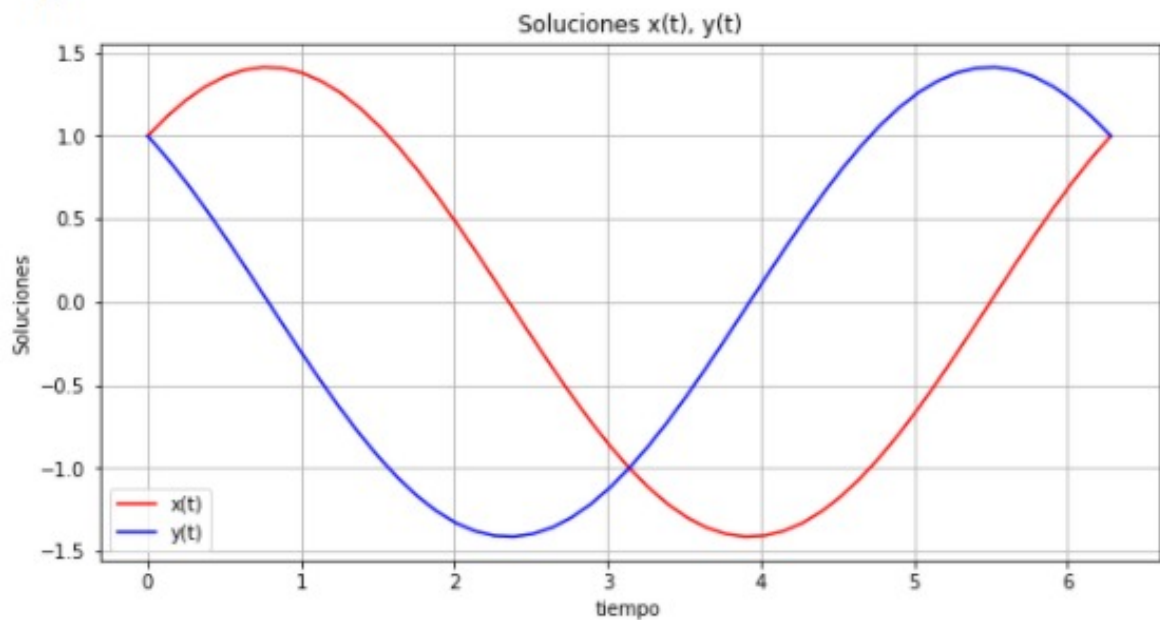
llegamos al siguiente ejercicio.

$$\frac{dx}{dt} = y \quad (1)$$

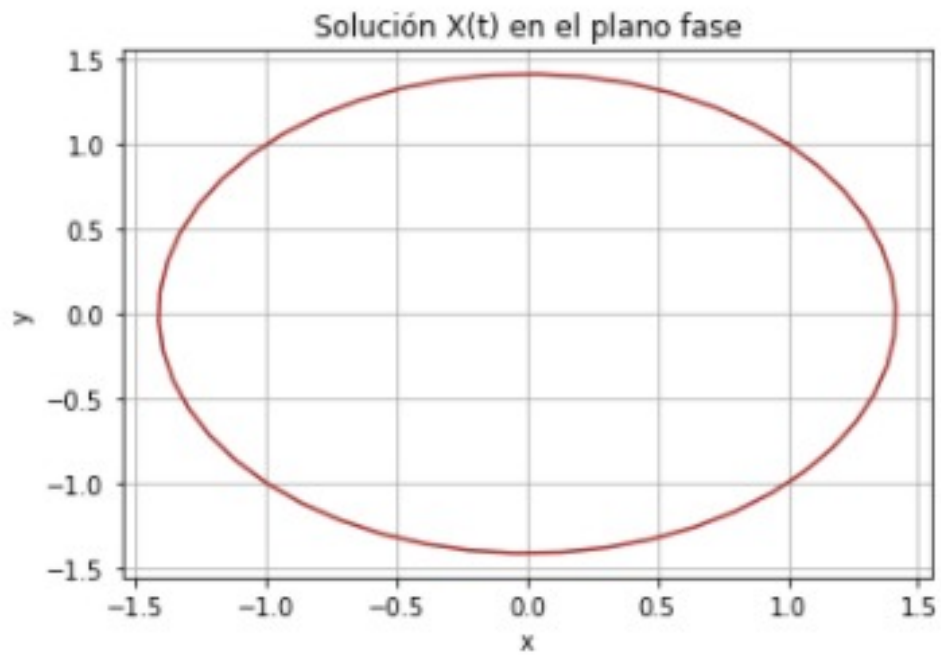
$$\frac{dy}{dt} = -x \quad (2)$$

Tenemos que la soluciones són:

<Figure size 432x288 with 0 Axes>



Solución en el estado fase:



## Ejercicio 2

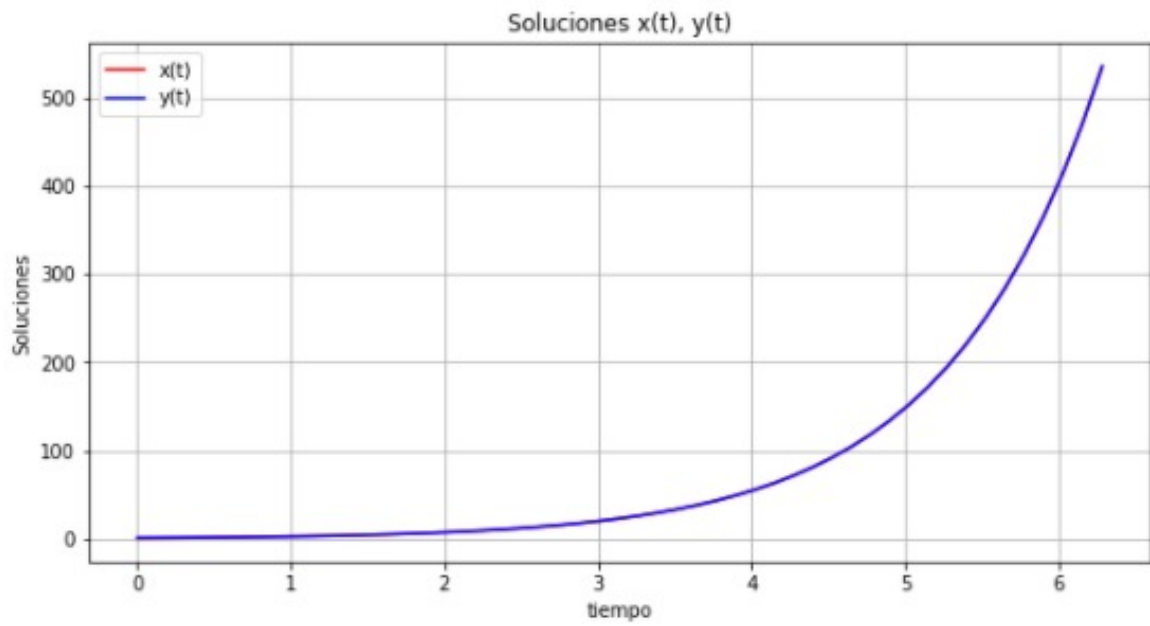
llegamos al siguiente ejercicio.

$$\frac{dx}{dt} = y \quad (1)$$

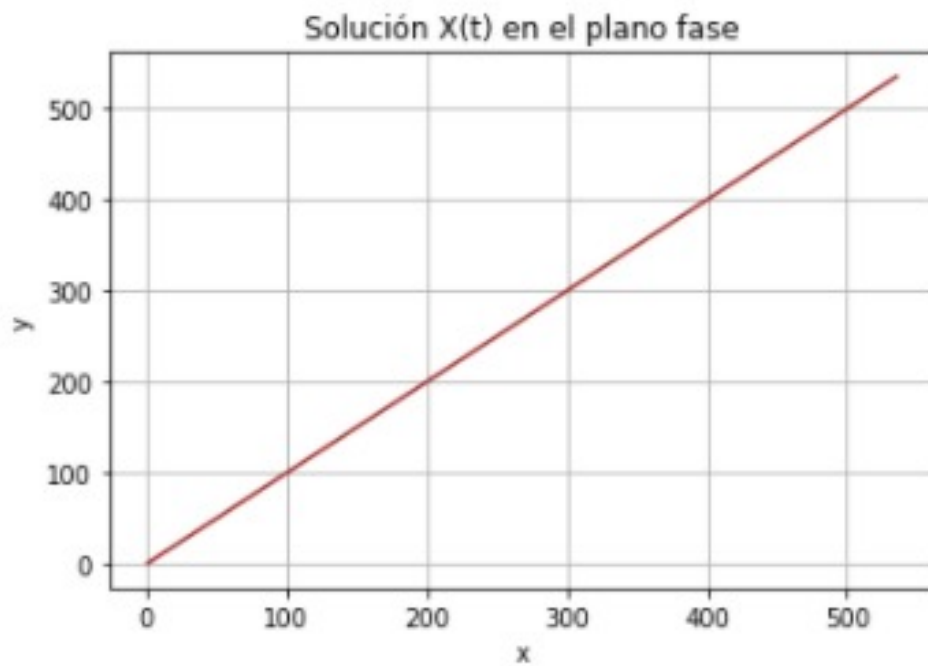
$$\frac{dy}{dt} = x \quad (2)$$

Tenemos que la soluciones són:

<Figure size 432x288 with 0 Axes>



Solución en el estado fase:



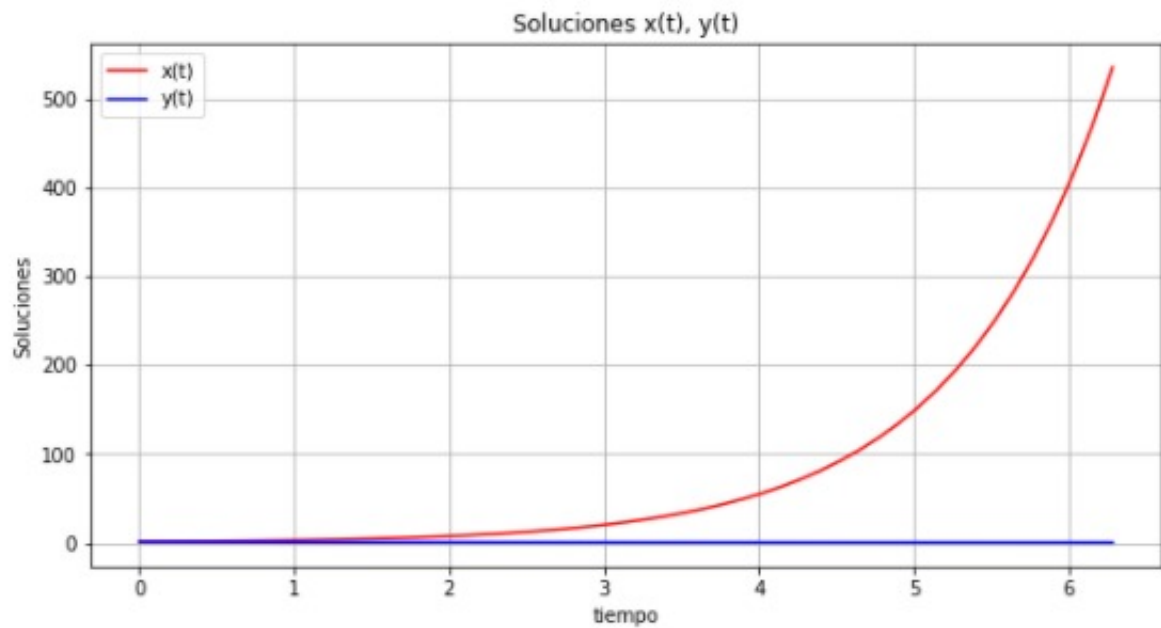
### Ejercicio 3

llegamos al siguiente ejercicio.

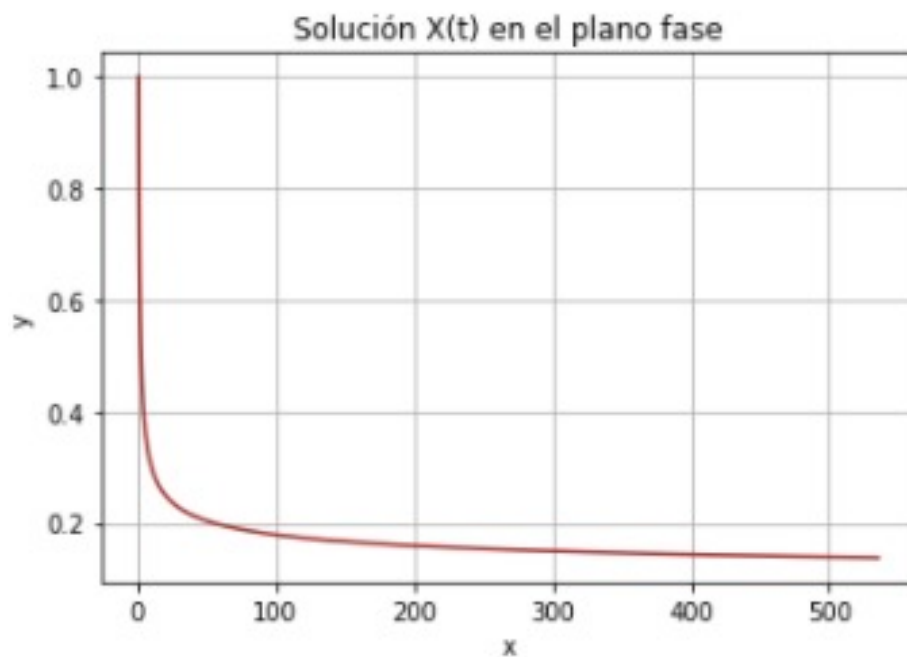
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0 > 0 \quad (1)$$

Tenemos que la soluciones són:

<Figure size 432x288 with 0 Axes>



Solución en el estado fase:





## Ejercicio 4

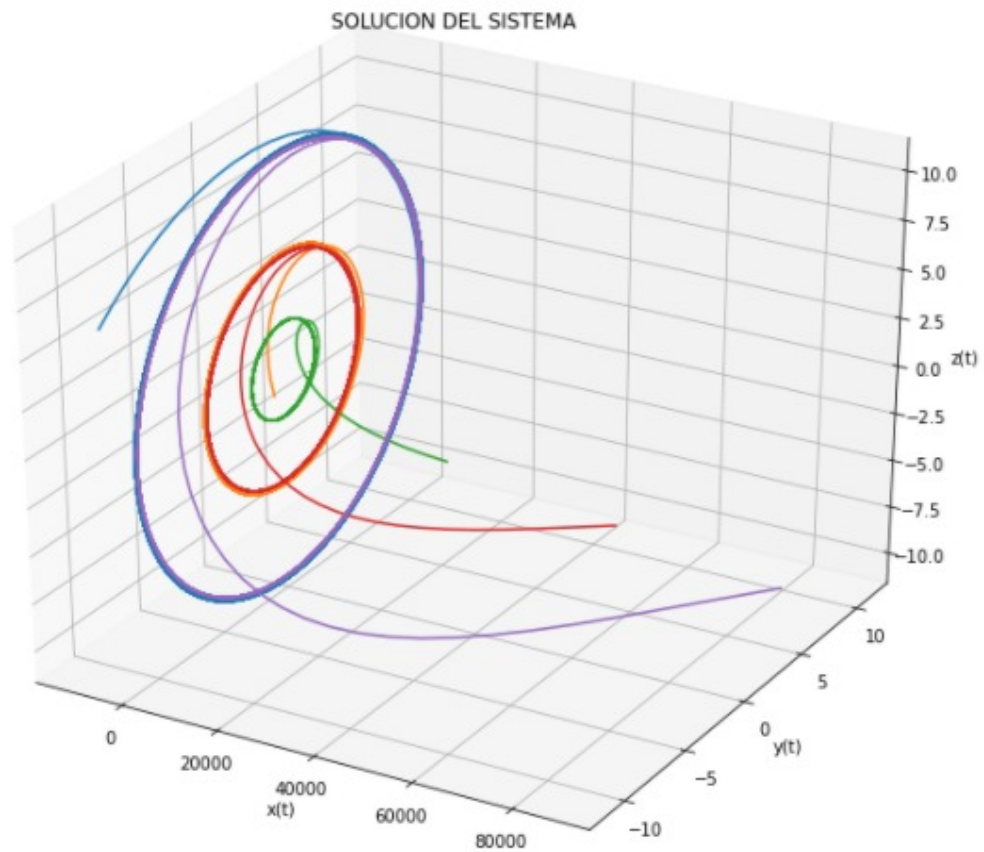
llegamos al siguiente ejercicio.

$$\frac{dx}{dt} = -2x \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = 2z \quad (2)$$

$$\frac{dz}{dt} = -2y \quad (3)$$

Tenemos que la soluciones són:



## Ejercicio 5

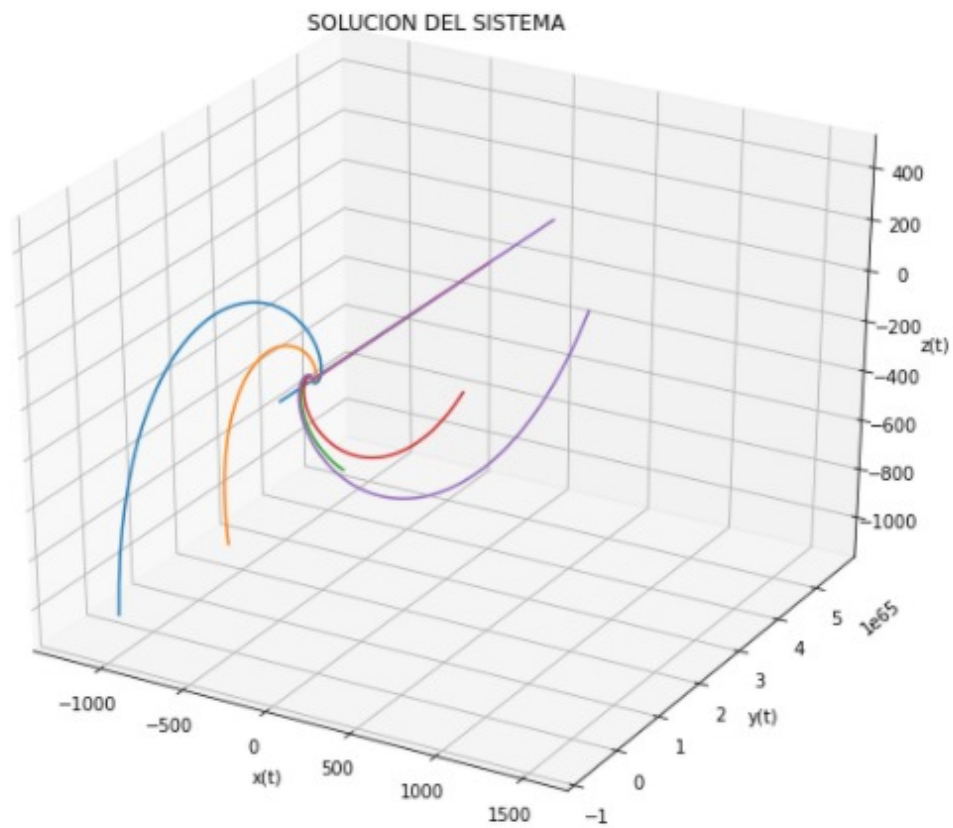
llegamos al siguiente ejercicio.

$$\frac{dx}{dt} = -x + z \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = 3y \quad (2)$$

$$\frac{dz}{dt} = -x - z \quad (3)$$

Tenemos que la soluciones són:



## Ejercicio 6

llegamos al siguiente ejercicio.

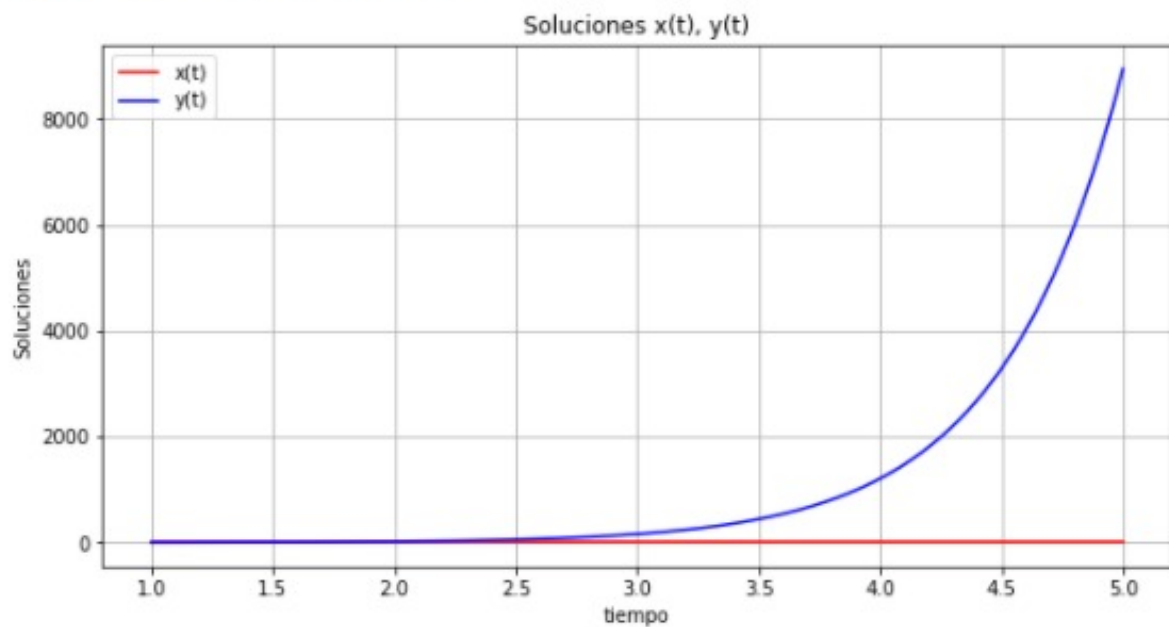
$$\frac{dx}{dt} = -x \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = x + 2y \quad (2)$$

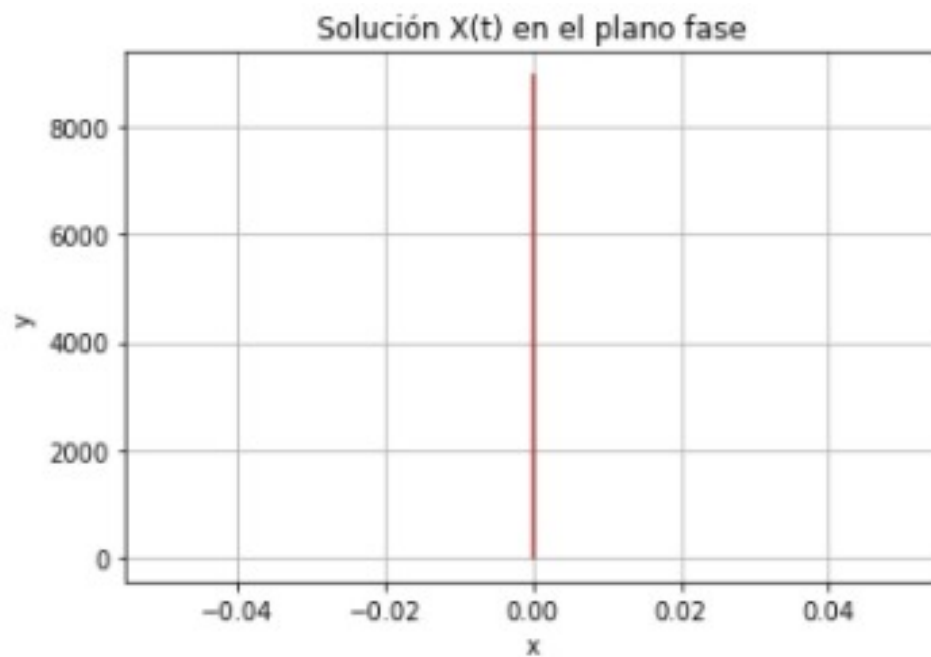
$$x(0) = 0, \quad y(0) = 3 \quad (3)$$

Tenemos que la soluciones són:

<Figure size 432x288 with 0 Axes>



Solución en el estado fase:



## Ejercicio 7

llegamos al siguiente ejercicio.

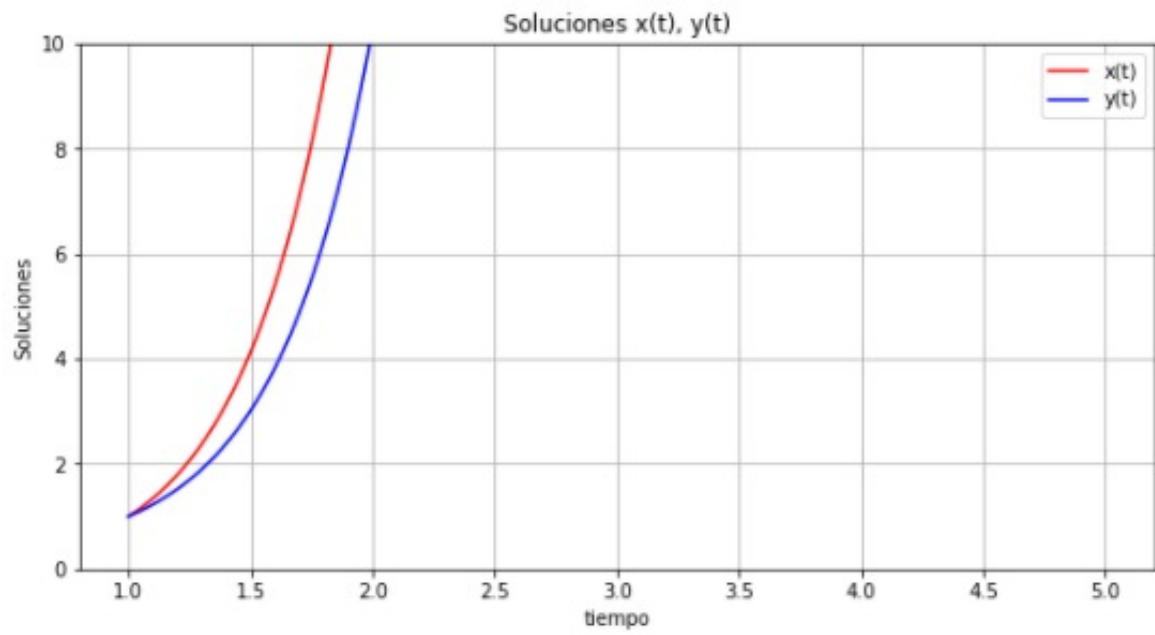
$$\frac{dx}{dt} = 2x + y \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = x + y \quad (2)$$

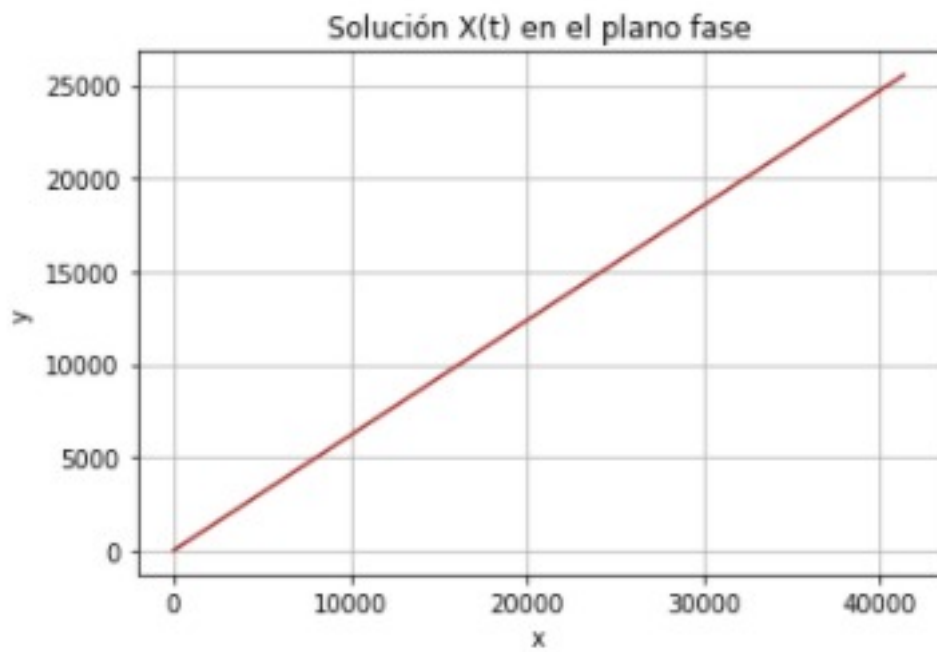
$$x(1) = 1, \quad y(1) = 1 \quad (3)$$

Tenemos que la soluciones són:

<Figure size 432x288 with 0 Axes>



Solución en el estado fase:



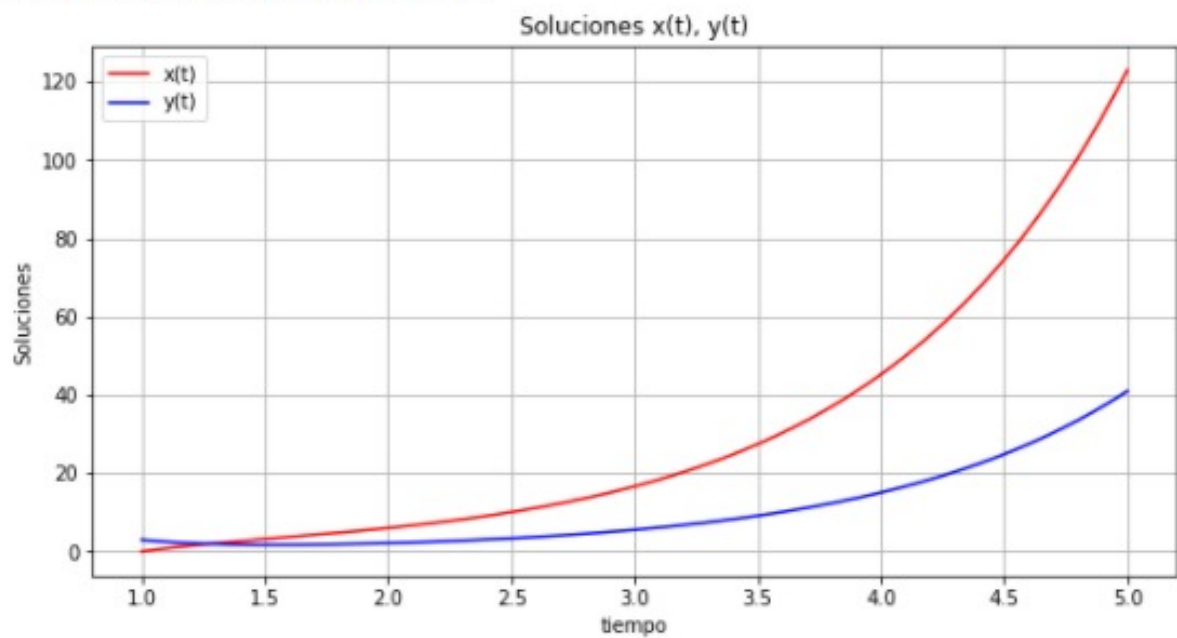
## Ejercicio 8

llegamos al siguiente ejercicio.

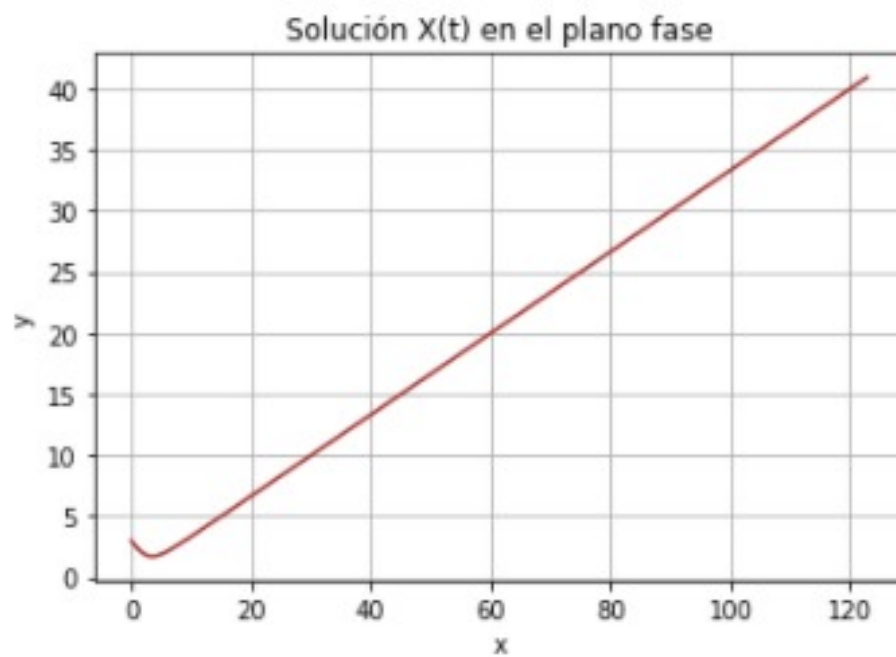
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax \\ x(0) &= (0, 3) \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (1)\end{aligned}$$

Tenemos que la soluciones són:

<Figure size 432x288 with 0 Axes>



Solución en el estado fase:



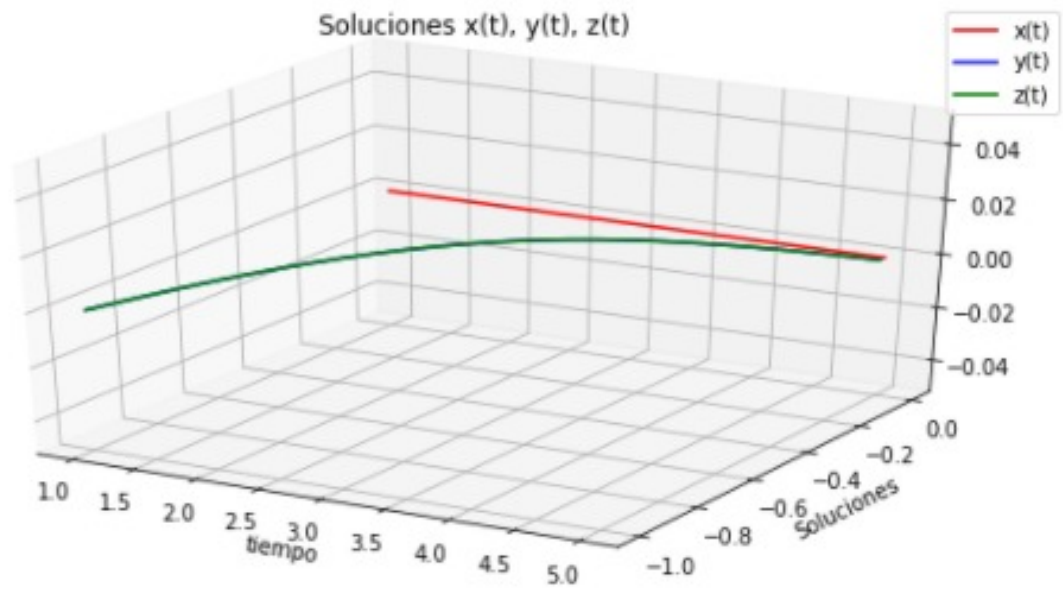
## Ejercicio 9

llegamos al siguiente ejercicio.

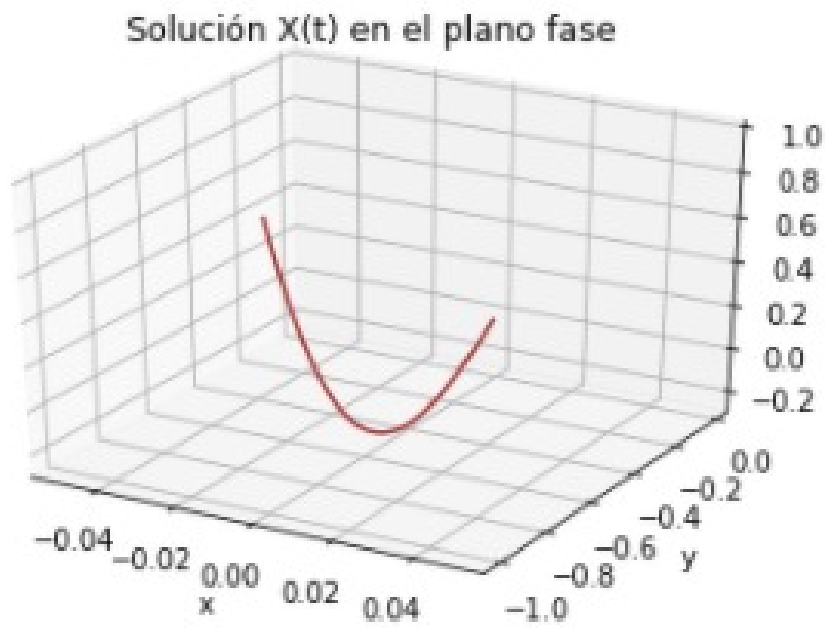
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax \\ x(0) &= (0, -b, b) \\ A &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad (1) \end{aligned}$$

Tenemos que la soluciones són:

<Figure size 432x288 with 0 Axes>



Solución en el estado fase:



## Ejercicio 10

llegamos al siguiente ejercicio.



$$m_1 x_1'' + b_1 x_1' + k_1(x_1 - L_1) - k_2(x_2 - x_1 - L_2) = 0 \quad (1)$$

$$m_2 x_2'' + b_2 x_2' + k_2(x_2 - x_1 - L_2) = 0 \quad (2)$$

Solución en el estado fase:

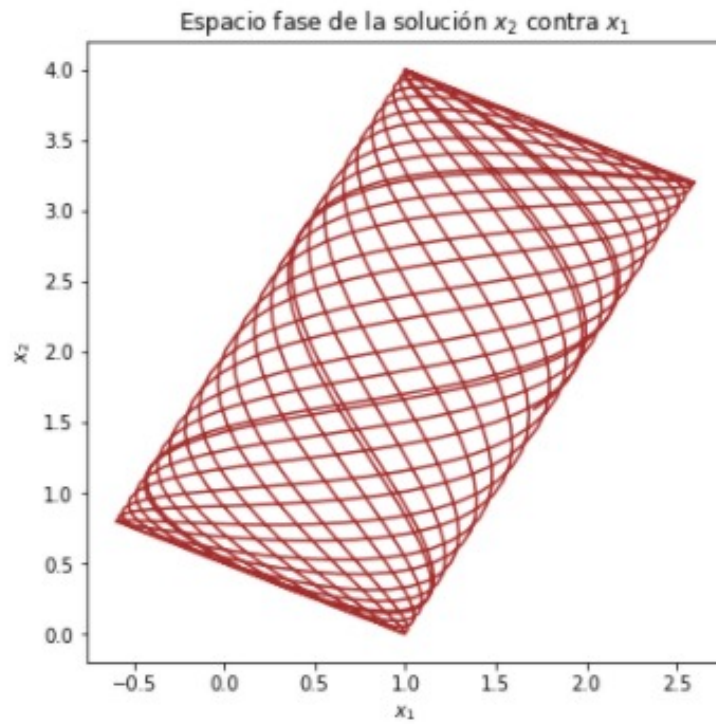
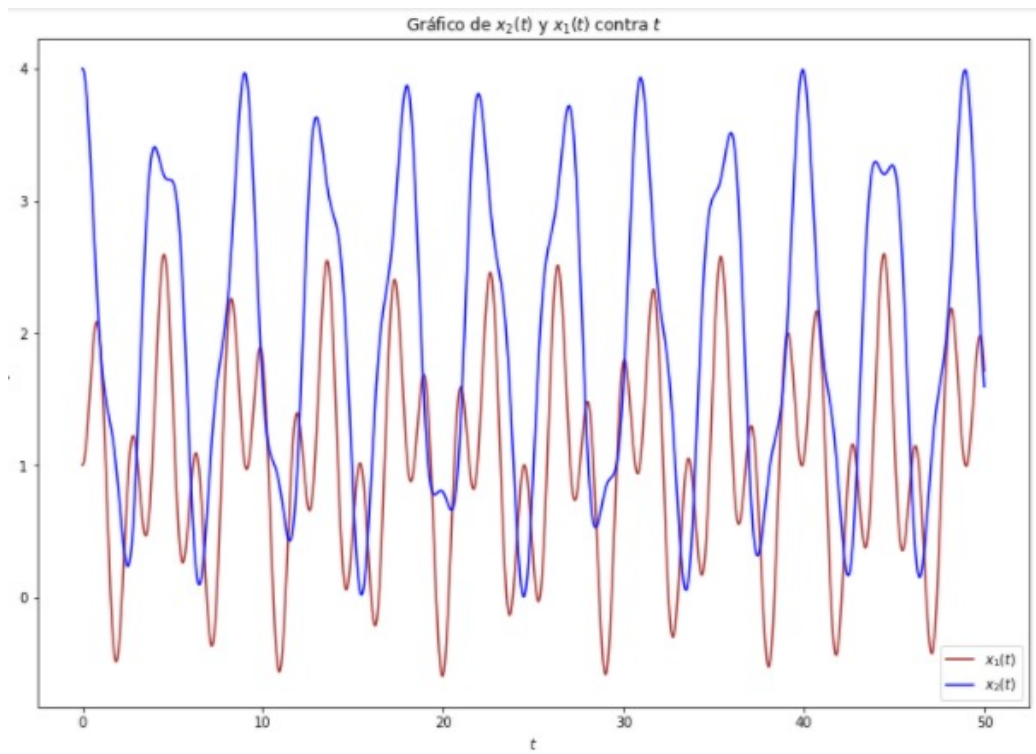


Gráfico:



Solución en el estado fase:

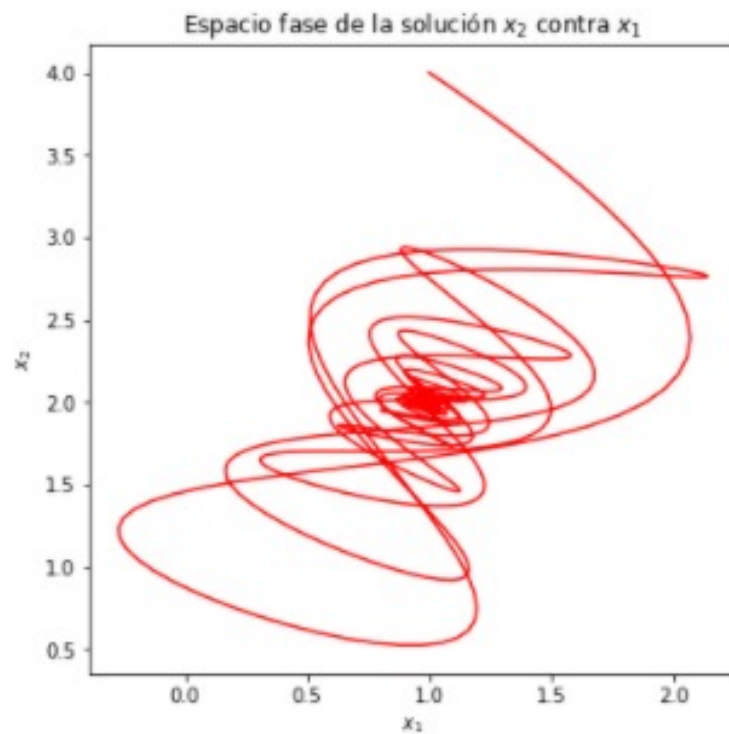
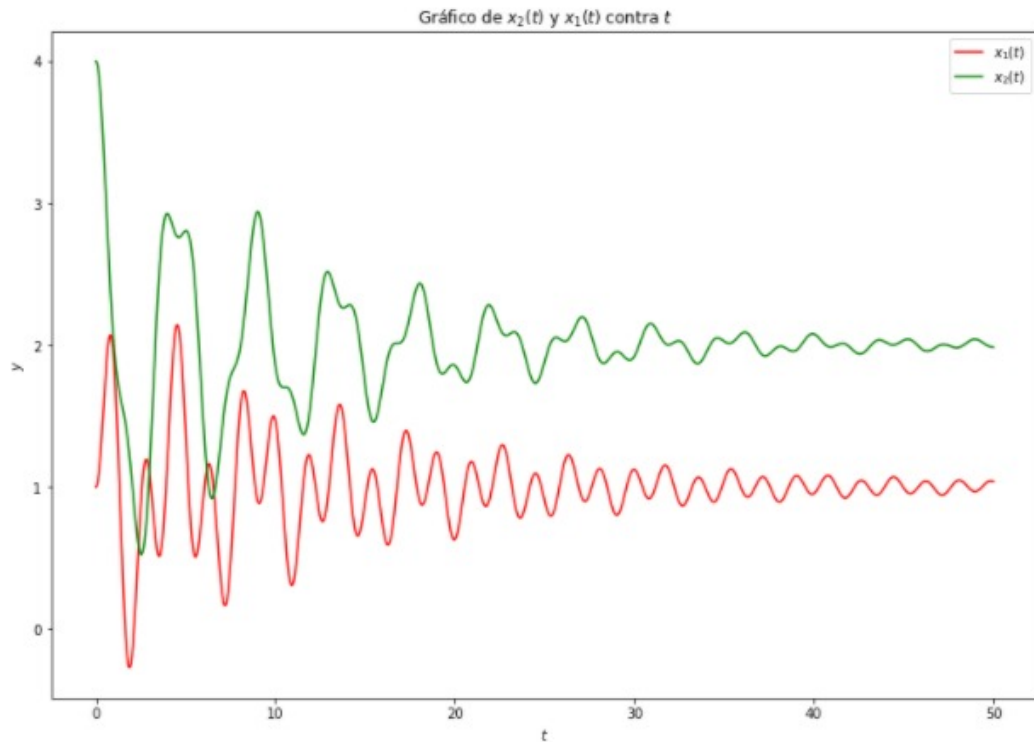


Gráfico:



## Resultados y Discusión

Como nos pudimos dar cuenta las gráficas se hacen de una distinta, es decir, dependen de ciertas cosas para realizarlas. El primer ejercicio, donde como producto se genera un gráfico de campo vectorial, no indica que a pesar de las condiciones iniciales, teniendo el mismo factor de amortiguamiento, podrán tener un mismo ciclo límite. Es notorio también que las flechas del campo que están alejadas solo se dirigen hacia valores positivos y negativos de  $y$  y las flechas cercanas al ciclo límite siguen una curva.

La tercera y cuarta gráfica nos muestran la posición contra el tiempo del oscilador, uno que presenta forzamiento y otro que no presenta forzamiento. Al hacer una comparación con existir forzamiento se crean cambios bruscos y cuando no existe tal forzamiento se comportan de una forma casi periódica.

## Conclusiones del Estudio

Se desprende que el oscilador de Van der Pol tiene como punto de equilibrio siempre el origen, el cual es un nodo o espiral, inestables en todos los casos; favorece las oscilaciones pequeñas y amortigua las grandes; se comporta como un sistema de Liénard, ya que tiene una única trayectoria cerrada que rodea al origen y hacia ella tienden en espiral

todas las demás trayectorias, asegurándose con esto que hay un ciclo límite estable en el espacio fase. Como se mencionó anteriormente en el reporte, Van der Pol, al estudiar el oscilador forzado que lleva su nombre, descubrió lo que viene siendo un resultado del caos determinista.

Usar Python por medio de Jupyter Lab son herramientas de uso fácil para examinar información y a través de sus productos como los archivos y las gráficas encontrar nueva información para solucionar problemas de manera numérica, que sin este tipo de herramientas sería una tarea bastante larga y complicada.

## Bibliografía

- Matplotlib: lotka volterra tutorial — SciPy Cookbook documentation. (2018). Scipy-cookbook.readthedocs.io. Recuperado el 13 de Abril de 2018 desde: <http://scipy-cookbook.readthedocs.io/items/LotkaVolterraTutorial.html>
- Van der Pol oscillator. (2018). Recuperado el 13 de Abril de 2018 desde: [https://en.wikipedia.org/wiki/Van\\_der\\_Pol\\_oscillator](https://en.wikipedia.org/wiki/Van_der_Pol_oscillator)
- Van der poll oscillator. (2018). Recuperado el 13 de Abril desde: [http://www.scholarpedia.org/article/Van\\_der\\_Pol\\_oscillator](http://www.scholarpedia.org/article/Van_der_Pol_oscillator)

## Apéndice

1. Este ejercicio pareciera similar al desarrollado en las actividades 6 y 7. ¿Qué aprendiste nuevo?  
*Aprendí como generar un campo vectorial para la solución del sistema de ecuaciones diferenciales y como cambiar las dimensiones en las imágenes para que sean reproducciones tal cual de los artículos.*
2. ¿Qué fue lo que más te llamó la atención del oscilador de Van der Pol?  
*Los ciclos límite y el cambio repentino y brusco en el comportamiento cuando existe o no el forzamiento.*
3. Has escuchado ya hablar de caos. ¿Por qué sería importante estudiar este oscilador?  
*No había escuchado pero por lo que leí, este oscilador podría ser una base para el estudio del mismo.*

4. ¿Qué mejorarías en esta actividad?

*Tratar de referenciar con información mas digerible rapidamente, podria decir.*

5. ¿Algún comentario adicional antes de dejar de trabajar en Jupyter con Python?

*Es un lenguaje de los más usados y muy extenso, pero presiento que conocí una parte valiosa de él.*

6. Cerramos la parte de trabajo con Python ¿Que te ha parecido?

*Fue una buena experiencia trabajar con este lenguaje, pues, es muy fácil de manejar a diferencia de otros, y logra cosas que otros no pueden o bien sea una tarea difícil, tal es el caso de métodos numéricos, graficación, solución de sistemas de ecuaciones diferenciales, etc. Todo con la ayuda de sus bibliotecas.*