

# **Métodos Numéricos**

**Luis Carlos Torres Soler**

**Departamento de Ingeniería de Sistemas e Industrial  
Facultad de Ingeniería  
Universidad Nacional de Colombia  
2010**



# **Métodos Numéricos**

**Luis Carlos Torres Soler**

**Matemático**

**Maestría Ingeniería de Sistemas**

**Maestría Ciencias de la Educación**



## **Presentación**

No es el objeto de las presentes notas escribir un texto de Análisis Numérico o Métodos Numéricos dado que existe en el mercado muchos libros buenos sobre este tema y sus aplicaciones; el objeto ha sido el de preparar un resumen para los estudiantes y, no creo que pueda alcanzar mayor trascendencia que dichos textos. Sin embargo, es necesario preparar cada clase que se dicta con el fin de no caer en el concepto de ser un docente que se sabe un texto de memoria.

Cada uno de los estudiantes a través de preguntas, tareas o comentarios enriquecen día a día estas notas. Es por esto, que poco a poco se mejoran, hasta el punto de ser fuente primaria de los estudiantes.

Se han adaptado estas notas como base para un curso semestral de Métodos Numéricos de cualquier carrera de Ingeniería. A las notas, les falta mucho de teoría, de ejemplos, de conceptos, etc., y aun se entiende que tienen significativos errores que las hace ser basura para algunos, mientras que para otros es algo muy útil.

No se puede desfallecer en un intento, las notas poco a poco seguirán mejorándose, los errores se irán corrigiendo, los conceptos se irán complementando, al igual que los ejemplos serán cada vez mejores. Es la intención, como trabajo académico continuado.



## Contenido

	Pag.
Introducción	1
Teoría de errores	3
Series de Taylor	15
Solución de ecuaciones	21
Cálculo de raíces	31
Diferenciación	55
Integración	59
Ecuaciones diferenciales	63
Bibliografía	71





## **Introducción**

Los métodos numéricos, una subárea de la investigación de operaciones, de la matemática, y para aplicaciones ingenieriles, tienen por objeto ayudar a dar respuestas a problemas mediante aproximaciones suficientemente exactas con un mínimo esfuerzo cuando no es posible obtener una solución por métodos analíticos. Algunos problemas pueden tener sus respuestas por varios métodos; existen variedad de ellos, algunos se explican en este texto con ejercicios simples para lograr comprenderlos. Por ello, es importante, como práctica académico y profesional comparar la eficiencia de diversos métodos de aproximación, ver la eficiencia y eficacia de cada uno de ellos y proyectarlos a los problemas de la vida real.

En todas las labores para el desarrollo científico y tecnológico se utiliza, hoy día, el computador con un software especializado que es ajustado a la medida según alguno de los métodos numéricos; sin embargo, determinar el mejor software no es del todo sencillo, ya que depende de los intereses y de los problemas y, por ello debe incluir varios módulos que permitan evaluar el comportamiento de una situación por diferentes métodos para asegurar la convergencia total del proceso. Para algunos procesos de cálculo intensivo, la velocidad (mínimo tiempo) es la consideración más importante; en otros casos, la confiabilidad y robustez son las características deseadas.



## Teoría de errores

En cada cálculo que se realice, generalmente, se introducen errores que afectan sustancialmente los resultados y por ende los procesos pertinentes. Los errores son de diferente índole y provienen de diversas fuentes y por distintos métodos. Un estudio somero de los errores es conveniente para buscar minimizar la incidencia negativa de ellos.

Ejemplo.  $1 = 1/3 + 1/3 + 1/3 = .333333 + .333333 + .333333 = .999999$

Es decir  $1 = .999999$  ¿Qué error tan grande?

Los cálculos hechos en computador o calculadora llevan a aproximaciones en ellos y, por tanto, en los resultados, además, como existen representaciones de cantidades con un número infinito de dígitos no periódicos, en general sólo se toman unos pocos.

Ejemplo.

$$\pi = 3.141592654... \approx 3.1416$$

$$\sqrt{2} = 1.414213562... \approx 1.4142$$

$$\sqrt{3} = 1.732050808... \approx 1.7321$$

$$e = 2.718281828... \approx 2.7183$$

Desde luego, se están cometiendo mínimos errores por haber tomado un mayor número significativo de dígitos, por tanto las operaciones que se realicen con ellos van a ser aproximadas.

### Representación del error

Los errores que se presentan al operacionalizar datos pueden ser:

- \* Error absoluto = valor verdadero - valor aproximado  
 $x = \text{valor verdadero} \Rightarrow e_x = x - \hat{x}$
- \* Error relativo = error absoluto / valor aproximado;  $e = e_x / \hat{x}$

## Magnitud del error

La magnitud del error absoluto se denota como valor absoluto:  $|e_x|$ , mientras que la magnitud del error relativo y se expresa como porcentaje:  $|e_x/x|$

Ejemplo.  $x=0.0000012$ ,  $x^*=0.0000010$

$$e_x = x - x^* = 0.0000012 - 0.0000010 = 0.0000002 = 2 \cdot 10^{-7}$$

$$e_x/x^* = 2 \cdot 10^{-7} / 1 \cdot 10^{-6} = 2 \cdot 10^{-1} = 0.2$$

$$|e_x| = |2 \cdot 10^{-7}| = 2 \cdot 10^{-7}; |e_x/x^*| = |0.2| = 0.2 = 20\%$$

Ejemplo.  $x=9999500$ ;  $x^* = 10000000$

$$e_x = 9999500 - 10000000 = -500$$

$$|e_x| = |-500| = 500; |e_x/x^*| = |-500/1 \cdot 10^6| = |-5 \cdot 10^{-4}| = 5 \cdot 10^{-4} = 0.05\%$$

## Causas del error

Las causas del error son varias. Existen aquellas debidas a la conceptualización, toma de datos a introducir en el proceso; las debidas a una operación o un conjunto de operaciones que se realizan en el proceso y las debidas a la interpretación; pueden ser:

- La exactitud de los datos  
 $1/3 = 0.3333333 = 0.333 = 0.3$ ;  $1/7 = 0.14285714$ .  
Los datos experimentales no se pueden representar exactamente y se cometen errores en mayor o menor grado de acuerdo al número de cifras decimales que se consideran.
- Exactitud de los cálculos: Toda operación lleva a errores por la aproximación que se realiza a los datos.
- Naturaleza de la función que se calcula. Por la forma como debe calcularse una función. Ejemplo: exponencial, logarítmica, trigonométrica, etc.
- Métodos de cálculo. Se introducen errores por el método en sí.

## Tipos de error

1. Errores inherentes. Son debidos a los datos, por ser experimentales, por los aparatos de medida existe la necesidad de aproximarlos.  
Ejemplo:  $1/3$ ,  $1/7$ ,  $\pi$ ,  $e$ . No nos podemos deshacer de ellos.

2. Errores de truncamiento. Cuando una función  $f(x)$  es representada por una serie infinita, se eliminan términos de la serie.

$$\sin(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \dots$$

3. Errores de redondeo. Ocurren al representar una cifra por un número finito de dígitos decimales, es decir, se debe a la eliminación de cifras para tener una aproximación.

a. Simétrico

$$\text{Ejemplo: } 1.3674 \sim 1.367, 34.2109 \sim 34.211$$

b. Truncamiento

$$\text{Ejemplo: } 1.3674 \sim 1.367, 34.2109 \sim 34.210$$

Los efectos en los resultados usualmente son (pero no siempre) controlados al adicionar un dígito.

4. Errores acumulados. Ocurren cuando ciertos procedimientos están basados en la repetición de una secuencia de operaciones. Se obtiene  $Y_{n+1}$  a partir de  $Y_n$ . La importancia del error acumulado depende de su tasa de acumulación. Si la tasa de acumulación decrece haciendo que el error sea acotado, la secuencia de operaciones se dice que es estable. Es inestable si la tasa se incrementa.
5. Error estimado. Se presume de un error al desarrollar operaciones.

## Normalización

La normalización decimal es la escritura de un número en notación científica, cualquier cantidad se escribe como:

$$x = \pm Fx * 10^n$$

$\pm$  es el signo,  $Fx$  se llama mantisa y  $n$  exponente.

Ejemplo. Normalizar a 5 dígitos los siguientes números

27,493	-->	.27493 * $10^2$
0,0032941	-->	.32941 * $10^{-2}$
1,82	-->	.18200 * $10$
,9341	-->	.93410 * $10^0$

La mantisa siempre es menor de 1, es decir,  $0 \leq Fx < 1$

$$x = 133,485947 \quad \text{¿Qué se hace?}$$

$$x = 0,133485967 * 10^3 \quad \text{no está normalizado}$$

$$x = 0,13348 * 10^3 + 0,000005967 * 10^3$$

El número de ceros en el segundo operando es igual al número de dígitos de la mantisa.

$$x = 0,13348 * 10^3 + 0,5967 * 10^{-5}$$

### Métodos Numéricos

$x = \pm Fx \cdot 10^c + Gx \cdot 10^{c-t}$ ,  $t$  = número de cifras significativas en  $Fx$ .

¿Qué se hace con  $Gx$ ?

Eliminando  $Gx$ , ¿qué le sucede a  $x$ , en general?

Si hay que aproximar, ¿cuál es el valor aproximado de  $Fx$ ?, ¿cuál el error que se introduce?

$$58,039 - 17,4 = 40,6 \text{ incierto}$$

$$58,039 - 17,400 = 40,639$$

### Redondeo simétrico

$$|x^-| = \begin{cases} 1. |Fx| \cdot 10^c & \text{si } |Gx| < 0,5 \\ 2. |Fx| \cdot 10^c + 1 \cdot 10^{c-t} & \text{si } |Gx| \geq 0,5 \end{cases}$$

El signo de  $x^-$  es el mismo de  $Fx$

$$\begin{aligned} 1. \quad x &= \pm Fx \cdot 10^c + Gx \cdot 10^{c-t} \\ |e_x| &= |Gx| \cdot 10^{c-t} \\ |e_x|_{\max} &= |Gx|_{\max} \cdot 10^{c-t}, 0,5 \cdot 10^{c-t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad x^- &= Fx \cdot 10^c + 1 \cdot 10^{c-t} \\ |e_x| &= |Gx-1| \cdot 10^{c-t} = 1 - Gx \cdot 10^{c-t} \\ |e_x|_{\max} &= |1-Gx|_{\max} \cdot 10^{c-t}, 0,5 \cdot 10^{c-t} \end{aligned}$$

En conclusión, el error máximo del error absoluto es:

$$|e_x|_{\max} = 0,5 \cdot 10^{-t}$$

$$x = 25,329 \quad t=5$$

$$x = 0,25327 \cdot 10^2 \quad c=2$$

$$|e_x / x^-|_{\max} = |e_x|_{\max} / |x^-|_{\max} = |0,5 \cdot 10^{c-t} / 0,1 \cdot 10^c| = 5 \cdot 10^{-t}$$

$$x^-_{\min} = |Fx \cdot 10^c|_{\min} = 0,1, \text{ luego } Fx_{\min} = 0,1$$

Lo único que hace máximo el error relativo es  $t$ .

El error relativo máximo en redondeo simétrico depende solamente del número de cifras significativas en  $Fx$ , con las que se trabaje.

¿Por qué error max?

En muchos cálculos no se conocen resultados intermedios, entonces no puede calcularse el error, por eso se toma el error máximo.

### Redondeo por truncamiento

El valor aproximado siempre es:  $Fx \cdot 10^c$

Error relativo

$$\begin{aligned}e_x &= Gx \cdot 10^{c-t} \\ |e_x| &= |Gx \cdot 10^{c-t}|, |G_x| \cdot 10^{c-t} \\ |e_x|_{\max} &= |Gx|_{\max} \cdot 10^{c-t}\end{aligned}$$

El error en redondeo por truncamiento es el doble que el redondeo simétrico

$$|e_x / x|_{\max} = |e_{x \max} / x_{\min}| = |1 \cdot 10^{c-t} / 0,1 \cdot 10^c| = 10 \cdot 10^{-t}$$

En conclusión no se usa este redondeo.

### Propagación del error

Los procesos computacionales están basados en procedimientos secuenciales que realizan una serie finita de pasos para realizar un conjunto de operaciones determinadas. Muchas de las operaciones o pasos se repiten en un ciclo, lógicamente finito, lo que hace que cada vez propague los errores en los diferentes pasos.

Supongamos que  $e_n$  representa la magnitud de un error cometido después de  $n$  operaciones subsecuentes. Si  $e_n = c_n e_0$ , donde  $c$  es una constante independiente de  $n$ , se dice que el crecimiento del error es lineal. Si  $e_n = c^n e_0$ , para  $c > 1$ , el crecimiento del error es exponencial.

El crecimiento del error lineal, generalmente, es inevitable y, cuando  $c$  y  $e_0$  son pequeños, los resultados suelen ser aceptables. Pero muchas veces, por más pequeño que sea el error, puede traer resultados del todo no satisfactorios: desviación según lo esperado, cálculos alterados, valores que con el tiempo muestran problemas en el comportamiento de la situación analizada.





## Series de Taylor

Sea  $f(x)$  una función continua<sup>1</sup> y con derivadas de todo orden en  $x=x_0$ , entonces  $f(x)$  puede ser representada por una serie de potencias en el punto  $x=x_0$ , como:

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(x - x_0)^j.$$

Las derivadas de  $f(x)$  se obtienen al diferenciar la serie término a término

$$f^{(1)}(x) = c_1 + 2c_2(x - x_0) + 3c_3(x - x_0)^2 + \dots + nc_n(x - x_0)^{n-1} + \dots$$

$$f^{(2)}(x) = 2c_2 + 6c_3(x - x_0) + 12c_4(x - x_0)^2 + \dots + n(n-1)c_n(x - x_0)^{n-2} + \dots$$

.....

$$f^{(m)}(x) = m!c_m + (m+1)!c_{m+1}(x - x_0) + \frac{(m+2)!}{2}c_{m+2}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{(n-m)!}c_n(x - x_0)^{n-m} + \dots$$

Es decir:

$$f^{(m)}(x) = \sum_{i=m}^{\infty} \frac{i(i-1)(i-2)\dots(i-m+1)}{(i-m)!} c_i (x - x_0)^{i-m}$$

Al reemplazar  $x = x_0$  en ambos lados de la serie, se tiene:

$f(x_0) = c_0$	o	$c_0 = f(x_0)$
$f^{(1)}(x_0) = c_1$	o	$c_1 = f^{(1)}(x_0)$
$f^{(2)}(x_0) = 2c_2$	o	$c_2 = f^{(2)}(x_0)/2$
$f^{(3)}(x_0) = 3!c_3$	o	$c_3 = f^{(3)}(x_0)/3!$
.....		
$f^{(m)}(x_0) = m!c_m$	o	$c_m = f^{(m)}(x_0) / m!$

Lo cual significa que:

$$f(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)(x - x_0)^2}{2} + \frac{f^{(3)}(x_0)(x - x_0)^3}{3!} + \dots$$

Es decir:

---

<sup>1</sup> Una función  $f$  definida en un conjunto  $X$  de  $\mathbb{R}$ , y  $x_0$  en  $X$ , entonces  $f$  es continua en  $x_0$  si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ,  $f$  es continua en el conjunto  $X$  si lo es en cada punto de  $X$ .

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j = \sum_{j=0}^m \left[ \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j \right] + R_m$$

Con  $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ ,  $0! = 1$ ,  $f^{(n)}(x_0) = d^n f / dx^n \big|_{x=x_0}$

Ejemplo. Expandir  $f(x) = \ln(x)$  por medio de series de Taylor en  $x_0 = 1$ , y obtener  $\ln(1.1)$  en 4 decimales con error menor a 0.00005

$$f^{(1)} = \frac{1}{x}; \quad f^{(2)} = -\frac{1}{x^2}; \quad f^{(3)} = \frac{2}{x^3}; \quad \dots; \quad f^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! x^{-n}$$

así,

$$\ln(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} (x - 1)^j$$

Al considerar  $|R_m| < |(x-1)^m/m|$ , se tendría  $|R_m| < |(1.1-1)^m/m| = .1^m/m$

si  $m=3$ , se tiene  $.1^3/3 = 0.00033 > 0.00005$

si  $m=4$ , se tiene  $.1^4/4 = 0.000025 < 0.00005$ ,

Por tanto se tiene:  $\ln(1.1) = .1 + (-1)^1/2(1.1-1)^2 + (-1)^2/3(1.1-1)^3 = .09533$

Ejemplo. Calcular  $\sqrt{1.1}$  en 4 decimales con un error menor a .00005 expandiendo

$f(x) = \sqrt{x}$  por medio de las series de Taylor en  $x_0 = 1$ .

$$f^{(1)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad f^{(2)} = -\frac{1}{4}x^{-3/2}; \quad f^{(3)} = \frac{3}{8}x^{-5/2}; \quad f^{(4)} = -\frac{15}{16}x^{-7/2}$$

$$\text{así: } f^{(m)}(x) = \frac{\pi(2j-3)}{2^m} x^{-\frac{2m-1}{2}} (-1)^{m-1}; \quad m \geq 2$$

$$\text{Con } R_m = \frac{\pi(2j-3)}{2^m} x^{-\frac{2m-1}{2}} (-1)^{m-1}$$

$$\sqrt{1.1} = \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}.1 - \frac{1}{4(1)^{3/2}} + \frac{3}{8(1)^{5/2}} - \frac{15}{16(1)^{7/2}} + \dots =$$

Ejemplo. Calcular  $e^{.01}$  con cuatro decimales y un error menor a .00005 expandiendo

$f(x) = e^x$  por medio de la serie de Taylor en  $x_0 = 0$ .

$$f^{(1)} = e^x; \quad f^{(2)} = e^x; \quad f^{(3)} = e^x; \quad f^{(n)} = e^x$$

así:

$$f(.01) = 1 + .01 + \frac{(.01)^2}{2} + \frac{(.01)^3}{6} + \frac{(.01)^4}{24} + \frac{(.01)^5}{5!} + \dots$$

Al tener:  $R_m = \frac{(.01)^m}{m}$

Si  $m = 3$ ,  $R_m = .0000001666$ . Si  $m = 2$ ,  $R_m = .00005$ . Sólo se tiene que calcular hasta la potencia 2.

$$f(.01) = 1 + .01 + \frac{(.01)^2}{2} = 1 + .01 + .00005 = 1.01005$$

El algoritmo<sup>2</sup> general en el desarrollo de las series de Taylor sería:

```

AlgST( )
  Lea x, x0, error, maxiter
  n = 1, suma = 0
  determine Rn
  MQ n < maxiter o Rn > error
    calcular Rn
    suma = suma + Rn
    n = n + 1
  FMQ
  FAlgST( )
    
```

La precisión que puede emplearse utilizando el computador o la capacidad de éste determinará si la salida es el cálculo de la función o un mensaje de fracaso.

En la serie de Taylor al hacer  $x_0=0$ , se tiene:  $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j$ .

y se llama Serie de Maclaurin

Dada una función  $f(x)$ , continua con derivada de todos los ordenes, en un punto  $x=x_0$ , se evalúa en un punto cercano  $x_0$ , empleando la serie de Taylor, siempre y cuando la serie sea convergente en  $x=x_0$

Proposición. Dada una serie  $\sum S_k$ , con  $P=|S_{k+1} / S_k|$ , la serie  $\sum S_k$  es convergente si  $P<1$  (criterio del cociente)

---

<sup>2</sup> Los algoritmos se describen por medio de un pseudocódigo. Las instrucciones de los algoritmos siguen las reglas de la construcción de programas estructurados, y se escriben de tal forma que reduzcan al mínimo la dificultad de traducirlo a un lenguaje de programación. MQ significará "mientras que", teniendo como final FMQ. HQ significará, "hasta que", con final FHQ. La instrucción condicional IF-THEN-ELSE, está determinada por condición? SI xx NO yy.

**Teorema 1.** Una serie es absolutamente convergente, si converge la serie formada con los valores absolutos de sus términos.

**Teorema 2.** Una serie alterna es convergente si cumple:

- La serie es estrictamente alterna
- El término  $n$ -ésimo tiende a 0, cuando  $n$  tiende a  $\infty$
- Cada término es en valor absoluto menor que el término anterior:  $|S_{k+1}| < |S_k|$

**Teorema 3.** Dada una serie de potencias, definida como  $\sum a_n x^n$

- Si la serie converge para  $x = c$ , entonces la serie converge para todo  $x < |c|$
- Si la serie diverge para  $x = d$ , entonces la serie diverge para todo  $x > |d|$ .

Frecuentemente la serie de Taylor se simplifica definiendo  $x = x_0 + x_1$ ; permitiendo escribir

la serie como: 
$$f(x_0 + x_1) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} x_1^j$$

Si en esta fórmula se hace  $x_0 = x_i$  y  $x_1 = kh$ , se tiene:

$$f(x_i + kh) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_i)}{j!} (kh)^j$$

Si  $k = 1$  se tiene: 
$$f(x_i + h) = f(x_i) + f^{(1)}(x_i)h + \frac{f^{(2)}(x_i)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n \quad (1)$$

Similarmente, si  $k = -1$ :

$$f(x_i - h) = f(x_i) - f^{(1)}(x_i)h + \frac{f^{(2)}(x_i)}{2!}h^2 - \dots + (-1)^n \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n \quad (2)$$

Al considerar la notación  $f(x_i) = f_i$ ,  $x_i + h = x_{i+1}$ , podemos escribir (1) como:

$$f_{i+1} = f_i + hf_i^{(1)} + \frac{h^2}{2!}f_i^{(2)} + \dots + \frac{h^n}{n!}f_i^{(n)}$$

En general, si  $x_{i+k} = x_i + kh$ ,  $f(x_{i+k}) = f_{i+k}$

$$f_{i+k} = f(x_i + kh) = f_i + f_i^{(1)}(kh) + \frac{f_i^{(2)}}{2!}(kh)^2 + \dots + \frac{f_i^{(n)}}{n!}(kh)^n +$$

Variando en incrementos de  $+h$ ,  $-h$ ,  $+2h$ ,  $-2h$ ; se tiene:

$$f_{i+1} = f_i + hf_i^{(1)} + \frac{h^2}{2!}f_i^{(2)} + \dots + \frac{h^n}{n!}f_i^{(n)}$$

$$f_{i-1} = f_i - hf_i^{(1)} + \frac{h^2}{2!}f_i^{(2)} - \dots + \frac{(-h)^n}{n!}f_i^{(n)}$$

$$f_{i+2} = f_i + 2h f_i^{(1)} + \frac{(2h)^2}{2!} f_i^{(2)} + \dots + \frac{(2h)^n}{n!} f_i^{(n)}$$

$$f_{i-2} = f_i - 2h f_i^{(1)} + \frac{(2h)^2}{2!} f_i^{(2)} - \dots + \frac{(-2h)^n}{n!} f_i^{(n)}$$

A partir de la serie de Taylor, una aproximación de una función a primer orden sería:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f^{(1)}(x_i)[x_{i+1} - x_i]$$

Esta expresión representa una línea recta. Una aproximación de una función a segundo

$$\text{orden es: } f(x_{i+1}) = f(x_i) + f^{(1)}(x_i)[x_{i+1} - x_i] + \frac{f^{(2)}(x_i)}{2!} [x_{i+1} - x_i]^2$$

De manera similar agregando términos para desarrollar la expansión completa de la serie de Taylor:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f^{(1)}(x_i)[x_{i+1} - x_i] + \frac{f^{(2)}(x_i)}{2!} [x_{i+1} - x_i]^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!} [x_{i+1} - x_i]^n + R_n$$

$$\text{La serie anterior es infinita, el término residual sería: } R_n = \frac{f^{(n+1)}(o)}{(n+1)!} [x_{i+1} - x_i]^{n+1}$$

siendo  $o$  un valor cualquiera  $x$  que se halla entre  $x_i$  y  $x_{i+1}$ .

Ejemplo. Sea  $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 2}$ , calcular  $f(1.05)$  con un error de  $e=0.00005$ .

Hacemos  $x_i=1$  y  $h=.05$

$$f(1.05) = f(1) + \frac{f^{(1)}(1)(.05)}{1!} + \frac{f^{(2)}(1)(.05)^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(1)(.05)^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(1)(.05)^4}{4!} + \dots$$

Teniéndose las derivadas:

$$f^{(1)}(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}} ; f^{(2)}(x) = \frac{7}{2(x^2+x+2)^{3/2}}$$

Así que:

$$f(1.05) = f(1) + 3/4(.05) + \frac{7(.05)^2}{4(4)^{3/2}} + \frac{f^{(3)}(1)(.05)^3}{6} + \frac{f^{(4)}(1)(.05)^4}{24} + \dots$$

Ejemplo. Sea  $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ , calcular  $f(1.01)$  con un error de  $e=0.00005$ .

Hacemos  $x_i=1$  y  $h=.01$

$$f(1.01) = f(1) + \frac{f^{(1)}(1)(.01)}{1!} + \frac{f^{(2)}(1)(.01)^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(1)(.01)^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(1)(.01)^4}{4!} + \dots$$

Teniéndose las derivadas:

$$f^{(1)}(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} ; f^{(2)}(x) = \frac{3}{(x^2+3)^{3/2}} ; f^{(3)}(x) =$$

$$\text{Así que: } f(1.01) = f(1) + 1/2(.01) + \frac{3(.01)^2}{(4)^{3/2}} + \frac{f^{(3)}(1)(.01)^3}{6} + \frac{f^{(4)}(1)(.01)^4}{24} + \dots$$

El desarrollo de las series de Taylor de una función de dos dimensiones  $f(x, y)$  alrededor de  $(x_0, y_0)$  está dada por:

$$f(x+h, y+g) = f(x_0, y_0) + hf_x + gf_y + \frac{1}{2}[h^2 f_{xx} + 2hgf_{xy} + g^2 f_{yy}] + \frac{1}{6}[h^3 f_{x^3} + 3h^2 g f_{x^2 y} + 3h g^2 f_{xy^2} + g^3 f_{y^3}] + \\ + \frac{1}{24}[h^4 f_{x^4} + 4h^3 g f_{x^3 y} + 6h^2 g^2 f_{x^2 y^2} + 4h g^3 f_{xy^3} + g^4 f_{y^4}] + \dots$$

Donde  $h=x-x_0$ ,  $g=y-y_0$ , y

$$f_x = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} /_{x=x_0, y=y_0} \quad f_y = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} /_{x=x_0, y=y_0}$$

Las notaciones análogas tales como  $f_{x^2 y}$ ,  $f_{x^3}$ ,  $f_{xy^4}$ , son las derivadas parciales de  $f$  en  $x = x_0$  y  $y = y_0$ ; cada  $x$  o  $y$  en los subíndices indica una diferenciación parcial con respecto de  $x$  o  $y$  respectivamente.

Ejemplo. Sea  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + xy$ , calcular  $f(1.05, 1.01)$  con un error de  $e=0.00005$ .

$$f(1+.05, 1+.01) = f(1, 1) + .05\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2+1}{\sqrt{1+1+1}}\right)\right) + .01\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2+1}{\sqrt{3}}\right)\right) + \dots$$

## Solución de ecuaciones

En la vida práctica, sobre todo para el ingeniero del siglo XXI, al plantear modelos para representar situaciones de la realidad y solucionar problemas que allí existen, muchas veces se llega a que el modelo es un sistema de ecuaciones: lineales o no lineales. La necesidad de solucionar dicho sistema de una forma fácil llevó a estudiosos a formular varios métodos, los métodos más utilizados que existen para lograr la solución de un sistema de ecuaciones son: de Gauss, de Gauss-Jordán, de Gauss-Seidel, , de Jacobi, de Descomposición LU, ...

### Gauss

Sea el sistema de ecuaciones:  $\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B}$ , donde A es una matriz nxn. El método de Gauss consiste en formar una matriz triangular superior en que la diagonal de la matriz “1”, y existen “0” en las filas que siguen en la columna, para ello se emplean las siguientes operaciones:

1. Multiplicar la fila i por una constante  $f_i \leftarrow kf_i$
2. A una fila agregarle otra fila  $f_j \leftarrow f_j + sf_k$

Los elementos de la diagonal, los  $a_{ii}$ , se llama pivote y, consecuentemente las filas y las columnas respectivas se llaman fila pivote y columna pivote. Entonces para colocar un “1” en

cualquier  $a_{ii}$ , simplemente se realiza:  $f_i \leftarrow \frac{f_i}{a_{ii}}$ .

Para colocar 0 en las filas k (>i), se realiza:  $f_k \leftarrow f_k - a_{ki}f_i$

El proceso inicia por  $a_{11}$ .

El método de Gauss - Jordan es una extensión del método de Gauss llevando la matriz a que sea unitaria. En pocas palabras, toda la diagonal en 1 y los demás elementos en 0.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \rightarrow \rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

## Jacobi

Sea el sistema de ecuaciones:  $\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B}$ , donde A es una matriz nxn.

Al tener los coeficientes de la diagonal totalmente diferentes de cero (si es posible se reordenan las ecuaciones para tener esto), la primera ecuación se puede resolver para  $x_1$ , la segunda para  $x_2$ , etcétera, lo que lleva a tener:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n}{a_{22}}$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{34}x_4 - \dots - a_{3n}x_n}{a_{33}}$$

y así sucesivamente hasta hallar  $x_n$ ,

$$x_n = \frac{b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}}{a_{nn}}$$

El proceso de solución por el método de Jacobi es: dar valores iniciales (puede ser de cero) a las  $x_i$ , iteración 0, y calcular cada nuevo valor de  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , iteración i.

El proceso se repite en la iteración **j** con los valores calculados en la iteración **j-1**, para nuevas  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , hasta que la solución converja.

Es decir:

$$X_j^{(i)} = \frac{\sum_{k=1, k \neq j}^n (-a_{jk} X_k^{i-1}) + b_j}{a_{jj}}$$

Esta convergencia se puede verificar usando el criterio de:  $\left| \frac{x_i^k - x_i^{k-1}}{x_i^k} \right| < e$ , con  $i=1,2,\dots,n$ ;

en la iteración k y donde  $e$  es el error previsto.



Una condición necesaria, pero no suficiente, para la convergencia, es que los coeficientes de la diagonal de cada una de las ecuaciones sea mayor que la suma de los otros coeficientes de la ecuación, es decir:

$$|a_{ii}| > \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}| \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Algunos sistemas lineales de ecuaciones pueden tener solución utilizando este método de Jacobi sin que se cumpla la condición, pero otros no. La condición hace que siempre se halle la solución.

Cuando se tiene la condición, se dice que el sistema es de diagonal dominante.

## Gauss-Seidel

El método de Gauss - Seidel es un método iterativo muy usado cuando se tiene un sistema de ecuaciones  $n \times n$ , con coeficientes en la diagonal totalmente diferentes de cero.

En Jacobi se calculan todos los valores para una nueva iteración. El método de Gauss-Seidel sugiere considerar de una vez los valores que se van calculando.

Es decir: 
$$X_j^{(i)} = \frac{\sum_{k=1}^{j-1} (-a_{jk} X_k^{(i)}) + \sum_{k=j+1}^n (-a_{jk} X_k^{(i-1)}) + b_j}{a_{jj}}$$

## Factorización triangular

Sea el sistema de ecuaciones:  $\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B}$ , donde  $\mathbf{A}$  es una matriz  $n \times n$ . Si es posible que  $\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{U}$ , donde  $\mathbf{L}$  es una matriz triangular inferior y  $\mathbf{U}$  es una matriz triangular superior, entonces  $\mathbf{A}$  se dice es factorizable triangularmente.

$\mathbf{U}$  se obtiene al aplicar parte del método de Gauss, colocar sólo 0 debajo de la diagonal. Por ejemplo:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Entonces siguiendo las operaciones, su transformación sería:

$$A \cong \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{9}{2} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{44}{7} \end{vmatrix}$$

La matriz **L** es simplemente el proceso de formación de una matriz triangular inferior al transformar la matriz original.

Para el caso se realizaron las siguientes operaciones:  $f_2 \leftarrow f_2 - f_1/2$ ,  $f_3 \leftarrow f_3 + f_1/2$  y  $f_3 \leftarrow f_3 - 5f_2/7$ .

Cada nuevo  $U_{ki}$  obtenido (implicitamente) al calcular  $U$ , se se coloca en su respectiva posición en una matriz  $L$  cuyos elementos de la diagonal sean 1.

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{7} & 1 \end{vmatrix}$$

Puede probarse que **L U = A**.

Si **AX = b**, se escribe **L U X = b**, haciendo el reemplazo **U X = Y**, entonces **L Y = b**. Se calculan los **Y** y, luego se resuelve **U X = Y** para hallar los valores de **X**

Ejemplo:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Luego al buscar si es factorizable triangular se puede obtener:

$$U \approx \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 3 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix} \cong \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -\frac{22}{5} \\ 0 & 0 & 4 & \frac{5}{4} \end{vmatrix} \cong \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{5} \end{vmatrix}$$

Si se mira despacio en los pasos realizados las operaciones de Gauss, se tiene que estas fueron:

$$\begin{aligned} f_2 &\leftarrow f_2 + \frac{1}{2}f_1 \\ f_3 &\leftarrow f_3 - f_1 \quad \therefore f_3 \leftarrow f_3 - \frac{4}{5}f_2 \quad \therefore f_4 \leftarrow f_4 - \frac{4}{3}f_3 \\ f_4 &\leftarrow f_4 - \frac{1}{2}f_1 \quad f_4 \leftarrow f_4 + f_2 \end{aligned}$$

Luego siguiendo estas operaciones se tiene que la matriz L sería:

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{4}{5} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{4}{3} & 1 \end{vmatrix}$$

Ahora sólo queda probar que  $LU = A$ .

## Descomposición LU

La factorización de Cholesky también llamada Descomposición LU, es una técnica particularmente eficiente en la solución de algunos problemas.

Sea una matriz simétrica A, por tanto cuadrada  $n \times n$ , bajo ciertas condiciones, existe una matriz triangular superior U, tal que  $U^T * U = A$ ,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Por tanto A, debe poderse escribir como la multiplicación de dos matrices,  $U^T$  y U.

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Como U es triangular superior, se sabe que  $u_{ij}=0$ , para  $i>j$ .

El cálculo puede hacerse por filas, es decir, primero se obtienen los elementos de la primera fila de U, enseguida los de la segunda, etcétera. Conocidos los elementos de la fila 1,2,...,k-1, puede hallarse los elementos de la fila k.

$$a_{11} = (u_{11})^T u_{11} = u_{11}^2, \text{ es decir, } u_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$a_{12} = (u_{11})^T u_{12}, \text{ es decir, } u_{12} = \frac{a_{12}}{u_{11}}$$

$$a_{13} = (u_{11})^T u_{13}, \text{ es decir, } u_{13} = \frac{a_{13}}{u_{11}}$$

$$a_{1n} = (u_{11})^T u_{1n}, \text{ es decir, } u_{1n} = \frac{a_{1n}}{u_{11}}$$

Al multiplicar la segunda fila de  $U^T$  por las columnas de U, se tiene:

$$a_{22} = u_{12}^2 + u_{22}^2, \text{ es decir, } u_{22} = \sqrt{a_{22} - u_{12}^2}$$

$$a_{23} = u_{12}u_{13} + u_{22}u_{23}, \text{ es decir, } u_{23} = \frac{a_{23} - u_{12}u_{13}}{u_{22}}$$

$$a_{2n} = u_{12}u_{1n} + u_{22}u_{2n}, \text{ es decir, } u_{2n} = \frac{a_{2n} - u_{12}u_{1n}}{u_{22}}$$

Al multiplicar la fila k de  $U^T$  por la columna k de U se tiene:

$$\begin{aligned}
 a_{kk} &= (U^T)_k U_k = (U_k)^T U_k = \sum_{i=1}^n u_{ik}^2 = \sum_{i=1}^k u_{ik}^2 + \sum_{i=k+1}^n u_{ik}^2 \\
 &= \sum_{i=1}^k u_{ik}^2 + 0 = \sum_{i=1}^{k-1} u_{ik}^2 + u_{kk}^2
 \end{aligned}$$

Lo único desconocido es  $u_{kk}$ , por tanto:

$$u_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} u_{ik}^2} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Para que  $u_{kk}$  sea real, se requiere  $a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} u_{ik}^2 \geq 0$ , como  $U$  es invertible, su determinante se halla como producto de las diagonales, luego  $u_{kk} > 0$

Al multiplicar la fila  $k$  de la matriz  $U^T$  por la columna  $j$  de la matriz  $U$ , con  $k < j$ , se tiene:

$$\begin{aligned}
 a_{kj} &= (U^T)_k U_j = (U_k)^T U_j = \sum_{i=1}^n u_{ik} u_{ij} = \sum_{i=1}^k u_{ik} u_{ij} + \sum_{i=k+1}^n u_{ik} u_{ij} \\
 &= \sum_{i=1}^k u_{ik} u_{ij} + 0 = \sum_{i=1}^{k-1} u_{ik} u_{ij} + u_{kk} u_{kj}
 \end{aligned}$$

Como no se conoce  $u_{kj}$ , entonces

$$u_{kj} = \frac{1}{u_{kk}} \left[ a_{kj} - \sum_{i=1}^{k-1} u_{ik} u_{ij} \right] \quad j = k+1, k+2, \dots, n$$

NOTA. Si siempre puede hallarse  $u_{kk}$ , puede obtenerse  $U$ .

$$[A] = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

Ejemplo. Sea la matriz:

$$U_{11} = \sqrt{4} = 2, \quad U_{12} = \frac{1}{2}[-2] = -1, \quad U_{13} = \frac{1}{2}[1] = \frac{1}{2}, \quad U_{14} = \frac{1}{2}[-1]$$

Como es simétrica es posible que exista  $U$ , tal que  $U^T U = A$ ,

$$\begin{matrix} 2 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ & & & \end{matrix}$$

La matriz U hasta ahora es:  $[U] = \begin{matrix} 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{matrix}$

$$U_{22} = \sqrt{5 - \sum_{i=1}^l u_{i2}^2} = \sqrt{5 - [ -1^2 ]}, \quad U_{23} = \frac{1}{2} [1 - \sum_{i=1}^l u_{i2} u_{i3}] = \frac{3}{4}$$

$$U_{24} = \frac{1}{2} [0 - [-1] [-\frac{1}{2}]] = \frac{1}{4}$$

$$\begin{matrix} 2 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ & & & \end{matrix}$$

La matriz U ahora es:  $[U] = \begin{matrix} 0 & 2 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{matrix}$

$$U_{33} = \sqrt{a_{33} - \sum_{i=1}^2 u_{i3}^2} = \sqrt{1 - [ [\frac{1}{2}]^2 + [\frac{3}{4}]^2 ]} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad U_{34} = \frac{23}{4\sqrt{3}} \quad \text{y} \quad U_{44} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

La matriz U por lo tanto es:

$$\begin{matrix} 2 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ & & & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 2 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ & & & \end{matrix}$$

$$[U] = \begin{matrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{23}{4\sqrt{3}} \\ & & & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ & & & \end{matrix}$$

Se puede probar que  $U^T U = A$ .

Ejemplo. Sea la matriz:  $[A] = \begin{bmatrix} 9 & -12 & 6 & 3 \\ -12 & 17 & -7 & -3 \\ 6 & -7 & 9 & 5 \\ 3 & -3 & 5 & 12 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} u_{11} &= 3, & u_{12} &= -4, & u_{13} &= 2, & u_{14} &= 1 \\ u_{22} &= 1, & u_{23} &= 1, & u_{24} &= 1 \\ u_{33} &= 2, & u_{34} &= 1, & u_{44} &= 3 \end{aligned}$$

La matriz U por tanto es:  $[U] = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Ejercicio. Sean las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 9 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & 12 \end{bmatrix}$$

Si es posible halle la factorización de Cholesky correspondiente.

En una gran mayoría para plantear el comportamiento de un sistema se utiliza sistema de ecuaciones; para la solución de tales sistemas de ecuaciones existen variados métodos, el más conocido es el de Gauss-Jordan, pero este requiere realizar un gran número de operaciones y, por tanto, gasta mucho espacio en disco y tiempo de procesamiento. En caso de que la matriz sea simétrica se utiliza la factorización de Cholesky.

Dado el sistema de ecuaciones  $A \cdot X = B$ . Si A es simétrica existe U, tal que  $U^T U = A$ ; y así puede escribirse el sistema de ecuaciones como  $U^T \cdot U \cdot X = B$ . Haciendo  $U \cdot X = Y$ , se tiene,  $U^T \cdot Y = B$ ; que es un sistema de ecuaciones fácil de resolver dado que  $U^T$  es una matriz triangular inferior. Una vez resuelto, se halla la solución de  $UX=Y$ , también fácil de solucionar, dado que U es triangular superior.

Ejercicio. Considere los sistemas de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} x - y + z = .05 & x + y + z + w = .6 & 3x + y - z - 2w = 1 \\ -x + 2y = .05, & x + 5y + 3z - w = 1.2 & x + 4y + 2z + w = 8 \\ x + 4z = .15 & x + 3y + 6z + 2w = 1.7, & -x + 2y + 3z - w = 3 \\ & x - y + 2z + 4w = .9 & -2x + y - z + 4w = 2 \end{array}$$

Hallar las soluciones (si existen) utilizando la descomposición LU.



## Cálculo de Raíces

Se entiende aquí, que dada una función  $f(x)$ , si existe un valor  $x^*$  en el cual  $f(x^*)=0$ , a  $x^*$  se le llama una raíz.

Para el cálculo de raíces se emplean los siguientes teoremas:

**Teorema.** Si  $f(x)$  es una función real continua en  $[a,b]$  y si para los valores  $x_1, x_2$  en este intervalo;  $f(x_1), f(x_2)$  tienen signos opuestos entonces hay al menos una raíz real de  $f(x)$  en  $[x_1, x_2]$  de  $[a,b]$ .

**Teorema.** Todo polinomio de grado  $n$  tiene exactamente  $n$  raíces en el plano complejo.

**Teorema.** Todo polinomio de grado impar tiene por lo menos una raíz real.

Existen varios métodos, unos más eficientes que otros, e igualmente unos más fáciles de emplear que otros. Se tienen entre otros los siguientes: de Bisección o de Bolzano, de interpolación lineal, de aproximaciones sucesivas, de punto fijo, de Newton-Raphson,...

### Método de Bisección o de Bolzano

El método de bisección se basa en el teorema de valor intermedio. Supongamos que  $f$  es una función continua en el intervalo  $[a, b]$  con  $f(a)f(b)<0$ , existe, por tanto, un valor  $x^*$  en  $(a, b)$  tal que  $f(x^*) = 0$ <sup>3</sup>.

Este método emplea la búsqueda incremental, divide siempre en dos el intervalo conocido  $[a, b]$ , (dado o calculado) con la condición que  $f(a) f(b) < 0$

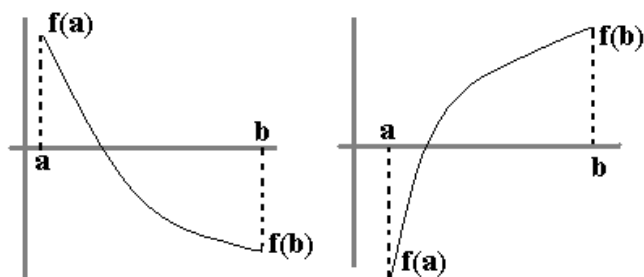
#### Proceso

1. Se da una aproximación  $x_c = (a+b) / 2$
2. Se calcula  $f(x_c)$  y se compara en valor absoluto con el error preestablecido, si es menor o igual que éste, se termina el proceso, indicando a  $x_c$  como una raíz

---

<sup>3</sup> Puede llegar a existir más de un punto que cumple con la condición; es importante determinar el mejor intervalo en el cual exista ese único punto.

3. Se calcula  $f(a)f(x_c)$  para lo cual puede ocurrir:
  - 3a.  $f(a)f(x_c) > 0$ , entonces se hace  $a = x_c$  y se vuelve a 1.
  - 3b.  $f(a)f(x_c) < 0$ , entonces se hace  $b = x_c$  y se vuelve a 1.
4. El proceso se repite hasta hallar la mejor aproximación.



Ejemplo. Sea  $f(x) = x^5 - x^2 - 1$  y  $E = 0.001$

Se tiene  $f(1) = -1$ ,  $f(2) = 27$

a	b	f(a)	f(b)	c	f(c)	cambio
1	2	-1	27	1.5	4.34375	b=c
1	1.5	-1	4.34375	1.25	0.48926	b=c
1	1.25	-1	0.48926	1.125	-0.4636	a=c
1.125	1.25	-0.4636	0.48926	1.1875	-0.04876	b=c

Ejemplo:

$$f(X) = X^3 + X^2 - 5X - 3$$

a	b	f(a)	f(b)	$X_c$	$F(X_c)$
2	3	-1	18	2.5	

Algoritmo

AlgBBo( )

leer f(x)

```

leer a,b, error
f(a)f(b) = 0 ? SI: f(a) = 0 ? SI: a es una raíz, SALIR
NO: b es una raíz, SALIR
NO: f(a)f(b) > 0 SI: "no se puede aplicar"
SALIR
C = (a+b)/2
calcular f(c)
MQ |f(c)| > error
f(a)f(c) < 0 ? SI: b = c
calcular f(b)
NO: a = c
calcular f(a)
c = (a+b)/2
calcular f(c)
FMQ
c es una raíz
FAlgBBo( )
    
```

Para hallar el valor aproximado, en lugar de comparar  $|f(x_c)| \leq \text{error}$ , también puede considerarse:

$$\left| x_{k+1} - x_k \right| < \epsilon \text{ o } \frac{\left| x_{k+1} - x_k \right|}{\left| x_{k+1} \right|} < \epsilon$$

Sin embargo, al usar cualquiera de los criterios, pueden surgir problemas. Por ejemplo, existen sucesiones  $\{X_n\}$  con la propiedad de que las diferencias  $x_{k+1} - x_k$  tienden a cero (convergen), mientras que la sucesión diverge.

Cuando se generan aproximaciones por medio del computador, conviene fijar el número máximo de iteraciones que se podrían efectuar en caso de una divergencia en la sucesión.

### Método de Interpolación Lineal

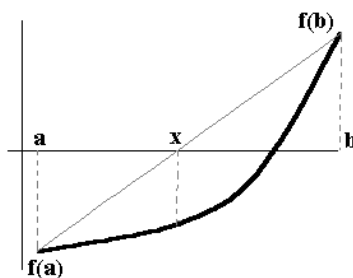
Una alternativa mejorada al método de bisección es el de interpolación lineal, el cual se basa en la idea de aproximarse en forma más eficiente a la raíz.

Hipótesis: Se conoce que  $f(x)$  es continua en  $[a, b]$ , y si  $f(a)f(b) < 0$  habrá una raíz real.

$$\frac{b - x_c}{f(b)} = \frac{b - a}{f(b) - f(a)}$$

Al tomar una aproximación inicial  $x_c$ , dada por la traza de la cuerda  $f(a)f(b)$

$$\text{se tiene: } x_c = b - \frac{f(b)(b - a)}{f(b) - f(a)}$$



#### Proceso

1. Se da una aproximación lineal de  $x_k$  por medio de  $x_k = b - \frac{f(b)(b - a)}{f(b) - f(a)}$
2. Se calcula  $f(x_k)$  y se compara  $|f(x_k)|$  con el error preestablecido
3. Si es mayor que el error, se compara  $f(x_k)f(a)$  con 0, puede ocurrir:
  - 3a.  $f(x_k)f(a) < 0$ , se hace  $b = x_k$
  - 3b.  $f(x_k)f(a) > 0$ , se hace  $a = x_k$
4. Se va al paso 1.

Nota. El error también se puede localizar por  $|x_{k+1} - x_k| < e$ .

Ejemplo:

$$f(X) = X^3 - X^2 + 2X - 7$$

a	b	f(a)	f(b)	$X_k$	$F(X_k)$
1	2	-5	2	5/3	

Algoritmo

AlgILi( )

```

leer f(x)
leer a,b, error
f(a)f(b)=0 ?    SI f(a)=0?    SI a es una raíz, SALIR
                                NO b es una raíz, SALIR
                                NO    f(a)f(b) > 0    SI    "no se puede aplicar"
SALIR
MQ |f(x)| > error
    x=b-[f(b)(b-a)]/[f(b)-f(a)]
    calcular f(x)
    f(a)f(x) < 0 ?    SI    b=x
                                calcular f(b)
                                NO    a=x
                                calcular f(a)
FMQ
x es una raíz
FinAlgLi( )
    
```

## Método de Aproximaciones sucesivas

Dada una función  $f(x)$  que es continua en todo el intervalo  $[a, b]$ , se debe hallar  $x_i$  tal que  $f(x_i) \sim 0$ , para lo cual se definen dos funciones  $h(x)$  y  $g(x)$  tal que  $f(x) = h(x) - g(x)$

Hipótesis. Se debe tener que  $|h'(x)| < |g'(x)|$  para todo  $x$

### Proceso

1. Se da una aproximación inicial  $x_0$
2. Se calcula  $g(x_0)$
3. Se halla  $x_{i+1}$  a partir de  $h(x_{i+1}) = g(x_i)$
4. Se calcula  $f(x_i)$  y se compara con el error, si es menor o igual fin del proceso
5. Se va al paso 3.

Nota. El error también se puede localizar por  $|x_{i+1} - x_i| < e$

Ejemplo:  $f(x) = \sqrt{x+1} - x + 1$ .

$g(x) = x-1$ ,  $g'(x) = 1$ ,  $h(x) = \sqrt{x+1}$ ,  $h'(x) = 1/2\sqrt{x+1}$ . Se tiene que  $h'(x) < g'(x)$ .

Luego se escribe  $\sqrt{X_{k+1} + 1} = X_k - 1$ , es decir,  $X_{k+1} = (X_k - 1)^2 - 1$

Ejemplo:

Sea  $f(X) = X^3 - X^2 + 5X - 7$

Tomemos  $h(X) = X^3 + 5X$ ,  $g(X) = X^2 + 7$

$h'(X) = 3X^2 + 5$ ;  $g'(X) = 2X$

Luego  $g'(X) \leq h'(x)$

Así  $X_{k+1}^2 + 7 = X_k^3 + 5X_k$ , luego  $X_{k+1} = \sqrt{X_k^3 + 5X_k - 7}$

Algoritmo

AlgASu()

Inicio()

i = 0

leer f(x), error

leer xi

descomponer f(x) en h(x) y g(x)

$|h'(x)| < |g'(x)|$  ?

SI: MQ  $|f(x_i)| > \text{error}$

calcular  $f(x_i)$

hallar  $x_{i+1}$  de la relación  $h(x_{i+1}) = g(x_i)$

i = i + 1

FMQ

$x_i$  es una raíz

finAlgASu()

## Método de Newton - Raphson

El método de Newton Raphson es poderoso para hallar las raíces de una función  $f(x)$ . Es un procedimiento general que se aplica en diversas situaciones. Supongamos que  $f$  es continua en  $[a, b]$ . Sea  $x^*$  una aproximación de la raíz  $x^0$  tal que  $f(x^*) \neq 0$  y  $|x^* - x^0|$  es "pequeño".

Puede considerarse la aproximación por Taylor<sup>4</sup>

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) + \frac{f''(x^*)(x - x^*)^2}{2} + \frac{f'''(x^*)(x - x^*)^3}{3!} + R_4$$

Tomando que  $f(x^*) = 0$  por ser raíz, podemos escribir:

---

<sup>4</sup> El utilizar series de Taylor subraya la importancia de una aproximación inicial exacta.

$$0 = f(x^*) + f'(x^*)(x_0 - x^*) + \frac{f''(x^*)(x_0 - x^*)^2}{2}$$

Suponiendo que  $|x_0 - x^*|$  es pequeño, el término  $(x_0 - x^*)^2/2$  es mucho más pequeño y, por tanto, se considera como error.

$$\text{Así que } 0 = f(x^*) + f'(x^*)(x_0 - x^*), \text{ luego } x_0 = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)}$$

En general, se escribe  $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$  para  $k \geq 1$ . Se inicia con una aproximación  $x_0$ .

Ejemplo:

$$\text{Sea } f(X) = X^3 - 5\ln(X) - 1, \quad f'(X) = 3X^2 - \frac{5}{X}$$

$$\text{Así } X_{k+1} = X_k - \frac{X_k^3 - 5\ln(X_k) - 1}{3X_k^2 - \frac{5}{X_k}}$$

Algoritmo

```

AlgNRa( )
Inicio( )
    leer f(x), error
    i = 1
    leer xi
    MQ I < maxiter
        calcular xi+1 = xi - f(xi)/f'(xi)
        |xi+1 - xi| < error ?
        SI: indicar raíz, SALIR
        NO: i = i + 1
    FMQ
    No se puede calcular la raíz
FinAlgNRa( )

```

Ejercicio. Hallar las raíces de  $f(x) = e^x - 2\sin(x) + 2$ ,  $f(x) = 3\ln(x) - 2\sqrt{x} - 1$ .

Teorema. Sea  $f$  continua en  $[a, b]$ , si  $x_0$  en  $[a, b]$  es tal que  $f(x_0) = 0$  y  $f'(x_0) \neq 0$ , entonces existe  $z > 0$  tal que el método de Newton genera una sucesión  $\{x_n\}$  que converge a  $x_0$  para cualquier aproximación inicial  $x_0$  en  $[x_0 - z, x_0 + z]$ .

## Método de la Secante

Una de las desventajas del método de Newton Raphson es que utiliza la derivada de la función, la cual puede dar valores ceros, entonces se puede reemplazar la derivada por un

cociente de diferencias como:  $f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$

Aproximación que tiene su origen en la definición de la derivada a partir del límite, a saber:

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x) - f(u)}{x - u}$$

Así que la formula de Newton se puede escribir como:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) - f'(x_{k-1})} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Esta formula requiere conocer dos puntos, es decir, al iniciar debe darse dos puntos iniciales.

Ejemplo:

$$\text{Sea } f(x) = 2x^3 - 3\sqrt{x+1} + 2$$

Ejercicio. Hallar las raíces de  $f(x) = x^3 - 4\sqrt{x} - \ln(x) + 1$ ,  $f(x) = 4\sqrt{x} - 2x^2 - 5$ .

Algoritmo

```

AlgSec( )
    leer f(x), error
    leer x0
    i = 1
    MQ i < maxiter
        calcular xi+1 = xi - f(xi) * [xi - xi-1] / [f(xi) - f(xi-1)]
        |xi+1 - xi| < error ?
        SI: indicar raíz, SALIR
        NO: i = i + 1
    FMQ
    No se puede calcular la raíz
FinAlgSec( )
    
```



### Iteración de Punto Fijo

Teniendo la función  $f(x)=0$ , puede arreglarse de tal forma que  $x$  quede a la izquierda, es decir,  $x=g(x)$ .

Esta transformación se puede lograr al despejar la variable  $x$ , o al agregar  $x$  a lado y lado de la ecuación.

Ejemplo. Hallar las raíces de  $f(x) = x^3 - 3x + 7$ ,  $f(x) = \sqrt{x} - 2 \ln(x)$ .

a. Para  $f(x) = x^3 - 3x + 7$  se escribe  $x = \frac{x^3 + 7}{3}$ .

b. Para  $f(x) = \sqrt{x} - 2 \ln(x)$  se escribe  $x = \sqrt{x} - 2 \ln(x) + x$

o  $x = [2 \ln(x)]^2$  o  $x = e^{\frac{\sqrt{x}}{2}}$ .

De esta forma, dada una aproximación inicial a la raíz,  $x_i$ , la ecuación  $x=g(x)$  puede usarse para obtener una nueva aproximación  $x_{i+1}$ , expresada por la formula iterativa  $x_{i+1}=g(x_i)$ .

**Ejercicio.** Dadas las funciones  $f(x) = x^5 - 3x^2 - 1$  y  $g(x) = x^3 - \sqrt{(x+3)} - \ln(x) - 3$  y con un error  $E=0.0001$ . Calcular una posible raíz por los métodos de Interpolación lineal, Bisección, Aproximaciones sucesivas, Punto fijo y Newton-Raphson.

### Raíces Complejas

Dado un polinomio:  $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$ . puede tener raíces

reales y raíces complejas, estas últimas con mayor inconveniente para hallarlas.

Una propuesta para determinar las raíces complejas es la siguiente:

1. Conformar un polinomio de grado dos con tres coeficientes de mayor (o menor) exponente.
2. Calcular las respectivas raíces a este polinomio de grado dos. Se consideran como iniciales.
3. Aplicar el proceso iterativo con la formula de la derivada (Newton-Raphson), usando números complejos.
4. Calculada la raíz compleja  $a+bi$ , se reduce el polinomio dividiéndolo por  $a+bi$  y luego en  $a-bi$  y así sucesivamente, hasta llegar a un polinomio de grado dos.

Ejemplo. Sea  $f(x) = x^5 + 4.5x^4 + 7.8x^3 + 10.2x^2 - 5x + 3$

Los polinomios a formar podrían ser:  $h(x) = x^2 + 4.5x + 7.8$  o  $g(x) = 10.2x^2 - 5x + 3$

Las raíces de  $h(x)$  serían:  $x = \frac{4.5 \pm \sqrt{4.5^2 - 4 \cdot 7.8}}{2}$ .

Es decir:  $x_1 = \frac{4.5 + 10.95i}{2}$  y  $x_2 = \frac{4.5 - 10.95i}{2}$ .

### Ajuste de curvas

A veces se requiere determinar la fórmula aproximada de una función a partir de un conjunto de datos; el primer enfrentamiento del ingeniero con el ajuste de curvas puede ser el de determinar un valor medio de los datos en una tabla, cuyo propósito es indicar apriori, cuál es la tendencia central de los datos. El método más simple para ajustar una curva a un conjunto de datos es el de unirlos por medio de líneas rectas (ver figura 6), lo que mostraría el comportamiento general de los datos, pero posiblemente esto no indica mucho y no permite hacer proyecciones fuera del dominio.

El análisis de tendencias representa el proceso de usar el patrón de datos y hacer predicciones para obtener aproximaciones intermedias; esto es interpolar, es decir, se busca estimar datos que se hallan dentro de los límites de los datos dados, o a extrapolar si se requiere conocer datos que están más allá de los límites.

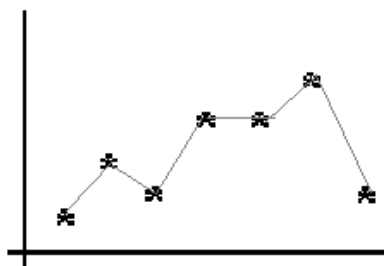


Figura 6. Conexión de puntos en el plano.

### Fundamentos matemáticos

La media estadística de una muestra de datos  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  se define como la suma de los

datos dividido por el número de datos:  $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$

La desviación estándar es una medida de dispersión de esos datos está dada por la formula<sup>5</sup>:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1}}$$

Si la desviación estándar es muy grande, indica que los valores individuales se dispersan muy lejos de la media.

Una medida estadística final a tener muy en cuenta para la cuantificación de la dispersión

de los datos es el coeficiente de variación CV:  $CV = \frac{S}{\bar{y}} 100\%$

### Regresión lineal

El ejemplo más simple de un ajuste o aproximación de un conjunto de parejas de datos observados:  $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$  a una línea recta, es por mínimos cuadrados. La estrategia de este proceso es la de obtener una función aproximada que ajuste "adecuadamente" el comportamiento o tendencia de los datos, sin coincidir necesariamente con cada uno de ellos en particular.

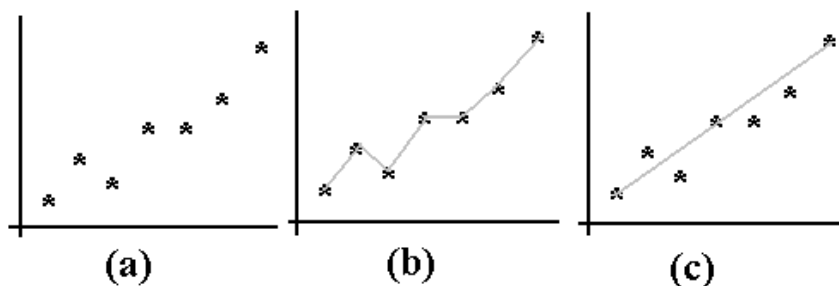


Figura 7. Conexión de puntos.

La expresión matemática de una línea recta es:  $Y_i = a_0 + a_1 X_i + e_i$ , en donde  $a_1$ ,  $a_0$  son coeficientes que representan la pendiente y la intersección con el eje de abscisas y  $e_i$  es el error o residuo entre el modelo y las observaciones, error que se representa reordenando la ecuación como:  $e_i = Y_i - a_0 - a_1 X_i$ .

<sup>5</sup> La división por n-1 y no por n se justifica porque nunca existe dispersión de un sólo dato.  
Universidad Nacional de Colombia

Una "mejor" línea a través de los puntos debe minimizar la suma de los errores o residuos,

es decir: 
$$\min \left[ \sum_{j=1}^n e_j \right] = \min \left[ \sum_{j=1}^n (Y_j - a_0 - a_1 X_j) \right]$$

Sin embargo, este criterio no siempre es adecuado.

Sea el siguiente conjunto de datos:

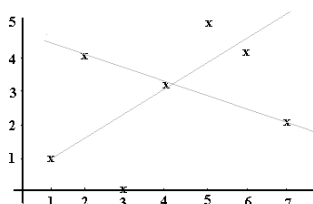
$x_i$	1	1.5	2	2.5	3	4	5	6
$y_i$	2	4	1	3	2	3	4	1

Estos datos en un plano cartesiano estarían dados por la figura 8.

Al unir el primer punto con el ultimo, dejaría por fuera la mayoría de datos. Otra línea también dejaría por fuera varios puntos. Es decir, el criterio es inadecuado (para este ejemplo).

La regresión lineal es una técnica muy poderosa para ajustar datos a una línea, pero los datos no necesariamente se comportan de esta manera, por ejemplo:

$$y = a e^{bx}, \quad y = a x^b, \quad y = a \frac{x}{b+x}.$$



**Figura 8.** Conjunto de datos en el plano.

Las técnicas de regresión lineal se emplean entonces para ajustar directamente estas ecuaciones a los datos experimentales.

Una estrategia que mejora la aproximación es la de minimizar la suma de los cuadrados de los residuos.

### Mínimos cuadrados

Para determinar los valores de las constantes  $a_0$  y  $a_1$ , se deriva la ecuación con respecto a cada uno de los coeficientes.

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i) x_i$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i)$$

Se igualan las ecuaciones a cero para buscar el mínimo de S:

$$0 = \sum y_i - \sum a_0 - \sum a_1 x_i \quad 0 = \sum x_i y_i - \sum a_0 x_i - \sum a_1 x_i^2$$

Las ecuaciones se pueden expresar como:

$$\sum y_i = n a_0 + \sum a_1 x_i \quad \sum x_i y_i = \sum a_0 x_i + \sum a_1 x_i^2$$

Se resuelven las ecuaciones simultáneamente obteniendo:

$$a_1 = \frac{n \sum y_i x_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}$$

Puede observarse que cualquier línea diferente a la que se calculó, genera una mayor suma de cuadrados de los residuos, por tanto, debe considerarse como la mejor línea a través de los puntos.

Se puede cuantificar la eficiencia del ajuste mediante la fórmula  $S_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n-2}}$ , llamada error estándar de la aproximación y que cuantifica la dispersión alrededor de la línea de regresión.

Algoritmo<sup>6</sup>

AlgMCu( )

Teclee número de datos, n

2: Para i = 1 hasta n

Lea x, y

Sx = Sx + x

Sy = Sy + y

<sup>6</sup> Algoritmo es un procedimiento que describe de manera inequívoca una serie finita de pasos a seguirse en un orden determinado. Su finalidad es determinar un conjunto de operaciones para resolver un problema o aproximar a una posible solución. Los algoritmos se describen por medio de un pseudocódigo. Este especifica la forma de entrada de los datos y la forma que tendrá la salida deseada.

```

X2 = X2 + x*x
XY = XY + x*y
FPara
XM = Sx / n
YM = Sy / n
A1 = (n * XY - Sx * Sy) / (n * X2 - (Sx * Sx))
A0 = YM - A1 * XM
Escriba A0, A1
FinAlgMCu( )

```

Ejemplo. Hallar la ecuación de la línea recta que los ajustaría por mínimos cuadrados según los siguientes datos:

$x_i$	1	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0
$y_i$	2	2.4	3.0	2.8	3.1	3.7	3.6	3.9	4.4	4.1	4.3	5.0	5.2	5.8	6.4

$n = 15$ ,  $\sum x_i = 67.5$ ,  $\sum y_i = 59.7$ ,  $\bar{x} = 4.5$ ,  $\bar{y} = 3.98$ ,  $\sum x_i^2 = 373.75$ ,  $\sum x_i y_i = 67.5$

$a_1 =$  ,  $a_0 =$  .

### Regresión Polinomial

Otra alternativa es ajustar polinomios a los datos usando regresión polinomial. El procedimiento de mínimos cuadrados se puede extender fácilmente y ajustar datos a un polinomio de n-ésimo grado.

$$y_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 + \dots + a_n x_i^n$$

En este caso la suma de los cuadrados de los residuos es:

$$S = \sum (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - a_3 x_i^3 - \dots - a_n x_i^n)$$

Siguiendo el mismo procedimiento de los mínimos cuadrados, se toma la derivada de la ecuación con respecto a cada uno de los coeficientes del polinomio, estas ecuaciones se igualan a cero y se ordena de tal forma que se obtenga un conjunto de ecuaciones normales:

$$\begin{aligned}
 a_0 n + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^2 + \dots + a_n \sum x_i^n &= \sum y_i \\
 a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 + \dots + a_n \sum x_i^{n+1} &= \sum x_i y_i \\
 a_0 \sum x_i^2 + a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^4 + \dots + a_n \sum x_i^{n+2} &= \sum x_i^2 y_i \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 a_0 \sum x_i^n + a_1 \sum x_i^{n+1} + a_2 \sum x_i^{n+2} + \dots + a_n \sum x_i^{2n} &= \sum x_i^n y_i
 \end{aligned}$$

Los coeficientes de  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  (las incógnitas), se calculan directamente de los datos observados, por tanto el problema se traslada a resolver un sistema de  $n+1$  ecuaciones lineales simultáneas.

Ejemplo. Encontrar el polinomio de grado 2 que ajuste a los siguientes datos:

$x_i$	1	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5
$y_i$	1.2	5.1	9.3	14.7	21.8	30.6	43.7	60.1	84.9	121.5

En la regresión polinomial, las condiciones normales pueden estar mal condicionadas, en particular cuando los sistemas son muy grandes; esto lleva a que los coeficientes calculados son altamente susceptibles a los errores de redondeo y, por tanto los resultados son inexactos; es un problema potencial.

### Interpolación- Polinomio de Newton

Con frecuencia se desea conocer puntos intermedios entre valores conocidos. El método más empleado para este propósito es la **interpolación polinomial**.

Un polinomio de  $n$ -ésimo grado tiene la formula:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$$

Para  $k+1$  puntos, existe uno y sólo un polinomio de  $k$ -ésimo orden que se ajusta a todos los puntos; sin embargo, existen maneras diferentes de expresar un polinomio de interpolación. El polinomio de interpolación con diferencias divididas de Newton es la forma más útil, pero también se emplean los de Lagrange.

## Interpolación Lineal

La forma más simple de interpolación, es conectar dos puntos con una línea recta, éste método se llama de interpolación lineal.

De la figura 9, empleando triángulos semejantes:  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

Luego se tiene:  $f(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$

Este método es **bueno** cuando el intervalo entre los puntos es pequeño.

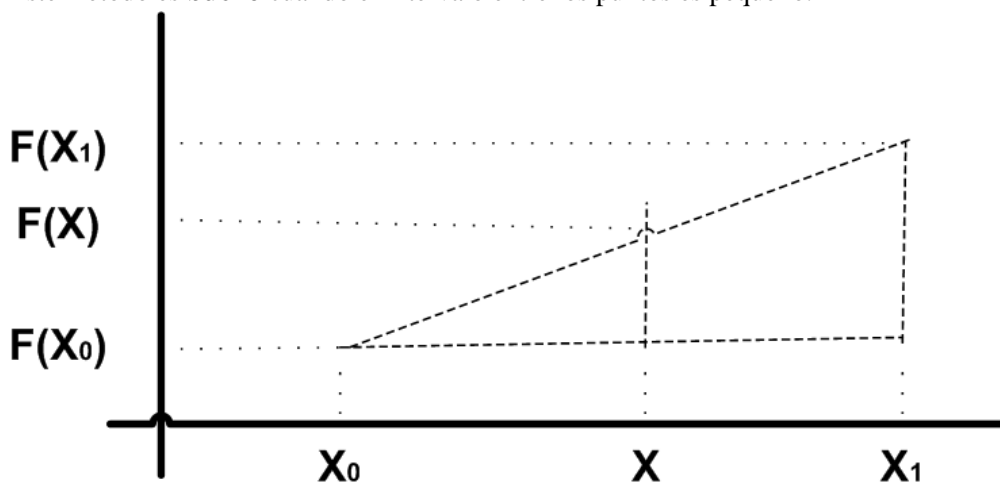


Figura 9. Triángulos semejantes.

## Interpolación Cuadrática

Si se dispone de tres datos, la interpolación debe buscar un polinomio de segundo orden.

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Una manera conveniente para este caso es:

Si  $x = x_0$ ,  $f_2(x_0) = b_0$

Si  $x = x_1$ ,  $b_1 = [f_2(x_1) - f_2(x_0)] / [x_1 - x_0]$

Nótese, que  $b_1$  representa la pendiente de la línea que une los puntos  $x_0$  y  $x_1$ .

Al sustituir lo anterior y evaluar en  $x = x_2$ ,  $b_2 = \frac{\frac{f_2(x_2) - f_2(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f_2(x_1) - f_2(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$



Este término introduce la curvatura de segundo orden en la fórmula.

$$b_2 = \frac{f_2(x_2) - f_2(x_0) - \frac{f_2(x_1) - f_2(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Podemos especificar como se obtiene este resultado.

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{f_2(x_2) - f_2(x_1) + f_2(x_1) - f_2(x_0) - \frac{f_2(x_1) - f_2(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ b_2 &= \frac{\frac{f_2(x_2) - f_2(x_1)}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1) + \frac{f_2(x_1) - f_2(x_0)}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0) - \frac{f_2(x_1) - f_2(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ b_2 &= \frac{\frac{f_2(x_2) - f_2(x_1)}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1) - \frac{f_2(x_1) - f_2(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0 - x_1 + x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ b_2 &= \frac{\frac{f_2(x_2) - f_2(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f_2(x_1) - f_2(x_0)}{x_1 - x_0}}{(x_2 - x_0)} \end{aligned}$$

El análisis anterior puede generalizarse en el ajuste de un polinomio de n-ésimo orden para n+1 puntos;  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ .

$$f_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + c_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) \quad (7)$$

La forma compacta sería: 
$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

Se calculan los coeficientes así:

1. Calcular el polinomio en  $x=x_0$ , para tener  $c_0=f(x_0)$
2. Calcular el polinomio en  $x=x_1$  y se reemplaza  $c_0, c_1=f[x_1, x_0]$
3. Continuar calculando el polinomio en los diferentes  $x_i$  para obtener  $c_2=f[x_2, x_1, x_0]$   
 $\dots c_n=f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0]$

Teniéndose que:  $f[x_i, x_j] = (f(x_i) - f(x_j)) / (x_i - x_j)$ , se llama primera diferencia dividida finita.  
 $f[x_i, x_k, x_j] = (f[x_i, x_k] - f[x_k, x_j]) / (x_i - x_j)$ , segunda diferencia dividida finita, y  
 $f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0] = (f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0]) / (x_n - x_0)$ , n-ésima diferencia dividida finita.

Estas diferencias se emplean para evaluar los coeficientes  $c_i$ , los cuales se sustituyen en la

## Métodos Numéricos

formula 7 para obtener el polinomio de interpolación con diferencias divididas de Newton.

$$f_n(x) = f(x_0) + f[x_1, x_0](x - x_0) + f[x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ + f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Es importante notar que las fórmulas de diferencias son recursivas, es decir:

i	x <sub>i</sub>	f(x <sub>i</sub> )	1a	2a	3a	4a
0	x <sub>0</sub>	f(x <sub>0</sub> )	f[x <sub>0</sub> , x <sub>1</sub> ]	f[x <sub>0</sub> , x <sub>1</sub> , x <sub>2</sub> ]	f[x <sub>0</sub> , x <sub>1</sub> , x <sub>2</sub> , x <sub>3</sub> ]	f[x <sub>0</sub> , x <sub>1</sub> , x <sub>2</sub> , x <sub>3</sub> , x <sub>4</sub> ]
1	x <sub>1</sub>	f(x <sub>1</sub> )	f[x <sub>1</sub> , x <sub>2</sub> ]	f[x <sub>1</sub> , x <sub>2</sub> , x <sub>3</sub> ]	f[x <sub>1</sub> , x <sub>2</sub> , x <sub>3</sub> , x <sub>4</sub> ]	
2	x <sub>2</sub>	f(x <sub>2</sub> )	f[x <sub>2</sub> , x <sub>3</sub> ]	f[x <sub>2</sub> , x <sub>3</sub> , x <sub>4</sub> ]		
3	x <sub>3</sub>	f(x <sub>3</sub> )	f[x <sub>3</sub> , x <sub>4</sub> ]			
4	x <sub>4</sub>	f(x <sub>4</sub> )				

Ejercicio. Los laboratorios King System han puesto a prueba la resistencia eléctrica del chip XT-14 que han construido. Para cada grupo de 1000 chips aplican voltaje, algunos se dañan, lo cual después de varias repeticiones del experimento por cerca de diez grupos de personas independientemente un grupo de otro, se obtienen datos establecidos en la siguiente tabla:

Voltaje	1	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	10.5
dañados	2	2.3	3.1	3.8	4.6	5.7	6.6	7.9	9.4	11.1	12.8	14.5	16.2	18.5	20.4	22.7	24.9	27.2	31.4	37.2

## Polinomios de interpolación de Lagrange

El polinomio de Lagrange, simplemente es una reformulación del polinomio de Newton que evita los cálculos de las diferencias divididas, éste se representa concretamente como:

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i)$$

En donde:

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Con PI se denota el "producto de..."

$$\text{Así, } f_1(x) \text{ es: } f_1(x) = \sum_{i=0}^1 L_i(x) f(x_i) = f(x_0) \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

y  $f_2(x)$  es:

$$f_2(x) = \sum_{i=0}^2 L_i(x) f(x_i) = f(x_0) \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} * \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} + f(x_1) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} * \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + f(x_2) \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} * \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Es decir,  $f_2(x)$  es:

$$f_2(x) = \sum_{i=0}^2 L_i(x) f(x_i) = f(x_0) \frac{(x-x_1)^2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1) \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2) \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

También se tiene: 
$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \left[ \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right]$$

Por ejemplo, para calcular  $f_2(x)$ :

$$f_2(x) = \sum_{i=0}^2 L_i(x) f(x_i) = f(x_0) \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1) \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2) \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

La extrapolación es el proceso de calcular un valor de  $f(x)$  que cae fuera del rango de los puntos base conocidos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .

## Aproximación de funciones

El cálculo en funciones cuando estas son de difícil manejo o desconocidas se realiza en operaciones elementales por aproximación: utilizando métodos de interpolación, derivación, o integración numérica. Para aproximar generalmente se dispone de un conjunto de puntos tabulados. Los métodos de Newton, Lagrange, y otros más, no requieren que los datos estén uniformemente espaciados, pero en este espacio interesa como soporte matemático los procesos de diferencias finitas con datos equiespaciados.

Las diferencias finitas pueden ser:

1. Progresivas
2. Regresivas

Si los datos están igualmente espaciados, se tendría:

$$\begin{array}{ll} x_1 = x_0 + h & x_1 = x_0 - h \\ x_2 = x_0 + 2h & x_2 = x_0 - 2h \\ \dots & \dots \\ x_n = x_0 + nh & x_n = x_0 - nh \end{array}$$

Según sea ascendente o descendente la visualización.

### 1. Diferencias Progresivas

El operador de diferencias progresivas se nota por  $\Delta$ , que aplicado a una función produce la primera diferencia progresiva de ella, así:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

Se puede encontrar el conjunto de las primeras diferencias progresivas para los  $n+1$  puntos conocidos de  $f(x)$ , teniendo en cuenta la notación de  $x_0 + h = x_1$ ,  $x_i + h = x_{i+1}$ ,  $f(x_i) = f_i$

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) = f_{0+1} - f_0 = f_1 - f_0 = \Delta f_0$$

$$\Delta f(x_1) = \Delta f_1 = f(x_1 + h) - f(x_1) = f(x_0 + h + h) - f(x_0 + h) = f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h) = f_2 - f_1 = \Delta f_1$$

$$\Delta f(x_2) = f(x_2 + h) - f(x_2) = f(x_0 + 2h + h) - f(x_0 + 2h) = f(x_0 + 3h) - f(x_0 + 2h) = f_3 - f_2 = \Delta f_2$$

...

$$\Delta f(x_n) = f(x_0 + nh + h) - f(x_0 + nh) = f(x_0 + (n+1)h) - f(x_0 + nh) = f_{n+1} - f_n = \Delta f_n$$

Aplicando la definición de diferencia progresiva y la potenciación en ella, se tiene:

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 f_0 &= \Delta[\Delta f_0] = \Delta[\Delta f(x_0)] = \Delta[f_1 - f_0] = \Delta f_1 - \Delta f_0 = [f_{1+h} - f_1] - [f_{0+h} - f_0] \\ &= f_2 - 2f_1 + f_0 \end{aligned}$$

Así,

$$\Delta^2 f_0 = f_2 - 2f_1 + f_0$$

$$\Delta^3 f_0 = \Delta^2[\Delta f_0] = f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0$$

...

$$\Delta^n f_0 = f_n - nf_{n-1} + n(n-1)/2 f_{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} nf_1 + (-1)^n f_0$$

$$\text{Es decir: } \Delta^n f(x_0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_{n-k} (-1)^k$$

$$\text{Y, en general, } \Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_{x+(n-k)h} (-1)^k$$

Propiedades del operador de diferencias progresivas:

$$\Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$$

$$\Delta[kf(x)] = k\Delta f(x)$$

$$\Delta^n[\Delta^m f(x)] = \Delta^{n+m} f(x)$$

Proposición: Si  $f(x)$  es un polinomio de grado  $n$ ;  $f(x) = \sum a_i x^i$ , entonces  $\Delta^n f(x)$  es una constante y es igual a:  $a_n n!$

Al considerar las diferencias finitas del polinomio de Newton con valores equidistantes a una distancia  $h$ :

$$f[x_0, x_1] = (f(x_1) - f(x_0)) / (x_1 - x_0) = f(x_1) - f(x_0) / h = \Delta f(x_0) / h = \Delta f_0 / h$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = (f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]) / (x_2 - x_0) = \\ [f(x_2) - f(x_1) / h] - [f(x_1) - f(x_0) / h] / 2h = \Delta^2 f(x_0) / 2h^2 = \Delta^2 f_0 / 2h^2$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = (f[x_3, x_2, x_1] - f[x_2, x_1, x_0]) / (x_3 - x_0) = \Delta^3 f(x_0) / 6h^3 = \Delta^3 f_0 / 3!h^3$$

$$\text{Generalizando se tiene: } f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] = \Delta^n f_0 / n!h^n$$

Por tanto el polinomio de Newton en diferencias finitas quedaría:

$$f_n(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_0 - h) + \dots \\ + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_0 - h)(x - x_0 - 2h) \dots (x - x_0 - (n-1)h)$$

## 2. Diferencias Regresivas

El operador de diferencias regresivas se representa por  $\nabla$ , que aplicado a una función produce la primera diferencia regresiva de ella, así:

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x - h)$$

por tanto,

$$\nabla f(x_0) = f(x_0) - f(x_0 - h) = f_0 - f_{0-1} = f_0 - f_{-1} = \nabla f_0$$

$$\nabla f(x_1) = \nabla f_1 = f(x_0 + h) - f(x_0 + h - h) = f(x_1) - f(x_0) = f_1 - f_0 = \nabla f_1$$

$$\nabla f(x_2) = f(x_0 + 2h) - f(x_0 + 2h - h) = f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h) = f_2 - f_1 = \nabla f_2$$

...

$$\nabla f(x_n) = f(x_0 + nh) - f(x_0 + nh - h) = f(x_0 + nh) - f(x_0 + (n-1)h) = f_n - f_{n-1} = \nabla f_n$$

similarmente se puede tener:

$$\nabla f_0 = f_0 - f_{-1}$$

$$\nabla^2 f_0 = \nabla[\nabla f_0] = \nabla[\nabla f(x_0)] = \nabla[f_0 - f_{-1}] = \nabla f_0 - \nabla f_{-1} = [f_0 - f_{-1}] - [f_{-1} - f_{-2}] \\ = f_0 - 2f_{-1} + f_{-2}$$

luego

$$\nabla^2 f_0 = f_0 - 2f_{-1} + f_{-2}$$

$$\nabla^3 f_0 = \nabla^2[\nabla f_0] = f_0 - 3f_{-1} + 3f_{-2} - f_{-3}$$

...

$$\nabla^n f_0 = f_0 - nf_{-1} + n(n-1)/2f_{-2} - \dots + (-1)^{n-1}nf_{n-1} + (-1)^nf_n$$

es decir,  $\nabla^n f(x_0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_{-k} (-1)^k$

y en general,  $\nabla^n f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_{x-kh} (-1)^k$

Propiedades del operador de diferencias regresivas:

$$\nabla[f(x)+g(x)] = \nabla f(x) + \nabla g(x)$$

$$\nabla[kf(x)] = k\nabla f(x)$$

$$\nabla^n[\nabla^m f(x)] = \nabla^{n+m} f(x)$$

### El operador $\hat{E}$ y el operador $\hat{I}$

Se llama  $\hat{E}$  el operador de desplazamiento o aumento y se define como  $\hat{E}f(x) = f(x+h)$ , por tanto,  $\hat{E}^2 f(x) = \hat{E}[\hat{E}f(x)] = \hat{E}f(x+h) = f(x+2h)$ ,

Igualmente,  $\hat{E}^3 f(x) = \hat{E}[\hat{E}^2 f(x)] = \hat{E}f(x+2h) = f(x+3h)$ ,

Y generalizando,  $\hat{E}^n f(x) = \hat{E}[\hat{E}^{(n-1)} f(x)] = \hat{E}f(x+(n-1)h) = f(x+nh)$ ,

Se llama  $\hat{I}$  el operador unitario y se define como:  $\hat{I}f(x) = f(x)$

Utilizando estos operadores se tiene:

$$\hat{A}f(x) = f(x+h) - f(x) = \hat{E}f(x) - \hat{I}f(x) = [\hat{E} - \hat{I}]f(x)$$

Así que,  $\hat{E} = \hat{A} + \hat{I}$ , o  $\hat{A} = \hat{E} - \hat{I}$

Nuevamente,

$$\hat{A}f(x) = f(x+h) - f(x) = \hat{E}f(x) - \hat{I}f(x) = [\hat{E} - \hat{I}]f(x)$$

$$\hat{A}^2 f(x) = \hat{E}^2 f(x) - 2\hat{E}\hat{I}f(x) + \hat{I}^2 f(x) = \{\hat{E}^2 - 2\hat{E}\hat{I} + \hat{I}^2\}f(x) = [\hat{E} - \hat{I}]^2 f(x)$$

$$\hat{A}^3 f(x) = \hat{E}^3 f(x) - 3\hat{E}^2 \hat{I}f(x) + 3\hat{E}\hat{I}^2 f(x) - \hat{I}^3 f(x) = \{\hat{E}^3 - 3\hat{E}^2 \hat{I} + 3\hat{E}\hat{I}^2 - \hat{I}^3\}f(x) = [\hat{E} - \hat{I}]^3 f(x)$$

$$\hat{A}^n f(x) = [\hat{E} - \hat{I}]^n f(x)$$

Por tanto,

$$f_{x+h} = \hat{E}f_x = [\hat{A} + \hat{I}]f_x$$

$$f_{x+2h} = \hat{E}^2 f_x = [\hat{A} + \hat{I}]^2 f_x = [\hat{A}^2 + 2\hat{A} + \hat{I}]f_x$$

$$f_{x+3h} = \hat{E}^3 f_x = [\hat{A} + \hat{I}]^3 f_x = [\hat{A}^3 + 3\hat{A}^2 + 3\hat{A} + \hat{I}]f_x, \text{ y así,}$$

$$f_{x+nh} = \hat{E}^n f_x = [\hat{A} + \hat{I}]^n f_x = [\hat{A}^n + n\hat{A}^{n-1} + n(n-1)\hat{A}^{n-2} + \dots + n\hat{A} + \hat{I}]f_x$$

Es decir,  $\hat{E}^n f_x = [I + \Delta]^n f_x = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \Delta^i f_x$

Como un caso especial se tiene  $f_x = \hat{E}^x f_0 = \sum_{i=0}^n \binom{x_i}{i} \Delta^i f_0$

Llamada la formula de diferencias avanzada de Newton.

Ejemplo. Sea que se tienen los datos:

x	0	1	2	3	4	5
f	-5	1	9	25	55	105

x	$f_x$	$\Delta f_x$	$\Delta^2 f_x$	$\Delta^3 f_x$	$\Delta^4 f_x$
0	-5	6	2	6	0
1	1	8	8	6	0
2	9	16	14	6	
3	25	30	20		
4	55	50			
5	105				

Luego  $f_x = \hat{E}^x f_0 = [\Delta + I]^x f_0 = [I + x\Delta + \frac{x(x-1)}{2}\Delta^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\Delta^3]f_0$   
 $= f_0 + x\Delta f_0 + \frac{(x^2-x)}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{(x^3-3x^2+2x)}{6}\Delta^3 f_0$   
 $= -5 + 6x + \frac{(x^2-x)}{2} \cdot 2 + \frac{(x^3-3x^2+2x)}{6} \cdot 6 = x^3 - 2x^2 + 7x - 5$

Ejemplo. Considere los datos

X	0	1	2	3	4	5
Y	-15	-2	9	32	65	95

x	$f_x$	$\Delta f_x$	$\Delta^2 f_x$	$\Delta^3 f_x$	$\Delta^4 f_x$	$\Delta^5 f_x$
0	-15	13	2	8	7	4
1	-2	11	10	1	3	
2	9	21	11	4		
3	32	33	7			
4	65	40				
5	95					

Este ejemplo, lleva a determinarse que no es adecuado aplicar las diferencias finitas en todos los casos.





## Diferenciación

Las series de Taylor permiten la expansión de funciones por la fórmula:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

A menudo también se representa la función, al hacer en la ecuación anterior  $x = x_0 + x_1$

$$f(x_0 + x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} x_1^n$$

Si en esta fórmula se hace  $x_0 = x_i$  y  $x_1 = kh$ ,  $k$  entero,  $h$  un incremento

$$f(x_i + kh) = f(x_i) + (kh)f^{(1)}(x_i) + \frac{(kh)^2}{2!} f^{(2)}(x_i) + \frac{(kh)^3}{3!} f^{(3)}(x_i) + \dots$$

Al hacer  $f_i = f(x_i)$ ,  $x_{i+k} = x_i + kh$ ,

$$\text{Entonces queda } f_{i+kh} = f_i + (kh)f_i^{(1)} + \frac{(kh)^2}{2!} f_i^{(2)} + \frac{(kh)^3}{3!} f_i^{(3)} + \dots$$

En particular si  $k=1, -1, 2$  o  $-2$ , se hallan las siguientes expresiones para  $f(x)$

$$f_{i+1} = f_i + h f_i^{(1)} + \frac{h^2}{2!} f_i^{(2)} + \dots + \frac{h^n}{n!} f_i^{(n)} + \dots \quad (1)$$

$$f_{i-1} = f_i - h f_i^{(1)} + \frac{h^2}{2!} f_i^{(2)} - \dots + \frac{(-h)^n}{n!} f_i^{(n)} - \dots \pm \quad (2)$$

$$f_{i+2} = f_i + 2h f_i^{(1)} + \frac{(2h)^2}{2!} f_i^{(2)} + \dots + \frac{(2h)^n}{n!} f_i^{(n)} + \dots \quad (3)$$

$$f_{i-2} = f_i - 2h f_i^{(1)} + \frac{(2h)^2}{2!} f_i^{(2)} - \dots + \frac{(-2h)^n}{n!} f_i^{(n)} - \dots \pm \dots \quad (4)$$

De la ecuación (1) puede hallarse la siguiente expresión:

$$f_i^{(1)} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \left[ \frac{h^2}{2} f_i^{(2)} + \frac{h^3}{6} f_i^{(3)} + \dots \right]$$

De la cual, eliminando el término en paréntesis, se obtiene la expresión aproximada

$$f_i^{(1)} = \frac{1}{h} [f_{i+1} - f_i]$$

Si igualmente, se despeja  $f_i^{(1)}$  de la formula (4) se tiene:  $f_i^{(1)} = \frac{1}{2h} [f_i - f_{i-2}]$

o al despejar de la fórmula (2),  $f_i^{(1)} = \frac{1}{h} [f_i - f_{i-1}]$

y así sucesivamente, se puede hallar otras formulas que son aproximaciones de la derivada.

Al sumar la fórmula (1) y (2) se tiene:  $f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + h^2 f_i^{(2)} + \frac{2h^4}{4!} f_i^{(4)} + \dots$

de donde se obtiene:  $f_i^{(2)} = \frac{1}{h^2} [f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}] - \frac{h^2}{12} f_i^{(4)} + \dots$

Igualmente, al sumar las fórmulas (3) y (4) se obtiene:

$f_i^{(2)} = \frac{1}{2h^2} [f_{i+2} - 2f_i + f_{i-2}] - \frac{h^2}{6} f_i^{(4)} + \dots$

Realizando diferentes combinaciones se hallan fórmulas para  $f_i^{(2)}$ ,  $f_i^{(3)}$ ,  $f_i^{(4)}$ , ... algunas de estas operaciones y simplificaciones se representan en la siguiente tabla:

	Der.	Mul.		Formula				error
1	$hf^{(1)}$	1	<b>-1</b>	1				$-1/2hf^{(2)}$
2		1/2	<b>-3</b>	4	-1			$1/3h^2f^{(3)}$
3		1/6	<b>-11</b>	18	-9	2		$-1/4h^3f^{(4)}$
4		1/12	<b>-25</b>	48	-36	16	-3	$1/5h^4f^{(5)}$
5		1/2	-1	<b>0</b>	1			$-1/6h^2f^{(3)}$
6		1/6	-2	<b>-3</b>	6	-1		$1/12h^3f^{(4)}$
7		1/12	1	-8	<b>0</b>	8	-1	$-1/30h^4f^{(5)}$
8		1/12	-3	<b>-10</b>	18	-6	1	$1/20h^4f^{(5)}$
9	$h^2f^{(2)}$	1	<b>1</b>	-2	1			$-hf^{(3)}$
10		1	<b>2</b>	-5	4	-1		$11/12h^2f^{(4)}$
11		1/12	<b>35</b>	-104	114	-56	11	$-5/6h^3f^{(5)}$
12		1	1	<b>-2</b>	1			$1/12h^2f^{(4)}$
13		1	1	<b>-2</b>	1	0		$-1/12h^2f^{(4)}$
14		1/12	11	<b>-20</b>	6	4	-1	$-1/12h^3f^{(5)}$
15		1/12	-1	16	<b>-30</b>	16	-1	$1/90h^4f^{(5)}$
16	$h^3f^{(3)}$	1	<b>-1</b>	3	-3	1		$-3/2hf^{(4)}$
17		1/2	<b>-5</b>	18	-24	14	-3	$7/4h^2f^{(5)}$
18		1	-1	3	-3	1		$-1/2hf^{(4)}$
19		1/2	-3	<b>10</b>	-12	6	-1	$1/4h^2f^{(5)}$
20		1/2	-1	2	<b>0</b>	-2	1	$-1/4h^2f^{(5)}$



Al multiplicarlas se tiene:

$$\begin{array}{cccccc}
 \underline{-3} & \underline{1} & -2 & 1 & & \\
 4 & & 1 & -2 & 1 & \\
 -1 & & & 1 & -2 & 1 \\
 \hline
 & \underline{-3} & 10 & -12 & 6 & -1 & \Sigma = 0
 \end{array}$$

$$f_i^{(2)} = \frac{1}{2h^3} [-3f_i + 10f_{i+1} - 12f_{i+2} + 6f_{i+3} - f_{i+4}]$$

Una nueva fórmula para la tercer derivada, que es precisamente la 19 de la tabla.

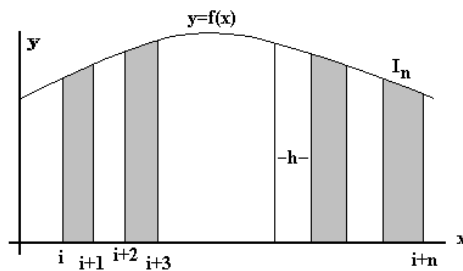
## Integración

La integral de una función  $f(x)$  puede ser calculada integrando su expansión en series de

Taylor termino a término: 
$$I_k(i) = \int_{x_i}^{x_i+kh} f(z) dz = \int_0^{kh} f(x_i + z) dz$$

$f(x_i+z)$  puede ser substituido por la serie de Taylor

$$f(x_i+z) = f_i + z f_i^{(1)} + \frac{z^2}{2} f_i^{(2)} + \frac{z^3}{3!} f_i^{(3)} + \dots$$



Es decir,

$$I_k(i) = \int_0^{kh} f(x_i + z) dz = \int_0^{kh} \left[ f_i + z f_i^{(1)} + \frac{z^2}{2} f_i^{(2)} + \frac{z^3}{3!} f_i^{(3)} + \dots \right] dz$$

$$I_k(i) = \left[ z f_i + \frac{z^2}{2} f_i^{(1)} + \frac{z^3}{6} f_i^{(2)} + \frac{z^4}{24} f_i^{(3)} + \dots + \frac{z^n}{n!} f_i^{(n-1)} + \dots \right]_0^{kh}$$

Reemplazando los límites, se obtiene:

$$I_k(i) = (kh) f_i + \frac{(kh)^2}{2} f_i^{(1)} + \frac{(kh)^3}{6} f_i^{(2)} + \frac{(kh)^4}{24} f_i^{(3)} + \dots$$

Si la primera derivada es reemplazada por una formula de diferenciación de m puntos dada anteriormente, aproximadas formulas  $I_{nm}(i)$  por  $I_n(i)$  se pueden hallar en términos de los valores pivote de  $f(x)$ .

Por ejemplo, si se toma la formula:  $f_i^{(1)} = \frac{1}{h} [f_{i+1} - f_i] - \frac{h}{2} f_i^{(2)} + \dots$ , que tiene 2 puntos,

se tendría: 
$$I_{n2}(i) = (nh) f_i + \frac{(nh)^2}{2} \left[ \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{h}{2} f_i^{(2)} \right] + \frac{(nh)^3}{6} f_i^{(2)} + \dots$$

$$I_{n2}(i) = (nh) f_i - \frac{(nh)^2}{2h} f_i + \frac{(nh)^2}{2h} f_{i+1} - \frac{n^2 h^3}{4} f_i^{(2)} + \frac{(nh)^3}{6} f_i^{(2)} + \dots$$

$$I_{n2}(i) = (nh) f_i - \frac{(nh)^2}{2h} f_i + \frac{(nh)^2}{2h} f_{i+1} - \frac{n^2 h^3}{4} f_i^{(2)} + \frac{(nh)^3}{6} f_i^{(2)} + \dots$$

$$I_{n2}(i) = \frac{h}{2} [(2n - n^2) f_i + n^2 f_{i+1}] - \frac{n^2 h^3}{12} (3 - 2n) f_i^{(2)} + \dots$$

Por lo cual, una formula aproximada de integración es:

$$I_{n2}(i) = \frac{h}{2} [(2n - n^2) f_i + n^2 f_{i+1}] \quad \text{con} \quad e_i = -\frac{n^2 h^3}{12} (3 - 2n) f_i^{(2)} + \dots$$

En especial para n=1, se halla la regla trapezoidal

$$I_{12}(i) = \frac{h}{2} [f_i + f_{i+1}] \quad \text{con} \quad e_i = -\frac{h^3}{12} f_i^{(2)}$$

Para n=3:

$$I_{32}(i) = \frac{h}{2} [9 f_{i+1} - 3 f_i] \quad \text{con} \quad e_i = \frac{9}{4} h^3 f_i^{(2)}$$

Cuando n es par, es a menudo más conveniente integrar f(x) con n tiras simétricamente localizadas cerca de  $x_{i+n/2}$

$$I_n(i) = \int_{x_i}^{x_i+nh} f(z) dz = \int_0^{nh} f(x_i + z) dz = \int_{-\frac{nh}{2}}^{\frac{nh}{2}} f(x_i + \frac{nh}{2} + z) dz = \int_{-\frac{nh}{2}}^{\frac{nh}{2}} f(x_{i+\frac{n}{2}} + z) dz = \int_{-\frac{nh}{2}}^{\frac{nh}{2}} f_{i+\frac{n}{2}}(z) dz$$

$$\text{Por Taylor} \quad f(x_{i+\frac{n}{2}} + z) = f_{i+\frac{n}{2}} + z f_{i+\frac{n}{2}}^{(1)} + \frac{z^2}{2} f_{i+\frac{n}{2}}^{(2)} + \frac{z^3}{3!} f_{i+\frac{n}{2}}^{(3)} + \frac{z^4}{4!} f_{i+\frac{n}{2}}^{(4)} + \dots$$

Así,

$$I_n(i) = \int_{-\frac{nh}{2}}^{\frac{nh}{2}} f_{i+\frac{n}{2}}(z) dz = z f_{i+\frac{n}{2}} + \frac{z^2}{2} f_{i+\frac{n}{2}}^{(1)} + \frac{z^3}{3!} f_{i+\frac{n}{2}}^{(2)} + \frac{z^4}{4!} f_{i+\frac{n}{2}}^{(3)} + \frac{z^5}{5!} f_{i+\frac{n}{2}}^{(4)} + \dots \Big|_{-nh/2}^{nh/2}$$

$$\text{Es decir: } I_n(i) = (nh) f_{i+\frac{n}{2}} + \frac{(nh)^3}{24} f_{i+\frac{n}{2}}^{(2)} + \frac{(nh)^5}{1920} f_{i+\frac{n}{2}}^{(4)} + \dots$$

Esto permite aproximar valores de  $I_{nm}(i)$  al reemplazar por formulas de diferenciación. Por

$$\text{ejemplo, si se usa: } f_i^{(2)} = \frac{1}{h^2} [2 f_i - 5 f_{i+1} + 4 f_{i+2} - f_{i+3}] - \frac{h^2}{12} f_i^{(4)}$$

que tiene cuatro puntos pivotes, se puede escribir:

$$f_{i+\frac{n}{2}}^{(2)} = \frac{1}{h^2} [2 f_{i+\frac{n}{2}} - 5 f_{i+\frac{n}{2}+1} + 4 f_{i+\frac{n}{2}+2} - f_{i+\frac{n}{2}+3}] - \frac{h^2}{12} f_{i+\frac{n}{2}}^{(4)} + \dots$$

Por tanto,

$$I_{n4}(i) = nhf_{i+\frac{n}{2}} + \frac{(nh)^3}{24h^2} [2f_{i+\frac{n}{2}} - 5f_{i+\frac{n}{2}+1} + 4f_{i+\frac{n}{2}+2} - f_{i+\frac{n}{2}+3}] - [\frac{h^2}{12} + \frac{(nh)^5}{1920}] f_{i+\frac{n}{2}}^{(4)}$$

$$I_{n4}(i) = \frac{h}{24} [(2n^3 + 24n)f_{i+\frac{n}{2}} - 5f_{i+\frac{n}{2}+1} + 4f_{i+\frac{n}{2}+2} - f_{i+\frac{n}{2}+3}] - \frac{h^2}{1920} [160 - n^5 h^3] f_{i+\frac{n}{2}}^{(4)}$$

Se puede tener en general la siguiente tabla:

No	n	m	mult	i-1	i	i+1	i+2	i+3	i+4	i+5	error
1	1	1	h		<u>1</u>	<u>0</u>					$h^2/2f'$
2	1	2	h/2		<u>1</u>	<u>1</u>					$-h^3/12f''$
3	1	3	h/12		<u>5</u>	<u>8</u>	-1				$h^4/24f^{(3)}$
4	1	3	h/12	-1	<u>8</u>	<u>5</u>					$-h^4/24f^{(3)}$
5	1	4	h/24	-1	<u>13</u>	<u>13</u>	-1				$11h^5/720f^{(4)}$
6	1	4	h/24		<u>9</u>	<u>19</u>	-5	1			$19h^5/720f^{(4)}$
7	1	5	h/720		<u>251</u>	<u>646</u>	-264	106	-19		$27/1440h^6f^{(5)}$
8	1	5	h/720	-19	<u>346</u>	<u>456</u>	-74	11			$-11/1440h^6f^{(5)}$
9	2	1	2h		<u>1</u>	0	<u>0</u>				$2h^2f'$
10	2	1	2h		<u>0</u>	1	<u>0</u>				$h^3/3f^{(2)}$
11	2	2	h/2		<u>0</u>	4	<u>0</u>				$h^3/3f^{(2)}$
12	2	3	h/3		<u>1</u>	4	<u>1</u>				$-h^5/90f^{(4)}$
13	2	3	h/12	4	<u>-8</u>	28	<u>0</u>				$h^4/3f^{(2)}$
14	2	4	h/3		<u>1</u>	4	<u>1</u>	0			$-h^5/90f^{(4)}$
15	3	1	h		<u>3</u>	0	0	<u>0</u>			$9/2h^2f'$
16	3	2	h/2		<u>-3</u>	9	0	<u>0</u>			$27/12h^3f^{(2)}$
17	3	3	h/12		<u>9</u>	0	27	<u>0</u>			$9/24h^4f^{(3)}$
18	3	4	3h/8		<u>1</u>	3	3	<u>1</u>			$-h^5/80f^{(4)}$
19	4	1	h		<u>4</u>	0	0	0	<u>0</u>		$8h^2f'$
20	4	2	h/2		<u>-8</u>	16	0	0	<u>0</u>		$80/12h^3f^{(2)}$
21	4	3	4h/3		<u>0</u>	2	-1	2	<u>0</u>		$14h^5/15f^{(2)}$
22	5	1	h		<u>5</u>	0	0	0	0	<u>0</u>	$25/2h^2f'$
23	5	2	h/2		<u>-15</u>	25	0	0	0	<u>0</u>	$175/12h^3f^{(2)}$

n = número de franjas, m = puntos pivotes

NOTAS.

1. Los coeficientes subrayados indican los puntos entre los que se realiza la integración
2. Una formula desplazada a la derecha da lugar a otra desplazada a la izquierda invirtiendo el orden de los coeficientes
3. La suma de los coeficientes por el multiplicador debe dar igual a nh
4. Las formulas se pueden usar sucesivamente.

La fórmula 4, de una franja, de 3 puntos pivotes con multiplicador h/12, que dice:

$$I_{13}(i) = \int_i^{i+1} f(x)dx = \frac{h}{12}[-f_{i-1} + 8f_i + 5f_{i+1}], \text{ puede ser, } \frac{h}{12}[5f_{i-1} + 8f_i - f_{i+1}]$$

Ejercicios.

Sean los siguientes datos:

x	1.0	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05
y <sub>1</sub>	.6021	.6053	.6085	.6117	.6149	.6180
y <sub>2</sub>	1.386	1.394	1.401	1.409	1.416	1.423

- I. Calcular  $f_{1.02}^{(1)}$ ,  $f_{1.02}^{(2)}$ ,  $f_{1.02}^{(3)}$ ,  $f_{1.02}^{(4)}$ ,  $f_{1.02}^{(5)}$  con formulas que tengan 5, 6, 7, 8 y 9 puntos pivotes respectivamente.
- II. Calcular con mínimo 3 franjas cada una de las integrales  

$$z = \int_{1.01}^{1.05} f(x)dx, \quad z = \int_{1.02}^{1.04} f(x)dx.$$
- III. Podría evaluar la función por Lagrange o Newton.
- IV. Por formula avanzada de Newton calcular f(1.045)



## Ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones compuestas de una función incógnita y su derivada, se conocen con el nombre de ecuación diferencial. En general, ellas expresan el cambio proporcional de una variable y de sus parámetros<sup>7</sup>. En esta sección nos ocuparemos de varios tipos de problemas numéricos asociados a las ecuaciones diferenciales.

La variable a diferenciar en la ecuación, se dice es la variable dependiente. La variable respecto a la cual se va a derivar es la variable independiente. Cuando la función incluye una variable dependiente, es una ecuación diferencial ordinaria; que está en contraste con las ecuaciones diferenciales parciales que comprenden dos o más variables dependientes.

Las ecuaciones diferenciales se denominan por el orden; una ecuación es de orden n-ésimo si posee una n-ésima derivada. En general, se escribe una ecuación diferencial como:  $y^{(n)}(x) = f(y, y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)})$

La solución de una ecuación diferencial ordinaria es una función específica de la variable dependiente y de los parámetros que satisfacen la ecuación.

Por ejemplo, se tiene la función  $y^{(1)} = \frac{1}{2}(1+x)y^2$ , se desea saber cuál es el valor  $y(0.1)$  y  $y(0.2)$ , sabiendo que  $y(0)=1$ .

Esta función es sencilla (de primer orden) y hallar su solución analítica no es complicado.

$$\frac{y^{(1)}}{y^2} = \frac{1}{2}(1+x), \text{ es decir, } y^{-2} dy = \frac{1}{2}(1+x)dx, \text{ luego } y = \frac{-4}{2x + x^2 + C}$$

$$\text{como } y(0) = 1, \text{ entonces } c = -4, \text{ luego } y = \frac{-4}{x^2 + 2x - 4}$$

Pero para calcular lo solicitado se utiliza una aproximación numérica por series de Taylor.

---

<sup>7</sup> Las leyes fundamentales de la física, la mecánica, la electricidad y la termodinámica, entre otras, se basan en observaciones empíricas que explican la variación de las propiedades físicas y estados de los sistemas. Para escribir el estado de los sistemas físicos, las leyes se expresan en **cambios** del tiempo y del espacio.

### Métodos Numéricos

Recordando se tiene:  $y(x_i + h) = y_i + h y_i^{(1)} + \frac{h^2}{2} y_i^{(2)} + \frac{h^3}{3!} y_i^{(3)} + \frac{h^4}{4!} y_i^{(4)} + \dots$

Se conoce  $y(0) = 1$ , se puede calcular  $y_0' = 1/2$ <sup>8</sup>. Se calcula  $y''$ ,  $y'''$ ,  $y^{iv}$ , ... hasta donde se desee el error y luego se calcula  $y(0.1)$ , tomando  $h = 0.1$ , o  $y(0.2)$  con  $h = 0.2$

Así  $y(0.1) = 1 + 0.1 \cdot 1/2 + (0.1)^2/2 \cdot 1 + (0.1)^3/6 \cdot 9/4 + \dots = 1.055375$  con error de orden 4

Las derivadas que aparecen aquí se calculan a partir de la ecuación diferencial dada:

$$y^{(2)} = \frac{1}{2} [y^2 + 2y y^{(1)}(1+x)], \quad y_0^{(2)} = 1$$

$$y^{(3)} = \frac{1}{2} [2y y^{(1)} + 2[y^{(1)^2}(1+x) + y(y^{(2)}(1+x) + y^{(1)})]], \quad y_0^{(3)} = 2.25$$

¿Cuáles son las ventajas y las desventajas del método de la serie de Taylor?

El método depende de derivar repetidamente la ecuación diferencial dada, por consiguiente la ecuación debe tener derivadas parciales de orden  $n$ . El procedimiento tiene una sencillez conceptual y precisión muy alta.

Ejercicio. Sea la función  $y^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{x+1})y^2$ , se desea saber cuál es el valor  $y(0.1)$  y  $y(0.2)$ , sabiendo que  $y(0) = 1$ .

Ejemplo. Sea  $y^{(1)} = y[e^x + 1]$ , con  $y(0) = 1$ , calcular  $y(0.1)$ ,  $y(0.2)$ .

$$y^{(2)} = y^{(1)}(e^x + 1) + y e^x, \quad y_0^{(2)} = 5$$

$$y^{(3)} = y^{(2)}(e^x + 1) + 2y^{(1)}e^x + y e^x, \quad y_0^{(3)} = 15$$

$$y^{(4)} = y^{(3)}(e^x + 1) + 3y^{(1)}e^x + y^{(1)}e^x + y e^x, \quad y_0^{(4)} = 52$$

Así que  $y(0.1) = 1.227717$

Si se considera en la serie de Taylor  $y^{(1)} = f(x, y)$ ; entonces puede escribirse  $y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$ . Que es llamada la fórmula de Euler (Euler-Cauchy) o de pendiente puntual.

Esta fórmula tiene la ventaja de no necesitar ninguna derivada. Sin embargo, es necesario tomar pequeños valores de  $h$  para obtener una precisión aceptable.

---

<sup>8</sup> Esto se calcula en la misma ecuación diferencial dada.

### Métodos Numéricos

Ejemplo. Sea  $y' = -x^3 + 6x^2 - 4x + 3$ , con  $y_0 = 2$ , se puede tener para  $x=0$  hasta  $x=2$ :<sup>9</sup>

$$y(0.5) = y(0) + f(0,2) * 0.5 = 2 + 3 * 0.5 = 3.5$$

$$y(1.0) = y(0.5) + f(0.5, 3.5) * 0.5 = 3.5 + [-0.5^3 + 6 * 0.5^2 - 4 * 0.5 + 3] * 0.5 = 4.4375$$

$$y(1.5) = 6.4375$$

$$y(2.0) = 10$$

Para la ecuación  $y^{(1)} = \frac{1}{2}(1+x)y^2$  con  $y(0)=1$ ;  $y(0.1)=1+0.5*0.1=1.05$

$$y(0.2) = y(0.1) + f(0.1, 1.05) * 0.1 = 1.05 + [1/2(1.01)(1.05)^2] * 0.1 = 1.11567625$$

Para la ecuación  $y^{(1)} = y[e^x + 1]$ ;  $y(0.1)=1+2*0.1=1.2$

$$y(0.2) = y(0.1) + f(0.1, 1.2) * 0.1 = 1.2 + [1/2(e^1 + 1)] * 0.1 =$$

Ejercicio.

Sea  $y' = y^2(e^x - 1)$ , con  $y_0 = 1$ .

El método se puede mejorar al no tomar una sola pendiente (derivada), sino un promedio de las dos pendientes que existen en los puntos  $x_i$  y  $x_{i+1}$ , es decir, con  $y'_i = f(x_i, y_i)$  y con  $y'_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$ , se tendría en el caso anterior,  $y_{i+1} = y_i + \{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\} / 2 * h$ , lo que da un valor más aproximado. Se conoce como la formula mejorada de Euler.

Ejemplo. Sea  $y^{(1)} = \frac{1}{2}(1+x)y^2$ ,  $y(0)=1$

$$y_{0.1} = y_0 + h/2 \{f(0,1) + f(0.1, 1.05)\}$$

Se debe primero calcular  $f(0.1, 1.05)$  por Euler

$$f(0.1, 1.05) = 1.05 + [1/2(1+0.1)(1.05)^2] * 0.1 = 1.11567625$$

$$\text{Entonces } y(0.1) = 1 + 0.1[1/2(1 + 1.11567625)] = 1.0807838125$$

La solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias incluye dos tipos de error:

1. Errores de truncamiento causados por la aproximación empleada en el método.
2. Errores de redondeo debido a las cifras significativas consideradas.

Podemos emplear el método de Euler para integrar numéricamente una función.

---

<sup>9</sup> Podría considerarse la formula de Euler como el resultado de:  $\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = y'$ ; luego

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n, x)$$

### Métodos Numéricos

Ejemplo:

Sea  $y' = -x^3 + 3x^2 - 1.5$ , calcular la integral entre 0 y 1 con un incremento de .2, siendo  $y_0 = 1$ .

$$\begin{aligned}y_{0.2} &= y_0 + f(0,1)(0.2) = 1 - 1.5 * .2 = 1.3 \\y_{i+1} &= y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx \quad y_{0.4} = y_{.2} + f(0.2, 1.3)(0.2) = 1.3 - 1.388 * .2 = 1.0224 \\y_{.6} &= y_{.4} + f(.4, 1.0224) * .2 = 1.0224 - 1.084 * .2 = 0.8056 \\y_{.8} &= y_{.6} + f(.6, 0.8056) * .2 = 0.8056 - 0.636 * .2 = 0.6784 \\y_1 &= y_{.8} + f(.8, 0.6784) * .2 = 0.6784 + .5 * .2 = 0.7784\end{aligned}$$

Ejemplo:

Sea  $y' = -2x^4 + 3x^2 + 1$ , calcular la integral entre 0 y 1 con un incremento de .1, siendo  $y_0 = 1$ .

Al aplicar el método de Euler mejorado, los cálculos de la ecuación son un poco más lentos; sin embargo, la ventaja de la solución consiste en que el método es más estable que el simple de Euler.

### Métodos de Runge-Kutta

El método de la serie de Taylor presenta las ventajas de no requerir algún análisis previo. Al utilizar el método de Taylor de orden 5 debemos derivar sucesivamente hasta hallar  $y^{(4)}$ . Además, los órdenes de precisión son bajos. Para mejorar la precisión se requiere una  $h$  pequeña, lo que aumenta el tiempo de cálculo y provoca errores de redondeo. Los métodos de Runge-Kutta evaden esta dificultad y mejoran el orden de precisión.

El método de Runge-Kutta de primer orden consiste en considerar la ecuación diferencial ordinaria:  $y' = f(x, y)$ ,  $y(0) = y_0$  para calcular  $y_{i+1}$  en  $x_{i+1} = x_i + h$ , dado un valor  $y_i$ , se integra la ecuación en el intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx$$

Por tanto, es aplicar un método de integración numérica a la integral del lado derecho de la ecuación.

### Runge-Kutta de segundo orden

Sea la serie de Taylor  $y(x_i + h) = y_i + h y_i^{(1)} + \frac{h^2}{2} y_i^{(2)} + \frac{h^3}{3!} y_i^{(3)} + \frac{h^4}{4!} y_i^{(4)} + \dots$

Considerando  $y^{(1)} = f(x, y)$ ,  $y^{(2)} = f_x + f_y y^{(1)} = f_x + f_y f$

Luis Carlos Torres Soler

En este caso los subíndices denotan derivadas parciales y se ha utilizado repetidamente la regla de la cadena para las derivadas. Los primeros términos en la serie de Taylor se puede escribir como:

$$y_{i+1} = y_i + hf + \frac{h^2}{2} [f_x + f_y f] + o(h^3) = y_i + \frac{h}{2} f + \frac{h}{2} [f + hf_x + hf_y f] + o(h^3)$$

Podemos eliminar las derivadas parciales recurriendo a los primeros términos de la serie de Taylor de dos variables:

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + hf_x + kf_y + \frac{1}{2} [h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}] + \dots^{10}$$

es decir,  $f(x+h, y+k) = f + hf_x + kf_y + o(h^2)$ .

Así que reescribimos:  $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} f + \frac{h}{2} f(x+h, y+kf) + o(h^3)$

Por consiguiente la fórmula para hallar la solución a la ecuación diferencial es:

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2} f(x, y) + \frac{h}{2} f(x+h, y+kf(x, y))$$

$$\circ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) + \frac{h}{2} f(x_i+h, y_i+kf(x_i, y_i))$$

Esta fórmula se utiliza repetidamente para avanzar paso a paso en el proceso. Este método también se llama método de Heun.<sup>11</sup>

Considerando  $k_1 = f(x_i, y_i)$ ,  $k_2 = f(x_i+ph, y_i+qhk_1)$ , se escribe la fórmula general como

$$y_{i+1} = y_i + h/2 k_1 + h/2 k_2$$

y generalizando aun más,  $y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$

Debiéndose tener:

$$a_1 + a_2 = 1$$

$$a_2 p = 1/2$$

$$a_2 q = 1/2$$

Debido a que se tienen tres ecuaciones con cuatro incógnitas, existen innumerables soluciones.

---

<sup>10</sup> Al derivar con respecto a y existe  $y^{(1)}$ , que es  $f(x, y)$

<sup>11</sup> El método de Runge-Kutta de segundo orden es idéntico al método predictor-corrector de Euler, que es un método muy simple.

Si se supone que  $a_2 = 1$ , entonces  $p = q = 1/2$ , es decir:

$$y_{i+1} = y_i + f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)\right)$$

Fórmula denominada como método mejorado del polígono.

Ralston y Rabinovich determinaron escoger  $a_2 = 2/3$ ; es decir

$$y_{i+1} = y_i + 2f\left(x_i + \frac{3h}{4}, y_i + \frac{3h}{4} f(x_i, y_i)\right) \frac{h}{3}$$

Al realizar derivaciones y derivaciones se tendría;

$$y^{(3)} = f_{xx} + f_{xy} f + [f_x + f_y f] f_y + f[f_{yx} + f_{yy} f]$$

Pero, la extensión de los métodos de Runge-Kutta se realiza en forma análoga, teniéndose para un tercer orden:

$$y_{i+1} = y_i + [k_1 + 4k_2 + k_3] \frac{h}{6}$$

Donde:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + h/2, y_i + hk_1/2) \\ k_3 &= f(x_i + h, y_i - hk_1 + 2hk_2) \end{aligned}$$

Similarmente, podemos describir los métodos de Runge-Kutta de cuarto orden:

$$y_{i+1} = y_i + [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \frac{h}{6}$$

donde:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + h/2, y_i + hk_1/2) \\ k_3 &= f(x_i + h/2, y_i - hk_1 + h/2 k_2) \\ k_4 &= f(x_i + h, y_i + hk_3) \end{aligned}$$

Esta fórmula es conocida como el básico de Runge-Kutta de cuarto orden, dado que existe número infinito de versiones.

Ejercicio. Sean los siguientes datos:

x	1.000	1.010	1.020	1.030	1.040	1.050	1.060	1.070	1.080	1.090	1.100
f	.6021	.6053	.6085	.6117	.6149	.618	.613	.607	.601	.594	.581
g	1.386	1.394	1.401	1.409	1.416	1.423	1.419	1.407	1.397	1.385	1.376

*Métodos Numéricos*

I. Calcular  $f_{1.07}^{(2)}$ ,  $g_{1.02}^{(4)}$  con formulas que tengan 7 y 8 puntos pivotes respectivamente.

II. Calcular el área entre 1.0 y 1.1 para f y g. Empleando diferentes formulas en f y g.

III. Dada la ecuación diferencial

$$y^{(1)} = xy\sqrt{1+x^2} \quad , \quad \text{con } y_0 = 1.395612$$

Calcular  $y_{0.5}$  con un error de .00001 por lo menos por tres métodos. Compare y analice la razón de sus resultados ( $h=0.1$ )

IV. Dada la función  $g(x) = X^6 - 3X^5 + 2X^3 - 7X + 1$

a) Calcule  $\Delta^2 g(2)$  con un desplazamiento de .001

b) Calcule  $\nabla^3 g(2)$  con un desplazamiento de .01

Ejercicio. Hallar las raíces reales de  $X^3 + 3X^2 - X - 4$  con un error de  $e=5 \times 10^{-5}$

Sea  $f(0)=-17$ ,  $f(1)=-9$ ,  $f(2)=3$ ,  $f(3)=18$ ,  $f(4)=45$ ,  $f(5)=101$ ,  $f(6)=211$ ; calcular  $f(2.01)$

Sea  $f_0=-5.25$ ,  $f_1=-5.1$ ,  $f_2=-4.65$ ,  $f_3=-3.3$ ,  $f_4=.75$ ,  $f_5=12.9$ ,  $f_6=49.35$ ; calcular  $f_{1.105}$ ,  $f_{3.01}$ ,  $f_{4.99}$

## Ejercicios

a. La producción de papa esta dada por la función  $y^{(1)} = xy\sqrt{(1+x^2)}$  con  $y_0=1$ . Considerando que 0.1 equivale a un mes, calcular la producción para junio del 2002, por dos métodos totalmente diferentes. Compare y analice la razón de sus resultados con la solución real.

b. Calcule  $z = \int_1^{2.01} x^3 \sqrt{x^2 - 1} \, dx$  utilizando dos tipos de formulas.

c. Dados los valores:

x	1	1.2	1.4	1.5	1.6	1.8	2.
y	-1.004	-0.2475	1.5895	0.6581	-3.2125	-2.5065	1.2465

Calcular  $y'_{1.5}$  y  $y^{(2)}_{1.4}$  con dos formulas diferentes para cada caso. Compare resultados.

d. Halle una formula para  $y^{(3)}$  de nueve puntos.



## Bibliografía

BURDEN Richard, FAIRES Douglas (2002). *Análisis numérico*. 7ª ed., Thomson Learning, Bogotá.

CHAPRA Steven (2002). *Métodos numéricos para ingenieros*. 4ª ed., McGrawHill, Bogotá.

LUTHE GARCIA Rodolfo (1998). *Métodos numéricos*. Limusa, México.

MATHEWS Jhon H., FINK Kurtis D. (2000). *Métodos numéricos con MATLAB*. 3ª ed., Prentice Hall, Madrid.

NAKAMURA Shoichiro (1997). *Análisis numérico y visualización gráfica con MATLAB*. Prentice Hall, México.

NAKAMURA Shoichiro (1992). *Métodos numéricos aplicados con software*. 1ª. ed., Prentice Hall, México.

NIEVES Antonio (1997). *Métodos numéricos aplicados a la ingeniería*. CECSA, México.

ZILL Dennis G., CULLEN Michael (2001). *Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en frontera*. 5ª ed., Thomson Learning, México.