DL2 : Calcul de $\cos\left(\dfrac{\pi}{17}\right)$

January 2024

Le but de ce problème est le calcul de $\cos\left(\dfrac{\pi}{17}\right)$ à l'aide de radicaux.
Pour tout le problème $a = \dfrac{\pi}{17}$.

1. (a) Pour $b, h \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
   Montrer que $\sin\left(\dfrac{h}{2}\right)\cos(b+nh) + \sin\left(\dfrac{n}{2}h\right)\cos\left(b+\dfrac{n-1}{2}h\right) = \sin\left(\dfrac{n+1}{2}h\right)\cos\left(b+\dfrac{h}{2}h\right)$.

   (b) Soient $b \in \mathbb{R}$ et $h \geq 0$ tels que $h \not\equiv 0(2\pi)$. Montrer par récurrence que pour tput $n \geq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos(b+kh) = \frac{\sin\left(\dfrac{n}{2}h\right)\cos\left(b+\dfrac{n-1}{2}h\right)}{\sin\left(\dfrac{h}{2}\right)}$$

2. On définit $x, y, \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} x &= \cos(3a)+\cos(5a)+\cos(7a)+\cos(11a) \\ y &= cos(a)+\cos(9a)+\cos(13a)+\cos(15a) \end{cases}$$

   (a) Montrer que $x+y = \dfrac{1}{2}$.

   (b) Montrer que $xy = -2\left(\cos(a)-\cos(2a)+\cos(3a)-\cos(4a)+\cos(5a)-\cos(6a)+\cos(7a)-\cos(8a)\right)$.

   (c) Déduire des deux questions précédentes que $xy = -1$.

   (d) Donner alors un polynôme du secon degré dont x et y sont les racines.

   (e) Montrer que $x \geq y$.

   (f) En déduire que

$$\begin{cases} x &= \dfrac{1+\sqrt{17}}{4} \\ y &= \dfrac{1-\sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} z &= \cos(3a)+\cos(5a) \\ t &= \cos(7a)+\cos(11a) \\ u &= \cos(a)+\cos(13a) \\ v &= \cos(9a)+\cos(15a) \end{cases}$$

   (a) Montrer que $zt = uv = -\dfrac{1}{4}$.

   (b) En calculant les valeurs de $z+t$ et $u+v$, donner deux polynômes du second degré dont z et t sont solutions du premier polynôme, et u et v sont les solutions du deuxième.

   (c) En remarquant que $z > 0$ et que $v < 0$, déterminer les valeurs de z, t, u et v.

4. (a) Calculer $\cos(a)\cos(13a)$ et $\cos(a)+\cos(13a)$ en fonction des réels de la question précédente.

   (b) En déduire que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)=\frac{1-\sqrt{17}}{16}+\frac{\sqrt{17-\sqrt{17}}}{8\sqrt{2}}+\frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}+\frac{1-\sqrt{17}}{\sqrt{2}}\sqrt{17-\sqrt{17}}+4\sqrt{2}\sqrt{17+\sqrt{17}}}$$