LYCEE MOHAMMED VI D'EXCELLENCE

Chapitre 0 : Rappels Calculatoires

1 L'ordre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

Définition 1

Étant donnés $x, y \in \mathbb{R}$, on dit que :

- x est inférieur ou égal à y, ou y est supérieur ou égal à x, et on note $x \leq y$ ou $y \geq x$ si $y - x$ est un réel positif ou nul.
- x est inférieur strictement à y, ou$y$ est supérieur strictement à x, et on note $x < y$ ou $y > x$, si $y - x$ est un réel strictement positif.

Exercice 1 *Comparer* $\frac{3}{4}$ *et* $\frac{10}{13}$.

Propriétés 1

Les relations d'ordre $\leq$ et $\geq$ sur $\mathbb{R}$ vérifient les propriétés suivantes :

- **Transitivité:**
  Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$.
- **Compatibilité avec l'addition** :
  Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$, alors $x + z \leq y + z$.
- **Compatibilité avec la multiplication** :
  Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $z \geq 0$, si $x \leq y$, alors $xz \leq yz$.
  Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $z \leq 0$, si $x \leq y$, alors $xz \geq yz$.

Remarque 1 *Les relations d'ordre sont également compatibles avec la soustraction et la division par un nombre* ***strictement positif***.

Exercice 2 *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *l'inéquation* $7x - 1 \leq 3x - 7$.

Exercice 3 *Soient* x_1, x_2, y_1 *et* $y_2 \in \mathbb{R}$.

1. *Montrer que si* $x_1 \leq y_1$ *et* $x_2 \leq y_2$*, alors* $x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$.
2. *Montrer que si* $0 \leq x_1 \leq y_1$ *et* $0 \leq x_2 \leq y_2$ *alors* $0 \leq x_1x_2 \leq y_1y_2$.

Notation. Si $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $a^0 = 1$ et pour tout $n > 0$ $a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$. et $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

On a alors pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et tous $m, n \in \mathbb{Z}$:

Propriétés 2

- $(xy)^n = x^n y^n$
- $x^{n+m} = x^n x^m$
- $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$

Remarque 2 *Pour tout* $x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.

Application. Montrer que pour tous réels a, b, $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Exercice 4 *Soient* $a, b > 0$. *Comparer* $1 - \frac{a}{b}$ *et* $\frac{b}{a} - 1$.

Notation. Pour tout $a \geq 0$, il existe un unique $b_a \geq 0$ tel que $b_a^2 = a$. On note $\sqrt{a} := b_a$ ou $a^{\frac{1}{2}} = b_a$. Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et tout $a \geq 0$, il existe un unique $b_a \geq 0$ tel que $b_a^n = a$ et on note $\sqrt[n]{a} = b_a$ ou $a^{\frac{1}{n}} = b_a$.

Remarque 3 *Les résultats dans Propriétés 2 restent vraies pour* $x, y \geq 0$ *et pour des puissances* $r, s \in \mathbb{Q} - \{0\}$.

Méthode 1 *Comparer deux réels* ***positifs*** *revient tout simplement à comparer leurs carrées.*

Exercice 5 *Comparer* $\sqrt{5} + \sqrt{13}$ *et* $\sqrt{34}$.

Définition 2

Si a, b sont deux réels tels que $a \leq b$, on appelle le segment $[a, b]$ l'ensemble des réels compris entre a et b.

Exemples 1 *Si* $a \in \mathbb{R}$, $\{a\} = [a, a]$.

Définition 3

Un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ est dit un intervalle de $\mathbb{R}$ si pour tous x, y de I tels que $x \leq y$ on a $[x, y] \subseteq I$.

Propriétés 3

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont exactement les sous-ensembles suivants :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}, \text{ pour } a \leq b$$

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}, \text{ pour } a \leq b$$

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}, \text{ pour } a \leq b$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}, \text{ pour } a \leq b$$

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x\}, \text{ pour } a \in \mathbb{R}$$

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a < x\}, \text{ pour } a \in \mathbb{R}$$

$$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}, \text{ pour } b \in \mathbb{R}$$

$$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}, x < b\}, \text{ pour } b \in \mathbb{R}$$

Exercice 6 *Soient* $x, y \in [1, 2]$. *Encadrer* $\frac{x-y}{x+y}$.

Définition 4

On appelle **valeur absolue** d'un réel x, et qu'on note $|x|$, la valeur

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Remarque 4 *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

- $|x| \geq 0$.
- $|x| \geq x$ *et* $|x| \geq -x$.

Exemples 2 $|-1| = 1$ *et* $|3.4| = 3.4$.

Remarque 5 *D'abord, on a* $|x| \geq 0$*, et si* $x, y \in \mathbb{R}$*, on définit*

$$\max(x,y) = \begin{cases} x & si \quad x \geq y \\ \\ y & si \quad x \leq y \end{cases}$$

alors $|x| = \max(x, -x)$.

Question Que désigne graphiquement la valeur $|x-y|$ sur la droite réelle ?

Exercice 7 *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *l'équation* $|4-x| = x$.

Exercice 8 *Résoudre graphiquement l'inéquation* $|x-1| \leq 2$.

Propriétés 4

Si $x, a \in \mathbb{R}$, alors

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

Exercice 9 *Refaire l'exercice 8 avec calcul.*

2 Résolution des équations sur $\mathbb{R}$

2.1 Équations de la forme $ax + b = 0$

Considérons sur $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$ax + b = 0 \tag{1}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$. On note par S l'ensemble de solutions réels de (1).
On distingue les cas suivantes :

- **1er cas :** Si $a = 0$.
  - Si $b = 0$, alors $S = \mathbb{R}$.
  - Si $b \neq 0$, alors $S = \varnothing$.
- **2ème cas :** Si $a \neq 0$.
  Alors, $S = \left\{ \dfrac{-b}{a} \right\}$.

2.2 Équations du deuxième degré

On s'intéresse maintenant aux équations du deuxième degré, i.e. les équations de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.
On commence par calculer la valeur $\Delta = b^2 - 4ac$, qu'on appelle **le discriminant du** trinôme $aX^2 + bX + c$. Trois cas se présentent :

- **1er cas:** Si $\Delta > 0$:
  Alors l'équation (2) admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

  On a alors $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$ et $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$ et

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

  Donc on a le tableau de signes suivant (en supposant par exemple que $x_1 \leq x_2$):

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

- **2ème cas:** Si $\Delta = 0$:
  L'équation en question alors admet une seule solution sur $\mathbb{R}$, à savoir $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$ et

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

  On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de a	

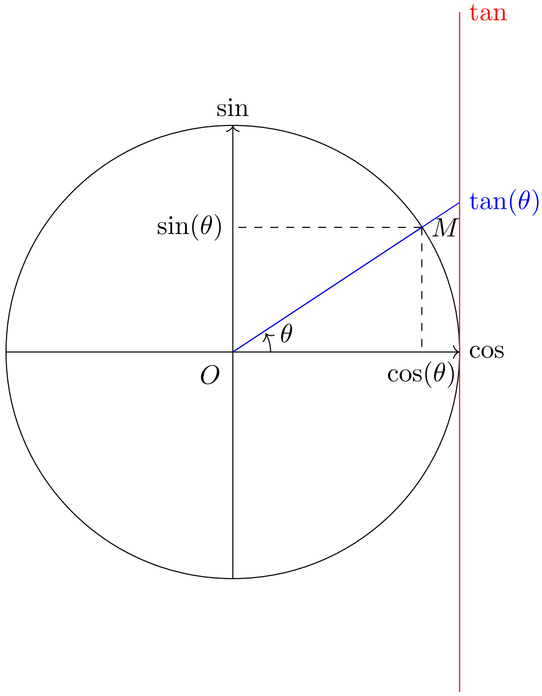
- **3ème cas :** $\Delta < 0$: L'équation alors n'admet pas de solutions sur $\mathbb{R}$ et le signe de $ax^2 + bx + c$ sur $\mathbb{R}$ est le signe de a .

Méthode 2 *Le signe d'un trinôme peut être déterminé en étudiant ses racines, en calculant son discriminant.*

Exercice 10 *Déterminer le signe de $x^2 + x - 2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Exercice 11 *Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On note $b = x + y$ et $c = xy$. Donner une équation sur $\mathbb{R}$ du deuxième degré dont les solutions réelles sont x et y.*

3 Cercle Trignométrique



La fonction qui à chaque $\theta \in \mathbb{R}$ fait associer l'abscisse (resp. la coordonée) du point M, est appellée **cosinus** et notée cos (resp. appellée **sinus** et notée sin) .
On appelle fonction **tangente** et on note *tan* la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ par
$\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Proposition 1: L

fonction cos (resp. sin) est strictement décroissante (resp. strictement croissante) sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Proposition 2

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors,

- $\cos(x) = \cos(y) \iff x = y + 2k\pi$ ou $x = -y + 2k\pi,$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin(x) = \sin(y) \iff x = y + 2k\pi$ ou $x = \pi - y + 2k\pi,$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $x, y \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, alors

$$\tan(x) = \tan(y) \iff x = y + k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Remarque 6 *Si $x, y \in \mathbb{R}$, pour exprimer le fait que $x = y + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on note $x \equiv y[2\pi]$.*

Corollaire 1

Si $x \in \mathbb{R}$, alors :

1. La fonctions cos :
   - $\cos(x) = -1 \iff x \equiv \pi[2\pi]$.
   - $\cos(x) = 0 \iff x \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
   - $\cos(x) = 1 \iff x \equiv 0[2\pi]$.
2. La fonction sin :
   - $\sin(x) = -1 \iff x \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.
   - $\sin(x) = 0 \iff x \equiv \pi[2\pi]$.
   - $\sin(x) = 1 \iff x \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Exercice 12 *Résoudre sur $\mathbb{R}$ les deux équations suivantes:*

$$\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(3x - 1) = -\frac{1}{2}$$

Propriétés 5

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors

y	$-x$	$\pi - x$	$\pi + x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} + x$
$\cos(y)$	$\cos(x)$	$-\cos(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(y)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)$	$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\cos(x)$

Proposition 3

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Propriétés 6

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, alors :

- $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$.
- $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(y)$.
- Si $x, y, x+y \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, alors $\tan(x+y) = \dfrac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$
- $\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$.
- $\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(y)$.
- Si $x, y, x+y \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, alors $\tan(x+y) = \dfrac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$

Corollaire 2

Si $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ &= 2\cos^2(x) - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2(x) \end{aligned}$$

et $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

Corollaire 3

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, alors

- $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right)$.
- $\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$.
- $\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y) + \sin(x-y)\right)$.

Exercice 13 *1. Rappeler la valeur de* $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

2. Calculer alors $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

3. En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

4 Calcul de limites

4.1 Propriétés

Propriétés 7

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $l, l' \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions; on a les tableaux suivants :

- **la somme :**

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) + g(x)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	

- **le produit :**

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x)$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Remarque 7 *Les mêms régles de calculs de limites s'appliquent sur la soustraction et la division, en utilisant le fait que*

$$\frac{1}{\pm\infty} = 0^{\pm} \ \ et \ \ \frac{1}{0^{\pm}} = \pm\infty$$

Exercice 14 *Calculer la limite en* 1 *et en* $+\infty$ *de* $f : x \longrightarrow \dfrac{x^2+1}{1-x}$.

Théorème 1

Soient a, b et $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = l$

Exercice 15 *Caluler* $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{1-x}$.

Théorème 2: La limite par encadrement (ou des gendarmes)

Soient f, g, h des fonctions définies sur I un intervalle ouvert à valeurs réelles et $a \in I$ tels que :

$$\forall x \in I, g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = h(x) = l \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

Remarque 8 *Avec les mêmes données du théorème précédent*

- *Si* $\lim_{x \to a} h(x) = -\infty$, *alors* $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.
- *Si Si* $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$, *alors* $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Exercice 16 *Calculer* $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x}$.

4.2 Limites usuelles

Propriétés 8

1. **Fonctions circulaires :**
   - $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.
   - $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.
   - $\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$.
2. **Fonctions** $\ln$ **et** $\exp$ **:**
   - $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$.
   - $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.
3. **Croissances Comparées :** Si $a \in]0, +\infty[$, alors
   - $\lim_{x \to 0^+} x^a \ln(x) = 0$.
   - $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0$.
   - $\lim_{x \to 0} \frac{x^a}{e^x} = 0$.

5 Calcul de dérivées et primitives

$f(x)$	Ensemble de définition	Intervalle(s) de dérivabilité	$f'(x)$
Cte	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
$ax+b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a
x^2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2x$
x^3	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$3x^2$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^{*-}$ et $\mathbb{R}^{*+}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^{*-} et \mathbb{R}^{*+}$	$-nx^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^{*+}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{ax+b}{cx+d}$	$\mathbb{R} - \{-c/d\}$	$\mathbb{R} - \{-c/d\}$	$\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$	$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}^{*+}$	$\mathbb{R}^{*+}$	$\frac{1}{x}$
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x

Théorème 3

Soient f, g deux fonctions réelles définies et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

- la fonction $f+g : x \longmapsto f(x)+g(x)$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on a $(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$.
- la fonction $\lambda.f : x \longmapsto \lambda f(x)$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on a $(\lambda.f)'(x) = \lambda f'(x)$.
- la fonction $(fg) : x \longmapsto f(x)g(x)$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- Si de plus g ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\dfrac{f}{g} : x \longmapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$.
  En particulier, $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x) = -\dfrac{g'(x)}{(g(x))^2}$.

Exercice 17 *Calculer la dérivée de la fonction* $x \longmapsto \dfrac{2x-1}{5x^2+3}$.

Théorème 4

Si f est une fonction réelle définie et dérivable sur un intervalle I et à valeurs dans un intervalle J, et g est une fonction réelle définie et dérivable sur J, alors la fonction composée $(g \circ f) : x \longmapsto g(f(x))$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on a

$$(g \circ f)'(x) = f'(x).g'(f(x))$$

Exercice 18 *Déterminer les dérivées des fonctions composées,* f^2, $\sqrt{f}$, $\exp(f)$ *et* $\ln(f)$.

Définition 5

Soient f et F deux fonctios réelles définies sur un intervalle I.
On dit que F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I telle que $F'(x) = f(x)$, pour tout $x \in I$.

Théorème 5

Si f est une fonction réelle définie et continue sur un intervalle I, alors f admet des primitives sur I.
De plus, si F et G sont deux prmitives de f sur I, alors il existe $c \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in I$

$$G(x) = F(x) + c$$

Commentaire 1 *Pour déterminer toutes les primitives d'une fonction continue, il suffit d'en donner une.*

Exercice 19 *Donner des primitives des fonctions suivantes :*

- $x \longmapsto 1$
- $x \longmapsto x$
- $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ *sur* $]0, +\infty[$.

Définition 6: Intégrale d'une fonction

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et soit F une primitive **quelconque** de f sur $[a, b]$. Alors la valeur $F(b) - F(a)$ est **indépendante** du choix d'une prmitive de f, i.e. si G est une autre primitive de f, alors $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$. On note alors

$$\int_a^b f(x)dx := F(b) - F(a)$$

et c'est appelée **l'intégrale** de f sur l'intervalle $[a, b]$.

Notation 1 *On note aussi* $[F(x)]_{x=a}^{x=b} := F(b) - F(a)$*, ou tout simplement par* $[F(x)]_a^b$.

Exercice 20 *Calculer l'intégrale des* f *dans chacune des cas suivantes :*

1. $f(x) = 1$ *sur* $[0, 1]$.
2. $f(x) = 2x$ *sur* $[-1, 1]$.
3. $f(x) = \cos(x)$ *sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Théorème 6

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, pour tout $a \in I$, la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur I.

Proposition 4: Intégration par parties

Soient $f, g : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et de dérivées continues sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Commentaire 2 *On peut utiliser le résultat suivant pour chercher aussi des primitives des fonctions. Prenons la fonction* ln *comme exemple.*

6 Sommes et produits

Définition 7

- Si $n \in \mathbb{N}$ et $a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres réels, on note

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \cdots + a_n$$

- Plus généralement si $p \leq n$ sont deux nombres naturels alors, on note

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = a_p + \cdots + a_n$$

Exemples 3 $\sum_{k=1}^{n} a = na$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et tout* $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 21 *Calculer*

$$\sum_{k=0}^{5} k(k+1)$$

.

Propriétés 9

- Si $a_p, \ldots, a_{n+p+1}$ sont des réels, où p et n sont des entiers naturels, alors

$$\sum_{k=p}^{n+p} a_{k+1} - a_k = a_{n+p+1} - a_p$$

- $\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=p}^{n} a_{n-k+p}$

Exercice 22 *Montrer que* $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Définition 8

- Si $n \in \mathbb{N}$ et $a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres réels, on note

$$\prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \cdots + a_n$$

- Plus généralement si $p \leq n$ sont deux nombres naturels alors, on note

$$\prod_{k=p}^{n} a_k = a_p + \cdots + a_n$$

Exemples 4 $\prod_{k=1}^{n} a = a^n$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et tout* $a \in \mathbb{R}$.

Proposition 5

Soit q un réel et $p \leq n$ deux entiers naturels. On a :

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = \begin{cases} n-p+1 & \text{si } q=1 \\ \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q} & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 23 *Calculer* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k$, *pour* $n \geq 1$.

Définition 9

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ sa factorielle, qu'on note par $n!$ par

$$n! = \begin{cases} 1 & si \quad n=0 \\ n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 & si \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Exercice 24 *Calculer* $7!$.

Exercice 25 *Calculer* $\dfrac{5!}{(3!)(2!)}$.

Propriétés 10

Si $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$a^n - b^n = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

Exercice 26 *Factoriser* $a^3 - b^3$ *et* $a^5 - b^5$.