

Feuille d'exercices N°0

Exercice 1 Réécrire les expressions suivantes sans radical au dénominateur :

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \quad ; \quad B = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+1} \quad ; \quad C = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$$

Exercice 2 Simplifier $\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier A_n et B_n où :

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \quad ; \quad B_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

Exercice 4 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 \leq b \leq a$.

1. Calculer le carré de $A = \sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} + \sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$.

2. En déduire que

$$\sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{14} \text{ et } \sqrt{5+\sqrt{21}} + \sqrt{5-\sqrt{21}} = \sqrt{14}$$

Exercice 5 À retenir Soient a et b deux réels.

1. Montrer que $2ab \leq a^2 + b^2$.

2. Supposons que $a, b \geq 0$. Montrer que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
Donner un exemple de (a, b) où on n'a pas l'égalité.

Exercice 6 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \geq \frac{2}{n+1}$.

2. Soit $x \geq 0$. Montrer que $\sqrt{x} + \sqrt{x+2} \geq 2\sqrt{x+1}$.

3. Soient $-1 < x$ et $y < 1$. Montrer que $xy + x + y > -1$.

Exercice 7 Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. Simplifier les réels suivants :

$$A = \left((a^2b)^3 \right)^5 \quad ; \quad B = \left(\frac{a}{b^2} \right)^3 \left(\frac{b}{a} \right)^5$$

Exercice 8 Factorier le trinôme : $12x^2 - 5x + 2$.

Exercice 9 On considère sur \mathbb{R} l'équation (E) suivante :

$$6x^3 + 7x^2 - x - 2 = 0$$

1. Vérifier que -1 est une solution de l'équation (E).

2. Montrer qu'il existe un polynôme P de degré 2 tel que pour tout réel x on a :

$$6x^3 + 7x^2 - x - 2 = (x+1)P(x)$$

3. En déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice 10 Résoudre, suivant les valeurs du réel m , sur \mathbb{R} l'équation suivante :

$$x^2 + (2m+1)x + 2m = 0$$

Exercice 11 Résoudre sur \mathbb{R} l'inéquation suivante

$$\frac{x}{x+1} \leq \frac{x+2}{x+3}$$

Exercice 12 1. (a) Simplifier $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

(b) Calculer alors $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2. Proposer une autre façon pour calculer les deux valeurs.

Exercice 13 1. Soit x un réel.

(a) Rappeler l'expression de $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$.

(b) Exprimer alors $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$.

(c) Rappeler l'expression de $\sin(2x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

(d) En déduire alors une expression de $\sin(3x)$ sous forme de produit de $\sin(x)$ et une expression en fonction de $\cos(x)$.

(e) À l'aide des questions précédentes, justifier que

$$\cos(5x) = 10 \cos^5(x) - 20 \cos^3(x) + 5 \cos(x)$$

2. Soit $a = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

(a) Justifier que $16a^5 - 20a^3 + 5a = 0$, et puis que $16a^4 - 20a^3 + 5 = 0$.

(b) Résoudre sur \mathbb{R} l'équation $16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$.

(c) En déduire deux valeurs possibles pour a .

(d) Justifier que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) < a$ et que $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(e) En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

3. Déterminer alors successivement les valeurs de $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 14 1. Soit x un réel. En écrivant $\cos^4(x) = (\cos^2(x))^2$, montrer que

$$\cos^4(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{8} \cos(4x)$$

On dit alors qu'on a **linéarisé** $\cos^4(x)$.

2. En déduire une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto \cos^4(x)$.

Exercice 15 Équations trigonométriques Résoudre sur \mathbb{R} les équations suivantes :

$$\sin(x) + \cos(x) = 0$$

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin(3x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Exercice 16 Soit x un réel.

1. Montrer que

$$1 + \sin(x) = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

2. Montrer que

$$\cos^2(x) + \sin^4(x) = \sin^2(x) + \cos^4(x)$$

Exercice 17 (*Complément du cours*)

Soit $x \in]-\pi, \pi[$. On pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Montrer que

$$(a) \quad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}.$$

$$(b) \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$(c) \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Exercice 18 Résoudre sur \mathbb{R} les inéquations suivantes :

$$1. \quad 2 \cos(x) \leq \sqrt{2}.$$

$$2. \quad 2 \sin(x) \geq -1.$$

$$3. \quad \sqrt{3} \tan(x) \geq 1.$$

Exercice 19 1. Étudier la limite en $+\infty$ de $x^2 - 4 \ln(x) + e^{3x}$. 4. Étudier la limite en $\pm\infty$ de $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

2. Étudier la limite en $\pm\infty$ de $3e^{2x} - 2e^{3x}$. 5. Étudier la limite en $\pm\infty$ de $\frac{\sqrt{x^2-1} + 3x}{\sqrt{x^2+1}}$.

3. Étudier la limite en $+\infty$ de $\frac{x^4 - 5 \ln(x) + 4e^x}{x^4 - 2e^x + \sqrt{x}}$. 6. Étudier la limite en $+\infty$ de $\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}$.

Exercice 20 Calculer les limites en $+\infty$ des quantités suivantes :

$$1. \quad \sqrt{x+1} - \sqrt{x}.$$

$$2. \quad x - \sqrt{x^2 + x}.$$

$$3. \quad \sqrt{x^2 + 4x + 3} - x.$$

Exercice 21 Calculer les limites en 0 des quantités suivantes :

$$1. \quad \frac{\sin(ax)}{x}, \quad a \in \mathbb{R}^*.$$

$$4. \quad \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}, \quad \text{avec } a \neq b \text{ deux réels non nuls.}$$

$$2. \quad \frac{\ln(1+ax)}{x}, \quad a \in \mathbb{R}^*.$$

$$5. \quad \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}, \quad \text{avec } a \neq b \text{ deux réels non nuls.}$$

$$3. \quad \frac{e^{ax} - 1}{x}, \quad a \in \mathbb{R}^*.$$

$$6. \quad \frac{\ln(1+ax)}{\sin(bx)}, \quad \text{avec } a \neq b \text{ deux réels non nuls.}$$

Exercice 22

Exercice 23 Calculer les limites en $+\infty$ des quantités suivantes :

1. $\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$, avec a un réel.

4. $x^{\frac{1}{x}}$.

2. $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$.

5. $x^{\frac{a}{\ln(x)}}$, avec a un réel.

3. $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x^2}$.

6. $x^{\frac{1}{\sqrt{\ln(x)}}}$.

Exercice 24 Calculer les limites en 0^+ des quantités suivantes :

1. $(\sin(x))^x$.

2. $x^{\frac{a}{\ln(x)}}$, avec a un réel.

3. $x^{\frac{a}{\ln(x)}}$, avec a un réel.

4. $x^{\frac{1}{\sqrt{\ln(x)}}}$.

Exercice 25 Dériver formellement (i.e. sans préoccuper des questions des domaines de définition ou dérivation) les fonctions suivantes :

1. $f(x) = x \ln(x) - x$.

2. $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

3. $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, avec a, b, c et d des réels.

4. $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{(x-3)^2}$.

5. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

6. $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$.

7. $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

8. $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$.

9. $f(x) = \frac{\sin(x) + \cos(x)}{\sin(x) - \cos(x)}$.

Exercice 26 Dériver formellement les fonctions suivantes :

1. $\sin^5(x)$.

9. $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$.

2. $\cos^4(x)$.

10. $f(x) = \ln(\sin(x))$.

3. $f(x) = \frac{\sin^2(x)}{1 + \cos^2(x)}$.

11. $f(x) = \ln(\cos(x))$.

4. $f(x) = \sqrt{x^4 - 2x + 3}$.

12. $f(x) = \ln(e^x + 1)$.

5. $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

13. $f(x) = \ln(\ln(x))$.

6. $f(x) = e^{x^3+x^4}$.

14. $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$.

7. $f(x) = \sin(x^2)$.

15. $f(x) = \frac{\cos(\ln(x))}{x}$.

8. $f(x) = x^x$.

16. $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Exercice 27 Déterminer une primitive de chacune des fonctions ci-dessous sur l'intervalle indiqué :

1. **Produit :**

(a) $f(x) = \cos(x) - x$ sur \mathbb{R} .

(b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1}$ sur \mathbb{R} .

2. **Sous forme $u'(x).u^n(x)$:**

(a) $f(x) = \cos(x). (2 \sin(x) + 1)^4$ sur \mathbb{R} .

(b) $f(x) = \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$.

(c) $f(x) = \frac{\ln^4(x)}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

(d) $f(x) = \sin^3(x)$ sur \mathbb{R} .

3. **Sous forme $\frac{u'(x)}{u^n(x)}$:**

(a) $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(b) $f(x) = \frac{2}{(3x - 4)^2}$ sur $\left] \frac{4}{3}, +\infty \right[$ sur \mathbb{R} .

(c) $f(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^2}$ sur $]1, +\infty[$.

4. **Sous forme $\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$:**

(a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ sur $] -1, 1[$.

(b) $f(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{3x^2 + 6x + 5}}$.

5. **Sous forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$:**

(a) $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ sur \mathbb{R} .

(b) $f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$ sur $] -1, 1[$ puis sur $]1, +\infty[$.

(c) $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(d) $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$ sur $]0, +\infty[$.

6. **Sous forme $u'(x)e^{u(x)}$:**

(a) $f(x) = xe^{-x^2}$ sur \mathbb{R} .

(b) $f(x) = e^{x+e^x}$ sur \mathbb{R} .

7. **Composée :**

(a) $f(x) = x \sin(x^2)$ sur \mathbb{R} .

(b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ sur $]0, +\infty[$.

(c) $f(x) = \frac{\sin(\ln(x))}{x}$ sur $]0, +\infty[$.