

Techniques Numériques en Finance et en Assurance

MASTER ACTUARIAT — Deuxième année

Par : Adrien PETIT (p2305481), Rémi CABANE (p2310122), Mohamed el hafed Ismail(p2211161), Minh Hai DUONG (p2320598), Tedjani GHEMRI

Année universitaire : 2025–2026

Titre : Projet 7 : Estimation de l'action Dow

Professeur : ARMAND BERNOU

FORMATIONS

(ACTUARIAT (ECONOMETRIE & STATISTIQUES (CONTINUE & VAE (DOCTORALE

Table des matières

1	Introduction	2
2	Calibration	2
2.1	Estimation de X_0 (Question 1)	2
2.2	Prix du put européen et démonstration Black-Scholes (Question 2)	2
2.3	Estimation du taux sans risque (Question 3)	3
2.4	Calibration des paramètres σ et μ (Question 4)	3
3	Simulation et Résultats	4
3.1	Modèle de Black-Scholes (Question 5)	4
3.2	Modèle de Merton (Questions 6-7)	4
4	Conclusion	5
5	Organisation du travail d'équipe	5

1 Introduction

Dans ce projet, on cherche à simuler l'évolution du prix d'une quantité financière indexée sur l'action *Dow Inc.* On va procéder en deux temps : utilisation d'un modèle de Black-Scholes pour la calibration, puis enrichissement du modèle avec le modèle sauts-diffusions de Merton.

On rappelle d'abord le modèle de Black-Scholes :

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t, \quad X_0 = x_0,$$

pour une valeur $x_0 \in \mathbb{R}^+$.

2 Calibration

2.1 Estimation de X_0 (Question 1)

Pour estimer X_0 , nous avons utilisé la librairie `yfinance` en Python. Cette estimation a été réalisée le 11 novembre 2025, et la valeur de x_0 a été estimée à 22.10.

2.2 Prix du put européen et démonstration Black-Scholes (Question 2)

Soit un put européen de strike K et maturité T , sur une action dont le prix S_t suit un mouvement brownien géométrique :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

où W_t est un processus de Wiener.

1. Portefeuille sans risque

On considère le portefeuille :

$$\Pi = P - \frac{\partial P}{\partial S} S.$$

Par Itô, le prix du put évolue selon :

$$dP = \frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{\partial P}{\partial S} (\mu S dt + \sigma S dW) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} dt.$$

Le terme en dW disparaît, donc :

$$d\Pi = \frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} dt.$$

2. Équation de Black-Scholes

Comme le portefeuille est sans risque, il croît au taux r :

$$d\Pi = r\Pi dt = r \left(P - S \frac{\partial P}{\partial S} \right) dt.$$

En identifiant les deux expressions, on obtient la PDE :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0, \quad P(S, T) = \max(K - S, 0).$$

3. Prix du put

En utilisant la parité put-call $C - P = S - Ke^{-r(T-t)}$ et le call Black-Scholes :

$$C = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \quad d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

on obtient le prix du put :

$$P = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1).$$

2.3 Estimation du taux sans risque (Question 3)

Nous avons utilisé le taux Euribor à 12 mois, égal à 2,211 %, obtenu sur le site <https://www.euribor-rates.eu/fr/>. Nous en déduisons une approximation du taux sans risque, que nous prenons égal à 2,21 %.

2.4 Calibration des paramètres σ et μ (Question 4)

On utilise pour calibrer la volatilité une méthode fondée sur une approximation locale du prix de Black-Scholes. On a ainsi bien un modèle linéaire (ce qui n'est pas le cas dans une MCO classique avec la formule de Black Scholes car celle-ci n'est pas linéaire en σ) et une fonction prix qu'on optimise.

Approximation de Taylor du prix Soit $P_{BS}(\sigma)$ le prix d'un put européen dans le modèle de Black-Scholes. Pour une volatilité donnée σ_0 , on effectue une linéarisation de premier ordre :

$$P_{BS}(\sigma) \approx P_{BS}(\sigma_0) + Vega(\sigma_0) (\sigma - \sigma_0),$$

où $Vega(\sigma_0)$ est la sensibilité du prix par rapport à la volatilité.

Pour une option de strike K_i , l'équation devient :

$$P_{market,i} - P_{BS,i}(\sigma_0) \approx Vega_i(\sigma_0) (\sigma - \sigma_0).$$

Régression linéaire pour déterminer la correction sur la volatilité Cette relation est linéaire en $\Delta\sigma = \sigma - \sigma_0$. En notant

$$Y_i = P_{market,i} - P_{BS,i}(\sigma_0), \quad X_i = Vega_i(\sigma_0),$$

on estime $\Delta\sigma$ en résolvant un problème de moindres carrés sans ordonnée à l'origine :

$$\widehat{\Delta\sigma} = \arg \min_{\Delta\sigma} \sum_i (Y_i - X_i \Delta\sigma)^2.$$

La volatilité est mise à jour par :

$$\sigma_{new} = \sigma_0 + \widehat{\Delta\sigma}.$$

Schéma itératif On applique ensuite ce procédé de manière itérative :

$$\sigma^{(k+1)} = \sigma^{(k)} + \widehat{\Delta\sigma}^{(k)},$$

jusqu'à convergence, typiquement lorsque $|\sigma^{(k+1)} - \sigma^{(k)}| < \varepsilon$. À chaque itération, les prix $P_{BS}(\sigma^{(k)})$ ainsi que les Vegas sont recalculés, ce qui stabilise la calibration.

Filtrage des options Pour améliorer la robustesse, seules les options dont le strike est proche de l'at-the-money sont conservées :

$$0.7 S_0 \leq K_i \leq 1.3 S_0.$$

Ce filtrage réduit l'impact des options très ITM ou OTM, dont les Vegas sont faibles et qui apportent peu d'information utile pour l'estimation de la volatilité locale.

Résultat Après convergence du schéma itératif, on obtient une volatilité calibrée unique σ_{cal} , cohérente avec l'ensemble des prix observés. Dans notre cas, la calibration conduit à :

$$\sigma_{cal} = 0.44.$$

Cette valeur est ensuite utilisée dans le modèle de Black-Scholes pour la suite des calculs.

Relation entre le drift μ et la moyenne des rendements log

En prenant l'espérance théorique de R_t :

$$E[R_t] = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \Delta t,$$

on obtient l'estimateur :

$$\hat{\mu} = 252 \cdot \bar{R} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2,$$

où \bar{R} est la moyenne des rendements journaliers.

3 Simulation et Résultats

Nous estimons la probabilité $P[X_2 > 23]$ pour l'action Dow Inc. ($X_0 = 22.10\$$) en utilisant deux modèles stochastiques calibrés sur les données actuelles.

3.1 Modèle de Black-Scholes (Question 5)

Nous simulons la dynamique $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t$ par un schéma d'Euler avec les paramètres calibrés : $\mu = -0.2217$ (tendance baissière) et $\sigma \approx 0.4409$. Pour $T = 2$ ans et 30 000 simulations, nous obtenons :

$$P[X_2 > 23] \approx 13.95\%$$

La probabilité est faible car le drift négatif entraîne le prix vers le bas ($E[X_2] \approx 14.21\$$).

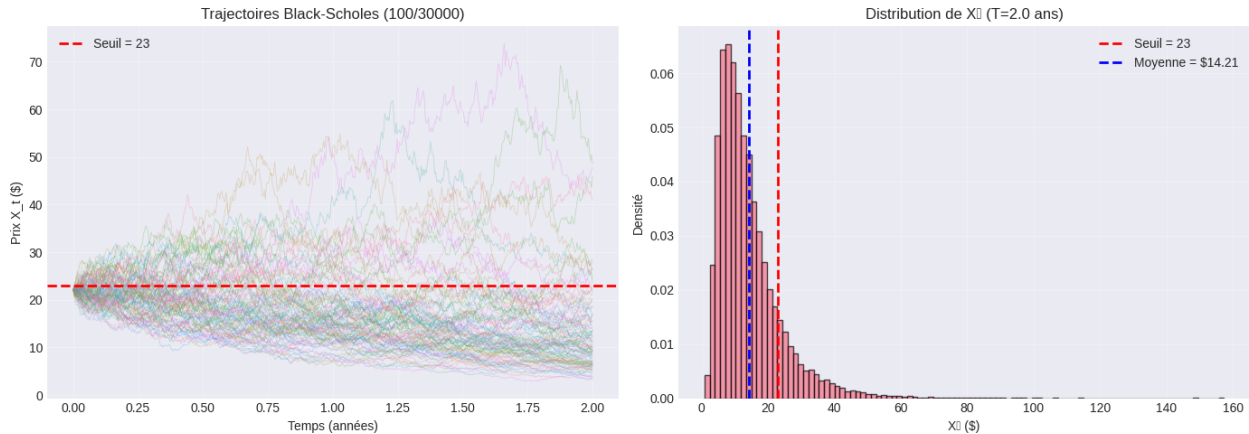


FIGURE 1 – Trajectoires BS (gauche) et distribution finale de X_2 (droite).

3.2 Modèle de Merton (Questions 6-7)

Nous ajoutons des sauts à la dynamique : $dX_t = X_{t-}[(\mu - \lambda\kappa)dt + \sigma dB_t + (Z_t - 1)dN_t]$. Les sauts suivent un processus de Poisson ($\lambda = 3$) avec une taille log-normale ($\ln(Z) \sim \mathcal{N}(1.03, 0.2)$).

Résultat pour $T = 2$ ans :

$$P[X_2 > 23] \approx 98.55\%$$

La simulation révèle une différence fondamentale illustrée par la Figure 2. Alors que la diffusion (Black-Scholes) reste confinée dans des valeurs basses, les sauts positifs du modèle de Merton propulsent l'espérance du prix à des niveaux extrêmement élevés ($E[X_2] \approx 1.63 \times 10^6\$$).

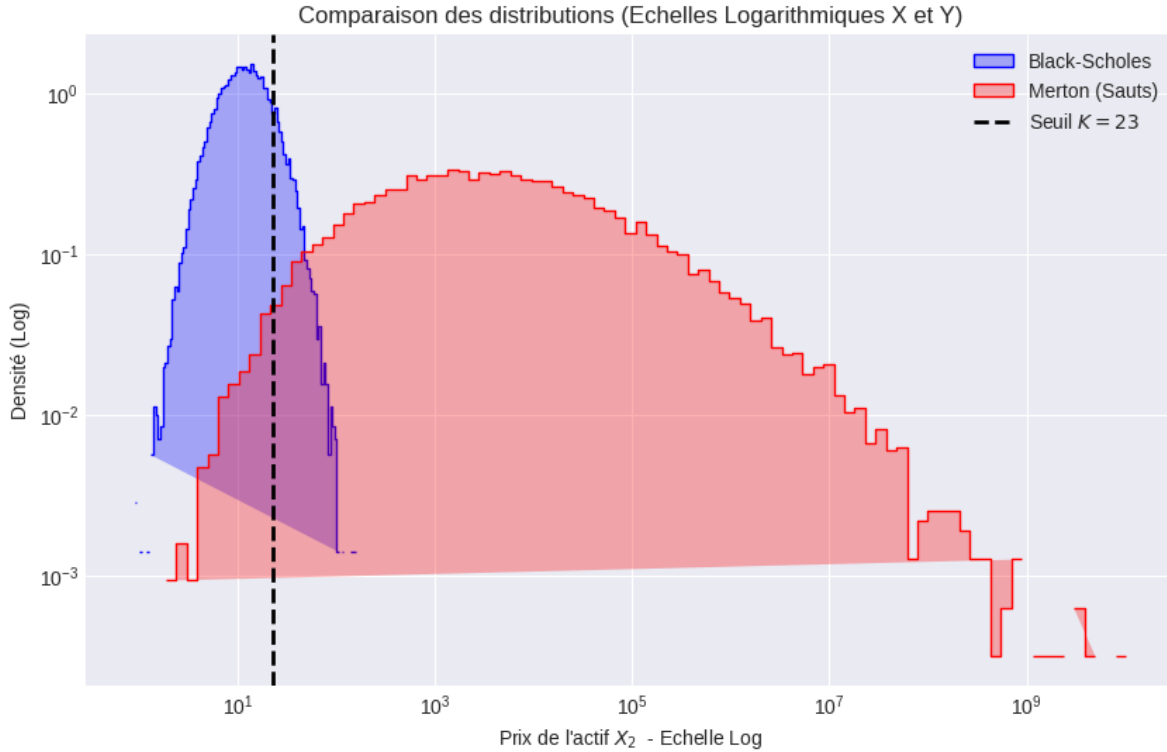


FIGURE 2 – Comparaison des densités (Échelles Log-Log) : La distribution de Merton (rouge) couvre une plage de prix immensément plus large que celle de Black-Scholes (bleue).

4 Conclusion

Ce projet met en évidence l'impact critique du choix de modèle sur l'évaluation des risques :

- La calibration sur le marché réel donne une volatilité implicite élevée ($\sigma \approx 44.09\%$) et un rendement historique négatif ($\mu \approx -22.17\%$).
- Le modèle de **Black-Scholes**, fidèle à cette tendance baissière, prédit une probabilité de maintien du cours faible (13.95%).
- Le modèle de **Merton**, intégrant des sauts positifs fréquents ($\lambda = 3$), inverse totalement cette prévision avec une probabilité de 98.55%.

L'ajout de discontinuités transforme ici une prévision pessimiste en un scénario fortement haussier. Cela illustre l'importance de capturer les risques de queues de distribution (valeurs extrêmes) que la loi normale standard du modèle de Black-Scholes échoue à modéliser.

5 Organisation du travail d'équipe

Pour mener à bien notre projet informatique, nous avons réparti les tâches de manière équilibrée afin de tirer parti des compétences de chacun. Après avoir défini les objectifs principaux, nous avons divisé le travail en plusieurs parties. Rémi et Hai se sont chargés de la partie calibration, tandis qu'Adrien et Ismail ont pris en main la partie simulation. Tedjani, quant à lui, a contribué aux deux volets et s'est également occupé de vérifier et corriger les éléments qui ne fonctionnaient pas, que ce soit dans le code ou dans le rapport.