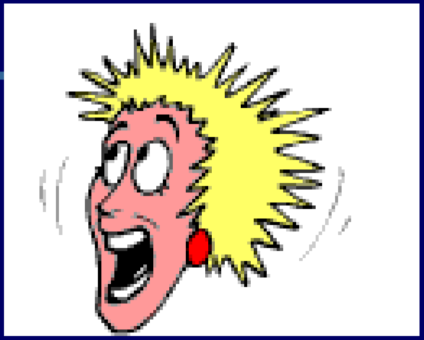
Sistem Persamaan Diferensial



PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE SATU

I. METODE EULER

Dalam penulisannya,Persamaan Diferensial Orde Satu yaitu :f(x,y,y')=0 sering ditulis dalam bentuk y' = f(x,y).
Untuk mendapat nilai eksak dari persamaan tersebut diperlukan suatu nilai awal yang biasa disebut dengan masalah nilai awal atau initial value problem.

$$\boxed{y' = f(x, y) \quad , \quad y(x_0) = y_0} \qquad (1)$$

Anggaplah bahwa f(x,y) mempunyai solusi eksak,maka dengan menggunakan deret Taylor dicoba menyelesaikan solusinya dengan pendekatan Numerik

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + (h^2/2)y''(x) + \ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

dari pers.(1) diketahui bahwa y' = f,maka :

$$y'' = f' = \frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) y'$$

sehingga persamaan (2) menjadi :

$$y(x+h) = y(x) + hf + \frac{h^2}{2} f' + \frac{h^3}{6} f'' + \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Jika h diambil relatif kecil, maka nilai-nilai pada suku yang mengandung h^2,h^3,….pada persamaan (3) juga kecil,sehingga persamaan dapat ditulis sebagai berikut :

$$\boxed{y(x+h) = y(x) + hf} \qquad (4)$$

Untuk keperluan iterasi dapat ditulis dalam bentuk umum :

$$\boxed{y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)} \qquad (5)$$

Metode Euler

Contoh Soal

Hitung y_1 s/d y_5 dengan h=0,2 ; untuk persamaan berikut :

$$y' = x + y$$

Penyelesaian

$y' = f(x , y)$, maka :

$f(x , y) = x + y$

$y_{n+1} = y_n + hf(x , y)$

$y_{n+1} = y_n + 0{,}2(x_n+y_n)$

Terlihat bahwa dgn h=0,2 kesalahn yang terjadirelatif besar,coba h lebih kecil kemudian buatlah plot untuk menggambarkan hasilnya

n	x_n	y_n	$0{,}2(x_n+y_n)$	**Solusi eksak**	**ERROR**
0	0	0	0	0	0
1	0,2	0	0,04	0,021	0,021
2	0,4	0,04	0,088	0,092	0,052
3	0,6	0,128	0,146	0,222	0,094
4	0,8	0,274	0,215	0,426	0,152
5	1	0,489		0,718	0,229

II.METODE EULER YANG DISEMPURNAKAN

Dari hasil analisa telah diketahui bahwa dengan menggunakan nilai h yang relatif lebih kecil,maka akan didapatkan hasil yang cukup memuaskan yaitu nilai pendekatan akan mendekati nilai eksaknya.

Untuk itu agar didapatkan hasil yang lebih memuaskan maka pers.(5) pada metode Euler ditulis sebagai berikut :

$$y_{n+1}^{*} = y_n + hf(x_n, y_n) \text{ dan}$$
$$y_{n+1} = y_n + ½h\,[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{*})]$$

Jika :

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$
$$k_2 = hf\ (x_{n+1}, y_n + k_1)$$

Maka :

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{2}\,(k_1 + k_2)}$$

Contoh:

Hitung y_1 s/d y_5 dengan $h = 0{,}2$

$$y' = x + y\ ,\ y(0) = 0$$

JAWABAN

$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} (k_1 + k_2)$, dengan :

$k_1 = hf\,(x_n, y_n)$

$k_1 = 0{,}2\ (x_n + y_n)$

$k_2 = hf\ (x_{n+1}\ ,\ y_n + k_1)$

$k_2 = 0{,}2\ [x_n + 0{,}2 + y_n + 0{,}2\ (x_n + y_n)$

$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}\ [(0{,}2(x_n + y_n) + 0{,}2(x_n + 0{,}2 + y_n = 0{,}2x_n + 0{,}2y_n))]$

$y_{n+1} = y_n + (0{,}2/2)\ [x_n + y_n + x_n + 0{,}2 + y_n + 0{,}2x_n + 0{,}2y_n]$

$y_{n+1} = y_n + 0{,}1\ [2{,}2\ x_n + 2{,}2\ y_n + 0{,}2\ ]$

$y_{n+1} = y_n + 0{,}22\ (x_n + y_n) + 0{,}02$

n	x_n	y_n	$0,22(x_n+y_n)+0,02$	Nilai eksak	ERROR
0	0	0	0,02	0	0
1	0,2	0,02	0,0684	0,0214	0,0014
2	0,4	0,0884	0,1274	0,0918	0,0034
3	0,6	0,2158	0,1995	0,2221	0,0063
4	0,8	0,4153	0,2874	0,4255	0,0102
5	1	0,7027		0,7183	0,0156

Persamaan Diferensial Orde Dua atau Lebih

Untuk menentukan solusi pers.Diferensial orde lebih dari satu sebenarnya adalah tetap sama,yaitu menggunakan dasar deret Taylor

Perhatikan persamaan Diferensial berikut :

$$\boxed{y'' = f(x, y, y')}$$

Dengan kondisi awal :

$$\boxed{y(a) = \alpha \text{ dan } y'(a) = \beta}$$

Tinjaulah ekspansi deret Taylor berikut :

$$y(x+h) = y(x) + hy^{I}(x) + \frac{h^2}{2!}y^{II}(x) + \frac{h^3}{3!}y^{III}(x) + ...$$

$$y'(x+h) = y^{I}(x) + hy^{II}(x) + \frac{h^2}{2!}y^{III}(x) + \frac{h^3}{3!}y^{IV}(x) + ...$$

Untuk memindahkan dalam Analisis Numerik maka persamaan tersebut ditulis sebagai berikut :

$$\boxed{\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h y_k^{II} + \frac{h^2}{2!} y_k^{II} + \frac{h^3}{3!} y_k^{III} + \ldots., \; k = 0,1,\ldots \\ y_{k+1}^{I} &= y_k^{I} + h y_k^{II} + \frac{h^2}{2!} y_k^{III} + \frac{h^3}{3!} y_k^{IV} + \ldots., \; k = 0,1,\ldots \end{aligned}}$$

Contoh Soal

Untuk h =0,3 hitung y_0,y_1 dan y_2 pada masalah nilai awal berikut :

$$y'' = y^2 - x^2$$
$$y(0) = 0$$
$$y'(0) = 1$$

Jawaban

Jika : $x_0 = 0$, dengan $h = 0,3$, maka

$x_1 = 0,3$

$x_2 = 0,6$ dan

$y_0 = 0 \Rightarrow y(0) = 0$

$y_0' = 1 \Rightarrow y'(0) = 1$

$$y_{k+1} = y_k + hy_k^{I} + \frac{h^2}{2!} y_k^{II} + \frac{h^3}{3!} y_k^{III}, k = 0,1$$

$$y_{k+1} = y_k + 0,3y_k^{I} + 0,045y_k^{II} + 0,0045y_k^{III} \quad ①$$

$$y_{k+1}^{I} = y_k^{I} + hy_k^{II} + \frac{h^2}{2!} y_k^{III} + \frac{h^3}{3!} y_k^{IV}, k = 0,1$$

$$y_{k+1}^{I} = y_k + 0,3y_k^{I} + 0,045y_k^{III} + 0,0045y_k^{IV} \quad ②$$

Dari pers.

$$y^{II} = y^2 - x^2 \qquad ③$$

$$y^{III} = 2yy^{I} - 2x \qquad ④$$

$$y^{IV} = 2(y^{I})^2 + 2yy^{II} - 2 \qquad ⑤$$

Untuk k = 0, maka :

$$y_0 = 0, y_0^I = 1, y_0^{II} = y_0^{\ 2} - x_0^{\ 2} = 0, y_0^{III} = 2y_0 y_0^I - 2x_0 = 0$$

$$y_0^{IV} = 2(y_0^I) + 2y_0 y_0^{II} - 2 = 0$$

Recall#①

$$y_1 = y_0 + 0{,}3y_0^I + 0{,}045y_0^{II} + 0{,}0045y_0^{III}$$

$$y_1 = 0 + 0{,}3(1) + 0{,}045(0) + 0{,}0045(0) = 0{,}3$$

Recall#②

$$y_1^{I} = y_0^{I} + 0{,}3y_0^{II} + 0{,}045y_0^{III} + 0{,}0045y_0^{IV}$$

$$y_1^{I} = 1 + 0{,}3(0) + 0{,}045(0) + 0{,}0045(0) = 1$$

Untuk k = 1, maka :

$$y_1 = 0{,}3$$

$$y_1^{I} = 1$$

$$y_1^{II} = y_1^{\,2} - x_1^{\,2} = 0{,}09 - 0{,}09 = 0$$

$$y_1^{III} = 2y_1y_1^{I} - 2x_1 = 2(0{,}3)(1) - 2(0{,}3) = 0$$

$$y_1^{IV} = 2(y_1^{I}) + 2y_1y_1^{II} - 2 = 2(1) + 2(0{,}3)(0) - 2 = 0$$

Recall#①

y_2 = 0,6

y_2'= 1