Vektorräume Blatt 2

Iusuf Gemaledin, Ismail Gemaledin

Gelöste Aufgaben

Aufgabe 1: Skalarprodukt berechnen

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Berechne $\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle$.

Lösung:

$$\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 + 3 \cdot (-2) = 2 - 4 - 6 = -8$$

Aufgabe 2: Winkel zwischen Vektoren

Für $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ berechne $\cos\theta$.

Lösung:

$$\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 3 - 2 = 1$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u} | \vec{u} \rangle} = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$$

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{55}}$$

Aufgabe 3: Orthogonale Projektion

Projiziere $\vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $\vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lösung:

$$\mathrm{proj}_{\vec{q}}(\vec{p}) = \frac{\langle \vec{p} | \vec{q} \rangle}{\langle \vec{q} | \vec{q} \rangle} \vec{q} = \frac{4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2}{1^2 + 0^2 + 2^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{6}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ 0 \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: Vektorprodukt

Berechne $\vec{a} \times \vec{b}$ für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Lösung:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot (-2) - 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 12 \\ 3 + 4 \\ 8 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5: Parameter für Orthogonalität

Finde $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{w}_\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \\ 5 \end{pmatrix}$ orthogonal sind.

Lösung:

$$\langle \vec{u} | \vec{w}_\alpha \rangle = 1 \cdot 3 + 2 \cdot \alpha + (-1) \cdot 5 = 3 + 2\alpha - 5 = 2\alpha - 2$$

Orthogonalität: $\langle \vec{u} | \vec{w}_\alpha \rangle = 0 \Rightarrow 2\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \alpha = 1$

Aufgabe 6: Parameter für Länge 1

Finde $\beta \in \mathbb{R}$, so dass $\vec{v}_\beta = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 2 \end{pmatrix}$ die Länge 1 hat.

Lösung:

$$\|\vec{v}_\beta\|^2 = \langle \vec{v}_\beta | \vec{v}_\beta \rangle = \left(\frac{1}{2} \right)^2 (1^2 + \beta^2 + 2^2) = \frac{1}{4}(1 + \beta^2 + 4) = \frac{\beta^2 + 5}{4}$$

Bedingung: $\|\vec{v}_\beta\|^2 = 1 \Rightarrow \frac{\beta^2+5}{4} = 1 \Rightarrow \beta^2 + 5 = 4 \Rightarrow \beta^2 = -1$ $\boxed{\text{Keine reelle Lösung}}$

Aufgabe 7: Basis mit Parameter

Für welche $\gamma \in \mathbb{R}$ bilden $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c}_\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \gamma \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

Lösung: Determinante der Matrix $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}_\gamma)$:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & \gamma \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & \gamma \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \gamma \end{pmatrix} + 0$$

$$= 1 \cdot (1 \cdot \gamma - 1 \cdot 3) - 2 \cdot (0 \cdot \gamma - 1 \cdot 1) = (\gamma - 3) - 2 \cdot (-1) = \gamma - 3 + 2 = \gamma - 1$$

Basis $\Leftrightarrow$ Determinante $\neq 0$: $\gamma - 1 \neq 0 \Rightarrow \gamma \neq 1$

Aufgabe 8: Skalarprodukt mit Parameter

Gegeben $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ 4 \\ \alpha^2 \end{pmatrix}$. Berechne $\langle \vec{u} | \vec{w}_\alpha \rangle$ in Abhängigkeit von α.

Lösung:

$$\langle \vec{u} | \vec{w}_\alpha \rangle = 2 \cdot \alpha + (-1) \cdot 4 + 3 \cdot \alpha^2 = 3\alpha^2 + 2\alpha - 4$$

Aufgabe 9: Winkel mit Parameter

Für $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bestimme α, so dass der Winkel $60°$ ist.

Lösung:

$$\langle \vec{u} | \vec{v}_\alpha \rangle = 1 \cdot \alpha + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = \alpha + 2$$
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{5}, \quad \|\vec{v}_\alpha\| = \sqrt{\alpha^2 + 1 + 1} = \sqrt{\alpha^2 + 2}$$
$$\cos 60° = \frac{1}{2} = \frac{\langle \vec{u} | \vec{v}_\alpha \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}_\alpha\|} = \frac{\alpha + 2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{\alpha^2 + 2}}$$
$$\frac{\alpha + 2}{\sqrt{5(\alpha^2 + 2)}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2(\alpha + 2) = \sqrt{5(\alpha^2 + 2)}$$
$$4(\alpha^2 + 4\alpha + 4) = 5(\alpha^2 + 2) \Rightarrow 4\alpha^2 + 16\alpha + 16 = 5\alpha^2 + 10$$
$$0 = \alpha^2 - 16\alpha - 6 \Rightarrow \alpha = \frac{16 \pm \sqrt{256 + 24}}{2} = \frac{16 \pm \sqrt{280}}{2} = 8 \pm \sqrt{70}$$

Aufgabe 10: Projektion mit Parameter

Gegeben $\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{q}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 3 \end{pmatrix}$. Berechne $\mathrm{proj}_{\vec{q}_\alpha}(\vec{p})$ für $\alpha = 1$.

Lösung:

$$\langle \vec{p} | \vec{q}_1 \rangle = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 3 - 1 + 6 = 8$$
$$\langle \vec{q}_1 | \vec{q}_1 \rangle = 1^2 + 1^2 + 3^2 = 11$$
$$\mathrm{proj}_{\vec{q}_1}(\vec{p}) = \frac{8}{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{11} \\ \frac{8}{11} \\ \frac{24}{11} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 11: Vektorprodukt mit Parameter

Berechne $\vec{u} \times \vec{v}_\alpha$ für $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Lösung:

$$\vec{u} \times \vec{v}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 - 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot \alpha - 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot (-1) - 1 \cdot \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 - \alpha \end{pmatrix}$$

Aufgabe 12: Parameter für lineare Abhängigkeit

Für welche β sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ \beta \\ 2 \end{pmatrix}$ linear abhängig?

Lösung: Linear abhängig $\Leftrightarrow$ es existiert $\lambda \neq 0$ mit $\vec{a} = \lambda\vec{b}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ \beta \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aus erster Komponente: $1 = 3\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$ Zweite Komponente: $2 = \frac{1}{3}\beta \Rightarrow \beta = 6$ Dritte Komponente: $-1 = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$ (Widerspruch!) $\boxed{\text{Für kein } \beta \text{ linear abhängig}}$

Aufgabe 13: Orthogonalität mit zwei Parametern

Finde α, β so dass $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} \beta \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ orthogonal sind und $\|\vec{u}\| = \sqrt{14}$.

Lösung: Orthogonalität: $\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle = 1 \cdot \beta + \alpha \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = \beta + 2\alpha - 3 = 0$ (1) Norm: $\|\vec{u}\|^2 = \langle\vec{u}|\vec{u}\rangle = 1^2 + \alpha^2 + 3^2 = \alpha^2 + 10 = 14 \Rightarrow \alpha^2 = 4 \Rightarrow \alpha = \pm 2$

Fall 1: $\alpha = 2$: Aus (1): $\beta + 4 - 3 = 0 \Rightarrow \beta = -1$ Fall 2: $\alpha = -2$: Aus (1): $\beta - 4 - 3 = 0 \Rightarrow \beta = 7$

Aufgabe 14: Einheitsvektor mit Parameter

Für welche γ ist $\vec{w}_\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Einheitsvektor?

Lösung:

$$\|\vec{w}_\gamma\|^2 = \langle\vec{w}_\gamma|\vec{w}_\gamma\rangle = \frac{1}{2}(1^2 + \gamma^2 + 1^2) = \frac{\gamma^2 + 2}{2}$$

Bedingung: $\frac{\gamma^2+2}{2} = 1 \Rightarrow \gamma^2 + 2 = 2 \Rightarrow \gamma^2 = 0 \Rightarrow \gamma = 0$

Aufgabe 15: Winkel 90 Grad

Finde α, so dass der Winkel zwischen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $90°$ ist.

Lösung: $90° \Leftrightarrow$ orthogonal:

$$\langle\vec{a}|\vec{b}_\alpha\rangle = 2\alpha + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 = 2\alpha + 3 - 4 = 2\alpha - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 16: Basis ausschließen

Für welche β bilden $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **keine** Basis von $\mathbb{R}^3$?

Lösung: Determinante:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & \beta & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \beta & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (1 \cdot 1 - 1 \cdot \beta) - 2 \cdot (0 \cdot 1 - 1 \cdot 2)$$

$$= (1 - \beta) - 2 \cdot (-2) = 1 - \beta + 4 = 5 - \beta$$

Keine Basis $\Leftrightarrow$ Determinante $= 0$: $5 - \beta = 0 \Rightarrow \beta = 5$

Aufgabe 17: Projektionslänge

Gegeben $\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechne die Länge der Projektion von $\vec{p}$ auf $\vec{q}$.

Lösung:

$$\langle \vec{p} | \vec{q} \rangle = 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3 - 2 + 1 = 2$$

$$\|\vec{q}\| = \sqrt{3}$$

Länge der Projektion $= \frac{|\langle \vec{p} | \vec{q} \rangle|}{\|\vec{q}\|} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Aufgabe 18: Fläche mit Parameter

Berechne die Fläche des Parallelogramms aufgespannt von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ für $\alpha = 2$.

Lösung: Für $\alpha = 2$: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Fläche $= \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$

Aufgabe 19: Parameter für gleiche Länge

Finde α, so dass $\|\vec{u}_\alpha\| = \|\vec{v}\|$ mit $\vec{u}_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lösung:

$$\|\vec{u}_\alpha\|^2 = \langle \vec{u}_\alpha | \vec{u}_\alpha \rangle = \alpha^2 + 4 + 1 = \alpha^2 + 5$$
$$\|\vec{v}\|^2 = 9 + 0 + 4 = 13$$
$$\alpha^2 + 5 = 13 \Rightarrow \alpha^2 = 8 \Rightarrow \alpha = \pm 2\sqrt{2}$$

Aufgabe 20: Skalarprodukt = 0

Für welche β gilt $\langle \vec{a} | \vec{b}_\beta \rangle = 0$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$?

Lösung:

$$\langle \vec{a} | \vec{b}_\beta \rangle = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot \beta + 3 \cdot 1 = 2 - 2\beta + 3 = 5 - 2\beta = 0$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{5}{2}$$

Aufgabe 21: Winkel 45 Grad

Bestimme γ, so dass der Winkel zwischen $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{w}_\gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ \gamma \\ 1 \end{pmatrix}$ $45°$ ist.

Lösung:

$$\langle \vec{u} | \vec{w}_\gamma \rangle = 1 \cdot 2 + 0 \cdot \gamma + 1 \cdot 1 = 3$$
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2}, \quad \|\vec{w}_\gamma\| = \sqrt{4 + \gamma^2 + 1} = \sqrt{\gamma^2 + 5}$$
$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\langle \vec{u} | \vec{w}_\gamma \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{w}_\gamma\|} = \frac{3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\gamma^2 + 5}}$$
$$\frac{3}{\sqrt{2(\gamma^2 + 5)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 3 = \sqrt{\gamma^2 + 5} \Rightarrow 9 = \gamma^2 + 5$$
$$\gamma^2 = 4 \Rightarrow \gamma = \pm 2$$

Aufgabe 22: Vektorprodukt gleich Nullvektor

Für welche α gilt $\vec{u} \times \vec{v}_\alpha = \vec{0}$ mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \\ 2 \end{pmatrix}$?

Lösung: Vektorprodukt $= \vec{0} \Leftrightarrow$ linear abhängig. Ansatz: $\vec{v}_\alpha = \lambda \vec{u}$: Aus erster Komponente: $3 = \lambda \cdot 1 \Rightarrow \lambda = 3$ Zweite Komponente: $\alpha = 3 \cdot 2 = 6$ Dritte Komponente: $2 = 3 \cdot (-1) = -3$ (Widerspruch!) $\boxed{\text{Für kein } \alpha}$

Aufgabe 23: Projektion auf x-Achse

Berechne die Projektion von $\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ auf die x-Achse.

Lösung: Richtungsvektor der x-Achse: $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{proj}_{\vec{e}_1}(\vec{p}) = \frac{\langle \vec{p} | \vec{e}_1 \rangle}{\langle \vec{e}_1 | \vec{e}_1 \rangle} \vec{e}_1 = \frac{3 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 5 \cdot 0}{1^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 24: Orthogonal zu zwei Vektoren

Finde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, das orthogonal zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist.

Lösung:

$$\vec{x} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 25: Parameter für Einheitsvektor in Ebene

Für welche α, β ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Einheitsvektor in der Ebene $x + 2y - z = 0$?

Lösung: In der Ebene: $\alpha + 2\beta - 1 = 0$ (1) Einheitsvektor: $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle = \alpha^2 + \beta^2 + 1 = 1 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0$ Aber (1): $0 + 0 - 1 = -1 \neq 0$ $\boxed{\text{Keine Lösung}}$

Aufgabe 26: Winkelberechnung mit Parameter

Für $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ berechne α, so dass $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{14}}$.

Lösung:

$$\langle \vec{u} | \vec{v}_\alpha \rangle = 1 \cdot \alpha + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 = \alpha - 3$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2}, \quad \|\vec{v}_\alpha\| = \sqrt{\alpha^2 + 4 + 9} = \sqrt{\alpha^2 + 13}$$

$$\frac{\langle \vec{u} | \vec{v}_\alpha \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}_\alpha\|} = \frac{\alpha - 3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\alpha^2 + 13}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\frac{\alpha - 3}{\sqrt{2(\alpha^2 + 13)}} = \frac{1}{\sqrt{14}} \Rightarrow \sqrt{14}(\alpha - 3) = \sqrt{2(\alpha^2 + 13)}$$

Quadrieren: $14(\alpha^2 - 6\alpha + 9) = 2(\alpha^2 + 13)$

$$14\alpha^2 - 84\alpha + 126 = 2\alpha^2 + 26$$

$$12\alpha^2 - 84\alpha + 100 = 0 \Rightarrow 3\alpha^2 - 21\alpha + 25 = 0$$

$$\alpha = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 300}}{6} = \frac{21 \pm \sqrt{141}}{6}$$

Aufgabe 27: Projektion mit zwei Parametern

Für $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \beta \end{pmatrix}$ bestimme α, β, so dass $\text{proj}_{\vec{q}}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lösung: Projektion hat Richtung $\vec{q}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \beta \end{pmatrix}$ Aus erster Komponente: $1 = 2\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$ Zweite: $-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ (stimmt) Dritte: $2 = \frac{1}{2}\beta \Rightarrow \beta = 4$

Projektionsformel: $\frac{\langle \vec{p} | \vec{q} \rangle}{\langle \vec{q} | \vec{q} \rangle} = \lambda = \frac{1}{2}$

$$\langle \vec{p} | \vec{q} \rangle = 1 \cdot 2 + \alpha \cdot (-1) + 3 \cdot 4 = 2 - \alpha + 12 = 14 - \alpha$$

$$\langle \vec{q} | \vec{q} \rangle = 4 + 1 + 16 = 21$$

$$\frac{14 - \alpha}{21} = \frac{1}{2} \Rightarrow 28 - 2\alpha = 21 \Rightarrow 2\alpha = 7 \Rightarrow \alpha = \frac{7}{2}$$

Aufgabe 28: Vektorprodukt Betrag

Berechne $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ für $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lösung:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 - (-1) \cdot 3 \\ (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{9 + 25 + 36} = \sqrt{70}$$

Aufgabe 29: Parameter für spitzwinkligen Winkel

Für welche γ ist der Winkel zwischen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_\gamma = \begin{pmatrix} \gamma \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ spitz ($\cos\theta > 0$)?

Lösung:

$$\langle \vec{a} | \vec{b}_\gamma \rangle = 1 \cdot \gamma + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 = \gamma + 2 - 3 = \gamma - 1$$

Spitz: $\langle \vec{a} | \vec{b}_\gamma \rangle > 0 \Rightarrow \gamma - 1 > 0 \Rightarrow \gamma > 1$

Aufgabe 30: Volumen mit Parameter

Berechne das Volumen des Spats aufgespannt von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{c}_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ für $\alpha = 2$.

Lösung: Für $\alpha = 2$: $\vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Spatprodukt: $\langle \vec{a} \times \vec{b} | \vec{c}_2 \rangle = (-2) \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = -4 + 15 + 1 = 12$ Volumen $= |12| = 12$