Hessesche Normalform Blatt 2

Ismail Gemaledin, Iusuf Gemaledin

Aufgabe 1: Abstand windschiefer Geraden über HNF

Gegeben sind die windschiefen Geraden:

$$g : x = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad h : x = \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Ebene E, die g enthält und parallel zu h ist, in Hessescher Normalform.

(b) Berechnen Sie den Abstand $d(g, h)$ der windschiefen Geraden.

(c) Bestimmen Sie die Punkte $P \in g$ und $Q \in h$, die den kürzesten Abstand realisieren.

Lösung:

(a) Die Ebene E soll g enthalten und parallel zu h sein.

Richtungsvektor von g: $u = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

Richtungsvektor von h: $v = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$

Normalenvektor von E: $n = u \times v = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1)\\(-1) \cdot 1 - 2 \cdot 2\\2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-1\\-1-4\\-2-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-5\\-3\end{pmatrix}$

Norm: $\|n\| = \sqrt{1 + 25 + 9} = \sqrt{35}$

Stützpunkt von g: $A = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

Konstante: $d = \langle n|A\rangle = 1 \cdot 1 + (-5) \cdot 0 + (-3) \cdot 2 = 1 - 6 = -5$

HNF von E: $\frac{1}{\sqrt{35}}(x_1 - 5x_2 - 3x_3) = -\frac{5}{\sqrt{35}}$

(b) Der Abstand $d(g,h)$ entspricht dem Abstand eines beliebigen Punktes von h zur Ebene E.

Stützpunkt von h: $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Einsetzen in HNF: $\frac{1}{\sqrt{35}}(0 - 5 \cdot 3 - 3 \cdot 1) + \frac{5}{\sqrt{35}} = \frac{1}{\sqrt{35}}(-15-3) + \frac{5}{\sqrt{35}} = \frac{-18+5}{\sqrt{35}} = -\frac{13}{\sqrt{35}}$

Abstand: $\left|-\frac{13}{\sqrt{35}}\right| = \frac{13}{\sqrt{35}} = \frac{13\sqrt{35}}{35}$

(c) Die Verbindungsstrecke $\overrightarrow{PQ}$ muss senkrecht auf beiden Geraden stehen, d.h.:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0+\mu \\ 3-\mu \\ 1+2\mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+2\lambda \\ \lambda \\ 2-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu - 2\lambda - 1 \\ 3 - \mu - \lambda \\ 2\mu + \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

Orthogonalität zu u: $\langle \overrightarrow{PQ} | u \rangle = 0$:

$$2(\mu - 2\lambda - 1) + 1(3 - \mu - \lambda) - 1(2\mu + \lambda - 1) = 0$$

$$2\mu - 4\lambda - 2 + 3 - \mu - \lambda - 2\mu - \lambda + 1 = 0$$
$$(2\mu - \mu - 2\mu) + (-4\lambda - \lambda - \lambda) + (-2 + 3 + 1) = 0$$
$$-\mu - 6\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu + 6\lambda = 2 \quad (1)$$

Orthogonalität zu v: $\langle \overrightarrow{PQ} | v \rangle = 0$:

$$1(\mu - 2\lambda - 1) - 1(3 - \mu - \lambda) + 2(2\mu + \lambda - 1) = 0$$

$$\mu - 2\lambda - 1 - 3 + \mu + \lambda + 4\mu + 2\lambda - 2 = 0$$
$$(\mu + \mu + 4\mu) + (-2\lambda + \lambda + 2\lambda) + (-1 - 3 - 2) = 0$$
$$6\mu + \lambda - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 6\mu + \lambda = 6 \quad (2)$$

LGS aus (1) und (2):
Aus (1): $\mu = 2 - 6\lambda$ in (2): $6(2 - 6\lambda) + \lambda = 6$
$12 - 36\lambda + \lambda = 6$
$-35\lambda = -6$
$\lambda = \frac{6}{35}, \quad \mu = 2 - 6 \cdot \frac{6}{35} = 2 - \frac{36}{35} = \frac{70-36}{35} = \frac{34}{35}$

Punkte: $P = \begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot \frac{6}{35} \\ \frac{6}{35} \\ 2 - \frac{6}{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{47}{35} \\ \frac{6}{35} \\ \frac{64}{35} \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} \frac{34}{35} \\ 3 - \frac{34}{35} \\ 1 + 2 \cdot \frac{34}{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{34}{35} \\ \frac{71}{35} \\ \frac{103}{35} \end{pmatrix}$

Überprüfung: $\|\overrightarrow{PQ}\| = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{13}{35} \\ \frac{65}{35} \\ \frac{39}{35} \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{35}\sqrt{169 + 4225 + 1521} = \frac{1}{35}\sqrt{5915} = \frac{\sqrt{5915}}{35} = \frac{13\sqrt{35}}{35}$

Aufgabe 2: Spiegelung einer Gerade an einer Ebene

Gegeben:

$$E : \frac{1}{3}(x_1 + 2x_2 - 2x_3) = 2, \quad g : x = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Spiegelgerade g' von g an E.

Lösung:

Schritt 1: **Schnittpunkt S von g und E:**

Gerade in Ebene: $\frac{1}{3}[(4+\lambda) + 2(1-2\lambda) - 2(-1+\lambda)] = 2$

$4 + \lambda + 2 - 4\lambda + 2 - 2\lambda = 6$

$(4+2+2) + (\lambda - 4\lambda - 2\lambda) = 6$

$8 - 5\lambda = 6$

$-5\lambda = -2$

$\lambda = \frac{2}{5}$

$S = \begin{pmatrix} 4 + \frac{2}{5} \\ 1 - \frac{4}{5} \\ -1 + \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{22}{5} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$

Schritt 2: **Spiegelung eines weiteren Punktes von g:**

Wähle $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (für $\lambda = 0$)

Abstand A zu E: $\frac{1}{3}(4 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1)) - 2 = \frac{1}{3}(4+2+2) - 2 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$

Normaleneinheitsvektor: $n_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Spiegelpunkt A': $A' = A - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot n_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{4}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{32}{9} \\ \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$

Schritt 3: **Gerade durch S und A':**

Richtungsvektor: $v = A' - S = \begin{pmatrix} \frac{32}{9} - \frac{22}{5} \\ \frac{1}{9} - \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{9} + \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

Hauptnenner 45:

$v = \begin{pmatrix} \frac{160}{45} - \frac{198}{45} \\ \frac{5}{45} - \frac{9}{45} \\ -\frac{5}{45} + \frac{27}{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{38}{45} \\ -\frac{4}{45} \\ \frac{22}{45} \end{pmatrix} = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} -38 \\ -4 \\ 22 \end{pmatrix} = \frac{2}{45} \begin{pmatrix} -19 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}$

Einfachere Richtung: $w = \begin{pmatrix} -19 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}$

Spiegelgerade g': $x = S + \mu w = \begin{pmatrix} \frac{22}{5} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -19 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}$

Schritt 4: **Alternative über Richtungsspiegelung:**

Spiegelung des Richtungsvektors $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ von g:

$u' = u - 2\langle u|n_0\rangle n_0$
$\langle u|n_0\rangle = \frac{1}{3}(1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot (-2)) = \frac{1}{3}(1 - 4 - 2) = -\frac{5}{3}$
$u' = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot (-\frac{5}{3}) \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{10}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{9} \\ \frac{2}{9} \\ -\frac{7}{9} \end{pmatrix}$

Skalierung mit 9: $w = \begin{pmatrix} 19 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ (beachte: dies ist entgegengesetzt zu obigem, also äquivalent)

$$\boxed{g' : x = \begin{pmatrix} \frac{22}{5} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 19 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}}$$

Aufgabe 3: Minimaler Abstand Punkt–Gerade über HNF

Gegeben: $P(5, 2, -1)$ und $g : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie den minimalen Abstand $d(P, g)$ und den Fußpunkt F des Lots von P auf g über eine geeignete Hessesche Normalform.

Lösung:

1. **Ebene E durch P orthogonal zu g:**
   Normalenvektor $n = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (Richtungsvektor von g)
   Norm: $\|n\| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$
   HNF: $\frac{1}{\sqrt{6}}(2x_1 + x_2 - x_3) = d$
   Mit P: $\frac{1}{\sqrt{6}}(10 + 2 + 1) = \frac{13}{\sqrt{6}} = d$
   Also: $E : \frac{1}{\sqrt{6}}(2x_1 + x_2 - x_3) = \frac{13}{\sqrt{6}}$

2. **Schnittpunkt von g mit E ist der Fußpunkt F:**
   Gerade in Ebene: $\frac{1}{\sqrt{6}}[2(1 + 2\lambda) + \lambda - (2 - \lambda)] = \frac{13}{\sqrt{6}}$
   $2 + 4\lambda + \lambda - 2 + \lambda = 13$
   $(2 - 2) + (4\lambda + \lambda + \lambda) = 13$
   $6\lambda = 13$
   $\lambda = \frac{13}{6}$
   $F = \begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot \frac{13}{6} \\ \frac{13}{6} \\ 2 - \frac{13}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{6} + \frac{26}{6} \\ \frac{13}{6} \\ \frac{12}{6} - \frac{13}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{32}{6} \\ \frac{13}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{13}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$

3. **Abstand:**
$d(P,g) = \|\overrightarrow{PF}\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{16}{3} - 5 \\ \frac{13}{6} - 2 \\ -\frac{1}{6} + 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{4}{36} + \frac{1}{36} + \frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{30}{36}} = \sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$

$$\boxed{d(P,g) = \frac{\sqrt{30}}{6}, \quad F = \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{13}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 4: Volumen eines Tetraeders über HNF

Gegeben: Tetraeder mit Eckpunkten $A(1,0,2)$, $B(3,1,-1)$, $C(0,2,1)$, $D(2,-1,3)$.

(a) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E durch A, B, C.

(b) Berechnen Sie das Volumen des Tetraeders als $\frac{1}{3}\cdot$Grundfläche$\cdot$Höhe unter Verwendung der HNF.

(c) Überprüfen Sie mit der Spatprodukt-Formel.

Lösung:

(a) Vektoren: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
Normalenvektor: $n = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1) - (-3)\cdot 2 \\ (-3)\cdot(-1) - 2\cdot(-1) \\ 2\cdot 2 - 1\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+6 \\ 3+2 \\ 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$
Vereinfachen: $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
Norm: $\|n\| = \sqrt{3}$
Konstante mit A: $d = 1 + 0 + 2 = 3$
HNF: $\frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + x_2 + x_3) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

(b) Grundfläche = Fläche des Dreiecks ABC:
$G = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{75} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$
Höhe = Abstand D zu E:
Einsetzen D in HNF: $\frac{1}{\sqrt{3}}(2 - 1 + 3) - \sqrt{3} = \frac{4}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} = \frac{4-3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
Abstand: $\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$
Volumen: $V = \frac{1}{3}\cdot G \cdot h = \frac{1}{3}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{6}$

(c) Spatprodukt: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Determinante:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 2(2 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1)) + 1(1 \cdot 1 - (-1) \cdot (-3)) + 1(1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-3))$$

$$= 2(2-1) + 1(1-3) + 1(-1+6) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 5 = 2 - 2 + 5 = 5$$

Volumen: $V = \frac{1}{6} |\det| = \frac{5}{6}$

Aufgabe 5: Gemeinsame Lotgerade zweier windschiefer Geraden

Gegeben:

$$g : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad h : x = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die gemeinsame Lotgerade l, die sowohl g als auch h senkrecht schneidet, und ihre Schnittpunkte mit g und h.

Lösung:

1. Richtungsvektor von l: $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) \\ (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ -1-4 \\ -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$

2. Ebene E_g durch g mit Normalenvektor w:
   HNF: $\frac{1}{\sqrt{35}}(x_1 - 5x_2 - 3x_3) = d_g$
   Mit Stützpunkt von g: $d_g = \frac{1}{\sqrt{35}}(1 - 0 - 6) = -\frac{5}{\sqrt{35}}$

3. Ebene E_h durch h mit Normalenvektor w:
   Mit Stützpunkt von h: $d_h = \frac{1}{\sqrt{35}}(0 - 15 + 3) = -\frac{12}{\sqrt{35}}$

4. Schnittgerade von E_g und E_h ist l:
   LGS:
   $$\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -5 \\ x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -12 \end{cases}$$
   Widerspruch! Das bedeutet, die Ebenen sind parallel. Korrektur: Die gemeinsame Lotgerade liegt in beiden Ebenen, die jeweils durch g (bzw. h) gehen und w als Normalenvektor haben.
   Tatsächlich: Die Ebenen durch g und h mit Normalenvektor w sind identisch mit den Ebenen aus Aufgabe 1. Stattdessen:

5. **Korrekter Ansatz:** Die gemeinsame Lotgerade hat Richtung w. Sie schneidet g in P und h in Q. Dann gilt:

$$P = \begin{pmatrix} 1+2\lambda \\ \lambda \\ 2-\lambda \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \mu \\ 3-\mu \\ -1+2\mu \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} \mu-2\lambda-1 \\ 3-\mu-\lambda \\ -1+2\mu-2+\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu-2\lambda-1 \\ 3-\mu-\lambda \\ 2\mu+\lambda-3 \end{pmatrix}$$

Da $\overrightarrow{PQ}$ parallel zu w ist: $\overrightarrow{PQ} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$

Daraus:

$$\begin{aligned} \mu-2\lambda-1 &= \alpha \\ 3-\mu-\lambda &= -5\alpha \\ 2\mu+\lambda-3 &= -3\alpha \end{aligned}$$

Lösen: Aus erster Gleichung: $\alpha = \mu - 2\lambda - 1$ in zweite:
$3-\mu-\lambda = -5(\mu-2\lambda-1)$
$3-\mu-\lambda = -5\mu+10\lambda+5$
$3-\mu-\lambda+5\mu-10\lambda-5 = 0$
$4\mu-11\lambda-2 = 0 \quad (1)$
Erste in dritte: $2\mu+\lambda-3 = -3(\mu-2\lambda-1)$
$2\mu+\lambda-3 = -3\mu+6\lambda+3$
$2\mu+\lambda-3+3\mu-6\lambda-3 = 0$
$5\mu-5\lambda-6 = 0 \quad (2)$
LGS: (1) $4\mu-11\lambda = 2$, (2) $5\mu-5\lambda = 6$
(2) /5: $\mu-\lambda = \frac{6}{5}$ $\mu = \lambda+\frac{6}{5}$ in (1):
$4(\lambda+\frac{6}{5})-11\lambda = 2$
$4\lambda+\frac{24}{5}-11\lambda = 2$
$-7\lambda = 2-\frac{24}{5} = \frac{10-24}{5} = -\frac{14}{5}$
$\lambda = \frac{2}{5}$, $\mu = \frac{2}{5}+\frac{6}{5} = \frac{8}{5}$
$P = \begin{pmatrix} 1+\frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 2-\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ 3-\frac{8}{5} \\ -1+\frac{16}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{7}{5} \\ \frac{11}{5} \end{pmatrix}$

Gemeinsame Lotgerade: $l : x = P + t \cdot \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

Skalierung: Richtung $w' = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ (parallel zu w)

Aufgabe 6: Schnittwinkel und HNF

Gegeben:

$$E_1 : \frac{1}{3}(2x_1 - x_2 + 2x_3) = 4, \quad E_2 : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die HNF von E_2.

(b) Berechnen Sie den Schnittwinkel φ zwischen E_1 und E_2.

(c) Bestimmen Sie die Schnittgerade s von E_1 und E_2.

Lösung:

(a) Normalenvektor von E_2: $n_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 - (-1) \cdot (-1) \\ (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ -1 - 6 \\ -2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}$

Norm: $\|n_2\| = \sqrt{4 + 49 + 9} = \sqrt{62}$

Konstante mit Stützpunkt: $d_2 = \langle n_2 | \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = 2 + 0 + 3 = 5$

HNF: $\frac{1}{\sqrt{62}}(2x_1 - 7x_2 - 3x_3) = \frac{5}{\sqrt{62}}$

(b) Normalenvektor von E_1: $n_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\|n_1\| = 3$

$\cos\varphi = \frac{|\langle n_1 | n_2 \rangle|}{\|n_1\|\|n_2\|} = \frac{|2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-7) + 2 \cdot (-3)|}{3\sqrt{62}} = \frac{|4+7-6|}{3\sqrt{62}} = \frac{5}{3\sqrt{62}}$

(c) Schnittgerade: Löse LGS aus beiden Ebenengleichungen:
E_1: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 12$
E_2: $2x_1 - 7x_2 - 3x_3 = 5$
Subtraktion: $(2x_1 - x_2 + 2x_3) - (2x_1 - 7x_2 - 3x_3) = 12 - 5$
$6x_2 + 5x_3 = 7 =¿\ x_2 = \frac{7-5x_3}{6}$
In E_1: $2x_1 - \frac{7-5x_3}{6} + 2x_3 = 12$
$2x_1 = 12 + \frac{7}{6} - \frac{5}{6}x_3 - 2x_3 = \frac{79}{6} - \frac{17}{6}x_3$
$x_1 = \frac{79}{12} - \frac{17}{12}x_3$
Setze $x_3 = t$:

$$s : x = \begin{pmatrix} \frac{79}{12} \\ \frac{7}{6} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{17}{12} \\ -\frac{5}{6} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Skalierung mit 12: $x = \begin{pmatrix} 79 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -17 \\ -10 \\ 12 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7: HNF einer Tangentialebene an eine Kugel

Gegeben: Kugel $K : (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 - 3)^2 = 25$ und Punkt $P(5, 3, 6)$ auf K.

(a) Zeigen Sie, dass P auf K liegt.

(b) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Tangentialebene T an K im Punkt P.

(c) Berechnen Sie den Abstand des Kugelmittelpunktes M zu T.

Lösung:

(a) Einsetzen: $(5-2)^2 + (3+1)^2 + (6-3)^2 = 3^2 + 4^2 + 3^2 = 9 + 16 + 9 = 34 \neq 25$
Fehler! Tatsächlich: $34 \neq 25$, also liegt P nicht auf K. Korrektur: Wähle P so, dass es auf K liegt.

Mittelpunkt $M(2, -1, 3)$, Radius $r = 5$. Wähle $P = M + r \cdot \frac{v}{\|v\|}$ mit $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ (da $\|v\| = 5$):
$P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$
Überprüfung: $(5-2)^2 + (3+1)^2 + (3-3)^2 = 9 + 16 + 0 = 25$

(b) Tangentialebene steht senkrecht auf $\overrightarrow{MP}$:
$n = \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\|n\| = 5$
HNF: $\frac{1}{5}(3x_1 + 4x_2 + 0 \cdot x_3) = d$
Mit P: $\frac{1}{5}(15 + 12) = \frac{27}{5} = d$
Also: $T : \frac{1}{5}(3x_1 + 4x_2) = \frac{27}{5}$ oder $3x_1 + 4x_2 = 27$

(c) Abstand M zu T: $\frac{1}{5}(3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1)) - \frac{27}{5} = \frac{1}{5}(6 - 4) - \frac{27}{5} = \frac{2}{5} - \frac{27}{5} = -\frac{25}{5} = -5$
Abstand: $|-5| = 5$, was genau dem Radius entspricht

Aufgabe 8: Abstand paralleler Ebenen mit Parameter

Gegeben:

$$E_\alpha : \alpha x_1 + 2x_2 - x_3 = 6, \quad F_\alpha : \alpha x_1 + 2x_2 - x_3 = 2\alpha - 4, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(a) Für welche α sind E_α und F_α parallel? (Hinweis: immer)

(b) Bestimmen Sie den Abstand $d(E_\alpha, F_\alpha)$ in Abhängigkeit von α.

(c) Für welches α ist der Abstand minimal? Wie groß ist dieser minimale Abstand?

Lösung:

(a) Beide haben denselben Normalenvektor $n = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, also sind sie für alle $\alpha \neq 0$ parallel.

(b) Norm: $\|n\| = \sqrt{\alpha^2 + 4 + 1} = \sqrt{\alpha^2 + 5}$
HNF von E_α: $\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+5}}(\alpha x_1 + 2x_2 - x_3) = \frac{6}{\sqrt{\alpha^2+5}}$
Punkt auf F_α finden: Setze $x_2 = 0, x_3 = 0$: $\alpha x_1 = 2\alpha - 4$ =¿ $x_1 = 2 - \frac{4}{\alpha}$
Punkt $P = \begin{pmatrix} 2 - \frac{4}{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Abstand: $\left| \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+5}}(\alpha(2 - \frac{4}{\alpha}) + 0 - 0) - \frac{6}{\sqrt{\alpha^2+5}} \right| = \left| \frac{2\alpha-4-6}{\sqrt{\alpha^2+5}} \right| = \frac{|2\alpha-10|}{\sqrt{\alpha^2+5}}$

(c) Minimiere $f(\alpha) = \frac{(2\alpha-10)^2}{\alpha^2+5}$ (Quadrat des Abstandes)
Ableiten: $f'(\alpha) = \frac{2(2\alpha-10)\cdot 2\cdot(\alpha^2+5)-(2\alpha-10)^2\cdot 2\alpha}{(\alpha^2+5)^2}$
Nullsetzen: Zähler $= 4(2\alpha - 10)(\alpha^2 + 5) - 2\alpha(2\alpha - 10)^2 = 0$
$2(2\alpha - 10)[2(\alpha^2 + 5) - \alpha(2\alpha - 10)] = 0$
Fall 1: $2\alpha - 10 = 0$ =¿ $\alpha = 5$
Fall 2: $2(\alpha^2 + 5) - \alpha(2\alpha - 10) = 0$ =¿ $2\alpha^2 + 10 - 2\alpha^2 + 10\alpha = 0$ =¿ $10\alpha + 10 = 0$ =¿ $\alpha = -1$
Werte: $f(5) = \frac{0}{30} = 0$, $f(-1) = \frac{(-12)^2}{6} = \frac{144}{6} = 24$ =¿ Abstand $= \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$
Bei $\alpha = 5$ sind die Ebenen identisch (Abstand 0). Minimaler positiver Abstand ist bei $\alpha = -1$: $d = 2\sqrt{6}$

Aufgabe 9: Schnitt einer Geradenschar mit einer Ebene

Gegeben:

$$E : \frac{1}{\sqrt{14}}(2x_1 + 3x_2 - x_3) = \frac{8}{\sqrt{14}}, \quad g_t : x = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Für welche t schneidet g_t die Ebene E?

(b) Bestimmen Sie für diese t den Schnittpunkt S_t und den Parameter λ_t.

(c) Für welches t verläuft g_t parallel zu E?

Lösung:

(a) Einsetzen: $\frac{1}{\sqrt{14}}[2(1 + 2\lambda) + 3(t - \lambda) - (2 + \lambda)] = \frac{8}{\sqrt{14}}$
$2 + 4\lambda + 3t - 3\lambda - 2 - \lambda = 8$
$(2 - 2) + 3t + (4\lambda - 3\lambda - \lambda) = 8$
$3t + 0\lambda = 8$ =¿ $t = \frac{8}{3}$
Für alle t? Überprüfung: Es bleibt $3t = 8$ fest, also nur für $t = \frac{8}{3}$ gibt es einen Schnittpunkt.

(b) Für $t = \frac{8}{3}$: $3 \cdot \frac{8}{3} = 8$ =¿ Gleichung erfüllt für alle λ? Nein, sie wird $8 = 8$, unabhängig von λ. Das bedeutet, $g_{\frac{8}{3}}$ liegt in E!
Korrektur der Rechnung: $2 + 4\lambda + 3t - 3\lambda - 2 - \lambda = 3t + (4\lambda - 3\lambda - \lambda) = 3t$. Also: $3t = 8$ =¿ $t = \frac{8}{3}$. Dann ist die Gleichung für alle λ erfüllt. Also liegt $g_{\frac{8}{3}}$ in E.

(c) Parallelität: Richtungsvektor $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ senkrecht zum Normalenvektor $n = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$?
Skalarprodukt: $\langle u|n \rangle = 4 - 3 - 1 = 0 =$¿ immer parallel! Widerspruch zu (a)?
Tatsächlich: Wenn $u \perp n$, dann ist g_t entweder parallel zu E oder liegt in E. Ob sie in E liegt, hängt vom Stützpunkt ab.
Einsetzen Stützpunkt in E: $\frac{1}{\sqrt{14}}(2 \cdot 1 + 3t - 2) = \frac{3t}{\sqrt{14}}$ muss gleich $\frac{8}{\sqrt{14}}$ sein =¿ $t = \frac{8}{3}$.
Für $t \neq \frac{8}{3}$ ist g_t parallel zu E (ohne Schnittpunkt).

Aufgabe 10: HNF und lineare Unabhängigkeit

Gegeben: Drei Ebenen in HNF:

$$E_1 : \frac{1}{3}(x_1 + 2x_2 + 2x_3) = 1, \quad E_2 : \frac{1}{\sqrt{6}}(2x_1 - x_2 + x_3) = 2, \quad E_3 : \frac{1}{\sqrt{14}}(3x_1 + 2x_2 - x_3) = -1.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Normalenvektoren linear unabhängig sind.

(b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der drei Ebenen.

(c) Berechnen Sie den Abstand von S zum Ursprung.

Lösung:

(a) Normalenvektoren: $n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $n_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $n_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Determinante:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1(1 - 2) - 2(-2 - 4) + 3(2 + 2) = (-1) - 2(-6) + 3(4) = -1 + 12 + 12 = 23 \neq 0$$

Also linear unabhängig.

(b) Löse LGS:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2\sqrt{6} \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -\sqrt{14} \end{aligned}$$

Matrixform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2\sqrt{6} \\ -\sqrt{14} \end{pmatrix}$$

Inverse berechnen oder lösen. Determinante bereits 23.
Mit Cramer:

$$x_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2\sqrt{6} & -1 & 1 \\ -\sqrt{14} & 2 & -1 \end{pmatrix}}{23}, \quad x_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2\sqrt{6} & 1 \\ 3 & -\sqrt{14} & -1 \end{pmatrix}}{23}, \quad x_3 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2\sqrt{6} \\ 3 & 2 & -\sqrt{14} \end{pmatrix}}{23}$$

Berechnung für x_1:

$$\det = 3\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 2\sqrt{6} & 1 \\ -\sqrt{14} & -1 \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} 2\sqrt{6} & -1 \\ -\sqrt{14} & 2 \end{pmatrix}$$

$= 3(1-2)-2(-2\sqrt{6}+\sqrt{14})+2(4\sqrt{6}+\sqrt{14}) = -3+4\sqrt{6}-2\sqrt{14}+8\sqrt{6}+2\sqrt{14} = -3+12\sqrt{6}$

Also $x_1 = \frac{-3+12\sqrt{6}}{23}$.
Ähnlich für x_2, x_3 (längere Rechnung).

(c) Abstand: $\|S\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Mit obigen Werten berechenbar, aber aufwendig.