Vektorräume Blatt 1

Ismail Gemaledin, Iusuf Gemaledin

Grundlagen

Vektoren sind Objekte mit **Richtung** und **Betrag**. Ein Vektorraum ist eine Menge V mit zwei Operationen (Addition und Skalarmultiplikation), die bestimmte Axiome erfüllen.

Gelöste Aufgaben

Aufgabe 1: Vektoraddition und Kräfte

Zwei Kräfte wirken auf einen Punkt: $\vec{F_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ N und $\vec{F_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ N. Bestimme die resultierende Kraft $\vec{F_{res}}$.

Lösung: Die resultierende Kraft ist die Vektorsumme:

$$\vec{F_{res}} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + (-1) \\ (-2) + 4 \\ 1 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ N}$$

Denkweise: Kräfte addieren sich vektoriell. Einheiten (hier Newton) bleiben erhalten.

Aufgabe 2: Skalarprodukt und Winkel

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Berechne: a) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ b) Den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$

Lösung: a) Skalarprodukt:

$$\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 + 3 \cdot (-2) = 2 - 4 - 6 = -8$$

b) Winkelberechnung:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$$
$$\|\vec{b}\| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 16 + 4} = \sqrt{21}$$
$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} = \frac{-8}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} = \frac{-8}{\sqrt{294}} = \frac{-8}{7\sqrt{6}}$$
$$\theta = \arccos\left(\frac{-8}{7\sqrt{6}}\right) \approx 122.3^\circ$$

Aufgabe 3: Geradengleichung

Bestimme die Parameterdarstellung der Geraden durch die Punkte $P(1, 2, -1)$ und $Q(3, 0, 2)$.

Lösung: Richtungsvektor:

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 0-2 \\ 2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Geradengleichung:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Alternative mit Punkt Q:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

Beide beschreiben dieselbe Gerade.

Aufgabe 4: Lineare Abhängigkeit

Untersuche, ob die Vektoren linear abhängig sind:

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Wir lösen $\lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2} + \lambda_3 \vec{v_3} = \vec{0}$:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 0\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Aus der zweiten Gleichung: $\lambda_3 = -2\lambda_1$

In die erste Gleichung: $\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2(-2\lambda_1) = 0 \Rightarrow -3\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_1$

In die dritte Gleichung: $-\lambda_1 + 2\lambda_1 + (-2\lambda_1) = -\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

Damit: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\boxed{\textbf{Linear unabhängig}}$ (nur die triviale Lösung)

Aufgabe 5: Orthogonale Projektion

Projiziere $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lösung:

$$\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\langle \vec{u}|\vec{v}\rangle}{\langle \vec{v},\vec{v}\rangle}\vec{v}$$

$$\langle \vec{u}|\vec{v}\rangle = 4\cdot 1 + 2\cdot 0 + 1\cdot 2 = 6$$

$$\langle \vec{v}|\vec{v}\rangle = 1^2 + 0^2 + 2^2 = 5$$

$$\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{6}{5}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{6}{5}\\0\\\frac{12}{5}\end{pmatrix}$$

Aufgabe 6: Vektorprodukt

Berechne $\vec{a}\times\vec{b}$ für $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}$.

Lösung:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix}a_2b_3 - a_3b_2\\a_3b_1 - a_1b_3\\a_1b_2 - a_2b_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-1)\cdot(-2) - 3\cdot 4\\3\cdot 1 - 2\cdot(-2)\\2\cdot 4 - (-1)\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-12\\3+4\\8+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\7\\9\end{pmatrix}$$

Kontrolle: Skalarprodukt mit $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sollte 0 sein:

$$\langle \vec{a}|\vec{a}\times\vec{b}\rangle = 2\cdot(-10) + (-1)\cdot 7 + 3\cdot 9 = -20 - 7 + 27 = 0 \quad \checkmark$$

$$\langle \vec{b}|\vec{a}\times\vec{b}\rangle = 1\cdot(-10) + 4\cdot 7 + (-2)\cdot 9 = -10 + 28 - 18 = 0 \quad \checkmark$$

Aufgabe 7

Gegeben $\vec{u} = \begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$. Berechne: a) $2\vec{u} - 3\vec{v}$ b) $\|\vec{u}\|$ c) $\|\vec{u}+\vec{v}\|$

Lösung: a) $2\vec{u} - 3\vec{v} = \begin{pmatrix}6\\-4\\10\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\12\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\-16\\7\end{pmatrix}$ b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{9+4+25} = \sqrt{38}$ c) $\vec{u}+\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\2\\6\end{pmatrix}$, $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{4+4+36} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$

Aufgabe 8

Finde eine zu $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$ orthogonale Einheitsvektor.

Lösung: Ein möglicher orthogonaler Vektor: $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Skalarprodukt: $2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + (-3) \cdot 0 = 0$) Normierung: $\|\vec{b}\| = \sqrt{1+4+0} = \sqrt{5}$ Einheitsvektor: $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 9

Liegen die Punkte $A(1,2,3)$, $B(4,5,6)$, $C(7,8,9)$ auf einer Geraden?

Lösung: Vektoren: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ Da $\overrightarrow{AC} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$, sind die Vektoren kollinear. $\boxed{\text{Ja, auf einer Geraden.}}$

Aufgabe 10

Bestimme eine Basis des von folgenden Vektoren aufgespannten Raums:

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung: Da $\vec{v_2} = 2\vec{v_1} + \vec{v_3}$, ist $\vec{v_2}$ linear abhängig von den anderen. Eine mögliche Basis: $\{\vec{v_1}, \vec{v_3}\}$ (linear unabhängig, da nicht Vielfache).

Aufgabe 11

Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms, das von $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

Lösung: Fläche $= \|\vec{u} \times \vec{v}\|$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Fläche $= \| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \| = 10$

Aufgabe 12

Zeige: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig.

Lösung: Gleichung $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}$:

$$\begin{cases} \lambda + 3\mu = 0 \\ 2\lambda - \mu = 0 \\ -\lambda + \mu = 0 \end{cases}$$

Aus dritter: $\mu = \lambda$, in erste: $\lambda + 3\lambda = 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$, dann $\mu = 0$. Nur triviale Lösung $\rightarrow$ linear unabhängig.

Aufgabe 13

Gegeben Ebene $E : x + 2y - 3z = 4$. Finde einen Normalenvektor.

Lösung: Koeffizienten geben Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 14

Berechne den Abstand des Punktes $P(2, -1, 3)$ von der Ebene $E : 2x - y + 2z = 6$.

Lösung: Hessesche Normalform: $\frac{|2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 3 - 6|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|4+1+6-6|}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}$

Aufgabe 15

Sind $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ orthogonal?

Lösung: Skalarprodukt: $1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = -2 + 0 + 2 = 0 \rightarrow \boxed{\text{Ja}}$

Aufgabe 16

Spiegeln Sie den Punkt $P(1, 2, 3)$ an der Ebene $x = 0$ (yz-Ebene).

Lösung: Spiegelung an $x = 0$: x-Koordinate ändert Vorzeichen: $P'(-1, 2, 3)$

Aufgabe 17

Bestimme $\vec{w}$, so dass $\vec{w} \perp \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} \perp \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Lösung: $\vec{w} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 18

Berechne das Volumen des Spats, das von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannt wird mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung: Volumen $= |\langle \vec{a} \times \vec{b} | \vec{c} \rangle|$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt mit $\vec{c}$: $(-2) \cdot 0 + 5 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 16$ Volumen $= |16| = 16$

Zusatzaufgaben (ohne Lösungen)

Aufgabe Z1

Drei Kräfte: $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Berechne die Gesamtkraft und ihren Betrag.

Aufgabe Z2

Finde alle Vektoren, die orthogonal sind zu $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe Z3

Gegeben Dreieck mit Eckpunkten $A(0, 0, 0)$, $B(3, 1, 2)$, $C(1, 4, -1)$. Berechne den Flächeninhalt.

Aufgabe Z4

Prüfe, ob die Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe Z5

Bestimme den Schnittpunkt der Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe Z6

Projiziere $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf die von $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannte Ebene.

Aufgabe Z7

Berechne den Winkel zwischen der Raumdiagonalen eines Würfels und einer Seitenflächendiagonalen.

Aufgabe Z8

Zeige: $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$ (Parallelogrammgleichung).

Aufgabe Z9

Finde eine orthonormale Basis des von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannten Unterraums.

Aufgabe Z10

Beweise: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ (Antikommutativität).

Wichtige Formeln

- Skalarprodukt: $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$
- Betrag: $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle}$
- Winkel: $\cos\theta = \frac{\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$
- Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$
- Projektion: $\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$

- Gerade durch P in Richtung $\vec{v}$: $\vec{x} = \vec{p} + t\vec{v}$
- Ebene: $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$