Matrizen und Lineare Gleichungssysteme Blatt 1

Iusuf Gemaledin

Grundlagen

Eine **Matrix** der Größe $m \times n$ ist ein rechteckiges Zahlenschema:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Wichtige Operationen

- **Addition**: Nur für Matrizen gleicher Größe: $(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- **Skalarmultiplikation**: $(\lambda A)_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$
- **Matrizenmultiplikation**: $C = AB$ mit $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$
  Voraussetzung: Spaltenzahl von A = Zeilenzahl von B
- **Transponierte**: A^T mit $(A^T)_{ij} = a_{ji}$

Gelöste Aufgaben

Aufgabe 1: Matrixmultiplikation

Gegeben: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Berechne (falls möglich): a) AB b) BA c) AC d) $A^T B$

Lösung:

a) A ist 3×2, B ist 2×3 $\rightarrow$ AB ist 3×3:

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 & 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 4 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 3 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) + 0 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 4 \cdot 1 & 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 \\ 3 & 9 & -6 \\ 1 & 7 & 14 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

b) BA: B ist 2×3, A ist $3 \times 2 \rightarrow BA$ ist 2×2:

$$
\begin{aligned}
BA &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + (-2) \cdot 4 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 + 9 - 2 & -1 + 0 - 8 \\ 0 + 3 + 4 & 0 + 0 + 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ 7 & 16 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

c) AC: A ist 3×2, C ist $2 \times 2 \rightarrow AC$ ist 3×2:

$$
\begin{aligned}
AC &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 + 1 & 2 - 3 \\ 6 + 0 & 3 + 0 \\ 2 - 4 & 1 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 3 \\ -2 & 13 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

d) $A^T B$: A^T ist 2×3, B ist $2 \times 3 \rightarrow$ **nicht möglich** (Spaltenzahl von $A^T = 3$, Zeilenzahl von $B = 2$).

Aufgabe 2: Rechenregeln

Zeige für $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$: a) $(A + B)^T = A^T + B^T$ b) $(AB)^T = B^T A^T$

Lösung:

a)

$$
\begin{aligned}
A+B &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\
(A+B)^T &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\
A^T + B^T &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Stimmt überein.

b)

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 0 + 1\cdot 1 & 2\cdot 2 + 1\cdot(-1) \\ (-1)\cdot 0 + 3\cdot 1 & (-1)\cdot 2 + 3\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \\
(AB)^T &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \\
B^T A^T &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 2 + 1\cdot 1 & 0\cdot(-1) + 1\cdot 3 \\ 2\cdot 2 + (-1)\cdot 1 & 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Stimmt überein.

Aufgabe 3: Matrixgleichung

Löse die Matrixgleichung nach X auf:

$$3X + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - X$$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
3X + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} - X \\
3X + X &= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\
4X &= \begin{pmatrix} 4-1 & 2-(-2) \\ -2-3 & 8-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} \\
X &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 1 \\ -\frac{5}{4} & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4: Lineares Gleichungssystem als Matrix

Schreibe das lineare Gleichungssystem als Matrixgleichung $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$
\begin{cases}
2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5 \\
x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -1 \\
3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0
\end{cases}
$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5: Matrix mal Vektor

Gegeben $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Berechne $A\mathbf{x}$.

Lösung:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \\ (-2) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 - 2 - 3 \\ 6 + 0 + 6 \\ -4 - 1 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zusatzaufgaben

Aufgabe 6

Gegeben $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Berechne: a) AB b) BA c) A^T d) B^T e) $A^T B^T$ (falls möglich)

Aufgabe 7

Für $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$: Zeige: $A(B + C) = AB + AC$

Aufgabe 8

Löse nach X auf:

$$2 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + 3X$$

Aufgabe 9

Gegeben $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Berechne: a) $A^2 = A \cdot A$ b) $A^3 = A \cdot A \cdot A$

Aufgabe 10

Stelle als Matrixgleichung $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dar:

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 7 \\ 2x - y + 4z = -3 \\ 3x + 2y - z = 5 \end{cases}$$

Aufgabe 11

Gegeben $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$. Berechne: a) $A\mathbf{v}$ b) $A\mathbf{w}$ c) $A(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ d) $A\mathbf{v} + A\mathbf{w}$

Aufgabe 12

Welche der folgenden Multiplikationen sind möglich? Bestimme die Größe des Ergebnisses.
a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 13

Gegeben $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Finde eine Matrix B mit $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hinweis: Versuche $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit unbekannten a, b, c, d.

Aufgabe 14

Für eine Matrix A heißt A **symmetrisch**, wenn $A^T = A$. Welche der folgenden Matrizen sind symmetrisch? a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 15

Zeige allgemein für Matrizen passender Größe: a) $(A^T)^T = A$ b) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ für $\lambda \in \mathbb{R}$

Aufgabe 16

Das Produkt zweier Matrizen A und B ist nicht kommutativ: $AB \neq BA$ im Allgemeinen. Finde ein Gegenbeispiel mit 2×2-Matrizen.

Aufgabe 17

Berechne $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right)$ auf zwei Arten: a) Zuerst Klammer berechnen b) Distributivgesetz anwenden

Aufgabe 18

Ein Unternehmen stellt 3 Produkte her. Für Produkt i werden a_{ij} Einheiten von Rohstoff j benötigt ($i, j = 1, 2, 3$):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wenn $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ die produzierte Menge der Produkte ist, was berechnet dann $A\mathbf{x}$?

Aufgabe 19

Gegeben $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Finde alle Matrizen $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $AB = BA$.

Aufgabe 20

Für Matrizen A, B passender Größe gilt nicht immer $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Finde ein Gegenbeispiel mit 2×2-Matrizen.

Lösungshinweise

- Bei **Matrixmultiplikation**: Immer zuerst Größen überprüfen ($m \times n$ mal $n \times p$)
- **Transponieren**: Zeilen und Spalten vertauschen
- **Rechenregeln**: $(A + B)^T = A^T + B^T$, $(AB)^T = B^T A^T$, $A(B + C) = AB + AC$
- **Lineare Gleichungssysteme**: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, wobei A die Koeffizientenmatrix, $\mathbf{x}$ der Variablenvektor und $\mathbf{b}$ der Ergebnisvektor ist
- **Matrixgleichungen**: Wie normale Gleichungen auflösen, aber auf Reihenfolge bei Multiplikation achten