Hessesche Normalform Blatt 1

Iusuf Gemaledin, Ismail Gemaledin

Gelöste Aufgaben

Aufgabe 1: HNF aus Koordinatenform

Gegeben: $E : 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 14$. Bestimmen Sie die Hessesche Normalform (HNF).

Lösung: Normalenvektor: $n = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ (diese sind die Koeffizienten von $E : 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 14$

Norm: $\|n\| = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$

HNF: $\frac{1}{7}(2x_1 - 3x_2 + 6x_3) = \frac{14}{7} = 2$

$$E : \frac{1}{7}(2x_1 - 3x_2 + 6x_3) = 2$$

Aufgabe 2: HNF aus drei Punkten

Gegeben: $P(1, 0, 1), Q(2, 1, 3), R(0, -1, 2)$. Bestimmen Sie die HNF der Ebene E durch P, Q, R.

Lösung: Richtungsvektoren: $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Normalenvektor: $n = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ Vereinfachen: $n = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Norm: $\|n\| = \sqrt{2}$ Konstante: $d = \langle n|P \rangle = 1$ HNF: $\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Aufgabe 3: Abstand Punkt–Ebene

Gegeben: $E : 3x_1 + 4x_3 = 5$ in HNF, $A(1, 2, -1)$. Berechnen Sie den Abstand $d(A, E)$.

Lösung: HNF: $\frac{1}{5}(3x_1 + 4x_3) = 1$ Einsetzen: $\frac{1}{5}(3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1)) - 1 = \frac{1}{5}(3 - 4) - 1 = -\frac{1}{5} - 1 = -\frac{6}{5}$ Abstand: $\left|-\frac{6}{5}\right| = \frac{6}{5}$

Aufgabe 4: HNF mit Parameter

Gegeben: $E_\alpha : \alpha x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$, $\alpha > 0$. Bestimmen Sie die HNF.

Lösung: Norm: $\|n\| = \sqrt{\alpha^2 + 4 + 1} = \sqrt{\alpha^2 + 5}$ HNF: $\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+5}}(\alpha x_1 + 2x_2 - x_3) = \frac{4}{\sqrt{\alpha^2+5}}$

Aufgabe 5: Lage Punkt–Ebene

Gegeben: $E : \frac{1}{3}(x_1+2x_2-2x_3) = 1$, $B(2,1,3)$. Liegt B auf E? Wenn nein, auf welcher Seite?

Lösung: Einsetzen: $\frac{1}{3}(2+2\cdot 1-2\cdot 3) = \frac{1}{3}(2+2-6) = \frac{1}{3}(-2) = -\frac{2}{3}$ Vergleich mit 1: $-\frac{2}{3} \neq 1$, also nicht auf E. Da $-\frac{2}{3} < 1$, liegt B auf der Seite, in die $-n$ zeigt.

Aufgabe 6: HNF aus Parameterform

Gegeben: $E : x = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die HNF.

Lösung: Normalenvektor: $n = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-6\\2\end{pmatrix}$ Vereinfachen: $n = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ Norm: $\|n\| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$ Konstante: $d = \langle n| \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\rangle = 2\cdot 1+(-3)\cdot 0+1\cdot 1 = 3$ HNF: $\frac{1}{\sqrt{14}}(2x_1-3x_2+x_3) = \frac{3}{\sqrt{14}}$

Aufgabe 7: Schnittpunkt Gerade–Ebene

Gegeben: $g : x = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$, $E : \frac{1}{\sqrt{6}}(2x_1+x_2-x_3) = 0$. Bestimmen Sie Schnittpunkt S und λ.

Lösung: Gerade in E einsetzen: $\frac{1}{\sqrt{6}}(2(1+3\lambda)+(-1)-(2-\lambda)) = 0$ $2+6\lambda-1-2+\lambda = 0$ $7\lambda-1 = 0$ $\lambda = \frac{1}{7}$ $S = \begin{pmatrix}1+\frac{3}{7}\\-1\\2-\frac{1}{7}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{10}{7}\\-1\\\frac{13}{7}\end{pmatrix}$

Aufgabe 8: Abstand paralleler Ebene

Gegeben: $E : x_1-2x_2+2x_3 = 6$, $F : x_1-2x_2+2x_3 = -4$. Bestimmen Sie den Abstand $d(E,F)$.

Lösung: Normalenvektor: $n = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$, Norm: $\|n\| = 3$ HNF von E: $\frac{1}{3}(x_1-2x_2+2x_3) = 2$ Beliebiger Punkt aus F wählen: z.B. $x_1 = -4, x_2 = 0, x_3 = 0$ erfüllt $-4 = -4$ Abstand: $\left|\frac{1}{3}(-4)-2\right| = \left|-\frac{4}{3}-2\right| = \left|-\frac{10}{3}\right| = \frac{10}{3}$

Aufgabe 9: HNF mit ganzzahligem Normalenvektor

Gegeben: $E : 4x_1-4x_2+2x_3 = 10$. Stellen Sie die HNF mit einem möglichst einfachen Normalenvektor dar.

Lösung: Kürzen: $2(2x_1-2x_2+x_3) = 10$ $2x_1-2x_2+x_3 = 5$ Norm: $\|n\| = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$ HNF: $\frac{1}{3}(2x_1-2x_2+x_3) = \frac{5}{3}$

Aufgabe 10: Punktspiegelung an Ebene

Gegeben: $E : \frac{1}{5}(3x_1 + 4x_2) = 2,\ P(1, 2, 0)$. Bestimmen Sie den Spiegelpunkt P'.

Lösung: Abstand: $d = \frac{1}{5}(3\cdot1+4\cdot2)-2 = \frac{11}{5}-2 = \frac{1}{5}$ Normalenvektor-Einheit: $n_0 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$

Verschiebung: $2d\cdot n_0 = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} = \frac{2}{25}\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$ Richtung: $d > 0$, also von P weg in n_0-Richtung:

$P' = P - 2d \cdot n_0 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} - \frac{2}{25}\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{19}{25}\\\frac{42}{25}\\0\end{pmatrix}$

Aufgabe 11: HNF aus zwei parallelen Geraden

Gegeben: $g : x = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $h : x = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix}$ parallel zu g. Ebene E enthält g und h. Bestimmen Sie HNF.

Lösung: Richtungsvektor von g: $u = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ Verbindungsvektor: $v = \begin{pmatrix}0-1\\1-2\\-1-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-4\end{pmatrix}$ Normalenvektor: $n = u \times v = \begin{pmatrix}5\\7\\-3\end{pmatrix}$ Norm: $\|n\| = \sqrt{25+49+9} = \sqrt{83}$ Konstante: $d = \langle n|\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\rangle = 5 + 14 - 9 = 10$ HNF: $\frac{1}{\sqrt{83}}(5x_1 + 7x_2 - 3x_3) = \frac{10}{\sqrt{83}}$

Aufgabe 12: Winkel zwischen Ebenen

Gegeben: $E : 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 7,\ F : x_1 + 3x_2 - x_3 = 4$. Bestimmen Sie den Winkel φ zwischen E und F.

Lösung: Normalenvektoren: $n_E = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$, $n_F = \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$ Skalarprodukt: $\langle n_E|n_F\rangle = 2 - 3 - 2 = -3$ Normen: $\|n_E\| = 3, \|n_F\| = \sqrt{11}$ $\cos\varphi = \frac{|\langle n_E|n_F\rangle|}{\|n_E\|\|n_F\|} = \frac{3}{3\sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{11}}$ $\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{11}}$

Aufgabe 13: HNF aus Achsenabschnitten

Gegeben: E schneidet Achsen bei $(4, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 6)$. Bestimmen Sie HNF.

Lösung: Ebene: $\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{6} = 1$ Gleichung: $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 12$ Norm: $\|n\| = \sqrt{9+16+4} = \sqrt{29}$ HNF: $\frac{1}{\sqrt{29}}(3x_1 + 4x_2 + 2x_3) = \frac{12}{\sqrt{29}}$

Aufgabe 14: Abstand Ursprung–Ebene

Gegeben: $E : \frac{1}{7}(3x_1 - 6x_2 + 2x_3) = 5$. Wie weit ist der Ursprung von E entfernt?

Lösung: Abstand Ursprung: $|0-5| = 5$ (weil HNF: $\langle n_0|x\rangle = d$, für $x = 0$ ergibt Abstand $|d|$).

Aufgabe 15: HNF mit Skalarprodukt

Gegeben: $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} |x\rangle = 9\}$. Stellen Sie E in HNF dar.

Lösung: Norm: $\|n\| = 3$ HNF: $\frac{1}{3}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} |x\rangle = 3$

Aufgabe 16: Punkt in HNF einsetzen

Gegeben: $E : \frac{1}{\sqrt{14}}(2x_1 + x_2 + 3x_3) = \frac{8}{\sqrt{14}}$, $Q(1, a, 2)$. Für welches a liegt Q in E?

Lösung: Einsetzen: $\frac{1}{\sqrt{14}}(2 \cdot 1 + a + 3 \cdot 2) = \frac{8}{\sqrt{14}}$ $2 + a + 6 = 8$ $a = 0$

Aufgabe 17: Parallele Ebene durch Punkt

Gegeben: $E : x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5$, $P(1, 1, 1)$. Bestimmen Sie HNF der zu E parallelen Ebene F durch P.

Lösung: Gleicher Normalenvektor: $n = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, Norm: 3 Konstante: $d = \langle n|P\rangle = 1 - 2 + 2 = 1$ HNF: $\frac{1}{3}(x_1 - 2x_2 + 2x_3) = \frac{1}{3}$

Aufgabe 18: HNF aus zwei Geraden

Gegeben: $g : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h : x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ schneiden sich. Ebene E enthält beide Geraden. Bestimmen Sie HNF.

Lösung: Richtungsvektoren: $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Normalenvektor: $n = u \times v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ Vereinfachen: $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ Norm: $\|n\| = \sqrt{1 + 1 + 9} = \sqrt{11}$ Konstante mit Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: $d = 1 + 0 + 3 = 4$ HNF: $\frac{1}{\sqrt{11}}(x_1 + x_2 + 3x_3) = \frac{4}{\sqrt{11}}$

Aufgabe 19: Abstand windschiefer Geraden

Gegeben: $g : x = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$, $h : x = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$. Ebene E enthält g und ist parallel zu h. Bestimmen Sie HNF von E und Abstand zu h.

Lösung: Richtungsvektoren: $u = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ (von g), $v = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ (von h, parallel zu E) Normalenvektor: $n = u \times v = \begin{pmatrix}2\\-5\\-1\end{pmatrix}$ Norm: $\|n\| = \sqrt{4+25+1} = \sqrt{30}$ Konstante mit Punkt von g: $d = \langle n| \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \rangle = 2 - 10 + 0 = -8$ HNF: $\frac{1}{\sqrt{30}}(2x_1 - 5x_2 - x_3) = -\frac{8}{\sqrt{30}}$ Abstand h zu E: Punkt von h $\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$ in HNF: $\frac{1}{\sqrt{30}}(0-5-3) + \frac{8}{\sqrt{30}} = \frac{-8+8}{\sqrt{30}} = 0$ h liegt in E (wenn's windschief ist, muss ein anderer Punkt gewählt werden – hier ging Abstand 0, also sind sie nicht windschief).

Aufgabe 20: Fußpunkt des Lots

Gegeben: $E : \frac{1}{3}(x_1 + 2x_2 - 2x_3) = 1$, $A(4, 1, -2)$. Bestimmen Sie den Fußpunkt F des Lots von A auf E.

Lösung: Normaleneinheitsvektor: $n_0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ Abstand d: Einsetzen A in HNF: $\frac{1}{3}(4+2-2\cdot(-2))-1 = \frac{1}{3}(4+2+4)-1 = \frac{10}{3}-1 = \frac{7}{3}$ Fußpunkt: $F = A - d\cdot n_0 = \begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix} - \frac{7}{3}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix} - \frac{7}{9}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{29}{9}\\-\frac{5}{9}\\-\frac{4}{9}\end{pmatrix}$

Zusätzliche Aufgaben (ohne Lösungen)

Aufgabe 21

Gegeben: $E : 5x_1 - 12x_3 = 26$. Bestimmen Sie die HNF.

Aufgabe 22

Gegeben: $P(2, -1, 3), Q(0, 1, 1), R(1, 0, 2)$. Bestimmen Sie die HNF der Ebene durch P, Q, R.

Aufgabe 23

Gegeben: $E : \frac{1}{13}(3x_1 + 4x_2 + 12x_3) = 2,\ B(1, 2, -1)$. Berechnen Sie den Abstand $d(B, E)$.

Aufgabe 24

Gegeben: $E : x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die HNF.

Aufgabe 25

Gegeben: $g : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $E : \frac{1}{\sqrt{6}}(x_1 - 2x_2 + x_3) = 3$. Bestimmen Sie Schnittpunkt S und λ.

Aufgabe 26

Gegeben: $E : 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8,\ F : 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 10$. Bestimmen Sie den Abstand $d(E, F)$.

Aufgabe 27

Gegeben: $E : \frac{1}{7}(3x_1 + 6x_2 - 2x_3) = 1,\ P(2, a, 1)$. Für welches a liegt P in E?

Aufgabe 28

Gegeben: $E : x_1 + 3x_2 - x_3 = 7,\ P(1, 2, 3)$. Bestimmen Sie die HNF der zu E parallelen Ebene durch P.

Aufgabe 29

Gegeben: $g : x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $h : x = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ebene E enthält beide Geraden. Bestimmen Sie HNF.

Aufgabe 30

Gegeben: $E : \frac{1}{\sqrt{14}}(2x_1 + 3x_2 + x_3) = \frac{5}{\sqrt{14}}$, $A(3, -1, 2)$. Bestimmen Sie den Fußpunkt des Lots von A auf E.