# TD 3: Estimation d'erreur a posteriori et Approximation de flux

## 1 Position du problème

Soit $\Omega$ un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^d (d = 2, 3), f \in L^2(\Omega), k, \alpha > 0$. On considère l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} -\text{div } (k\nabla u) + \alpha u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

On rappelle que la formulation variationnelle associée à cette équation aux dérivées partielles consiste à déterminer $u \in V := H_0^1(\Omega)$ tel que pour tout $v \in V$,

$$\int_\Omega k\nabla u \cdot \nabla v + \alpha uv dx = \int_\Omega fv dx$$

Afin de déterminer une approximation numérique de $u$, on utilise une méthode de type Galerkin. En d'autres termes, on considère un sous espace $V_h$ de dimension fini de $V$ et on note $u_h$ l'élément de $V_h$ tel que pour tout $v_h \in V_h$,

$$\int_\Omega k\nabla u_h \cdot \nabla v_h + \alpha u_h v_h dx = \int_\Omega f v_h dx$$

On introduit alors l'erreur d'approximation $e_h = u_h - u$, on connait certaines estimations a priori. En particulier si on utilise la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$ de Lagrange, il existe une constante $C$ indépendante de $f$ telle que si le potentiel $u$ est régulier et $h$ est la taille du maillage (supposé régulier) de $\Omega$, on a

$$\|e_h\|_V \leq Ch\|u\|_{H^2(\Omega)}$$

où on note $\|\cdot\|_V$ la norme d'énergie, c'est à dire

$$\|v\|_V = \left(\int_\Omega k\nabla v \cdot \nabla v + \alpha|v|^2 dx\right)^{1/2}$$

Malheureusement, on ne connait a priori pas la solution $u$. De ce fait, l'estimation précédente ne fournit qu'un ordre de grandeur de l'erreur. On souhaite majorer l'erreur par une quantité qui ne fait intervenir que des données connues ou calculables explicitement.

**Question 1**. Estimation a posteriori. L'erreur d'approximation $e_h$ est elle même solution d'un problème variationnel. En effet $e_h \in V$ est tel que pour tout $v \in V$,

$$\int_\Omega k\nabla e_h \cdot \nabla v + \alpha e_h v dx = \int_\Omega k\nabla u_h \cdot \nabla v + \alpha u_h v dx - \int_\Omega f v dx$$

montrer

$$\forall \sigma \in H(\mathrm{div}) := \left\{\tau \in L^2(\Omega)^n \text{ tel que } \nabla \cdot \tau \in L^2(\Omega)\right\}$$

on a

$$\frac{1}{2}\|e_h\|_V^2 \leq -G_h(\sigma), \tag{2}$$

$$G_h(\sigma) = -\frac{1}{2}\int_\Omega k^{-1}|\sigma - k\nabla u_h|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \alpha^{-1}|f - \alpha u_h + \nabla\cdot\sigma|^2 dx.$$

**Question 2**. Approximation du flux. On cherche à optimiser le second membre de l'inégalité (2) sur un espace $W_h$. Plus précisément, on introduit $\sigma_h \in W_h \subset H(\text{ div})$ tel que

$$G_h(\sigma_h) = \max_{\tau\in W_h} G_h(\tau)$$

Montrer que $\sigma_h \in W_h$ est tel que pour tout $\tau \in W_h$,

$$\int_\Omega k^{-1}\sigma_h \cdot \tau dx + \int_\Omega \alpha^{-1}(f + \nabla\cdot\sigma_h)\nabla\cdot\tau dx = 0.$$

En déduire que $\sigma_h$ est une approximation du flux $\sigma = k\nabla u$.

# 2 Cas unidimensionnel

On considère le cas $\Omega = (0, 1)$. On utilise une discrétisation de type éléments finis afin de déterminer une approximation $u_h$ du potentiel $u$ et approximation $\sigma_h$ du flux $\sigma$. Plus précisément, on décompose le domaine $\Omega$ en $N + 1$ intervalles $(x_i, x_{i+1})$ avec $i = 0, \cdots, N$ où $x_i = ih$ et $h = 1/(N + 1)$.
On introduit l'espace $V_h$ des éléments finis $\mathbb{P}_1$ sur $(0, 1)$ s'annulant sur le bord du domaine. Autrement dit,

$$V_h = \left\{v_h \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } v_h|_{(x_{i+1},x_i)} \in \mathbb{P}_1 \text{ pour tout } i = 0, \cdots, N\right\}$$

Par ailleurs, on note $U_h$ les coordonnées de la solution $u_h$.
**Question 3**. Conditions d'optimalité pour le potentiel. Montrer que $U_h$ est solution du système linéaire

$$A_h U_h = b_h, \tag{3}$$

où $A_h$ est la matrice $A_h = kh^{-1}K + \alpha hM$, avec, $K$, $M$ deux matrices et $b$ un vecteur à déterminer.
**Question 4**. Calcul du potentiel. Calculer numériquement la solution de (3) pour une fonction $f$ constante. Tracer le graphe de $u$.
Application numérique : $N = 100$, $f = 1$, $k = 1$ et $\alpha = 1$.

On procède de manière similaire pour le calcul de l'approximation du flux $\Sigma_h \in \mathbb{R}^{N+1}$. On choisit comme espace d'approximation pour le flux $\sigma_h$ l'ensemble des éléments finis $\mathbb{P}_1$,

$$W_h = \left\{ \sigma_h \in H^1(\Omega) \text{ tel que } v_h|_{(x_{i+1},x_i)} \in \mathbb{P}_1 \text{ pour tout } i = 0, \cdots, N \right\}$$

On note $\Sigma_h$ les coordonnées de $\sigma_h$, approximation de Galerkin de $\sigma_h$ sur $W_h$.

**Question 5**. Conditions d'optimalité pour le flux. Montrer que $\Sigma_h$ est solution du système

$$B_h \Sigma_h = (k^{-1} h M' + \alpha^{-1} h^{-1} K') \Sigma_h = c_h, \tag{4}$$

avec $K'$, $M'$ deux matrices et $c_h$ un vecteur à déterminer.

**Question 6**. Calcul du flux. Calculer numériquement la solution de (4). Tracer le graphe de $\sigma_h$ en utilisant les mêmes valeur numériques qu'à la question précédente. On introduit l'espace $X_h$ des éléments finis $\mathbb{P}_1$- discontinus, ensemble des fonctions sur $(0,1)$ dont les restrictions aux intervalles $(x_i, x_{i+1})$ sont affines (elles peuvent avoir des discontinuités aux noeuds $x_i$ ).

$$X_h = \left\{ \tau_h : (0,1) \to \mathbb{R} \text{ tel que } \tau_h|_{(x_i,x_{i+1})} \in \mathbb{P}_1 \text{ pour tout } i = 0, \cdots, N \right\}$$

On munit $X_h$ de la base des $(\psi_k)_{k=0,\cdots,2N+1}$ définie pour tout $i = 0, \cdots, N$ et $k = 2i$ par

$$\psi_k|_{(x_i,x_{i+1})}(x_i) = 1, \quad \psi_k|_{x_i,x_{i+1}}(x_{i+1}) = 0$$

et $\psi_k(x) = 0$ pour $x \in (0,1) \setminus (x_i, x_{i+1})$ et pour $k = 2i+1$ par

$$\psi_k|_{(x_i,x_{i+1})}(x_i) = 0, \quad \psi_k|_{(x_i,x_{i+1})} = 1,$$

et $\psi_k(x) = 0$ pour $x \in (0,1) \setminus (x_i, x_{i+1})$.

**Question 7**. Discrétisation de l'opérateur d'injection $V_h$ dans $W_h$. Montrer que la matrice $I_V$ qui associe à $U_h$, coordonnées de $u_h$ dans la base de $V_h$, ses coordonnées dans $W_h$ est la matrice $(N+2) \times N$ de la forme

$$I_V = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{Id} \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Question 8**. Discrétisation de l'opérateur d'injection $W_h$ dans $X_h$. Montrer que la matrice $I_W$ qui associe à $\Sigma_h$, coordonnées de $\sigma_h$ dans $W_h$, ses coordonnées dans $X_h$ est la matrice $2(N+1) \times (N+2)$ de la forme

$$I_W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & c & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & c & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Question 9**. Discrétisation de l'opérateur gradient sur $X_h$. Soit $v_h$ un élément de $X_h$ et $\tau_h \in X_h$ défini pour tout $i = 0, \cdots, N$ par $\tau_h|_{(x_i,x_{i+1})} = \nabla v_h|_{(x_i,x_{i+1})}$. En notant $V$ et $T$ les coordonnées respectives de $v_h$ et $\tau_h$ dans $X_h$, montrer que

$$T = D_h V$$

où $D_h$ est la matrice $2(N+1) \times 2(N+1)$

$$D_h = h^{-1} \begin{pmatrix} D & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & D \end{pmatrix} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Question 10**. Discrétisation de l'opérateur de masse sur $X_h$. Soit $\tau_h$ un élément de $X_h$ de coordonées $T$. Montrer que

$$\int_\Omega |\tau_h|^2 \, dx = N_h T \cdot T$$

où

$$N_h = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} N & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & N \end{pmatrix} \text{ avec } N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Question 11**. Estimation d'erreur. Pour simplifier légèrement l'analyse, on suppose que $f \in X_h$. Soit $F_h$ les coordonnées de $f$ dans $X_h$. Déduire de l'estimation (2) que

$$\begin{aligned} 2\|e_h\|_V \leq & \, k^{-1} N_h \left( I_W \Sigma_h - k D_h I_W I_V U_h \right) \cdot \left( I_W \Sigma_h - k D_h I_W I_V U_h \right) \\ & + \alpha^{-1} N_h \left( F_h - \alpha I_W I_V U_h + D_h I_W \Sigma_h \right) \cdot \left( F_h - \alpha I_W I_V U_h + D_h I_W \Sigma_h \right) \end{aligned} \tag{5}$$

À l'aide de cette estimation, calculer une majoration de l'erreur $\|e_h\|_V$ effectuée sur le calcul $u$. On utilisera à nouveau les mêmes données que dans les questions précédentes avec $N = 100$ et $N = 1000$.

## 3 Cas bidimensionnel

On considère dorénavant le cas bidimensionnel avec comme domaine $\Omega$ le disque unité.

**Question 12**. Calcul du potentiel. Déterminer à l'aide de FreeFem++ une approximation du potentiel à l'aide de la méthode des éléments finis $P_1$. On utilisera un maillage comportant une densité $\delta n$ de mailles par unité de longueur avec $\delta n = 10$. Par ailleurs, on choisira $f = 1, \alpha = 1$ et $k = 1$. Représenter les isovaleurs du potentiel et donner la moyenne de $u_h$ sur $\Omega$.

**Question 13**. Calcul du flux. Déterminer à l'aide de FreeFem++ une approximation du flux. On utilisera des éléments de Raviart-Thomas de degré zéro (RT0 sous FreeFem++). On utilisera le même maillage et les mêmes données que ceux utilisés pour le calcul du potentiel dans la question précédentes. Représenter le champs $\sigma_h$ ainsi obtenu sur un graphique.

**Question 14**. Estimation d'erreur. Déterminer une borne sur l'erreur $\|e_h\|_V$. On utilisera à nouveau le même maillage et les mêmes données qu'aux deux questions précédentes.

**Question 15**. Taux de convergence. Tracer le graphe, en coordonnées logarithmiques, de l'erreur $\|e_h\|_V$ en fonction de la densité $\delta n$ de points sur la frontière par unité de longueur (on choisira $\delta n$ variant de 10 à 100). Quel est le taux de convergence observé. Comparer le taux ainsi obtenu au taux théorique de convergence de l'erreur.