TD2:
Sur l'estimations a posteriori en une dimension

Soit $\Omega =]a, b[$ un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}$. Pour une fonction f de $L^2(\Omega)$, on considère l'équation de Laplace

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

On discrétise ce problème de façon habituelle: on introduit des réels x_i tels que:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_N = b,$$

puis on note I_i l'intervalle $]x_{i-1}, x_i[, \quad 1 \leq i \leq N$, et h_i sa longueur. Comme d'habitude, le paramètre h est le maximum des $h_i, 1 \leq i \leq N$. Un entier $k \geq 1$ étant fixé, on introduit l'espace discret

$$V_h = \left\{ v_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}); v_{h|I_i} \in \mathbb{P}_k\left(I_i\right), 1 \leq i \leq N \right\} \cap H_0^1(\Omega),$$

où $\mathbb{P}_k\left(I_i\right)$ est l'espace des polynômes de degré $\leq k$ sur I_i.
Le problème discret s'écrit:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_a^b u_h'(x) v_h'(x) dx = \int_a^b f(x) v_h(x) dx, \quad \forall v_h \in V_h \end{cases} \tag{2}$$

Puis on définit la famille d'indicateurs $(\eta_i)_{1 \leq i \leq N}$ par

$$\eta_i = h_i \left\| f_h + u_h'' \right\|_{L^2(I_i)} \tag{3}$$

où f_h est une approximation de f dont la restriction à chaque I_i appartient à $\mathbb{P}_{\sup\{k-2,0\}}\left(I_i\right)$.
On note κ_1 et κ_2 les plus petites constantes telles que

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq \kappa_1 \left(\sum_{j=1}^{N} \eta_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} + c\|f - f_h\|_{L^2(\Omega)},$$
$$\eta_i \leq \kappa_2 \left| u - u_h \right|_{H^1(I_i)} + c' \left\| f - f_h \right\|_{L^2(I_i)}.$$

<u>On veut établir une majoration **explicite** de κ_1 et κ_2.</u>

Question 1. On introduit un opérateur τ_h de $H_0^1(\Omega)$ dans V_h tel que:

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (\tau_h v)(x_i) = v(x_i), \quad 0 \le i \le N \tag{4}$$

Montrer que

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \le \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{\sum_{i=1}^N \left(\|f_h + u_h''\|_{L^2(I_i)} + \|f - f_h\|_{L^2(I_i)} \right) \|v - \tau_h v\|_{L^2(I_i)}}{|v|_{H^1(\Omega)}}.$$

Question 2. Dans le cas où k est égal à 1, vérifier que, pour toute fonction v de $H_0^1(\Omega)$, $\tau_h v$ sur chaque I_i est donné par

$$(\tau_h v)(x) = v(x_{i-1}) \frac{x_i - x}{h_i} + v(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{h_i}.$$

<u>**Indication:**</u> Utiliser la formule de Taylor usuelle, pour démontrer que

$$v(x) = (\tau_h v)(x) + \frac{x_i - x}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x} v'(t)dt - \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \int_{x}^{x_i} v'(t)dt.$$

Question 3. En déduire une majoration de $\|v - \tau_h v\|_{L^2(I_i)}$ en fonction de $|v|_{H^1(I_i)}$ lorsque k est égal à 1.
<u>**Indication:**</u> Utiliser la formule établie dans la Q. 2 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour avoir:

$$\|v - \tau_h v\|_{L^2(I_i)} \le \frac{h_i}{\sqrt{3}} |v|_{H^1(I_i)}$$

Question 4. Dans le cas où k est égal à 1, donner une majoration de κ_1.
Question 5. Lorsque k est ≥ 2, on définit l'opérateur τ_h de la façon suivante:

- pour toute fonction v de $H_0^1(\Omega), \tau_h v$ vérifie la propriété (4).
- pour $1 \le i \le N$,

$$\forall \psi \in \mathbb{P}_{k-2}(I_i), \quad \int_{x_{i-1}}^{x_i} (v - \tau_h v)(x) \psi(x) dx = 0.$$

Soit $\hat{I} =]-1, 1[$ l'intervalle de référence.
Montrer qu'il existe un unique opérateur $\hat{\tau}$ à valeurs dans $\mathbb{P}_k(\hat{I})$, tel que, si F_i désigne l'application affine qui envoie $\hat{I}$ sur I_i, on ait

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \hat{\tau}(v \circ F_i) = (\tau_h v)_{|I_i} \circ F_i, \quad 1 \le i \le N.$$

<u>**Indication:**</u> Observer qu'un tel opérateur $\hat{\tau}$ possède les propriétés suivantes:
pour toute fonction $\hat{v}$ de $H^1(\hat{I}), \hat{\tau}\hat{v}$ appartient à $\mathbb{P}_k(\hat{I})$ et satisfait

$$(\hat{\tau}\hat{v})(\pm 1) = \hat{v}(\pm 1) \quad \text{et} \quad \forall \hat{\psi} \in \mathbb{P}_{k-2}(\hat{I}), \quad \int_{-1}^{1} (\hat{v} - \hat{\tau}\hat{v})(t) \hat{\psi}(t) dt = 0$$

Question 6. En déduire une majoration de κ_1 en fonction de la plus petite constante $\hat{\lambda}$ telle que

$$\forall \hat{v} \in H^1(\hat{I}), \quad \|\hat{v} - \hat{\tau}\hat{v}\|_{L^2(\hat{I})} \leq \hat{\lambda}\, \|\hat{v}'\|_{L^2(\hat{I})}$$

Question 7. Pour majorer $\hat{\lambda}$, on introduit la famille $(L_n)_{n\geq 0}$ des polynômes de Legendre sur $\hat{I}$. Pour $n \geq 1$, montrer que le polynôme $\left((1-t^2)\, L_n'\right)'$ est un multiple de $L_n(t)$.
Question 8. Nous rappelons que les polynômes $L_n, n \geq 0$, forment une base hilbertienne de $L^2(-1,1)$. Montrer qu'une fonction $\hat{w}$ de $H_0^1(\hat{I})$ s'écrit

$$\hat{w}(t) = \left(1-t^2\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n L_n'(t)$$

pour des coefficients α_n réels.
Question 9. En déduire que [1]

$$\|\hat{w} - \hat{\tau}\hat{w}\|_{L^2(\hat{I})} \leq \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}\, \|\hat{w}'\|_{L^2(\hat{I})}$$

Question 10. Vérifier que l'opérateur $\hat{\tau}$ est égal à l'identité sur les polynômes de $\mathbb{P}_k(\hat{I})$.
Question 11. Donner une majoration de κ_1 lorsque k est ≥ 2.
Question 12. Montrer que pour toute fonction w de $H_0^1(I_i)$,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f_h + u_h''\right)(x) w(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(u - u_h\right)'(x) w'(x) dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f - f_h\right)(x) w(x) dx.$$

En déduire une majoration de $\left\| \left(f_h + u_h''\right)(x - x_{i-1})^{\frac{1}{2}} (x_i - x)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(I_i)}$.
Question 13. On admet (mais on est autorisé à démontrer) que le rapport

$$\|L_n'\|_{L^2(-1,1)} / \|L_n\|_{L^2(-1,1)} = \sqrt{n(n+1)\left(n + \frac{1}{2}\right)}$$

Prouver que, pour tout polynôme φ de $\mathbb{P}_m(\hat{I})$,

$$\|\varphi\|_{L^2(-1,1)} \leq \sqrt{\frac{(m+1)(m+3)}{2}} \left\| \varphi \left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(-1,1)}$$

et que

$$\left\| \left(\varphi \left(1-t^2\right)\right)' \right\|_{L^2(-1,1)} \leq \sqrt{(m+1)(m+2)} \left\| \varphi \left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(-1,1)}$$

Question 14. Donner une majoration de κ_2 et du produit $\kappa_1\kappa_2$.

[1] on calculera chacune de ces normes en fonction des α_n