TD1: Analyse a posteriori par dualité pour un problème modèle 1d

On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où

- $b \in W^{1,\infty}(0,1)$,
- $c \in L^\infty(0,1)$,
- $f \in L^2(0,1)$.

1. Ecrire la formulation variationnelle correspondante.
2. Supposons que
$$c(x) - \frac{1}{2}b'(x) \geq 0, \qquad \text{pour } x \in (0,1),$$
Montrer que le problème variationnel est bien posé.
3. L'approximation par éléments finis de ce problème consiste à subdiviser l'intervalle $[0,1]$ par les points
$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = 1$$
et de définir l'espace des éléments finis $V_h^1 \subset H_0^1(0,1)$ de fonctions continues et $\mathbb{P}_1$ par morceaux.
   (a) Donner le problème approché et montrer qu'il est bien posé.

   On pose :
$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, N, \text{ et } h = \max_i h_i.$$
   Notre objectif est de trouver une estimation *a posteriori* de l'erreur $\|u - u_h\|$.
4. Trouver le problème dual ou adjoint pour l'inconnu w du problème (**??**) et montrer qu'il est bien posé.
5. Montrer que
$$\|u - u_h\|^2_{L_2(0,1)} = a\left(u - u_h, w\right). \tag{2}$$

6. Montrer que

$$\|u-u_h\|^2_{L_2(0,1)} \; = (f, w-\mathcal{I}_h w) - a(u_h, w-\mathcal{I}_h w).$$

7. Montrer que

$$a(u_h, w-\mathcal{I}_h w) = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[-u_h''(x) + b(x)u_h'(x) + c(x)u_h(x)\right](w-\mathcal{I}_h w)(x)\mathrm{d}x.$$

8. Déduire que

$$\|u-u_h\|^2_{L_2(0,1)} = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} R(u_h)(x)(w-\mathcal{I}_h w)(x)\mathrm{d}x$$

où $i = 1, \ldots, N$,

$$R(u_h)(x) = f(x) + u_h''(x) - b(x)u_h'(x) - c(x)u_h(x), \quad x \in (x_{i-1}, x_i).$$

9. La fonction $R(u_h)$ est appelée <u>*le résidu*</u>. Dites pour quelle raison on a choisit cette appellation ?
10. Montrer que

$$\|u-u_h\|^2_{L_2(0,1)} \leq \sum_{i=1}^{N} \|R(u_h)\|_{L_2(x_{i-1},x_i)} \|w-\mathcal{I}_h w\|_{L_2(x_{i-1},x_i)}.$$

11. Montrer que

$$\|u-u_h\|^2_{L_2(0,1)} \leq \frac{1}{\pi^2} \sum_{i=1}^{N} h_i^2 \|R(u_h)\|_{L_2(x_{i-1},x_i)} \|w''\|_{L_2(x_{i-1},x_i)}$$

et par conséquent,

$$\|u-u_h\|^2_{L_2(0,1)} \leq \frac{1}{\pi^2} \left(\sum_{i=1}^{N} h_i^4 \|R(u_h)\|^2_{L_2(x_{i-1},x_i)} \right)^{1/2} \|w''\|_{L_2(0,1)}.$$

12. Finalement, déduire que

$$\|u-u_h\|_{L_2(0,1)} \leq K_0 \left(\sum_{i=1}^{N} h_i^4 \|R(u_h)\|^2_{L_2(x_{i-1},x_i)} \right)^{1/2},$$

où

$$K = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\|b\|_{L_\infty(0,1)} + \frac{1}{2}\|c-b'\|_{L_\infty(0,1)}., \quad K_0 = K/\pi^2$$

13. Donner un indicateur local de cet estimateur a posteriori.