

ИЗПИТ

по ДИС I част, специалност "Компютърни науки"

3 февруари 2023г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Нека всеки два интервала от непразната фамилия $\{[a_\alpha, b_\alpha] : \alpha \in I\}$ имат поне по една обща точка. Да се докаже, че множеството $\bigcap_{\alpha \in I} [a_\alpha, b_\alpha]$ не е празно.
2. Нека $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ е редица от реални числа. Какво означава тази редица да е сходяща? Какво означава тази редица да е разходяща? Какво означава тази редица да е фундаментална? Какво означава тази редица да не е фундаментална? Формулирайте и докажете необходимото и достатъчно условие на Коши за сходимост на редица.
3. Нека D е множество от реални числа. Какво означава $x_0 \in \mathbb{R}$ да е точка на съгъстяване на D ? Докажете, че x_0 е точка на съгъстяване на D точно тогава, когато съществува редица от елементи на $D \setminus \{x_0\}$, клоняща към x_0 . Дайте дефиниция на $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ във формата на Хайне и във формата на Коши, където $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ и x_0 е точка на съгъстяване на D . Формулирайте и докажете необходимото и достатъчно условие на Коши за съществуване на тази граница.
4. Какво означава една функция да е непрекъсната? Формулирайте и докажете Теоремата на Вайерщрас. Нека $f : (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната и съществува границата $l = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Докажете, че f е ограничена. Нещо повече, ако $f(a) > l$, докажете, че f достига най-голямата си стойност.
5. Напишете дефиницията за производна на функция в дадена точка. Докажете, че ако една функция е диференцируема в дадена точка, то тя е непрекъсната в същата точка. В кои точки не е диференцируема функцията

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ |x^2 \sin \frac{1}{x}|, & \text{ако } x \neq 0 \end{cases}$$

Формулирайте и докажете правилото за диференциране на произведение.

6. Формулирайте и докажете първата теорема на Лопитал (за граници от вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, когато аргументът клони към реално число).
7. Дайте дефиниция на изпъкнала функция. Формулирайте и докажете неравенството на Йенсен. Докажете обобщеното неравенство между средно аритметично и средно геометрично.