ИЗПИТ

по ДИС1, специалност "Компютърни науки"
1 февруари 2024г.
Име:.. Фак.номер:.............

1. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от реални числа. Какво означава тази редица да е сходяща? Докажете, че частно на сходяща редица и сходяща редица, чиято граница не е нула, е сходяща редица.

2. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от реални числа. Докажете, че тази редица дивергира към $+\infty$ точно тогава, когато от всяка нейна подредица може да се избере подредица, дивергираща към $+\infty$.

3. Нека $D \subset \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$. Какво означава x_0 да е точка на сгъстяване на D? Дайте дефиниция на $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ във формата на Хайне и във формата на Коши, където $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Какво означава, че $f(x)$ не клони към $-\infty$ в смисъл на Хайне, когато аргументът клони към x_0? Какво означава, че $f(x)$ не клони към $-\infty$ в смисъл на Коши, когато аргументът клони към x_0? Докажете, че ако $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ в смисъл на Коши, то f клони към $-\infty$, когато аргументът клони към x_0, в смисъл на Хайне.

4. Дайте дефиниция на непрекъсната функция. Формулирайте и докажете Теоремата на Болцано (за междинните стойности). Нека функцията $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната инекция. Докажете, че f е строго монотонна.

5. Напишете дефиницията за производна на функция в дадена точка. В кои точки е диференцируема функцията $f(x) := |(x-1)(x-3)^3|$? Формулирайте и докажете правилото за диференциране на произведение.

6. Формулирайте и докажете първата теорема на Лопитал (за граници от вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, когато аргументът клони към реално число). Докажете, че ако функцията f е диференцируема в околност на точката ξ и притежава втора производна в ξ, то

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + h) - 2f(\xi) + f(\xi - h)}{h^2} = f''(\xi) \ .$$

7. Дайте дефиниция на изпъкнала функция. Формулирайте и докажете неравенството на Йенсен. Докажете, че функцията $f(x) = x^x$ е изпъкнала в интервала $(0, +\infty)$. Използвайте това, за да докажете неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} (2i)^{2i} \geq n(n+1)^{n+1} \ .$$

Изполвайте наготово формулата $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \dfrac{1}{2} n(n+1)$.