

ИЗПИТ

по Анализ I част, специалност "Софтуерно инженерство"

2 септември 2008г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Дайте дефиниция на точна долна граница (инфимум) на ограниченото отдолу множество от реални числа A . Какво означава едно число c да не е точна долна граница на A ? Докажете, че

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B ,$$

където A и B са ограничени отдолу множества от реални числа и

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} .$$

2. Дайте дефиниция на точка на съгъстяване на дадена редица от реални числа. Докажете, че една редица е сходяща точно тогава, когато е ограничена и има само една точка на съгъстяване. Използвайте наготово единствено принципа за компактност (теорема на Болцано-Вайерщрас).

3. Дайте дефиниция на $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ във формата на Хайне и във формата на Коши, където $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$. Какво трябва да предположите за D , за да е смислена дадената дефиниция?

4. Формулирайте и докажете Теоремата на Вайерщрас.

6. Напишете дефиницията за производна на функция в дадена точка. В кои точки от дефиниционния си интервал е диференцируема функцията $f(x) = |(x - 1)^2(x - 2)|$? В кои точки тя не е диференцируема? Обосновете се.

6. Формулирайте и докажете Теоремата на Рол. Формулирайте Теоремата на Лагранж за крайните нераствания.

7. Дайте дефиниция на изпъкнала функция.

(а) Формулирайте необходимо и достатъчно условие една диференцируема функция да е изпъкнала.

(б) Нека са дадени положителните числа x_i , $i = 1, \dots, n$ и положителните числа p_i , $i = 1, 2, \dots, n$, за които $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Докажете, че

$$\prod_{i=1}^n x_i^{p_i} \leq \sum_{i=1}^n p_i x_i .$$