Решение на контролна работа 3 по Алгебра 1

Задача 1. *Спрямо някакъв базис на линейно пространство V над полето $\mathbb{C}$ на комплексните числа, линейният оператор $\phi : V \to V$ има матрица*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 9 & 4 & 15 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Да се намери базис на V, в който матрицата D на ϕ е диагонална, както и тази матрица D.

Решение: Пресмятаме характеристичния полином

$$f_\phi(x) = f_A(x) = \begin{vmatrix} 4-x & 1 & 5 \\ 9 & 4-x & 15 \\ -3 & -1 & -4-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-x & 1 & 5 \\ 9 & 4-x & 15 \\ 1-x & 0 & 1-x \end{vmatrix} =$$

$$= (1-x)\begin{vmatrix} 4-x & 1 & 5 \\ 9 & 4-x & 15 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-x)\begin{vmatrix} -1-x & 1 & 5 \\ -6 & 4-x & 15 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

след прибавяне на първия ред към третия, изнасяне на общ множител $1-x$ от третия ред и изваждане на третия стълб от първия. Развитието по третия ред дава

$$f_\phi(x) = -(x-1)\begin{vmatrix} -1-x & 1 \\ -6 & 4-x \end{vmatrix} = -(x-1)\left[(x+1)(x-4)+6\right] =$$

$$= -(x-1)(x^2-3x+2) = -(x-1)(x-1)(x-2) = -(x-1)^2(x-2).$$

Следователно ϕ има характеристични корени $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \in \mathbb{C}$, $\lambda_3 = 2 \in \mathbb{C}$ от основното поле $\mathbb{C}$ на комплексните числа, които са и собствени стойности.

Собствените вектори на ϕ, отговарящи на собствената стойност $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ са ненулевите решения на хомогенната система линейни уравнения с матрица от коефициенти

$$A - \lambda_1 E_3 = A - E_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 9 & 3 & 15 \\ -3 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Получената система линейни уравнения има единствено уравнение $3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0$ и решение

$$x_2 = -3x_1 - 5x_3 \quad \text{за произволни} \quad x_1, x_3 \in \mathbb{C}.$$

За $x_1 = 1$, $x_3 = 0$ получаваме собствения вектор $v_1 = (1, -3, 0)$. Полагаме $x_1 = 0$, $x_3 = 1$ и получаваме собствения вектор $v_2 = (0, -5, 1)$, който допълва v_1 до базис на собственото подпространство на V, отговарящо на собствената стойност $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Собствените вектори на ϕ, отговарящи на собствената стойност $\lambda_3 = 2$ са ненулевите решения на хомогенната система линейни уравнения с матрица от коефициенти

$$A - \lambda_3 E_3 = A - 2E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 9 & 2 & 15 \\ -3 & -1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Прибавяме третия ред към първия. Умножаваме третия ред по 3, прибавяме към втория ред и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ -3 & -1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Умножаваме първия ред по (-3) и прибавяме към третия ред. Умножаваме първия и втория ред по (-1) и получаваме

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Изпускаме третия ред поради неговата пропорционалност на втория и намираме решението

$$x_1 = -x_3, \quad x_2 = -3x_3 \quad \text{за произволно} \quad x_3 \in \mathbb{C}$$

на съответната хомогенна система линейни уравнения. За $x_3 = -1$ получаваме собствения вектор $v_3 = (1, 3, -1)$ на ϕ, отговарящ на собствената стойност $\lambda_3 = 2$.

По този начин получихме, че относно базиса

$$v_1 = (1, -3, 0), \quad v_2 = (0, -5, 1), \quad v_3 = (1, 3, -1)$$

на V, линейният оператор ϕ има диагонална матрица

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

За да проверим този отговор, пресмятаме

$$Av_1^t = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 9 & 4 & 15 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Av_2^t = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 9 & 4 & 15 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Av_3^t = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 9 & 4 & 15 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. *Спрямо ортонормиран базис* e_1, e_2, e_3, e_4 *на евклидовото пространство* $\mathbb{R}^4$, *линейният оператор*

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

действа по правилото

$$\begin{aligned} \varphi(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4) = \\ = (x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4)e_1 + (-2x_1 - x_2 - 3x_3 - 5x_4)e_2 + \\ +(3x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 10x_4)e_3 + (-x_1 + 2x_2 + x_3)e_4 \end{aligned}$$

за всички вектори $x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 \in \mathbb{R}^4$.

Да се намерят:

(i) ортогонални базиси на ядрото $\ker\varphi$ *и на образа* $\mathrm{im}\varphi$ *на оператора* φ;

(ii) ортогоналната проекция $u \in \mathrm{im}\varphi$ *и перпендикулярът* $h \in (\mathrm{im}\varphi)^\perp$ *от вектора* $v = e_1 + 2e_2 + 2e_3 + 3e_4$ *към образа* $\mathrm{im}\varphi$ *на оператора* φ.

Решение: За да намерим матрицата A на φ спрямо дадения ортонормиран базис, полагаме $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ и получаваме, че $\varphi(e_1) = e_1 - 2e_2 + 3e_3 - e_4$. Аналогично пресмятаме, че $\varphi(e_2) = 3e_1 - e_3 + 4e_3 + 2e_4$, $\varphi(e_3) = 4e_1 - 3e_2 + 7e_3 + e_4$, $\varphi(e_4) = 5e_1 - 5e_2 + 10e_3$ и матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & -3 & -5 \\ 3 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

на φ, образувана по стълбове от координатите на $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$, $\varphi(e_3)$, $\varphi(e_4)$ спрямо базиса $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Координатите на ядрото $\ker\varphi$ на φ са решенията на хомогената система линейни уравнения с матрица от коефициенти A. Умножаваме първия ред на A по 2 и прибавяме към втория ред. Умножаваме първия ред по (-3) и прибавяме към третия. Прибавяме първия ред към четвъртия и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Изпускаме третия и четвъртия ред поради тяхната пропорционалност с втория. Делим втория ред на 5. Умножаваме така получения втори ред по (-3), прибавяме към първия ред и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решението на получената хомогенна система линейни уравнения е

$$x_1 = -x_3 - 2x_4, \quad x_2 = -x_3 - x_4 \quad \text{за произволни} \quad x_3, x_4 \in \mathbb{R}.$$

За $x_3 = -1$, $x_4 = 0$ получаваме вектора $a_1 = (1, 1, -1, 0) \in \ker \varphi$. Търсим такъв вектор $a_2 \in \ker \varphi$, който е ортогонален на a_1. С други думи, a_2 е ненулево решение на хомогенната система линейни уравнения с матрица от коефициенти

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Изваждаме първия и втория ред от третия и получаваме

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array} \right).$$

Делим третия ред на 3. Прибавяме така получения трети ред към първия и втория, за да сведем към

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right).$$

Решението на получената хомогенна система линейни уравнения е

$$x_1 = -x_4, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -x_4 \quad \text{за произволно} \quad x_4 \in \mathbb{R}.$$

За $x_4 = -1$ получаваме вектора $a_2 = (1, 0, 1, -1) \in \ker \varphi$, който е ортогонален на $a_1 \in \ker \varphi$, така че a_1, a_2 е ортогонален базис на ядрото $\ker \varphi$ на φ.

Дефектът на φ е $d(\varphi) := \dim \ker \varphi = 2$, откъдето рангът на φ е

$$\dim \mathrm{im} \varphi =: \mathrm{rk} \varphi = \dim \mathbb{R}^4 - d(\varphi) = 4 - 2 = 2.$$

Произволни два непропорционални стълба на A образуват базис на $\mathrm{im}\varphi$. Например, първите два стълба $c_1 = (1, -2, 3, -1)$, $c_2 = (3, -1, 4, 2)$ образуват базис на $\mathrm{im}\varphi$. За да получим ортогонален базис на $\mathrm{im}\varphi$, прилагаме ортогонализация по метода на Грам-Шмид към c_1 и c_2. Полагаме $b_1 = c_1 = (1, -2, 3, -1)$. Търсим

$$b_2 = c_2 + \lambda_{2,1} b_1$$

с такова $\lambda_{2,1} \in \mathbb{R}$, за което

$$0 = \langle b_2, b_1 \rangle = \langle c_2 + \lambda_{2,1} b_1, b_1 \rangle = \langle c_2, b_1 \rangle + \lambda_{2,1} \langle b_1, b_1 \rangle.$$

По-точно,

$$\lambda_{2,1} = -\frac{\langle c_2, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} = -\left[\frac{3.1 + (-1)(-2) + 4.3 + 2(-1)}{1^2 + (-2)^2 + 3^2 + (-1)^2} \right] = -\frac{15}{15} = -1.$$

Следователно

$$b_2 = c_2 - b_1 = (3, -1, 4, 2) - (1, -2, 3, -1) = (2, 1, 1, 3).$$

По този начин получаваме ортогонален базис $b_1 = (1, -2, 3, -1)$, $b_2 = (2, 1, 1, 3)$ на образа $\mathrm{im}\varphi$ на φ.

(ii) Търсим ортогоналната проекция u на $v = (1, 2, 2, 3)$ върху $\mathrm{im}\varphi$ във вид на линейна комбинация $u = x_1 b_1 + x_2 b_2 \in \mathrm{im}\varphi$ на намерения ортогонален базис b_1, b_2 на $\mathrm{im}\varphi$ с реални коефициенти $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. За да намерим x_1, x_2 използваме, че

$$h = v - u = v - x_1 b_1 - x_2 b_2 \in (\mathrm{im}\varphi)^{\perp}.$$

Това е в сила тогава и само тогава, когато

$$\begin{gathered} 0 = \langle h, b_1 \rangle = \langle v - x_1 b_1 - x_2 b_2, b_1 \rangle = \langle v, b_1 \rangle - x_1 \langle b_1, b_1 \rangle = \\ = [1.1 + 2.(-2) + 2.3 + 3.(-1)] - x_1 \left[1^2 + (-2)^2 + 3^2 + (-1)^2\right] = 0 - 15x_1 \end{gathered}$$

и

$$\begin{gathered} 0 = \langle h, b_2 \rangle = \langle v - x_1 b_1 - x_2 b_2, b_2 \rangle = \langle v, b_2 \rangle - x_2 \langle b_2, b_2 \rangle = \\ = [1.2 + 2.1 + 2.1 + 3.3] - x_2 \left[2^1 + 1^2 + 1^2 + 3^2\right] = 15 - 15x_2. \end{gathered}$$

Следователно $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, откъдето ортогоналната проекция на $v = (1, 2, 2, 3)$ върху $\mathrm{im}\varphi = l(b_1, b_2)$ е

$$u = 0.b_1 + 1.b_2 = b_2 = (2, 1, 1, 3),$$

а перпендикулярът от v към $\mathrm{im}\varphi$ е

$$h = v - u = (1, 2, 2, 3) - (2, 1, 1, 3) = (-1, 1, 1, 0).$$

Задача 3. *Спрямо някакъв базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$ на линейно пространство V над полето $\mathbb{Q}$ на рационалните числа, линейният оператор $\phi : V \to V$ има матрица*

$$A = \begin{pmatrix} r_1 \\ \ldots \\ r_i \\ \ldots \\ r_n \end{pmatrix}$$

с вектор-редове $r_i = (a_{i1}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{in})$, $1 \leq i \leq n$. Да предположим, че съществуват $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{Q}$ с поне едно $\mu_j \neq 0$, така че

$$\mu_1 r_1 + \ldots + \mu_i r_i + \ldots + \mu_n r_n = \lambda(\mu_1, \ldots, \mu_i, \ldots, \mu_n)$$

за някакво фиксирано рационално число $\lambda \in \mathbb{Q}$. Ако $\mathrm{Id}_V : V \to V$, $\mathrm{Id}_V(v) = v$, $\forall v \in V$ е тъждественият линеен оператор, кои от следните твърдения са в сила:

(i) $\det(A - \lambda E_n) \neq 0$;

(ii) ϕ има характеристичен корен λ;

(iii) операторът $\phi - \lambda \mathrm{Id}_V$ е обратим;

(iv) операторът $\phi - \lambda \mathrm{Id}_V$ не е обратим;

(v) образът $\mathrm{im}(\phi - \lambda \mathrm{Id}_V) = V$ на $\phi - \lambda \mathrm{Id}_V : V \to V$ покрива цялото пространство V;

(vi) ядрото $\ker(\phi - \lambda \mathrm{Id}_V)$ *на линейния оператор* $\phi - \lambda \mathrm{Id}_V$ *е ненулево;*
(vii) рационалното число $\lambda \in \mathbb{Q}$ *не е собствена стойност на оператора* ϕ;
(viii) съществува такъв ненулев вектор $v \in V \setminus \{\mathcal{O}_V\}$, *за който* $\phi(v) = \lambda v$;
(ix) операторът $\phi : V \to V$ *има едномерно* ϕ*-инвариантно подпространство;*
(x) всяко ϕ*-инвариантно подпространстви* U *на* V *е с размерност* $\dim U \geq 2$.

Решение: За всяко естествено $1 \leq i \leq n$, i-тият ред на единичната матрица E_n е

$$e_i = \left(\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-i} \right).$$

Следователно i-тият ред на матрицата $A - \lambda E_n$ е $r_i - \lambda e_i$ и линейната комбинация

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i (r_i - \lambda e_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i r_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \lambda e_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mu_i r_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i r_i - \lambda(\mu_1, \ldots, \mu_i, \ldots, \mu_n) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n})$$

е равна на нулевата n-торка, съгласно даденото условие. Понеже съществува $\mu_j \neq 0$, редовете на матрицата $A - \lambda E_n$ са линейно зависими и $\det(A - \lambda E_n) = 0$. Следователно λ е характеристичен корен на A и на ϕ. Характеристичният корен λ на ϕ е от полето $\mathbb{Q}$ на рационалните числа, така че λ е собствена стойност на ϕ. Затова (i) не е в сила, (ii) е в сила, (vii) не е в сила, (viii) е в сила, (ix) е в сила, защото 1-мерните ϕ-инвариантни подпространства са точно породените от собствените вектори на ϕ и (x) не е в сила.

Операторът $\phi - \lambda \mathrm{Id}_V$ има матрица $A - \lambda E_n$ и $\det(A - \lambda E_n) = 0$, така че $A - \lambda E_n$ и $\phi - \lambda \mathrm{Id}_V$ не са обратими. Следователно (iii) не е вярно, (iv) е вярно, (v) не е вярно, защото образът на оператор покрива цялото пространство точно когато операторът е обратим и (vi) е вярно, защото ядрото на оператор е ненулево точно когато операторът не е обратим.