Решение на контролна работа 1 по Алгебра 1

Задача 1. *В пространството $\mathbb{Q}^4$ на наредените четворки рационални числа са дадени векторите*

$$a_1 = (1,0,1,1), \quad a_2 = (1,1,2,1),$$
$$a_3 = (2,1,-1,-1), \quad a_4 = (-2,-2,p,1),$$

зависещи от параметър $p \in \mathbb{Q}$. Да се намерят стойностите на p, за които a_1, a_2, a_3, a_4 е базис на $\mathbb{Q}^4$. За намерените стойности на p да се пресметнат координатите на вектора $v = (2,0,p+2,2)$ спрямо базиса a_1, a_2, a_3, a_4.

Решение: Векторите a_1, a_2, a_3, a_4 образуват базис на четиримерното линейно пространство $\mathbb{Q}^4$ над $\mathbb{Q}$ тогава и само тогава, когато a_1, a_2, a_3, a_4 са линейно независими. Това е в сила точно когато единствените коефициенти $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Q}$, изпълняващи равенството

$$\begin{aligned} (0,0,0,0) = x_1a_1 + x_2a_2 = x_3a_3 + x_4a_4 = \\ x_1(1,0,1,1) + x_2(1,1,2,1) + x_3(2,1,-1,-1) + x_4(-2,-2,p,1) = \\ = (x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4,\, x_2 + x_3 - 2x_4,\, x_1 + 2x_2 - x_3 + px_4,\, x_1 + x_2 - x_3 + x_4) \end{aligned}$$

са $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. С други думи, a_1, a_2, a_3, a_4 е базис на $\mathbb{Q}^4$ тогава и само тогава, когато хомогеннатасистема линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & +2x_3 & -2x_4 & = 0 \\ & x_2 & +x_3 & -2x_4 & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & +px_4 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & = 0 \end{array} \right. \tag{1}$$

има само нулевото решение $(0,0,0,0)$. Ако a_1, a_2, a_3, a_4 е базис на $\mathbb{Q}^4$, то координатите (y_1, y_2, y_3, y_4) на вектора $v = (2,0,p+2,2)$ спрямо този базис са еднозначно определение рационални числа $y_i \in \mathbb{Q}$, изпълняващи равенството

$$\begin{aligned} (2,0,p+2,2) = v = y_1a_1 + y_2a_2 + y_3a_3 + y_4a_4 = \\ (y_1 + y_2 + 2y_3 - 2y_4,\, y_2 + y_3 - 2y_4,\, y_1 + 2y_2 - y_3 + py_4,\, y_1 + y_2 - y_3 + y_4). \end{aligned}$$

Еквивалентно, $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{Q}^4$ е единственото решение на системата линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{lllll} y_1 & +y_2 & +2y_3 & -2y_4 & = 2 \\ & y_2 & +y_3 & -2y_4 & = 0 \\ y_1 & +2y_2 & -y_3 & +py_4 & = p+2 \\ y_1 & +y_2 & -y_3 & +y_4 & = 2 \end{array} \right. . \tag{2}$$

Достатъчно е да докажем, че системата линейни уравнения

$$\left|\begin{array}{rrrrl} z_1 & +z_2 & +2z_3 & -2z_4 & = b_1 \\ & z_2 & +z_3 & -2z_4 & = b_2 \\ z_1 & +2z_2 & -z_3 & +pz_4 & = b_3 \\ z_1 & +z_2 & -z_3 & +z_4 & = b_4 \end{array}\right. \tag{3}$$

има единствено решение за произволни $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{Q}$ и да намерим това решение, за да докажем, че векторите a_1, a_2, a_3, a_4 образуват базис на $\mathbb{Q}^4$ и да намерим координатите на вектора v спрямо този базис. Съответната разширена матрица на (3) е

$$\left(\begin{array}{rrrr|l} 1 & 1 & 2 & -2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & b_2 \\ 1 & 2 & -1 & p & b_3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & b_4 \end{array}\right).$$

Записваме четвъртия ред на пъряо място. Изваждаме го от трети ред, а разликата на първи и четвърти ред пишем като четвърти ред. По този начин получаваме

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 & b_4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 & p-1 & b_3 - b_4 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & b_1 - b_4 \end{array}\right).$$

Изваждаме втория ред от първи и трети ред. Делим четвъртия ред на 3 и свеждаме към

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 3 & b_4 - b_2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & b_2 \\ 0 & 0 & -1 & p+1 & b_3 - b_4 - b_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{b_1 - b_4}{3} \end{array}\right).$$

Разменяме третия и четвъртия ред. Заменяме четвъртия ред със сумата на трети и четвърти ред. Изваждаме третия ред от втория. Умножаваме третия ред по 2, прибавяме към първия ред и получаваме

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{2b_1 - 3b_2 + b_4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{-b_1 + 3b_2 + b_4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{b_1 - b_4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & p & \frac{b_1 - 3b_2 + 3b_3 - 4b_4}{3} \end{array}\right).$$

Ако $p = 0$, то системата (3) е съвместима само за $b_1 - 3b_2 + 3b_3 - 4b_4 = 0$. Ако това е в сила, то всички решения на тази система са

$$z_1 = -z_4 + \frac{2b_1 - 3b_2 + b_4}{3}, \quad z_2 = z_4 + \frac{-b_1 + 3b_2 + b_4}{3}, \quad z_3 = z_4 + \frac{b_1 - b_4}{3}, \quad \forall z_4 \in \mathbb{Q}.$$

В частност, ако $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0$, то системата (1) има решение

$$x_1 = -x_4, \quad x_2 = x_3 = x_4, \quad \forall x_4 \in \mathbb{Q}.$$

В частност, (1) има ненулево решение за $x_4 \neq 0$ и векторите a_1, a_2, a_3, a_4 са линейно зависими.

Ако $p \neq 0$, то системата (3) има единствено решение

$$z_1 = -\left(\frac{b_1 - 3b_2 + 3b_3 - 4b_4}{3p}\right) + \frac{2b_1 - 3b_2 + b_4}{3},$$

$$z_2 = \frac{b_1 - 3b_2 + 3b_3 - 4b_4}{3p} + \frac{-b_1 + 3b_2 + b_4}{3},$$

$$z_3 = \frac{b_1 - 3b_2 + 3b_3 - 4b_4}{3p} + \frac{b_1 - b_4}{3}, \quad z_4 = \frac{b_1 - 3b_2 + 3b_3 - 4b_4}{3p}.$$

В случая $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0$, единственото решение на (1) е $(0,0,0,0)$ и това доказва, че векторите a_1, a_2, a_3, a_4 образуват базис на $\mathbb{Q}^4$.

За $b_1 = 2$, $b_2 = 0$, $b_3 = p + 2$, $b_4 = 2$, единственото решение на системата линейни уравнения (2) е

$$y_1 = -\left(\frac{3(p+2) - 6}{3p}\right) + \frac{6}{3} = -1 + 2 = 1. \quad y_2 = 1 + 0 = 1, \quad y_3 = 1 + 0 = 1, \quad y_4 = 1.$$

Следователно

$$v = a_1 + a_2 + a_3 + a_4.$$

Задача 2. *В пространството*

$$\mathbb{R}[x]^{(\leq 3)} = \left\{ f(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i x^i \;\middle|\; a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

на полиномите от степен ≤ 3 *с реални коефициенти е дадено подмножеството*

$$U = \left\{ f(x) \in \mathbb{R}[x]^{(\leq 3)} \mid f(1) = 0, \ f'(2) = 0 \right\},$$

където $f'(x)$ *е производната на* $f(x)$*. Да се докаже, че* U *е подпространство на* $\mathbb{R}[x]^{(\leq 3)}$ *и да се намери базис на* U*.*

Решение: Ако $f, g \in U$, то

$$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0 \quad \text{и} \quad (f+g)'(2) = (f'+g')(2) = f'(2) + g'(2) = 0 + 0 = 0$$

показват, че $f + g \in U$. Аналогично, за $f \in U$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ е изпълнено

$$(\lambda f)(1) = \lambda . f(1) = \lambda . 0 = 0 \quad \text{и} \quad (\lambda f)'(2) = (\lambda f')(2) = \lambda / f'(2) = \lambda . 0 = 0,$$

така че $\lambda f \in U$ и U е подпространство на $\mathbb{R}[x]^{(\leq 3)}$.

Полином $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{R}[x]^{(\leq 3)}$ с производна

$$f'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1 \in \mathbb{R}[x]$$

принадлежи на U тогава и само тогава, когато

$$0 = f(1) = a_3 + a_2 + a_1 + a_0 \quad \text{и} \quad 0 = f'(2) = 3a_3 2^2 + 2a_2.2 + a_1 = 12a_3 + 4a_2 + a_1.$$

Изразяваме $a_1 = -12a_3 - 4a_2$ от $f'(2) = 0$ и заместваме в $f(1) = 0$, за да получим

$$0 = a_3 + a_2 + (-12a_3 - 4a_2) + a_0 = -11a_3 - 3a_2 + a_0$$

и заместим $a_0 = 11a_3 + 3a_2$. Следователно $f(x) \in \sum_{i=0}^{3} a_i x^i \in U$ точно когато

$$\begin{aligned} f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + (-12a_3 - 4a_2)x + (11a_3 + 3a_2) = \\ = a_3(x^3 - 12x + 11) + a_2(x^2 - 4x + 3) \end{aligned}$$

за произволни $a_3, a_2 \in \mathbb{R}$. Следователно

$$f_1(x) := x^3 - 12x + 11 \quad \text{и} \quad f_2 := x^2 - 4x + 3$$

от U пораждат $U = l(f_1, f_2)$. Ако $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) \equiv 0$ за $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, то

$$0 \equiv \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = \lambda_1 x^3 + \lambda_2 x^2 + (-12\lambda_1 - 4\lambda_2)x + (11\lambda_1 + 3\lambda_2),$$

съгласно горните пресмятания. Оттук, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и $f_1, f_2 \in U$ са линейно независими. Това доказва, че $f_1(x), f_2(x)$ е базис на U.

Задача 3. *В пространството $\mathbb{C}^4$ на наредените четворки комплексни числа са дадени подмножествата*

$$U = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \,\middle|\, a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \varepsilon x_4 = 0 \right\}$$

и

$$W = \left\{ (a_1p, a_2p, a_3p, \varepsilon p) \in \mathbb{C}^4 \,\middle|\, p \in \mathbb{C} \right\}$$

за ненулеви реални числа $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\varepsilon = \pm 1$.

Кои от следните твърдения са в сила:

(i) векторът $(a_1, a_2, a_3, \varepsilon)$ е базис на U;
(ii) U е подпространство на $\mathbb{C}^4$;
(iii) W не е подпространство на $\mathbb{C}^4$;
(iv) векторите $(1, 0, 0, -\varepsilon a_1)$, $(0, 1, 0, -\varepsilon a_2)$, $(0, 0, 1, -\varepsilon a_3)$ образуват базис на U;
(v) W е подпространство на $\mathbb{C}^4$;
(vi) сечението $U \cap W \neq \{(0, 0, 0, 0)\}$ е ненулево подпространство на $\mathbb{C}^4$;
(vii) сумата $U + W \subsetneq \mathbb{C}^4$ се съдържа строго в $\mathbb{C}^4$;
(viii) векторът $(a_1, a_2, a_3, \varepsilon)$ е базис на W;
(ix) обединението $U \cup W$ е подпространство на $\mathbb{C}^4$;
(x) $\mathbb{C}^4 = U \oplus W$ е директна сума на U и W.

Решение: Ако $x, y \in U$, то $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)$ и

$$a_1(x_1 + y_1) + a_2(x_2 + y_2) + a_3(x_3 + y_3) + \varepsilon(x_4 + y_4) =$$
$$= (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \varepsilon x_4) + (a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 + \varepsilon y_4) = 0 + 0 = 0$$

показват, че $x + y \in U$. Аналогично,за $x \in U$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ имаме $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4)$ и

$$a_1(\lambda x_1) + a_2(\lambda x_2) + a_3(\lambda x_3) + \varepsilon(\lambda x_4) = \lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \varepsilon x_4) = \lambda.0 = 0,$$

така че $\lambda x \in U$ и U е подпространство на $\mathbb{C}^4$. Следователно (ii) е в сила.

Ако $(a_1, a_2, a_3, \varepsilon)$ е базис на U, то $(a_1, a_2, a_3, \varepsilon) \in U$ и

$$0 = a_1.a_1 + a_2.a_2 + a_3.a_3 + \varepsilon.\varepsilon = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 1 > 1.$$

Противоречието доказва, че (i) не е в сила.

Ако $w_1 = (a_1p, a_2p, a_3p, \varepsilon p), w_2 = (a_1q, a_2q, a_3q, \varepsilon q) \in W$ за някакви $p, q \in \mathbb{C}$, то

$$w_1 + w_2 = (a_1(p + q), a_2(p + q), a_3(p + q), \varepsilon(p + q)) \in W.$$

За произволно $\lambda \in \mathbb{C}$ имаме

$$\lambda w_1 = (a_1(\lambda p), a_2(\lambda p), a_3(\lambda p), \varepsilon(\lambda p)) \in W$$

с $\lambda p \in \mathbb{C}$, така че $\lambda w_1 \in W$ и W е подпространство на $\mathbb{C}^4$. Оттук, (v) е в сила, а (iii) не е в сила.

Векторът $c := (a_1, a_2, a_3, \varepsilon) \in W$ принадлежи на W и $W = \{pc \,|\, p \in \mathbb{C}\} = l(c)$ се поражда от c. Съгласно $c \neq (0, 0, 0, 0)$, векторът c е линейно независим, а оттам и базис на W. Затова (viii) е в сила.

Векторите $b_1 := (1, 0, 0, -\varepsilon a_1)$, $b_2 := (0, 1, 0, -\varepsilon a_2)$, $b_3 := (0, 0, 1, -\varepsilon a_3)$ принадлежат на U, съгласно $\varepsilon^2 = 1$ и

$$a_1.1 + a_2.0 + a_3.0 + \varepsilon(-\varepsilon a_1) = a_1 - a_1 = 0,$$

$$a_1.0 + a_2.1 + a_3.0 + \varepsilon(-\varepsilon a_2) = a_2 - a_2 = 0,$$

съответно,

$$a_1.0 + a_2.0 + a_3.1 + \varepsilon(-\varepsilon a_3) = a_3 - a_3 = 0.$$

Произволен вектор $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in U$ изпълнява равенството

$$x_4 = \varepsilon^2 x_4 = \varepsilon(\varepsilon x_4) = \varepsilon(-a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3) = -\varepsilon a_1x_1 - \varepsilon a_2x_2 - \varepsilon a_3x_3.$$

Следователно

$$x = (x_1, x_2, x_3, -\varepsilon a_1x_1 - \varepsilon a_2x_2 - \varepsilon a_3x_3) =$$
$$= x_1(1, 0, 0, -\varepsilon a_1) + x_2(0, 1, 0, -\varepsilon a_2) + x_3(0, 0, 1, -\varepsilon a_3) = x_1b_1 + x_2b_2 + x_3b_3$$

и $U = l(b_1, b_2, b_3)$ се поражда от векторите b_1, b_2, b_3. Ако

$$(0, 0, 0, 0) = \lambda_1b_1 + \lambda_2b_2 + \lambda_3b_3 = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, -\varepsilon a_1\lambda_1 - \varepsilon a_2\lambda_2 - \varepsilon a_3\lambda_3),$$

то сравнението на първите три компоненти на горната наредена четворка дава $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Това доказва, че b_1, b_2, b_3 са линейно независими, а оттам и базис на U. С други думи, (iv) е в сила.

Ако $v = (a_1 p, a_2 p, a_3 p, \varepsilon p) \in U \cap W$, то

$$a_1(a_1 p) + a_2(a_2 p) + a_3(a_3 p) + \varepsilon(\varepsilon p) = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 1)p = 0,$$

откъдето $p = 0$ и $v = (0, 0, 0, 0)$, защото $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 1 > 1$ е различно от $0 \in \mathbb{C}$. Това доказва, че $U \cap W = \{(0, 0, 0, 0)\}$ е нулевото пространство и (vi) не е в сила.

Съгласно $U \cap W = \{(0, 0, 0, 0)\}$, сумата $U + W = U \oplus W$ е директна и нейната размерност е

$$\dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 3 + 1 - 0 = 4.$$

Следователно $U \oplus W = \mathbb{C}^4$, (x) е в сила, а (vii) не е в сила.

Понеже нито U се съдържа в W, нито W се съдържа в U, обединението $U \cup W$ не е подпространство на $\mathbb{C}^4$. Затова (ix) не е в сила.