Линейни трансформации в E_2^* (продължение)

$\varphi_C : E_2^* \to E_2^*$, $\det C \neq 0$

Правата g - неподвижна $\overset{def.}{\Leftrightarrow}$ $\varphi_C[g] = g$

$$g[u_1,u_2,u_3] \xrightarrow{\varphi_C} g'[u_1',u_2',u_3']$$

праобраз на g' под действието на φ_C — образ на g под действието на φ_C

$$\boxed{\exists\, \sigma \neq 0 : \sigma(u_1',u_2',u_3') = (u_1,u_2,u_3)C^{-1}} \quad (1)$$

g - неподвижна, $g[u_1,u_2,u_3]$

$\underset{(1)}{\Rightarrow}$ $\exists\, \sigma \neq 0 : \sigma(u_1,u_2,u_3) = (u_1,u_2,u_3)C^{-1}$ 1

$$\Leftrightarrow \quad \varsigma \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = (C^{-1})^t \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$\Rightarrow$ неподвижните прави и намират като "собствени вектори" на $(C^{-1})^t$

Умножаваме двете страни на (2) отляво с C^t, и използваме, че $(C^{-1})^t = (C^t)^{-1}$ (вж. по-долу)

$$\underset{(2)}{\Rightarrow} \quad \varsigma \, (C^t) \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} \underset{\varsigma \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \quad (C^t) \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\varsigma} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ (m_1, m_2, m_3) е "собствен вектор" на C^t, отговарящ на собствена стойност $1/\varsigma$.

$$(C^{-1})^t = (C^t)^{-1}$$ (C - неособена квадратна м-ца от n-ти ред)

Д-во:

$$CC^{-1} = E_n \; /^t$$

$$(C^{-1})^t C^t = E_n \qquad ((AB)^t = B^t A^t)$$

$(C^t)^{-1}$, т.е. $(C^{-1})^t = (C^t)^{-1}$

Твърдение: Нека $\varphi_C : E_2^* \to E_2^*$ е неособена ЛТ. Тогава φ_C има най-много една неподвижна точка и най-много една неподвижна права.

Д-во: $C = (c_{ij})_{3\times 3}$ - неособена ($\det C \neq 0$)

(1) ? φ_C има поне една неподвижна точка?

т. $M(x_1, x_2, x_3)$ – неподвижна

$\Leftrightarrow \varphi_C(M) = M \Leftrightarrow \exists\, \rho \neq 0$:

$$\rho \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$(C - \rho E_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

(x_1, x_2, x_3) се явява собствен вектор на C, отговарящ на ненулева собствена стойност.

Значи достатъчно е да покажем, че C има поне една ненулева собствена стойност.

<u>Характеристично уравнение</u>

$$\det(C - \rho E_3) = 0$$

(2)

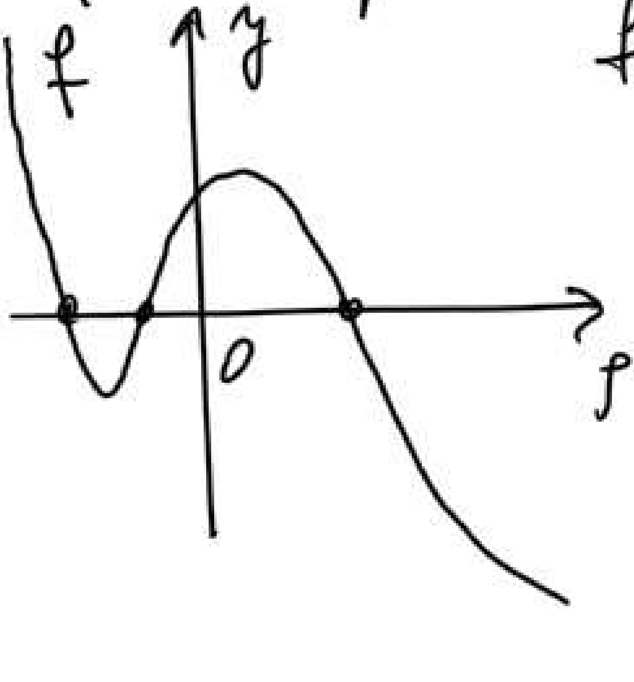
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} c_{11}-p & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22}-p & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33}-p \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{-p^3 + \alpha p^2 + \beta \cdot p + \det C}_{f(p)} = 0 \quad (3)$$

? (3) има поне едно ненулево решение?

$\lim\limits_{p \to +\infty} f(p) = -\infty$, $\lim\limits_{p \to -\infty} f(p) = +\infty$

f - непрекъсната



$f(0) = \det C \neq 0$

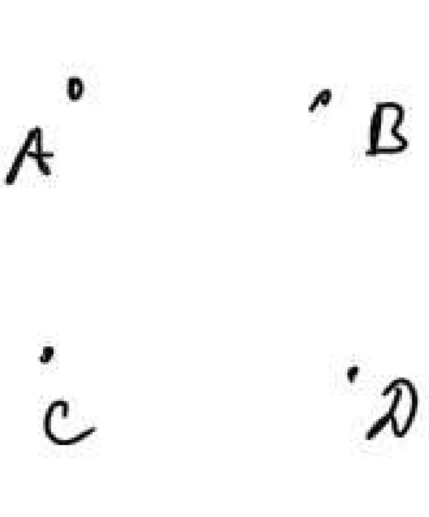
$\Rightarrow$ 0 не корен на (3)

$\Rightarrow$ (3) има поне едно ненулево решение (3)

(II) ? Ще има поне една неподвижна права?

Неподвижните прави се намират като собствени вектори на C^*, $\det C^* \neq 0$, и тогава са същите, както в (I)

Def. Казваме, че 4 точки в E_2^* са в общо положение, ако никои три от тях не са колинеарни.



Твърдение: ЛТ $\varphi: E_2^* \to E_2^*$ е еднозначно определена, ако е известно действието ѝ върху 4 точки в общо положение.