

ИЗПИТ

по Анализ I част, специалност "Софтуерно инженерство"

20 юли 2009г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Дайте дефиниция на сходяща редица от реални числа. Докажете, че всяка сходяща редица е ограничена. Докажете, че редицата произведение на две сходящи редици е сходяща и клони към произведението на границите на двете редици. Какво означава една редица да е разходяща?

2. Нека D е множество от реални числа. Какво означава $\xi \in \mathbb{R}$ да е точка на сгъстяване на D ? Нека $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ и ξ е точка на сгъстяване на D . Дайте дефиниция на граница на f , когато аргументът клони към ξ , във формата на Хайне и във формата на Коши. Докажете, че ако f има граница по дефиницията на Коши, то тя има граница по дефиницията на Хайне.

3. Какво означава $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ да е непрекъсната в D ? Какво означава f да е равномерно непрекъсната в D ? Дали функцията $f(x) = \sqrt{x}$ е равномерно непрекъсната в интервала $[0, 100]$? А в интервала $[0, +\infty)$? Обосновете отговорите си.

4. Формулирайте и докажете теоремата за крайните нараствания на Лагранж. Използвайте я, за да докажете принципа за константност.

5. Скицирайте графиката на функцията

$$f(x) = e^{\frac{2x}{1-x^2}}$$

без да се интересувате от изпъкналост. Ако додефинирате f в $x = -1$ така, че да стане непрекъсната отлясно в тази точка, получената крива има ли допирателна в точката с първа координата -1 ? Ако да, какъв е ъгловият коефициент на тази допирателна?

6. Използвайте полинома на Тейлър с остатък във формата на Пеано, за да напишете развитието на $f(x) = x(e^x - 1)^{-1}$ до члена $o(x^3)$.

7. Напишете дефиницията на изпъкнала функция. Формулирайте и докажете неравенството на Йенсен. Докажете, че

$$\frac{e^x + e^y}{2} \geq e^{\frac{x+y}{2}}$$

за произволни реални числа x и y .