Домашно №1 по Дискретни Структури
на специалност Компютърни Науки, 2 поток,
зимен семестър 2024/2025г.,

изготвено на 4 ноември 2024 г.

краен срок за предаване: 11 ноември, понеделник, преди 24 часа

Име: .... ФN°: .... Група: ...

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	**Макс.**
получени точки					
от максимално	35	15	15	35	100

Задача 1: Ако $x, y \in \mathbb{R}$ и $x < y$, *отвореният интервал* (x, y) по дефиниция е следното множество: $\{a \in \mathbb{R} \,|\, x < a < y\}$. Нека $n \in \mathbb{N}^+ \setminus \{1\}$ и нека са дадени отворени интервали (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n), като $x_i < y_i$ за $1 \leq i \leq n$. Нека $(x_i, y_i) \cap (x_j, y_j) \neq \emptyset$, за $1 \leq i < j \leq n$.

Докажете по индукция, че $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} (x_i, y_i) \neq \emptyset$.

Задача 2: Нека p, q, r, s, t, x, y и z са прости съждения. Разгледайте следното съставно съждение:

$$p \to (q \to (r \to (s \to (t \to (x \to (y \to (z \to p)))))))$$

Какво е това съждение: тавтология, условност или противоречие? Обосновете добре отговорите си.

Задача 3: Нека S е опорното множество в тази задача. Допуснете, че S е крайно и непразно. Нека $\mathbf{\Pi}(S) = \left\{X \in 2^{2^S} \,|\, X \text{ е разбиване на } S\right\}$. За всеки $X, Y \in \mathbf{\Pi}(S)$ казваме, че X *рафинира* Y, ако

$$\forall A \in X \;\; \exists B \in Y : A \subseteq B.$$

Дефинираме релацията $\sqsubseteq_S \subseteq \mathbf{\Pi}(S) \times \mathbf{\Pi}(S)$ така

$$\forall X, Y \in \mathbf{\Pi}(S) : X \sqsubseteq_S Y \text{ тстк } X \text{ рафинира } Y.$$

10 т. • Докажете, че $\sqsubseteq_S$ е релация на частична наредба.

5 т. • Нарисувайте диаграмата на Hasse на $\sqsubseteq_S$, ако $S = \{a, b, c, d\}$.

Задача 4: Нека S е крайно множество. Нека $|S| = n$. Нека $p(n)$ е броят на разбиванията на S. Докажете с комбинаторни разсъждения, че

$$p(0) = 1$$

$$p(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p(k) \text{ , за } n \geq 0$$