Решения на домашна работа 3 по Алгебра 1

Задача 1. *Спрямо базис* $e = (e_1, e_2)$ *на линейно пространство* U *над полето* $\mathbb{Q}$ *на рационалните числа и базис* $f = (f_1, f_2, f_3)$ *на линейно пространство* V *над* $\mathbb{Q}$ *са дадени линейните изображения*

$$\phi : U \longrightarrow V,$$

$$\phi(x_1e_1 + x_2e_2) = (x_1 + 2x_2)f_1 + (-x_1 + x_2)f_2 + (2x_1 + x_2)f_3, \quad \forall x_1e_1 + x_2e_2 \in U$$

и

$$\psi : V \longrightarrow U,$$

$$\psi(y_1f_1 + y_2f_2 + y_3f_3) = (y_1 - y_2 + 2y_3)e_1 + (2y_1 + y_2 + y_3)e_2, \quad \forall y_1f_1 + y_2f_2 + y_3f_3.$$

Да се намерят:

(i) матрицата на линейния оператор $\psi\phi : U \to U$ *спрямо базиса* $e = (e_1, e_2)$;

(ii) матрицата на линейния оператор $\phi\psi : V \to V$ *спрямо базиса* $f = (f_1, f_2, f_3)$;

(iii) матрицата на линейното изображение $\psi\phi\psi : V \to U$ *спрямо базиса* $f = (f_1, f_2, f_3)$ *на* V *и базиса* $e = (e_1, e_2)$ *на* U.

Решение: (i) Матрицата на линейното изображение $\phi : U \to V$ спрямо базиса e на U и базиса f на V е

$$\mathcal{A}_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

По-точно, за $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ получаваме $\phi(e_1) = f_1 - f_2 + 2f_3$ и разполагаме координатите на този вектор спрямо базиса f в първия стълб на $\mathcal{A}_\phi$. Аналогично, за $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ пресмятаме, че $\phi(e_2) = 2f_1 + f_2 + f_3$ и разполагаме координатите на този вектор спрямо f във втория стълб на $\mathcal{A}_\phi$. Съгласно $\psi(f_1) = e_1 + 2e_2$, $\psi(f_2) = -e_1 + e_2$, $\psi(f_3) = 2e_1 + e_2$, матрицата на ψ спрямо базиса f на V и базиса e на U е

$$\mathcal{A}_\psi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следователно матрицата на линейния оператор $\psi\phi : U \to U$ спрямо базиса e на U е

$$\mathcal{A}_{\psi\phi} = \mathcal{A}_\psi \mathcal{A}_\phi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

(ii) Матрицата на линейния оператор $\phi\psi : V \to V$ спрямо базиса f на V е

$$\mathcal{A}_{\phi\psi} = \mathcal{A}_\phi \mathcal{A}_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(iii) Матрицата на линейното изображение $\psi\phi\psi : V \to U$ спрямо базиса f на V и базиса e на U е

$$\mathcal{A}_{\psi\phi\psi} = \mathcal{A}_{\psi\phi}\mathcal{A}_{\psi} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -3 & 15 \\ 15 & 3 & 12 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. *Линейният оператор $\varphi : V \to V$ в пространството V над полето $\mathbb{R}$ на реалните числа действа върху базис e_1, e_2, e_3 на V по правилото*

$$\varphi(e_1) = -e_2, \quad \varphi(e_2) = e_3, \quad \varphi(e_3) = -e_1.$$

(i) Да се докаже, че $\varphi^3 = \mathrm{Id}_V$ за тъждествения линеен оператор $\mathrm{Id}_V : V \to V$, $\mathrm{Id}_V(v) = v$, $\forall v \in V$.

(ii) Да се провери, че $e_1 - e_2 - e_3$ е собствен вектор на φ^n за всяко естествено число $n \in \mathbb{N}$ и да се намери съответната собствена стойност $\lambda_n \in \mathbb{R}$ на φ^n.

Решение: (i) Линейният оператор φ^3 се определя еднозначно от образите на базиса e_1, e_2, e_3 на V. От

$$\varphi^3(e_1) = \varphi^2(\varphi(e_1)) = \varphi^2(-e_2) = -\varphi^2(e_2) = -\varphi(\varphi(e_2)) = -\varphi(e_3) = -(-e_1) = e_1 = \mathrm{Id}_V(e_1),$$
$$\varphi^3(e_2) = \varphi^2(\varphi(e_2)) = \varphi^2(e_3) = \varphi(\varphi(e_3)) = \varphi(-e_1) = -\varphi(e_1) = -(-e_2) = e_2 = \mathrm{Id}_V(e_2),$$
$$\varphi^3(e_3) = \varphi^2(\varphi(e_3)) = \varphi^2(-e_1) = -\varphi^2(e_1) = -\varphi(\varphi(e_1)) = -\varphi(-e_2) = \varphi(e_2) = e_3 = \mathrm{Id}_V(e_3)$$

следва

$$\begin{aligned} \varphi^3(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) &= x_1\varphi^3(e_1) + x_2\varphi^3(e_2) + x_3\varphi^3(e_3) = \\ &= x_1\mathrm{Id}_V(e_1) + x_2\mathrm{Id}_V(e_2) + x_3\mathrm{Id}_V(e_3) = \mathrm{Id}_V(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) \end{aligned}$$

за всички $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ и $\varphi^3 = \mathrm{Id}_V$.

(ii) Непосредствено пресмятаме, че

$$\varphi(e_1 - e_2 - e_3) = \varphi(e_1) - \varphi(e_2) - \varphi(e_3) = (-e_2) - e_3 - (-e_1) = e_1 - e_2 - e_3.$$

Следователно $e_1 - e_2 - e_3$ е собствен вектор на φ, отговарящ на собствена стойност $\lambda_1 = 1$. За произволно естествено $n \in \mathbb{N}$ имаме

$$\varphi^n(e_1 - e_2 - e_3) = \varphi^{n-1}(\varphi(e_1 - e_2 - e_3)) = \varphi^{n-1}(e_1 - e_2 - e_3).$$

В резултат,

$$\begin{aligned} \varphi^n(e_1 - e_2 - e_3) &= \varphi^{n-1}(e_1 - e_2 - e_3) = \varphi^{n-2}(e_1 - e_2 - e_3) = \ldots = \\ &= \varphi^2(e_1 - e_2 - e_3) = \varphi(e_1 - e_2 - e_3) = e_1 - e_2 - e_3 \end{aligned}$$

и $e_1 - e_2 - e_3$ е собствен вектор на φ^n, отговарящ на собствената стойност $\lambda_n = 1$.

Задача 3. *Спрямо някакъв базис на линейно пространство V над полето $\mathbb{C}$ на комплексните числа, линейният оператор $\phi : V \to V$ има матрица*

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 9 & 18 \\ -12 & 11 & 24 \\ 3 & -3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Да се намери базис на V, в който матрицата D на ϕ е диагонална, както и тази матрица D.

Решение: Характеристичният полином на ϕ е

$$f_\phi(x) = f_A(x) = \det(A - xE_3) = \begin{vmatrix} -10-x & 9 & 18 \\ -12 & 11-x & 24 \\ 3 & -3 & -7-x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1-x & 0 & -3-3x \\ -12 & 11-x & 24 \\ 3 & -3 & -7-x \end{vmatrix} = -(x+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -12 & 11-x & 24 \\ 3 & -3 & -7-x \end{vmatrix}$$

след умножение на третия ред по 3 и прибавяне към първия ред, последвано от изнасяне на общ множител $-1-x$ от първия ред. Умножаваме първия стълб по (-3), прибавяме към третия стълб и получаваме

$$f_\phi(x) = -(x+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -12 & 11-x & 60 \\ 3 & -3 & -16-x \end{vmatrix} = -(x+1) \begin{vmatrix} 11-x & 60 \\ -3 & -16-x \end{vmatrix} =$$

$$= -(x+1)[(x-11)(x+16)+180] = -(x+1)(x^2+5x+4) = -(x+1)(x+1)(x+4) = (x+1)^2(x+4)$$

след развитие по първия ред. Следователно характеристичните корени на ϕ са $\lambda_1 = \lambda_2 = -1 \in \mathbb{C}$, $\lambda_3 = -4 \in \mathbb{C}$ и съвпадат със собствените стойности на ϕ.

Собствените вектори на ϕ, отговарящи на собствената стойност $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ са ненулевите решения на хомогенната система линейни уравнения с матрица от коефициенти

$$A - \lambda_1 E_3 = A + E_3 = \begin{pmatrix} -9 & 9 & 18 \\ -12 & 12 & 24 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Получената хомогена система линейни уравнения се свежда към $x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$ и има решение

$$x_1 = x_2 + 2x_3 \quad \text{за произволни} \quad x_2, x_3 \in \mathbb{C}.$$

Избираме $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ и получаваме собствения вектор $v_1 = (1,1,0)$. За $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ получаваме собствения вектор $v_2 = (2,0,1)$, който заедно с v_1 образува базис на собственото подпространство, отговарящо на собствената стойност $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

Собствените вектори на ϕ, отговарящи на собствената стойност $\lambda_3 = -4$ са ненулевите решения на хомогенната система линейни уравнения с матрица от коефициенти

$$A - \lambda_3 E_3 = A + 4E_3 = \begin{pmatrix} -6 & 9 & 18 \\ -12 & 15 & 24 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Делим всички елементи на 3 и получаваме

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ -4 & 5 & 8 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Умножаваме третия ред по 2 и прибавяме към първия ред. Умножаваме третия ред по 4, прибавяме към втория ред и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Изпускаме първия ред поради неговото съвпадение с втория ред. Прибавяме втория ред към третия и получаваме

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Хомогенната система линейни уравнения с горната матрица от коефициенти има решение

$$x_1 = -3x_3, \quad x_2 = -4x_3 \quad \text{за произволно} \quad x_3 = \in \mathbb{C}.$$

За $x_3 = 1$ получаваме собствения вектор $v_3 = (-3, -4, 1)$ на ϕ, отговарящ на собствената стойност $\lambda_3 = -4$.

По този начин пресметнахме, че спрямо базиса

$$v_1 = (1, 1, 0), \quad v_2 = (2, 0, 1), \quad v_3 = (-3, -4, 1)$$

на V линейният оператор $\phi : V \to V$ има диагонална матрица

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

За да проверим получените резултати пресмятаме, че

$$Av_1^t = \begin{pmatrix} -10 & 9 & 18 \\ -12 & 11 & 24 \\ 3 & -3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -v_1^t,$$

$$Av_2^t = \begin{pmatrix} -10 & 9 & 18 \\ -12 & 11 & 24 \\ 3 & -3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -v_2^t,$$

$$Av_3^t = \begin{pmatrix} -10 & 9 & 18 \\ -12 & 11 & 24 \\ 3 & -3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ -4 \end{pmatrix} = -4v_3^t.$$

Задача 4. *Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ са дадени ортогоналните проекции $u_1 = (1, -1, 2, 1)$, $u_2 = (1, 1, 1, -2)$ на векотори $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$ върху двумерно подпространство U на $\mathbb{R}^4$. Да се намерят ортогонални базиси на U и на ортогоналното допълнение $U^\perp$ на U, както и ортогоналната проекция $u \in U$ и перпендикулярът $h \in U^\perp$ от вектора $v = (5, -1, 1, -1)$ към U.*

Решение: Векторите u_1, u_2 са дадени с координатите си спрямо ортонормиран базис, така че ортогоналното допълнение на U е пространството от решения на хомогенната система линейни уравнения с матрица от коефициенти

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Изваждаме първия ред от втория и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Умножавме втория ред по 2, прибавяме към първия ред и получаваме

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Съответната хомогенна система линейни уравнения има решение

$$x_1 = -3x_2 + 5x_4, \quad x_3 = 2x_2 - 3x_4 \quad \text{за произволни} \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

За $x_2 = 1$, $x_4 = 0$ получаваме вектора $h_1 = (-3, 1, 2, 0) \in U^\perp$. Търсим такъм ненулев вектор $h_2 \in U^\perp$, който е ортогонален на h_1. Координатите на h_2 са ненулево решение на хомогенната система линейни уравнения с матрица от коефициенти

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Умножаваме първия ред по 3 и прибавяме към третия ред, за да сведем към

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 10 & 2 & -15 \end{pmatrix}.$$

Умножаваме втория ред по (-5), прибавяме към третия ред и получаваме

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Делим третия ред на 7. Прибавяме така получения трети ред към втория и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Делим втория ред на 2. Умножаваме така получения втори ред по (-3), прибавяме към първия ред и получаваме

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Съответната хомогенна система линейни уравнения има решение

$$x_1 = \frac{1}{2}x_4, \quad x_2 = \frac{3}{2}x_4, \quad x_3 = 0 \quad \text{за произволно} \quad x_4 \in \mathbb{R}.$$

За $x_4 = 2$ получаваме вектора $h_2 = (1,3,0,2) \in U^\perp$, който заедно с $h_1 = (-3,1,2,0) \in U^\perp$ образува ортогонален базис на $U^\perp$.

Ненулевите вектори $u_1, u_2 \in U$ са ортогонални, съгласно $\langle u_1, u_2 \rangle = 1.1 + (-1).1 + 2.1 + 1.(-2) = 0$. Следователно u_1, u_2 е ортогонален базис на двумерното подпространство U на $\mathbb{R}^4$.

Ортогоналната проекция $u \in U$ и перпендикулярът $h \in U^\perp$ от вектора $v = (5,-1,1,-1)$ към U може да се намерят с помощта на ортогоналния базис u_1, u_2 на U или с помощта на ортогоналния базис h_1, h_2 на $U^\perp$. По-точно, търсим такива $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, за които $u = x_1u_1 + x_2u_2$. За да намерим координатите x_1, x_2 на u спрямо базиса u_1, u_2 на U използваме, че $h = v - x_1u_1 - x_2u_2 \in U^\perp$. Това е в сила точно когато

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v - x_1u_1 - x_2u_2, u_1 \rangle = \langle v, u_1 \rangle - x_1\langle u_1, u_1 \rangle = \\ &= [5.1 + (-1)(-1) + 1.2 + (-1).1] - x_1[1^2 + (-1)^2 + 2^2 + 1^2] = 7 - 7x_1 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v - x_1u_1 - x_2u_2, u_2 \rangle = \langle v, u_2 \rangle - x_2\langle u_2, u_2 \rangle = \\ &= [5.1 + (-1).1 + 1.1 + (-1).(-2)] - x_2[1^2 + 1^2 + 1^2 + (-2)^2] = 7 - x_2 - 7x_2 \end{aligned}$$

Следователно $x_1 = x_2 = 1$, откъдето

$$u = u_1 + u_2 = (1,-1,2,1) + (1,1,1,-2) = (2,0,3,-1)$$

и

$$h = v - u = (5,-1,1,-1) - (2,0,3,-1) = (3,-1,-2,0).$$

Вместо да търсим координатите x_1, x_2 на ортогоналната проекция $u = x_1u_1 + x_2u_2$ на v върху U, можем да търсим координатите y_1, y_2 на перпендикуляра $h = y_1h_1 + y_2h_2 \in U^\perp$ от $v = (5,-1,1,-1)$ към U. За целта използваме, че $u = v - y_1h_1 - y_2h_2 \in U = \left(U^\perp\right)^\perp = l(h_1, h_2)^\perp$, което е еквивалентно на

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v - y_1h_1 - y_2h_2, h_1 \rangle = \langle v, h_1 \rangle - y_1\langle h_1, h_1 \rangle = \\ &= [5.(-3) + (-1).1 + 1.2 + (-1).0] - y_1[(-3)^2 + 1^2 + 2^2 + 0^2] = -14 - 14y_1 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v - y_1h_1 - y_2h_2, h_2 \rangle = \langle v, h_2 \rangle - y_2\langle h_2, h_2 \rangle = \\ &= [5.1 + (-1).3 + 1.0 + (-1).2] - y_2[1^2 + 3^2 + 0^2 + 2^2] = 0 - 14y_2 = -14y_2. \end{aligned}$$

Следователно $y_1 = -1$, $y_2 = 0$, така че перпендикулярът от v към U е

$$h = y_1h_1 + y_2h_2 = -(-3,1,2,0) = (3,-1,-2,0),$$

а ортогоналната проекция на v върху U е

$$u = v - h = (5,-1,1,-1) - (3,-1,-2,0) = (2,0,3,-1).$$