Цилиндрични, конични и ротационни повърхнини

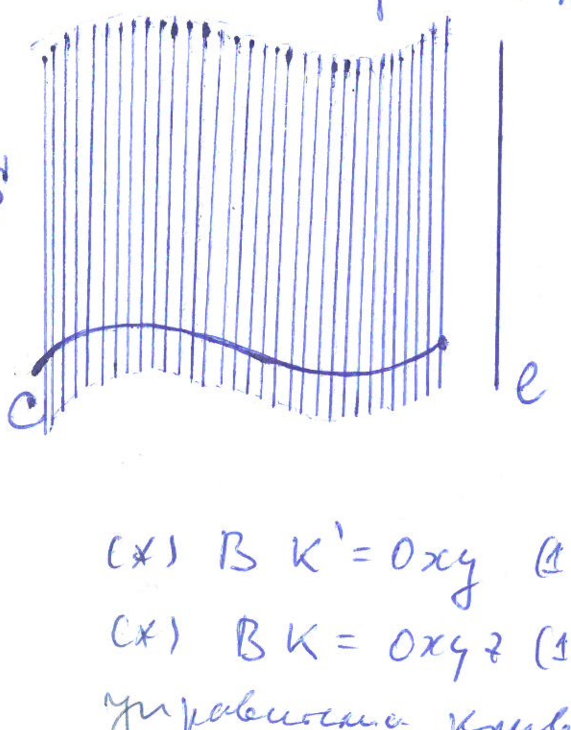
I Цилиндрични повърхнини

Деф: Цилиндрична повърхнина (цилиндър) наричаме множеството S от всички точки върху всички прави, които пресичат дадена крива c и са успоредни на дадена права l.

(*) c – управителна крива

(*) l – направляваща права

(*) правите $\parallel$ на l, които пресичат c – образуващи



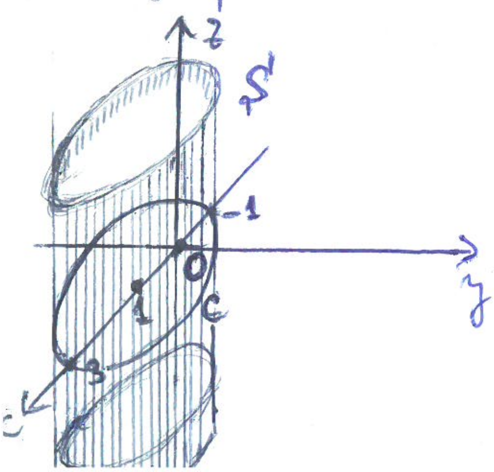
Теорема: Повърхнината S е цилиндрична с образуващи, успоредни на оста Oz, точно тогава, когато $S: F(x,y)=0$.

Пример: $K = Oxyz$ – ОКС в E^3

Разглеждаме $(x-1)^2+y^2-4=0$ (1)

(*) В $K' = Oxy$ (1) е уравнение на окръжност c

(*) В $K = Oxyz$ (1) е уравнение на цилиндър S с управителна крива c и образуващи $\parallel$ на Oz.



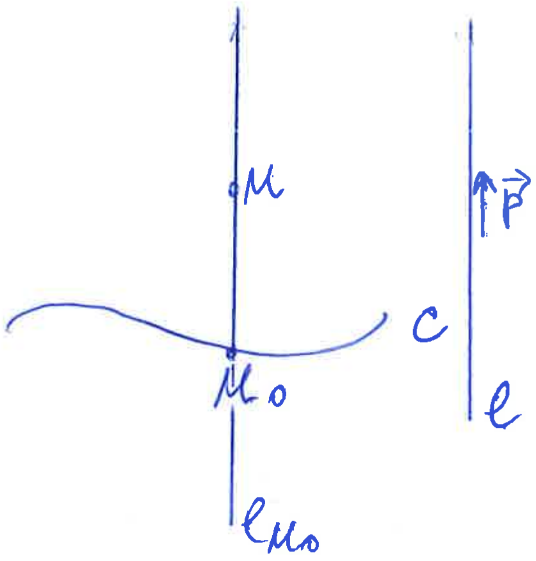
Алгоритъм за намиране на уравнението на цилиндрична повърхнина в общия случай

Нека S е цилиндрична повърхнина с управителна крива

$$c: \begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

и направляваща

права $\ell \parallel \vec{p}(a,b,c) \neq \vec{0}$. Нека още $M_0(x_0,y_0,z_0) \in c$ и



$\ell_{M_0}: \begin{cases} \ni т.\, M_0 \\ \parallel \ell \end{cases}$ е съответната образуваща на S

От т. $M_0 \in c \Rightarrow \begin{cases} F_1(x_0,y_0,z_0)=0 & (2) \\ F_2(x_0,y_0,z_0)=0 & (3) \end{cases}$

Имаме, че произволна точка $M(x,y,z) \in \ell_{M_0} \Leftrightarrow \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$, понеже $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p} \Leftrightarrow M \in \ell_{M_0}$.

Тогава получаваме още 2 равенства:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} & (4) \\ \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{z-z_0}{b} & (5) \end{cases}$$

От уравненията (2), (3), (4) и (5) и [illegible]. Да изключим x_0, y_0 и z_0 $\Rightarrow$ получаваме зависимост между x, y, z, което ни дава уравнение за S.

1 зад. Да се намери уравнение на цилиндричната повърхнина S с управителна крива

$$c: \begin{cases} y^2 = 2x \\ z = 0 \end{cases}$$

и образуващи, успоредни на вектора $\ell(1,2,1)$.

Решение: Нека $M_0(x_0,y_0,z_0) \in c$ е фиксирана точка

$\Rightarrow (1) \begin{cases} y_0^2 = 2x_0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$. Нека още ℓ_{M_0} е образуващата на S, която минава през т. M_0, а $M(x,y,z) \in \ell_{M_0}$ е произволна точка. Тогава имаме

$$\frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{2} = \frac{z-z_0}{1},$$ откъдето получаваме

още две равенства:

$$(2)\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{1} = \dfrac{y-y_0}{2} \\ \dfrac{y-y_0}{2} = \dfrac{z-z_0}{1} \end{cases}$$

. От равенствата (1), (2) образуваме система и се стремим да изключим x_0, y_0, z_0:

$$\begin{cases} y_0^2 = 2x_0 \\ z_0 = 0 \\ 2(x-x_0) = y-y_0 \\ y-y_0 = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0^2 = 2x_0 \\ z_0 = 0 \\ 2x_0 = 2x - y + y_0 \\ y_0 = y-2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0^2 = 2x_0 \\ z_0 = 0 \\ x_0 = x-z \\ y_0 = y-2z \end{cases}$$

Заместваме третото и четвъртото равенство на системата в първото ѝ равенство $\Rightarrow (y-2z)^2 = 2(x-z) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y^2 - 4yz + 4z^2 = 2x - 2z \Leftrightarrow$ $\boxed{S': y^2 + 4z^2 - 4yz - 2x + 2z = 0}$

2зад. Дадена е кривата $c: \begin{cases} y^2 - 2x = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$.

Да се намери уравнението на цилиндричната повърхнина Σ с управителна крива c и с образуващи, перпендикулярни на равнината ε, представена с второто уравнение на c.

Решение: Действаме по същия начин, както в 1зад.

т. $M_0(x_0, y_0, z_0) \in c \Rightarrow (1)\begin{cases} y_0^2 - 2x_0 = 0 \\ x_0 - y_0 + 2z_0 - 1 = 0 \end{cases}$. Тъй като образуващите са $\perp \varepsilon$, а $\vec{n}(1,-1,2) \perp \varepsilon$, то образуващите са $\parallel$ на $\vec{n}$. Значи, ако l_{M_0} е образуващата на Σ, минаваща през M_0, то т. $M(x,y,z) \in l_{M_0}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-x_0}{1} = \dfrac{y-y_0}{-1} = \dfrac{z-z_0}{2}$, откъдето имаме още две равенства: $(2)\begin{cases} x - x_0 = y_0 - y \\ 2(x-x_0) = z - z_0 \end{cases}$

От (1) и (2) така си образуваме система:

$$\begin{cases} y_0^2 - 2x_0 = 0 \\ x_0 - y_0 + 2z_0 - 1 = 0 \\ x_0 + y_0 - x - y = 0 \\ 2x_0 - z_0 - 2x + z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} y_0^2 - 2x_0 = 0 \\ 2x_0 + 2z_0 - x - y - 1 = 0 \\ x_0 + y_0 - x - y = 0 \\ 2x_0 - z_0 - 2x + z = 0 \quad /.(-1) \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} y_0^2 - 2x_0 = 0 \\ 3z_0 + x - y - z - 1 = 0 \\ x_0 + y_0 - x - y = 0 \\ 2x_0 - z_0 - 2x + z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} y_0^2 - 2x_0 = 0 \\ z_0 = \frac{1}{3}(-x + y + z + 1) \\ x_0 + y_0 - x - y = 0 \\ 2x_0 = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{1}{3} + 2x - z = \\ \quad = \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} y_0^2 - 2x_0 = 0 \\ z_0 = \frac{1}{3}(-x + y + z + 1) \\ y_0 = -\frac{5}{6}x - \frac{1}{6}y + \frac{2}{6}z - \frac{1}{6} + x + y = \frac{1}{6}x + \frac{5}{6}y + \frac{2}{6}z - \frac{1}{6} \\ 2x_0 = \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{1}{3} \end{cases}$$

Заместваме третото и четвъртото равенство в първото, при което имаме:

$$\mathcal{L}: \frac{1}{36}(x + 5y + 2z - 1)^2 - \frac{5}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{1}{3} = 0, \text{ т.е.}$$

$$\boxed{\mathcal{L}: (x + 5y + 2z - 1)^2 - 60x - 12y + 24z - 12 = 0}$$

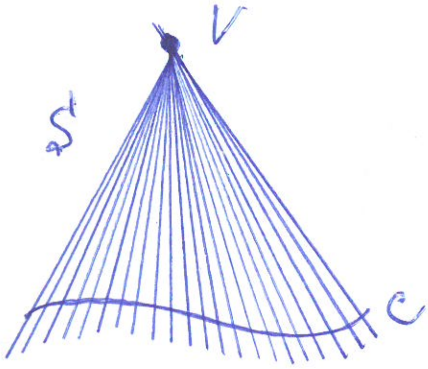
II Конични повърхнини

Деф.: Конична повърхнина (конус) наричаме множеството S от всички точки върху всички прави, които минават през дадена фиксирана точка V и пресичат дадена крива c.

(*) c – управителна крива

(*) т. V – връх

(*) правите, минаващи през V и пресичащи c – образуващи



Деф.: Функцията на три променливи $F(x,y,z)$ се нарича хомогенна от ред (степен) k, ако за $\forall t \in \mathbb{R}$ е в сила $F(tx,ty,tz) = t^k F(x,y,z)$.

Примери:

(1) $f(x,y,z) = x + 2y + z$

$f(tx,ty,tz) = t(x+2y+z) = tf(x,x,z) \Rightarrow$ хомогенна от ред 1.

(2) $g(x,y,z) = x^2 + 2xy + zx$

$g(tx,ty,tz) = t^2(x^2+2xy+zx) = t^2 g(x,y,z) \Rightarrow$ хомогенна от ред 2

(3) $h(x,y,z) = \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{yz}$

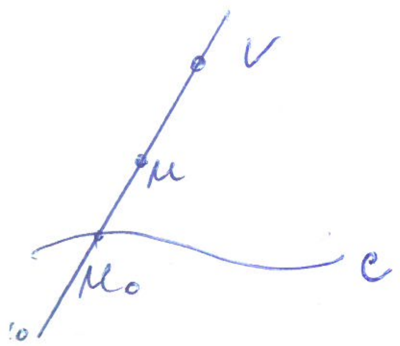
$h(tx,ty,tz) = \dfrac{t^{-2}}{xy} + \dfrac{t^{-2}}{yz} = t^{-2} h(x,y,d) \Rightarrow$

хомогенна от ред -2

Теорема: Ако спрямо АКС К повърхнината S' има уравнение $S': F(x,y,z) = 0$, където F е хомогенна функция от ред k, то S' е конична повърхнина с връх т. O - началото на АКС К.

Алгоритъм за намиране на уравнение на конична повърхнина в общия случай

Нека S' е конична повърхнина с управителна крива $c: \begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ и връх $V(a,b,c)$.



Нека още $M_0 \in c$ е фиксирана точка, а l_{M_0} е образуващата на S' през M_0. Тогава, ако $M_0(x_0,y_0,z_0)$, то имаме

$$\begin{cases} F_1(x_0,y_0,z_0) = 0 & (1) \\ F_2(x_0,y_0,z_0) = 0 & (2) \end{cases}$$

Освен това, имаме, че т. $M(x,y,z) \in l_{M_0} \iff \overrightarrow{VM} \parallel \overrightarrow{VM_0}$

$\iff \dfrac{x-a}{x_0-a} = \dfrac{y-b}{y_0-b} = \dfrac{z-c}{z_0-c}$, откъдето получаваме

още две равенства:

$$\begin{cases} \dfrac{x-a}{x_0-a} = \dfrac{y-b}{y_0-b} & (3) \\ \dfrac{x-a}{x_0-a} = \dfrac{z-c}{z_0-c} & (4) \end{cases}$$

От уравнения (1), (2), (3) и (4) се стремим да изключим x_0, y_0, z_0 $\Rightarrow$ получаваме зависимост между x, y, z, което ни дава уравнение за S'.

3 зад. Да се намери уравнение на конична повърхнина S' с връх началото O на ОКС $K = Oxyz$ и управителна крива

$$c: \begin{cases} y^2 = 2x \\ z = 1 \end{cases}.$$

Решение: Нека т. $M_0(x_0, y_0, z_0) \in c$ е фиксирана

$\Rightarrow (1) \begin{cases} y_0^2 = 2x_0 \\ z_0 = 1 \end{cases}$. Нека l_{M_0} е образуващата на S'

през т. M_0, а т. $M(x,y,z) \in l_{M_0}$. Тогава имаме, че

$\overrightarrow{OM} \parallel \overrightarrow{OM_0} \iff \dfrac{x-0}{x_0-0} = \dfrac{y-0}{y_0-0} = \dfrac{z-0}{z_0-0}$, т.е.

$$(2) \begin{cases} \dfrac{x}{x_0} = \dfrac{y}{y_0} \\ \dfrac{y}{y_0} = \dfrac{z}{z_0} \end{cases}.$$ От равенствата в (1) и в (2)

образуваме система:
$$\begin{cases} y_0^2 = 2x_0 \\ z_0 = 1 \\ \dfrac{x}{x_0} = \dfrac{y}{y_0} \\ \dfrac{y}{y_0} = \dfrac{z}{z_0} \end{cases} \iff \begin{cases} y_0^2 = 2x_0 \\ z_0 = 1 \\ x_0 = \dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{y}{z} = \dfrac{x}{z} \\ y_0 = \dfrac{y}{z} \end{cases}$$

Заместваме третото и четвъртото равенство в първото равенство, при което получаваме

$$S:\ \frac{y^2}{z^2} = 2\frac{x}{z} \iff \boxed{S:\ y^2 - 2xz = 0}$$

4 зад. Да се намери уравнение на конусната повърхнина S с връх-точката $V(1,2,0)$ и управителна крива

$$c: \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \\ z = 2 \end{cases}.$$

<u>Решение:</u> Действаме както в 3 зад. Вземаме т. $M_0(x_0, y_0, z_0) \in c$ – произволна точка $\Rightarrow$

$$(1)\ \begin{cases} \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{1} = 1 \\ z_0 = 2 \end{cases}.$$

Нека l_{M_0} е образуващата на S през точката M_0, а т. $M(x,y,z) \in l_{M_0}$ е произволна. Тогава имаме

$$\overrightarrow{VM} \parallel \overrightarrow{VM_0} \iff \frac{x-1}{x_0-1} = \frac{y-2}{y_0-2} = \frac{z}{z_0},\ \text{т.е.}$$

$$(2)\ \begin{cases} \frac{x-1}{x_0-1} = \frac{z}{z_0} \\ \frac{y-2}{y_0-2} = \frac{z}{z_0} \end{cases}.$$

От (1) и (2) си образуваме системата:

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{1} = 1 \\ z_0 = 2 \\ \frac{2(x-1)}{z} = x_0 - 1 \\ \frac{2(y-2)}{z} = y_0 - 2 \end{cases}$$

Третото и четвъртото равенство на системата ни дават:

$$x_0 = \frac{2x+z-2}{z},\quad y_0 = \frac{2y+2z-4}{z} = \frac{2(y+z-2)}{z}.$$

Тези две изразявания на x_0 и y_0 чрез x, y и z ги заместваме в първото равенство на горната система, при което получаваме:

$$\frac{1}{4}\frac{(2x+z-2)^2}{z^2}+4\frac{(y+z-2)^2}{z^2}=1 \iff$$

$$4x^2+z^2+4+4xz-8x-4z+16(y^2+z^2+4+2yz-4y-4z)-4z^2=0$$

$$\boxed{S: 4x^2+16y^2+13z^2+4xz+32yz-8x-64y-68z+68=0}$$

5 зад. Да се намери уравнение на конуса $\mathcal{K}$ с връх - началото на координатната система и управителна крива
$$C: \begin{cases} x=3t-t^3 \\ y=3t^2 \\ z=3t+t^3 \end{cases}, \quad t\in(-\infty,+\infty).$$

Решение: Кривата C е зададена чрез скаларни параметрични уравнения. Стремим се да я представим като пресечница на две повърхнини.

Имаме, че $x+z=6t \Rightarrow (x+z)^2=36t^2=12y$, т.е.

$$\boxed{C\subset S_1: (x+z)^2-12y=0 \quad (1)}$$

Освен това, $(x+z)(9-y)=6t(9-3t^2)=18(3t-t^3)=18x$, т.е.

$$\boxed{C\subset S_2: (x+z)(9-y)-18x=0 \quad (2)}$$

Избираме произволна точка $M_0(x_0,y_0,z_0)\in C \underset{(1),(2)}{\Longrightarrow}$

$$(3)\begin{cases}(x_0+z_0)^2-12y_0=0\\ (x_0+z_0)(9-y_0)-18x_0=0\end{cases}$$

Нека l_{M_0} е образуващата на $\mathcal{K}$ през т. M_0 и т. $M(x,y,z)\in l_{M_0}$. Тогава $\overrightarrow{OM}\parallel\overrightarrow{OM_0}$, т.е.

$$\frac{x-0}{x_0-0}=\frac{y-0}{y_0-0}=\frac{z-0}{z_0-0}, \text{ или } (4)\begin{cases}\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}\\ \frac{x}{x_0}=\frac{z}{z_0}\end{cases}$$

От равенствата (4) имаме:

$$(5)\ \begin{cases} y_0 = \dfrac{y}{x} x_0 \\ z_0 = \dfrac{z}{x} x_0 \end{cases}$$

. Заместваме (5) в първото уравнение на (3), при което получаваме

$$\left(x_0 + \frac{z}{x} x_0\right)^2 - 12 \cdot \frac{y}{x} x_0 = 0 \iff x_0^2 \left(\frac{x+z}{x}\right)^2 - 12 \frac{y}{x} x_0 = 0$$

$$\iff x_0 \frac{(x+z)^2}{x^{\cancel{2}}} = 12 \frac{y}{\cancel{x}} \iff x_0 = \frac{12xy}{(x+z)^2} \quad (6)$$

$x_0 \neq 0$, защото иначе $y_0 = z_0 = 0$ – невъзможно

Заместваме (6) в (5) $\Rightarrow$

$$(7)\ \begin{cases} y_0 = \dfrac{12y^2}{(x+z)^2} \\ z_0 = \dfrac{12yz}{(x+z)^2} \end{cases}$$

. Накрая заместваме (6) и (7) във второто уравнение на (3), което ни дава

$$\left[\frac{12xy}{(x+z)^2} + \frac{12yz}{(x+z)^2}\right]\left[9 - \frac{12y^2}{(x+z)^2}\right] - \frac{18.12xy}{(x+z)^2} = 0$$

$$\iff \cancel{12}\cancel{y}(x+z)\left[9(x+z)^2 - 12y^2\right] - 18.\cancel{12}.x\cancel{y}(x+z)^{\cancel{2}} = 0$$

$$\iff 3\left[3(x+z)^2 - 4y^2\right] - 18x(x+z) = 0 \iff$$

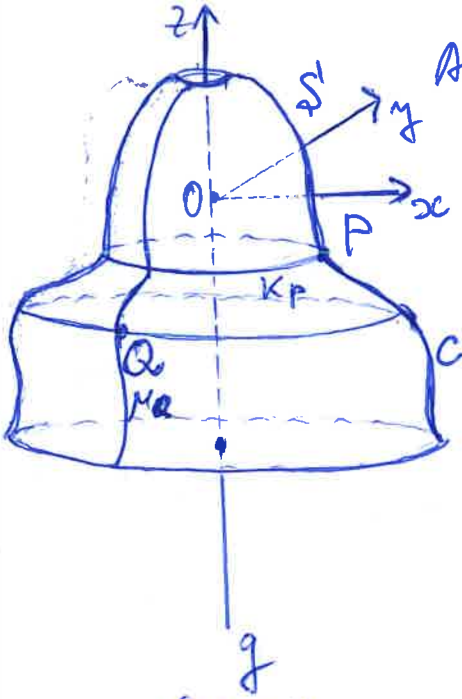
$$\iff \boxed{S: 6x(x+z) - 3(x+z)^2 + 4y^2 = 0}$$, т.е.

$$S: 6x^2 + \cancel{6xz} - 3x^2 - \cancel{6xz} - 3z^2 + 4y^2 = 0$$

$$\iff \boxed{S: 3x^2 + 4y^2 - 3z^2 = 0}$$

III Ротационни повърхнини

Деф.: Нека g - права и c - крива, които лежат в една равнина. Ако завъртим c около g, докато направим една пълна обиколка, то c ще опише повърхнина S, която се нарича ротационна–



Ако т. $P \in C$, то P ще опише окръжност K_P, която се нарича <u>паралел</u> през т. P. Очевидно $K_P = S' \cap \alpha_P$, където α_P е равнината $\begin{cases} \ni P \\ \perp g \end{cases}$.

Ако β е равнина $\supset g$, то $\beta \cap S' = \mu_\beta$ е крива, която е <u>конгруентна</u> (еднаква) с кривата C, и се нарича <u>меридиан</u>, определен от β. Очевидно, ако $Q \in S'$ и $Q \notin g$, то $\exists!$ равнина $\beta_Q : \begin{cases} \supset g \\ \ni Q \end{cases} \Rightarrow$ $\exists!$ меридиан през т. Q : μ_Q.

Правата g се нарича <u>ос</u> на ротационната повърхнина.

Избираме си ОКС $K = Oxyz$ такава, че относно нея C да има уравнения

$$C: \begin{cases} x = \varphi(u) \\ y = 0 \\ z = \psi(u) \end{cases}, \quad u \in (a,b), \text{ а } g \equiv Oz \text{ (виж. черт.)}.$$

Тогава, ако $P(\varphi(u), 0, \psi(u)) \in C$, то след завъртане на ъгъл v на кривата C около g, точката P ще дойде в точката $P'(\varphi(u)\cos v, \varphi(u)\sin v, \psi(u))$, и значи ротационната повърхнина S' се представя така

$$(*) \quad S': \begin{cases} x^1 = \varphi(u)\cos v \\ x^2 = \varphi(u)\sin v \\ x^3 = \psi(u) \end{cases}, \quad u \in (a,b),\ v \in [0, 2\pi).$$

Горните уравнения се наричат <u>скаларни параметрични уравнения</u> на S'.

Нека сега линията е зададена чрез

$$C: \begin{cases} F(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$ Да вземем произволна точка

$R(x, y, z) \in S$. Тогава, ако $\underset{\text{равнина}}{\alpha_R}: \begin{cases} \ni т.\, R \\ \perp Oz \end{cases}$, то

$\alpha_R \cap C = т.\, R'(x', y', z')$, при което $z' = z$, $y' = 0$, а

$x' = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$. Използвайки, че $R' \in C$, т.е. $F(x', z') = 0$, получаваме, че координатите (x, y, z) на произволната точка $R \in S$ удовлетворяват уравнението

$$\boxed{S: F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0},$$ което е уравнение на разглежданата ротационна повърхнина.

Зад. Да се намери уравнение на ротационната повърхнина S, определена от въртенето на:

(а) окръжността $c_1: x^2 + y^2 = a^2$ около оста Ox;

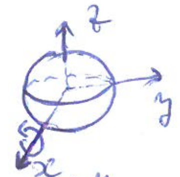
(б) елипсата $c_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$ около Oy;

(в) параболата $c_3: y^2 = 2x$ около Ox;

(г) хиперболата $c_4: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ около Oy.

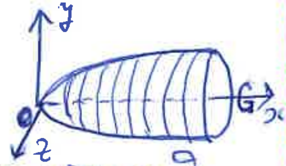
Решение: (а) $S_1: x^2 + (\pm\sqrt{y^2 + z^2})^2 = a^2$, т.е.

$S_1: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ – сфера



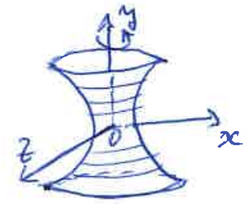
(б) $S_2: \frac{(\pm\sqrt{x^2 + z^2})^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, т.е.

$S_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$ – ротационен сплеснат елипсоид (в) $S_3: \left(\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)^2 = 2x$, т.е.



$S_3: y^2+z^2 = 2x$ – ротационен параболоид

(г) $S_4: \dfrac{\left(\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, т.е.



$S_4: \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{a^2} = 1$ – ротационен прост хиперболоид

7 зад. Да се намерят уравненията на ротационната повърхнина S, получена от завъртането на трактрисата

$$c: \begin{cases} x = \sin u \\ y = 0 \\ z = \pm\left(\cos u + \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2}\right) \end{cases}, \quad u \in \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right],$$

около оста Oz.

Решение: Съгласно формулата (*) от стр. 10, имаме, че

$$S: \begin{cases} x = \sin u \cos v \\ y = \sin u \sin v \\ z = \pm\left(\cos u + \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2}\right) \end{cases}, \quad v \in [0, 2\pi), \quad u \in \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right]$$

S се нарича псевдосфера и служи за модел на нееклидовата геометрия на Лобачевски.