

ИЗПИТ

по Анализ I част, специалност "Компютърни науки"

26 юни 2012г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Дайте дефиниция на сходяща редица. Какво означава една редица от реални числа да е монотонна? Докажете, че ограничените монотонни редици са сходящи. Какво означава една редица да дивергира към $-\infty$? Докажете, че намаляващите неограничени редици дивергират към $-\infty$.

2. Формулирайте и докажете необходимото и достатъчно условие на Коши за сходимост на редица от реални числа. Какво означава редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ да не удовлетворява необходимото и достатъчно условие на Коши (т.е. да не е фундаментална)?

3. Нека $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, където D е множество от реални числа. Дайте дефиниция на " f е непрекъсната в D ". Дайте дефиниция на " f е равномерно непрекъсната в D ". Дали функцията

$$f(x) = x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

е непрекъсната (равномерно непрекъсната) в интервала $[-1, 1)$? Отговорете на същите въпроси за интервалите $[-1, 0)$ и $[0, 1)$. Скицирайте графиката на f .

4. Формулирайте Теоремата на Лагранж за крайните нараствания. Формулирайте и докажете принципа за константност. Използвайте го, за да докажете, че $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = 2\operatorname{arctg} x$ за $x \geq 0$.

5. Дайте дефиниция на изпъкнала функция. Формулирайте едно необходимо и достатъчно условие една диференцируема функция да е изпъкнала. Докажете, че функцията $t \ln t$ е изпъкнала в интервала $(0, +\infty)$. Използвайте това, за да докажете, че за всички $x > 0$, $y > 0$ е изпълнено неравенството

$$x \ln x + y \ln y \geq (x+y) \ln \frac{x+y}{2}.$$

6. Пресметнете интеграла

$$\int \frac{x}{(x^2 + x + 1)^2} dx.$$