

# ИЗПИТ

по ДИС I част, специалност "Компютърни науки"

2 февруари 2023г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Нека  $A$  е ограничено непразно множество от реални числа. Дайте дефиниция на  $\sup A$  и  $\inf A$ . Докажете, че

$$\sup \{|x - y| : x \in A, y \in A\} = \sup A - \inf A.$$

2. Нека  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  е редица от реални числа и  $a \in \mathbb{R}$ . Какво означава тази редица да клони към  $a$ ? Какво означава  $a$  да е точка на съгъстяване на тази редица? Какво означава, че "редицата  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  няма точки на съгъстяване"? Дефинирайте "подредица на дадена редица". Докажете, че  $a$  е точка на съгъстяване на  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  точно тогава, когато съществува подредица на  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , която клони към  $a$ .

3. Дайте дефиниция на  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 6$  във формата на Хайне и във формата на Коши, където  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$ . Какво трябва да предположите за  $D$ , за да е смислена дадената дефиниция? Докажете, че ако  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 6$  в смисъл на Коши, то  $f$  клони към 6, когато аргументът клони към  $-\infty$ , в смисъл на Хайне.

4. Нека  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , където  $D \subset \mathbb{R}$ . Какво означава  $f$  да е непрекъснатата? Докажете, че ако  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $[a, b] \subset D$  и  $f$  е непрекъснатата във всяка точка на  $[a, b]$ , то за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $\delta > 0$  такова, че за всяко  $x' \in [a, b]$  и за всяко  $x'' \in D$ , за което  $|x' - x''| < \delta$ , е в сила  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ . Доказаното твърдение по-силно ли е от Теоремата на Кантор или по-слабо? Дайте дефиниция на равномерна непрекъснатост. Докажете, че функцията  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  е равномерно непрекъснатата върху реалната права.

5. Напишете дефиницията за производна на функция в дадена точка. Дайте дефиниция на локален екстремум. Формулирайте и докажете Теоремата на Ферма. Формулирайте и докажете Теоремата на Рол.

6. Напишете формулата на Тейлър за  $n + 1$  пъти диференцируема функция  $f$  около точката  $a$  до  $n$ -тия член с остатък във формата на Лагранж. Пресметнете границата

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + 12x} - \sqrt{1 + 8x}}{x^2}$$

като използвате бинома на Нютон (развитието в полином на Тейлър на  $(1 + x)^\alpha$ ).

7. Дайте дефиниция на изпъкнала функция. Формулирайте необходимо и достатъчно условие една диференцируема функция да е изпъкнала. Нека функцията  $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  е диференцируема, изпъкнала и притежава хоризонтална асимптота, т. е. съществува границата  $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Докажете, че  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ .