Решение на контролна работа 2 по Алгебра 1

Задача 1. *Да се реши системата линейни уравнения*

$$\left| \begin{array}{lllll} -x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & =1 \\ x_1 & & +x_3 & +x_4 & =3 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & +x_4 & =5 \\ -3x_1 & & -3x_3 & +(p-3)x_4 & =q-9 \end{array} \right.$$

в зависимост от стойностите на параметрите $p, q \in \mathbb{C}$.

Решение: Разширената матрица на системата е

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & -3 & p-3 & q-9 \end{array} \right).$$

Разменяме първия и втория ред. Прибавяме така получения първи ред към втория. Изваждаме го от третия ред. Умножаваме първия ред по 3, прибавяме към четвъртия ред и свеждаме към

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & p & q \end{array} \right).$$

Последното уравнение на получената система е $px_4 = q$.

Ако $p = 0$, а $q \neq 0$, то $0 = 0.x_4 = q \neq 0$ няма решение и системата е несъвместима.

Ако $p = 0$ и $q = 0$, то последното уравнение придобива вида $0x_4 = 0$ и е изпълнено за всяко $x_4 \in \mathbb{C}$. Разглеждаме разширената матрица

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

на системата, съставена от първите три уравнения. Изваждаме втория ред от третия и получаваме

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \end{array} \right).$$

Изваждаме третия ред от първия и свеждаме към

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right).$$

Решението на получената система линейни уравнения е

$$x_1 = -4x_4 + 5, \quad x_2 = -3x_4 + 4, \quad x_3 = 3x_4 - 2$$

за произволно $x_4 \in \mathbb{C}$. Следователно, за $p = q = 0$, системата е неопределена и има решение

$$(-4x_4 + 5,\, -3x_4 + 4,\, 3x_4 - 2), \quad \forall x_4 \in \mathbb{C}.$$

Ако $p \neq 0$, то от последното уравнение $px_4 = q$ пресмятаме

$$x_4 = \frac{q}{p}.$$

Първите три уравнения дават

$$x_1 = -4x_4 + 5 = \frac{5p - 4q}{p}, \quad x_2 = -3x_4 + 4 = \frac{4p - 3q}{p}, \quad x_3 = 3x_4 - 2 = \frac{3q - 2p}{p}.$$

Следователно, за $p \neq 0$ системата е определена и единственото и решение е

$$\left(\frac{5p - 4q}{p}, \frac{4p - 3q}{p}, \frac{3q - 2p}{p}, \frac{q}{p}\right).$$

Задача 2. *В пространството $\mathbb{Q}^4$ на наредените четворки рационални числа са дадени линейната обвивка $U = l(a_1, a_2, a_3)$ на векторите*

$$a_1 = (1, -3, 2, -1), \quad a_2 = (1, -2, 1, 0), \quad a_3 = (-1, 4, -3, 2)$$

и пространството от решения W на хомогената система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{rrrrl} x_1 & -2x_2 & -x_3 & +x_4 & = 0 \\ 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & +x_4 & = 0 \\ 2x_1 & +3x_2 & +3x_3 & & = 0 \end{array} \right. .$$

Да се намерят базиси на сумата $U + W$ и на сечението $U \cap W$ на U и W.

Решение: Разглеждаме матрицата

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

образувана по редове от кординатите на a_1, a_2, a_3. Изваждаме първия ред от втория. Прибавяме го към третия и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Равенството на втория и третия ред показва, че $a_2 - a_1 = a_3 + a_1$, така че $a_3 = a_2 - 2a_1$ и $U = l(a_1, a_2, a_3) = l(a_1, a_2)$. Поради линейната независимост на $a_1, a_2 - a_1$, тези вектори образуват базис на $l(a_1, a_2 - a_1) = l(a_1, a_2) = U$. Векторите a_1, a_2 са също линейно независими, а оттам и базис на U. Търсим хомогенна система линейни уравнения с пространство от решения U. За целта, търсим базис на пространството от решения на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{ccccc} x_1 & -3x_2 & +2x_3 & -x_4 & =0 \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & =0 \end{array} \right. , \tag{1}$$

чиято матрица от коефициенти е съставена по редове от компонентите на a_1 и $a_2 - a_1$. Матрицата от коефициенти на тази система е

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножаваме втория ред по 3, прибавяме към първия ред и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решението на получената хомогенна система линейни уравнения е

$$x_1 = x_3 - 2x_4, \quad x_2 = x_3 - x_4 \quad \text{за произволни} \quad x_3, x_4 \in \mathbb{Q}.$$

Полагането $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ дава вектора $v_1 = (1, 1, 1, 0)$. За $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ получаваме $v_2 = (-2, -1, 0, 1)$. Векторите v_1, v_2 образуват базис на пространството от решения на (1). Следователно U е пространството от решения на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{ccccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & & =0 \\ -2x_1 & -x_2 & & +x_4 & =0 \end{array} \right. . \tag{2}$$

Матрицата от коефициенти на хомогената система линейни уравнения с пространство от решения W е

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Умножаваме първия ред по (-3) и прибавяме към втория ред. Умножаваме първия ред по (-2), прибавяме към третия ред и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & 5 & -2 \\ 0 & 7 & 5 & -2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Изпускаме третия ред, защото съвпада с втория. Пространството W се състои от решенията на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{ccccc} x_1 & -2x_2 & -x_3 & +x_4 & =0 \\ & 7x_2 & +5x_3 & -2x_4 & =0 \end{array} \right. . \tag{4}$$

Делим втория ред на (3) на 2, прибавяме го към първия ред и получаваме

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Решението на получената хомогенна система линейни уравнения е

$$x_1 = -\frac{3}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3, \quad x_4 = \frac{7}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 \quad \text{за произволни} \quad x_2, x_3 \in \mathbb{Q}.$$

Полагаме $x_2 = 2$, $x_3 = 0$ и получаваме вектора $b_1 = (-3, 2, 0, 7) \in W$. Избора на $x_2 = 0$, $x_3 = 2$ дава $b_2 = (-3, 0, 2, 5) \in W$. Векторите

$$b_1 = (-3, 2, 0, 7), \quad b_2 = (-3, 0, 2, 5)$$

образуват базис на $W = l(b_1, b_2)$.

Сечението $U \cap W$ се състои от решенията на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{ccccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 0 \\ -2x_1 & -x_2 & & +x_4 & = 0 \\ x_1 & -2x_2 & -x_3 & +x_4 & = 0 \\ & 7x_2 & +5x_3 & -2x_4 & = 0 \end{array} \right. .$$

получена чрез обединение на уравненията на системата (2) за U и системата (4) за W. Матрицата от коефициенти на тази система е

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Умножаваме първия ред по 2 и прибавяме към втория ред. Изваждаме първия ред от третия и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Умножаваме втория ред по 3 и прибавяме към третия ред. Умножаваме втория ред по (-7), прибавяме към четвъртия ред и получаваме

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -9 & -9 \end{pmatrix}.$$

Изпускаме четвъртия ред поради неговата пропорционалност на третия ред. Делим третия ред на 4. Изваждаме така получения трети ред от първия. Умножаваме третия ред по (-2), прибавяме към втория ред и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Изваждаме втория ред от първия и получаваме

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решението на получената хомогенна система линейни уравнения е

$$x_1 = 0, \quad x_2 = x_4, \quad x_3 = -x_4 \quad \text{за произволни} \quad x_4 \in \mathbb{Q}.$$

За $x_4 = 1$ получаваме базис $c = (0, 1, -1, 1)$ на $U \cap W$.

Вече видяхме, че a_1, a_2 е базис на U, а векторите b_1, b_2 са базис на W. Следователно

$$U + W = l(a_1, a_2) + l(b_1, b_2) = l(a_1, a_2, b_1, b_2).$$

По теоремата за размерност на сума и сечение,

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Оттук, три от векторите a_1, a_2, b_1, b_2 образуват базис на $U + W$. Търсим линейните комбинации

$$\begin{aligned} (0,0,0,0) = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 b_1 + x_4 b_2 = \\ = x_1(1,-3,2,-1) + x_2(1,-2,1,0) + x_3(-3,2,0,7) + x_4(-3,0,2,5) = \\ = (x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4,\ -3x_1 - 2x_2 + 2x_3,\ 2x_1 + x_2 + 2x_4,\ -x_1 + 7x_3 + 5x_4) \end{aligned}$$

на $a_1.a_2, b_1, b_2$, равни на нулевия вектор. Техните коефициенти $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Q}$ са решения на хомогената система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{ccccc} x_1 & +x_2 & -3x_3 & -3x_4 & = 0 \\ -3x_1 & -2x_2 & +2x_3 & & = 0 \\ 2x_1 & +x_2 & & +2x_4 & = 0 \\ -x_1 & & +7x_3 & +5x_4 & = 0 \end{array} \right. .$$

Матрицата от коефициенти на тази хомогенна система е

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -3 \\ -3 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Умножаваме първия ред по 3 и прибавяме към втория ред. Умножаваме първия ред по (-2) и прибавяме към третия ред. Прибавяме първия ред към четвъртия и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -7 & -9 \\ 0 & -1 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Изваждаме втория ред от първия. Прибавяме втория ред към третия, изваждаме втория ред от четвъртия и получаваме

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -7 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 11 & 11 \end{pmatrix}.$$

Изпускаме четвъртия ред поради неговата пропорционалност с третия. Умножаваме третия ред по 4 и прибавяме към първия. Умножаваме третия ред по (-7), прибавяме към втория ред и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Получената хомогенна система линейни уравнения има решение

$$x_1 = -2x_4, \quad x_2 = 2x_4, \quad x_3 = -x_4 \quad \text{за произволно} \quad x_4 \in \mathbb{Q}.$$

При $x_4 = -1$ получаваме решението $(2, -2, 1, -1)$, което дава линейната зависимост

$$2a_1 - 2a_2 + b_1 - b_2 = (0, 0, 0, 0)$$

на пораждащите a_1, a_2, a_3, a_4 на $U + W = l(a_1, a_2, b_1, b_2)$. Всеки от векторите a_1, a_2, b_1, b_2 участва в тази нетривиална линейна комбинация с ненулев коефициент. Следователно можем да изпуснем кой и да е от векторите a_1, a_2, b_1, b_2 от множеството $\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$ и да получим базис на $U + W$. Например, a_1, a_2, b_1 е базис на $U + W = l(a_1, a_2, b_1, b_2)$.

Задача 3. *Дадена е детерминантата*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

от четвърти ред. Кои от следните твърдения са в сила:

$$\text{(i)}\Delta = a_{31} \begin{vmatrix} 0 & a_{13} & 0 \\ a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{42} & 0 & a_{44} \end{vmatrix} - a_{34} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{42} & 0 \end{vmatrix};$$

$$\text{(ii)}\Delta = -a_{13}a_{22}a_{31}a_{42} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{44}$$

$$\text{(iii)}\Delta = a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} + a_{42} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{23} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{34} \end{vmatrix};$$

$$\text{(iv)}\Delta = -a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42};$$

$$(\mathrm{v}) - 2\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ -2a_{31} & 0 & 0 & -2a_{34} \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} \end{vmatrix};$$

$$(\mathrm{vi}) 2\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ -2a_{31} & 0 & 0 & -2a_{34} \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} \end{vmatrix};$$

$$(\mathrm{vii}) \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{34} \\ -2a_{11} & a_{42} & -2a_{13} & a_{44} \end{vmatrix};$$

$$(\mathrm{viii}) \Delta = -a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} + a_{42} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{23} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{34} \end{vmatrix};$$

$$(\mathrm{ix}) - 2\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{34} \\ -2a_{11} & a_{42} & -2a_{13} & a_{44} \end{vmatrix};$$

$$(\mathrm{x}) \Delta = a_{31} \begin{vmatrix} 0 & a_{13} & 0 \\ a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{42} & 0 & a_{44} \end{vmatrix} + a_{34} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{42} & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение: В (i) участват евентуално ненулевите елементи a_{31}, a_{34} на трети ред. Развитието на Δ по трети ред е

$$\Delta = a_{31} \begin{vmatrix} 0 & a_{13} & 0 \\ a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{42} & 0 & a_{44} \end{vmatrix} - a_{34} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{42} & 0 \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Следователно (i) е в сила, а (x) не е в сила.

Развиваме първата детерминанта от трети ред в (5) по нейния първи ред, а втората детерминанта от трети ред по нейния трети ред, за да пресметнем, че

$$\Delta = a_{31}(-1)^{1+2} a_{13} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{34}(-1)^{3+2} a_{42} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ 0 & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{31}a_{13}a_{22}a_{44} + a_{34}a_{42}a_{11}a_{23} = -a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}.$$

Следователно (ii) не е в сила, а (iv) е в сила.

В (iii) участват евентуално ненулевите елементи a_{22}, a_{42} на втори стълб. Развитието на Δ по втори стълб е

$$\Delta = a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} + a_{42} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{23} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{34} \end{vmatrix}.$$

Следователно (iii) е в сила, а (viii) не е в сила.

Умножавайки третия ред на Δ по (-2) получаваме

$$-2\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ -2a_{31} & 0 & 0 & -2a_{34} \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Следователно (v) е в сила, а (vi) не е в сила.

Умножаваме първия ред на Δ по (-2), прибавяме към четвъртия ред и получаваме

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{34} \\ -2a_{11} & a_{42} & -2a_{13} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Следователно (vii) е в сила, а (ix) не е в сила.

Bap. 1, 5, 9, 13: (i), (iii), (iv), (v), (vii)
Bap. 2, 6, 10, 14: (ii), (iii), (v), (vii), (viii)
Bap. 3, 7, 11, 15: (i), (iv), (vi), (vii), (x)
Bap. 4, 8, 12, 16: (ii), (iv), (v), (vi), (ix)