ИЗПИТ

по ДИС1 част, специалност "Компютърни науки"
2 февруари 2024г.
Име:.. Фак.номер:.............

1. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от реални числа. Какво означава тази редица да е сходяща? Какво означава тази редица да е монотонна? Докажете, че ако една монотонна редица от реални числа притежава сходяща подредица, то цялата редица също е сходяща.

2. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от реални числа. Какво означава тази редица да е фундаментална? Какво означава тази редица да не е фундаментална? Формулирайте и докажете необходимото и достатъчно условие на Коши за сходимост на редица.

3. Дайте дефиниция на $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 6$ във формата на Хайне и във формата на Коши, където $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$. Какво трябва да предположите за D, за да е смислена дадената дефиниция? Докажете, че ако $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 6$ в смисъл на Хайне, то f клони към 6, когато аргументът клони към $+\infty$, в смисъл на Коши. Докажете, че за функции, удовлетворяващи същото условие, е в сила, че стойностите на f са по-големи от 5 за достатъчно големи стойности на аргумента.

4. Нека $f,\ g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, където $D \subset \mathbb{R}$. Какво означава f да е непрекъсната? Формулирайте и докажете Теоремата на Вайерщрас. Нека $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната и съществуват границите $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l_1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l_2$, като $l_1,\ l_2 \in \mathbb{R}$. Докажете, че f е ограничена.

5. Напишете дефиницията за производна на функция в дадена точка. Докажете, че ако една функция е диференцируема в дадена точка, то тя е непрекъсната в същата точка. Формулирайте и докажете правилото за диференциране на композиция.

6. Дайте дефиниция на точка на условен екстремум за дадена функция. Формулирайте Теоремата на Ферма. Формулирайте и докажете Теоремата на Рол. Формулирайте Теоремата на Лагранж за крайните нараствания. Нека Δ е отворен интервал, функцията f е два пъти диференцируема в Δ и числата a, $a+h$, $a+2h$ са от Δ $(h > 0)$. Да се докаже, че съществува такава точка ξ от Δ, за която

$$f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) = f''(\xi)h^2\ .$$

7. Формулирайте и докажете достатъчно условие една n-кратно диференцируема функция да има екстремум в дадена точка.