e_mails a_petkov_fmi@abv.bg

От мин. път:

Твърдение 1: Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са ЛЗ т.с.т.к. са колинеарни. Като следствие, ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са ЛЗ и $\vec{b} \neq \vec{0}$, то $\exists!$ число $\lambda \in \mathbb{R}$: $\vec{a} = \lambda . \vec{b}$.

Д-во: ($\Rightarrow$) Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са ЛЗ. Тогава $\exists$ числа α, β: $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$, и (*) $\alpha . \vec{a} + \beta . \vec{b} = \vec{0}$. Нека б.о.о. $\alpha \neq 0$. Тогава от (*) $\Rightarrow$ $\vec{a} = \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) . \vec{b}$ $\Rightarrow$ $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

($\Leftarrow$) Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни, т.е. $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Тогава, ако $\vec{a} = \vec{0}$ и $\vec{b} = \vec{0}$, тогава $\exists$-т безброй много двойки (α, β), $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$, такива, че $\alpha . \vec{a} + \beta . \vec{b} = \vec{0}$. $\Rightarrow$ ЛЗ.

Нека сега например $\vec{b} \neq \vec{0}$. Тогава $\exists$ число λ: $\vec{a} = \lambda . \vec{b} \Leftrightarrow 1 . \vec{a} + (-\lambda) \vec{b} = \vec{0}$. ①

$(1, -\lambda) \neq (0,0) \Rightarrow \vec{a}$ и $\vec{b}$ са л. з.

Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са л. з., като $\vec{b} \neq \vec{0}$.

$\exists$-т числа $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$, такива, че

(#) $\alpha . \vec{a} + \beta . \vec{b} = \vec{0}$. Ако допуснем, че

$$\alpha = 0 \underset{(\#)}{\Rightarrow} \beta . \vec{b} = \vec{0} \underset{\vec{b} \neq \vec{0}}{\Rightarrow} \beta = 0 \ ↯ .$$

Следов. $\alpha \neq 0 \underset{(\#)}{\Rightarrow} \vec{a} = \underbrace{\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)}_{\lambda} . \vec{b}$,

т.е. $\vec{a} = \lambda . \vec{b}$. (1)

<u>Единственост на λ?</u>

Да <u>допуснем</u>, че $\exists \ \mu \in \mathbb{R}$:

$$\vec{a} = \mu . \vec{b} \quad (2)$$

От (1) и (2) $\Rightarrow \vec{a} - \vec{a} = (\lambda - \mu) . \vec{b}$

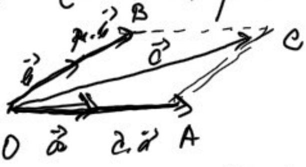
$$\Leftrightarrow (\lambda - \mu) . \vec{b} = \vec{0} \underset{\vec{b} \neq \vec{0}}{\Rightarrow} \lambda - \mu = 0,$$

т.е. $\boxed{\lambda = \mu} \Rightarrow$ <u>единственост</u>

<u>Твърдение 2:</u> Векторите $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ са ЛЗ т.с.т.к. са компланарни.
Като следствие, ако $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ са ЛЗ и $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, тогава $\exists!$ числа (λ, μ): $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$.

<u>Д-во</u> ($\Rightarrow$) Нека $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ са ЛЗ.
Тогава $\exists$-т числа $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$:
(1) $\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c} = \vec{0}$. Б.о.о. $\gamma \neq 0$.
Тогава от (1) $\Rightarrow$ $\vec{c} = \underbrace{\left(-\frac{\alpha}{\gamma}\right)}_{\lambda} \cdot \vec{a} + \underbrace{\left(-\frac{\beta}{\gamma}\right)}_{\mu} \cdot \vec{b}$

($\Rightarrow$) $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$ $\Rightarrow$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компл.



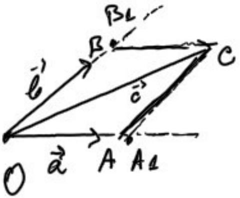
($\Leftarrow$) Нека $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ са компланарни
(1 сл.) Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са Л.З.
Тогава $\exists$-т числа $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$: (3)

$\lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} = \vec{0} \iff \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = 0 \quad (2)$

$(\lambda, \mu, 0) \neq (0,0,0)$ –

От (2) $\Rightarrow$ $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ са ЛЗ

(2 сл.) Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са ЛНЗ ($\iff \vec{a} \nparallel \vec{b}$).



$\vec{OB} \in \vec{b}$, $\vec{OA} \in \vec{a}$, $\vec{OC} \in \vec{c}$

т. $A_1 \in OA$; OA_1CB_1 успоредник

т. $B_1 \in OB$

$\vec{OA_1} = \lambda \cdot \vec{OA}$

$\vec{OB_1} = \mu \cdot \vec{OB}$

$\vec{OC} = \vec{OA_1} + \vec{OB_1} = \lambda \cdot \vec{OA} + \mu \cdot \vec{OB}$

$\Rightarrow \vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} \iff$

$\lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + (-1) \cdot \vec{c} = \vec{0} \quad (3)$

$(\lambda, \mu, -1) \neq (0,0,0) \underset{(3)}{\Rightarrow} \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – ЛЗ

Нека $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ са ЛЗ, $\vec{a} \nparallel \vec{b}$.

$\exists (\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$: $\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c} = \vec{0} \quad (4)$

Ако допуснем, че $\gamma = 0 \Rightarrow (\alpha, \beta) \neq (0,0)$

$\Rightarrow \alpha . \vec{a} + \beta . \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}$ и $\vec{b}$ са ЛЗ

(4)

$\Rightarrow$ ↯ . Следователно $\gamma \neq 0$,

и от (4) $\Rightarrow$ $\vec{c} = \underbrace{\left(-\frac{\alpha}{\gamma}\right)}_{=:\lambda} . \vec{a} + \underbrace{\left(-\frac{\beta}{\gamma}\right)}_{=:\mu} . \vec{b}$

$\Leftrightarrow \quad \vec{c} = \lambda . \vec{a} + \mu . \vec{b} . \quad (5)$

Единствени ли са λ и μ?

Ако допуснем, че $\exists$ други числа (λ', μ'):

$\vec{c} = \lambda' . \vec{a} + \mu' . \vec{b} \quad (6)$

От (5) и (6), след изваждане на левите и десните страни $\Rightarrow$

$\vec{0} = (\lambda - \lambda') . \vec{a} + (\mu - \mu') . \vec{b}$. Но $\vec{a} \nparallel \vec{b}$

$\Rightarrow \lambda - \lambda' = 0 , \mu - \mu' = 0$, т.е.

$\lambda = \lambda' , \mu = \mu' \Rightarrow$ единственост.

Твърдение 3: Всеки 4 вектора в пространството са ЛЗ. Като следствие, ако $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ са ЛНЗ вектори, а $\vec{d}$ е произволен вектор, тогава $\exists$-т. ! числа (α, β, γ):

$$\vec{d} = \alpha . \vec{a} + \beta . \vec{b} + \gamma . \vec{c}.$$

Д-во: Нека $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{d}$ са 4 вектора.

(1 сл.) Нека $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ са ЛЗ.

Тогава $\exists$-т числа $(\lambda, \mu, \nu) \neq (0, 0, 0)$:

$\lambda . \vec{a} + \mu . \vec{b} + \nu . \vec{c} = \vec{0} \iff$

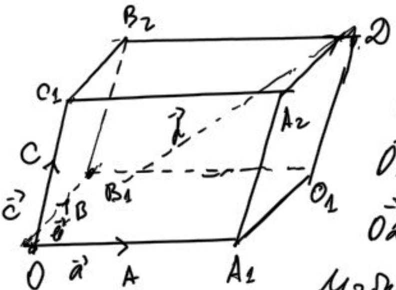
$\lambda . \vec{a} + \mu . \vec{b} + \nu . \vec{c} + 0 . \vec{d} = \vec{0}$

$(\lambda, \mu, \nu, 0) \neq (0, 0, 0, 0) \Rightarrow$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{d}$ са ЛЗ

(2 сл.) Нека $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ са ЛНЗ

(не са компланарни)



Нека т. O – произв. точка

$\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$

$\vec{OD} = \vec{d}$

Избираме точки

$A_1, O_1, B_1, C_1, A_2, B_2$: $OA_1O_1B_1C_1A_2DB_2$ паралелепипед

$$\vec{OD} = \vec{OO_1} + \vec{O_1D} = \vec{OO_1} + \vec{OC_1} =$$

$$= \underbrace{\vec{OA_1} + \vec{OB_1}}_{\vec{OO_1}} + \vec{OC_1} = \alpha.\vec{OA} + \beta.\vec{OB} + \gamma.\vec{OC},$$

т.е. $\boxed{\vec{OD} = \alpha.\vec{OA} + \beta.\vec{OB} + \gamma.\vec{OC}}$

$\Rightarrow \vec{d} = \alpha.\vec{a} + \beta.\vec{b} + \gamma.\vec{c}$ (1)

$\Leftrightarrow \alpha.\vec{a} + \beta.\vec{b} + \gamma.\vec{c} + (-1).\vec{d} = \vec{o}$

$(\alpha, \beta, \gamma, -1) \neq (0, 0, 0, 0)$

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ – ЛЗ

Единственост на α, β и γ?

Да допуснем, че $\exists$-т числа $(\alpha', \beta', \gamma')$: $\vec{d} = \alpha' \cdot \vec{a} + \beta' \cdot \vec{b} + \gamma' \cdot \vec{c}$ (2)

От (1) и (2), след изваждане на левите и десните страни, получаваме

$$\vec{0} = (\alpha - \alpha') \cdot \vec{a} + (\beta - \beta') \cdot \vec{b} + (\gamma - \gamma') \cdot \vec{c} -$$

$\Rightarrow$
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - ЛНЗ

$$\begin{cases} \alpha - \alpha' = 0 \\ \beta - \beta' = 0 \\ \gamma - \gamma' = 0 \end{cases}, \text{ т.е. } \begin{cases} \alpha = \alpha' \\ \beta = \beta' \\ \gamma = \gamma' \end{cases},$$

т.е. единствеността е доказана.