

# ИЗПИТ

по ДИС1 част, специалност "Компютърни науки"

27 август 2024г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Нека  $A$  е ограничено непразно множество от реални числа. Дайте дефиниция на  $\sup A$  и  $\inf A$ . Какво означава, че  $c \in \mathbb{R}$  не е инфимум на  $A$ ? Нека  $M$  и  $N$  са такива непразни множества от реални числа, че за всяко  $x$  от  $M$  и за всяко  $y$  от  $N$  е изпълнено неравенството  $x \leq y$ . Докажете, че съществува такова реално число  $r$ , че да са в сила неравенствата  $x \leq r \leq y$  за всяко  $x \in M$  и за всяко  $y \in N$ .

2. Нека  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  е редица от реални числа и  $a \in \mathbb{R}$ . Какво означава тази редица да клони към  $a$ ? Какво означава  $a$  да е точка на съгъстяване на тази редица? Какво означава, че "редицата  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  няма точки на съгъстяване"? Формулирайте и докажете Теоремата на Болцано-Вайерщрас (принцип за компактност).

3. Дайте дефиниция на  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$  във формата на Хайне и във формата на Коши, където  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$ . Какво трябва да предположите за  $D$ , за да е смислена дадената дефиниция? Докажете, че ако  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$  в смисъл на Коши, то  $f$  клони към 3, когато аргументът клони към  $-\infty$ , в смисъл на Хайне.

4. Нека  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , където  $D \subset \mathbb{R}$ . Какво означава  $f$  да е непрекъсната в дадена точка? Какво означава  $f$  да е равномерно непрекъсната в  $D$ ? Формулирайте и докажете Теоремата на Кантор.

5. Напишете дефиницията за производна на функция в дадена точка. Формулирайте и докажете правилото за диференциране на произведение на две функции.

6. Напишете формулата на Тейлър за  $n + 1$  пъти диференцируема функция  $f$  около точката  $a$  до  $n$ -тия член с остатък във формата на Лагранж. Пресметнете границата

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+12x} - \sqrt{1+8x}}{x^2}$$

като използвате бинома на Нютон (развитието в полином на Тейлър на  $(1+x)^\alpha$ ).

7. Дайте дефиниция на изпъкнала функция.

(а) Формулирайте необходимо и достатъчно условие една диференцируема функция да е изпъкнала.

(б) Докажете неравенството

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

при положителни  $x, y, p, q$  и  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .