

ИЗПИТ

по Анализ I част, специалност "Софтуерно инженерство"

7 септември 2009г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Нека A е множество от реални числа. Какво означава A да е ограничено отгоре? А какво означава това да не е вярно? Докажете, че едно множество от реални числа не е ограничено отгоре точно тогава, когато то съдържа редица, клоняща към $+\infty$.

2. Дайте дефиниция на сходяща редица. Формулирайте и докажете Теоремата на Болцано-Вайерщрас (Принцип за компактност).

3. Дайте дефиниция на $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ във формата на Коши и във формата на Хайне. Пресметнете

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(\sqrt[4]{x^4 + 1} - x \right)$$

4. Какво означава функцията $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ да е непрекъсната в точката $x_0 \in D$? Кои са точките на прекъсване на функцията

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 + x - 2|, & \text{ako } x \leq 3 \\ 3x - 5, & \text{ako } x > 3 \end{cases}$$

Формулирайте и докажете Теоремата на Вайерщрас.

5. Дайте дефиниция на производна на функция в дадена точка. Докажете, че от диференцируемост в дадена точка следва непрекъснатост в същата точка. Пресметнете $f'(0)$, където

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako } x = 0 \\ 2x - x^2 \cos \frac{1}{x}, & \text{ako } x \neq 0 \end{cases}$$

Формулирайте теоремата за крайните нараствания на Лагранж.

7. Формулирайте и докажете достатъчно условие (използващо производни от по-висок ред) дадена стационарна точка да е точка на локален минимум (максимум).

7. Изразете интеграла

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1/2}}$$

чрез I_{n-1} (тук a е положителен параметър и $n = 2, 3, 4, \dots$).