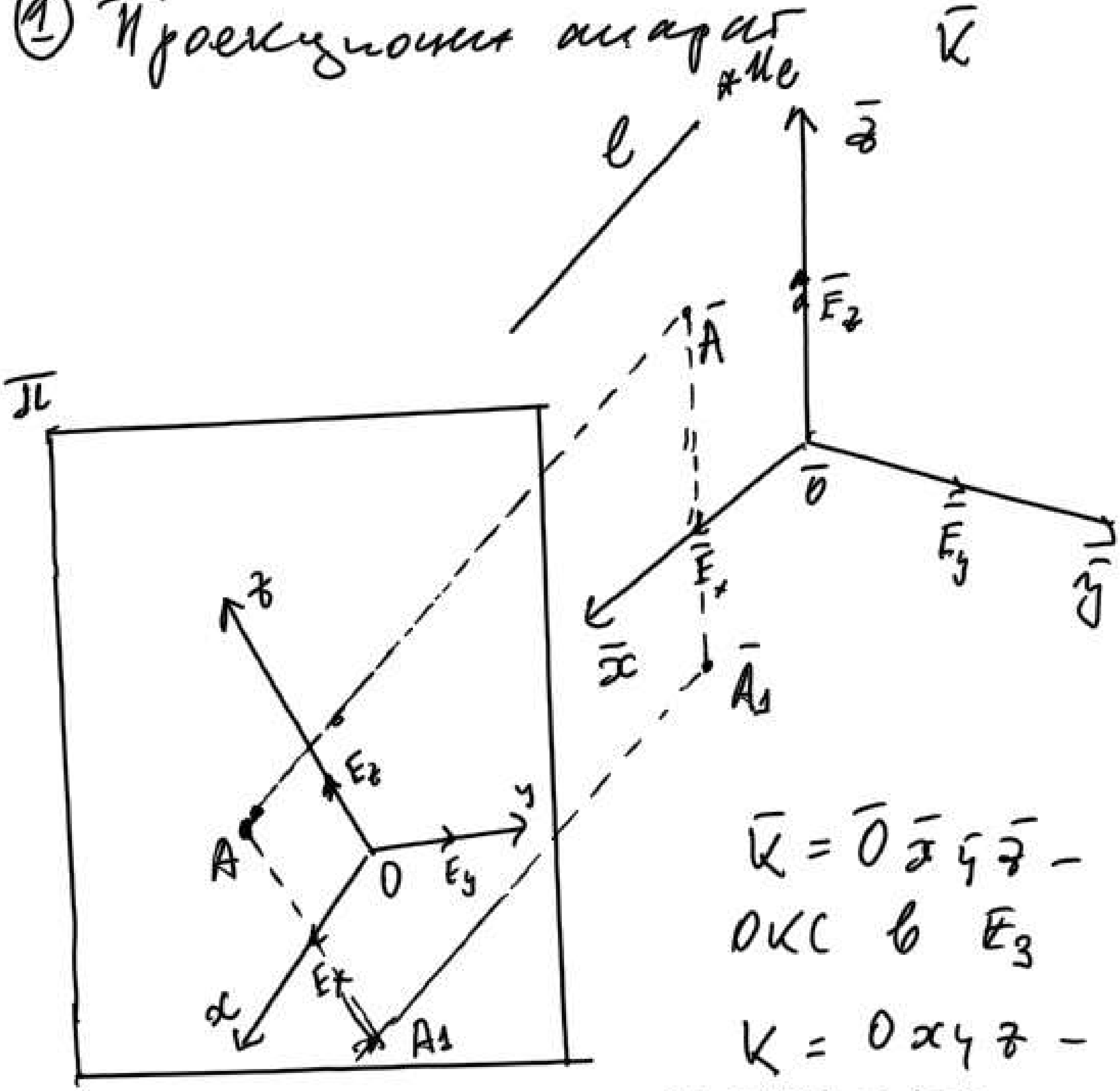
Проекционни методи – аксонометрия и перспектива. Основни понятия

I. Аксонометрия

1) Проекционен апарат



$\bar K = \bar O \bar x \bar y \bar z$ – ОКС в E_3

$K = Oxyz$ – проекцията на $\bar K$ върху π

1) $\bar{K}=\bar{O}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ $\rightarrow$ ОКС в пространството спрямо която са разположени разглежданите геометрични обекти

2) $\bar{\pi}$ - проекционна равнина

3) l - проектиращо направление, $l \nparallel \pi$, $l \nparallel$ координатните равнини на $\bar{K}$

4) коефициенти на изменение:

$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$,

$|\bar{O}\bar{E}_x| = |\bar{O}\bar{E}_y| = |\bar{O}\bar{E}_z| = 1$

$p = |OE_x|$, $q = |OE_y|$, $r = |OE_z|$

(*) $p = q = r \Rightarrow$ <u>изометрия</u>

(*) $p = q \neq r \Rightarrow$ <u>диметрия</u>

(*) $p \neq q \neq r \neq p \Rightarrow$ <u>триметрия</u>

Често т.н. една аксонометрия е напълно определена, ако е известна $K = Oxyz$, т.е., ако знаем $\sphericalangle xOy$, $\sphericalangle yOz$, $\sphericalangle zOx$, както и p, q и r.

② Изобразяване на точка

$$\left.\begin{array}{l} \text{т. } \bar{A} \text{ – произволна точка от пространството} \\ \text{т. } \bar{A}_1 \text{ – ортогоналната проекция на т. } \bar{A} \text{ върху } \bar{O}\bar{x}\bar{y} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{A}\bar{A}_1 \parallel \bar{O}\bar{z}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{т. } A \text{ – образ на т. } \bar{A} \text{ върху } \pi \\ (\text{пр}^{l}_{\pi} \bar{A} = A : \text{т. } A \in \pi,\ A\bar{A} \parallel l) \\ \underline{\text{аксонометрична проекция}} \text{ на т. } \bar{A} \\ \text{т. } A_1 \text{ – образ на т. } \bar{A}_1 \text{ върху } \pi \\ \underline{\text{първа вторична проекция}} \text{ на т. } \bar{A} \end{array}\right\} \Rightarrow AA_1 \parallel Oz$$

Частни случаи: т. $A \equiv$ т. $A_1 \Leftrightarrow \bar{A} \in \bar{O}\bar{x}\bar{y}$

Записваме: $\bar{A}(A, A_1) : AA_1 \parallel Oz$

Забележка: Вместо ортогоналната проекция на т. $\bar{A}$ върху $\bar{O}\bar{x}\bar{y}$, могат да се вземат и ортогоналните проекции на т. $\bar{A}$ върху $\bar{O}\bar{x}\bar{z} : \bar{A}_2$ или върху $\bar{O}\bar{y}\bar{z} : \bar{A}_3$. След проектирането на $\bar{A}_2$ или $\bar{A}_3$ върху Π по направлението на ℓ получаваме точките A_2 – втора вторична проекция
A_3 – трета вторична проекция

Ясно е, че т. $\bar{A}$ е напълно определена от една от следните двойки

$\bar{A}(A, A_1)$ – обикновено се взема тази двойка!
$\bar{A}(A, A_2)$
$\bar{A}(A, A_3)$

3. Изобразяване на права

$\bar{a}$ - произволна права в пространството

$\bar{a}_1$ - ортогоналната проекция на $\bar{a}$ върху $\bar{O}\bar{x}\bar{y}$ (по направлението на $\bar{O}\bar{z}$)

a - образ на $\bar{a}$ върху Π (проекцията на $\bar{a}$ върху равнината $\bar{\Pi}$ посредством успоредното проектиране по направление на l), т.е.

$$a = пр^{l}_{\Pi}\, \bar{a}$$

аксонометричната проекция на правата $\bar{a}$

a_1 - образ на $\bar{a}_1$ върху $\bar{\Pi}$, т.е.

$$a_1 = пр^{l}_{\Pi}\, \bar{a}_1$$

първа вторична проекция на $\bar{a}$

<u>Забележка:</u> (*) При аксонометрия, правата $\bar{a}$ е напълно определена от правите a и a_1. Записваме

$$\bar{a}(a, a_1).$$

(*) т. $\bar{A} \in \bar{a} \iff \begin{cases} \text{т. } A \in a \\ \text{т. } A_1 \in a_1 \\ AA_1 \parallel Oz \end{cases}$

(*) Ако $\bar{b}(b, b_1)$, и $\bar{b} \parallel \bar{O}\bar{z}$, тогава $b \parallel Oz$, b_1 - точка, $b \ni b_1$

(*) Ако $\bar{c}(c, c_1)$, и $\bar{c} \parallel \ell$, тогава c - точка, $c = \bar{c} \cap \pi$, c_1 - права, $c_1 \ni c$.

(*) [критерий за инцидентност на точка и права]:

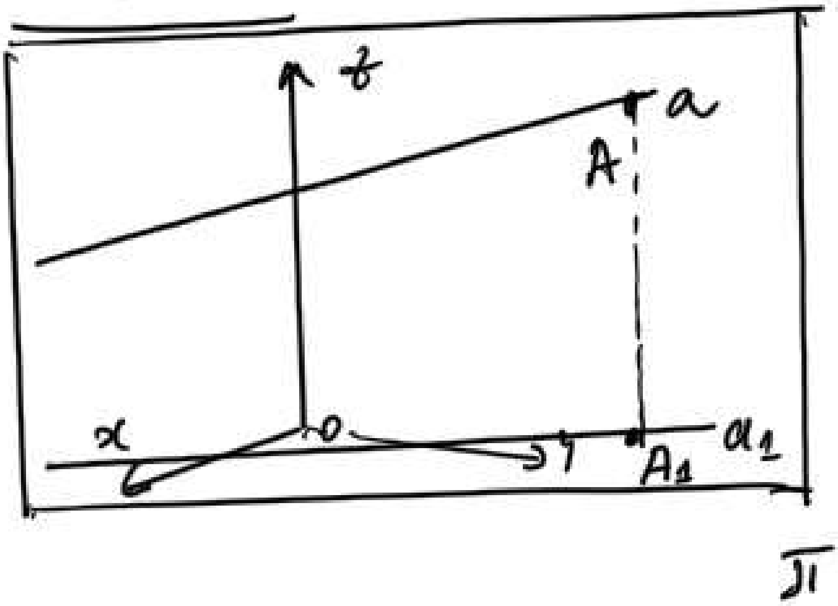
$\bar{A}(A, A_1)$, $\bar{a}(a, a_1)$, $\bar{A} \in \bar{a} \iff \begin{cases} A \in a \\ A_1 \in a_1 \end{cases}$

1 зад. В аксонометрия са дадени права $\bar{a}(a, a_1)$ и точка $A_1 \in a_1$.
Да се построи т. $\bar{A}(A, A_1)$, такава, че $\bar{A} \in \bar{a}$.

Решение: От $\bar{A} \in \bar{a} \Rightarrow \begin{cases} A \in a \\ A_1 \in a_1 \\ AA_1 \parallel Oz \end{cases}$

$A = ?$

Намиране (построяване)



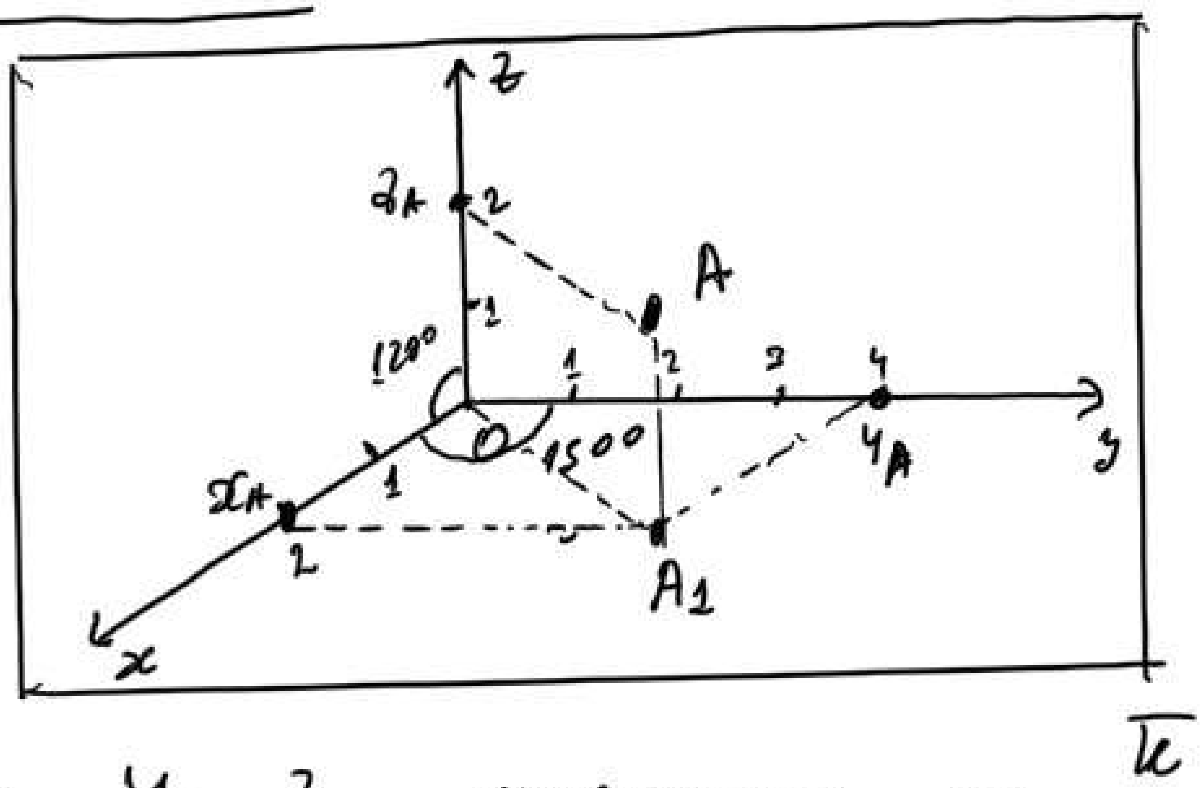
A такава, че : $\begin{cases} \text{т. } A \in a \\ AA_1 \parallel Oz \end{cases} \Rightarrow \bar{A}(A, A_1)$

2 зад. Да се изобрази точката $\bar{A}(2, 12, 10)$ в аксонометрия, определена с условията:

$\angle(Ox, Oz) = 120^\circ$, $\angle(Ox, Oy) = 150^\circ$,

$p = 1$, $q = \frac{1}{3}$, $r = \frac{1}{5}$.

Решение.



x_A, y_A, z_A - проекции на

$\bar{x}_{\bar{A}}$, $\bar{y}_{\bar{A}}$, $\bar{z}_{\bar{A}}$ вдоль π посредством заданная изометрия.

$\bar{x}_{\bar{A}} = 2$, $\bar{y}_{\bar{A}} = 12$, $\bar{z}_{\bar{A}} = 10$

$x_A = 2 \cdot 1 = 2$, $y_A = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$, $z_A = \frac{1}{5} \cdot 10 = 2$

1) Построяваме точките x_A, y_A, z_A

2) Построяваме точката A_1: $O x_A A_1 y_A$ – успоредник

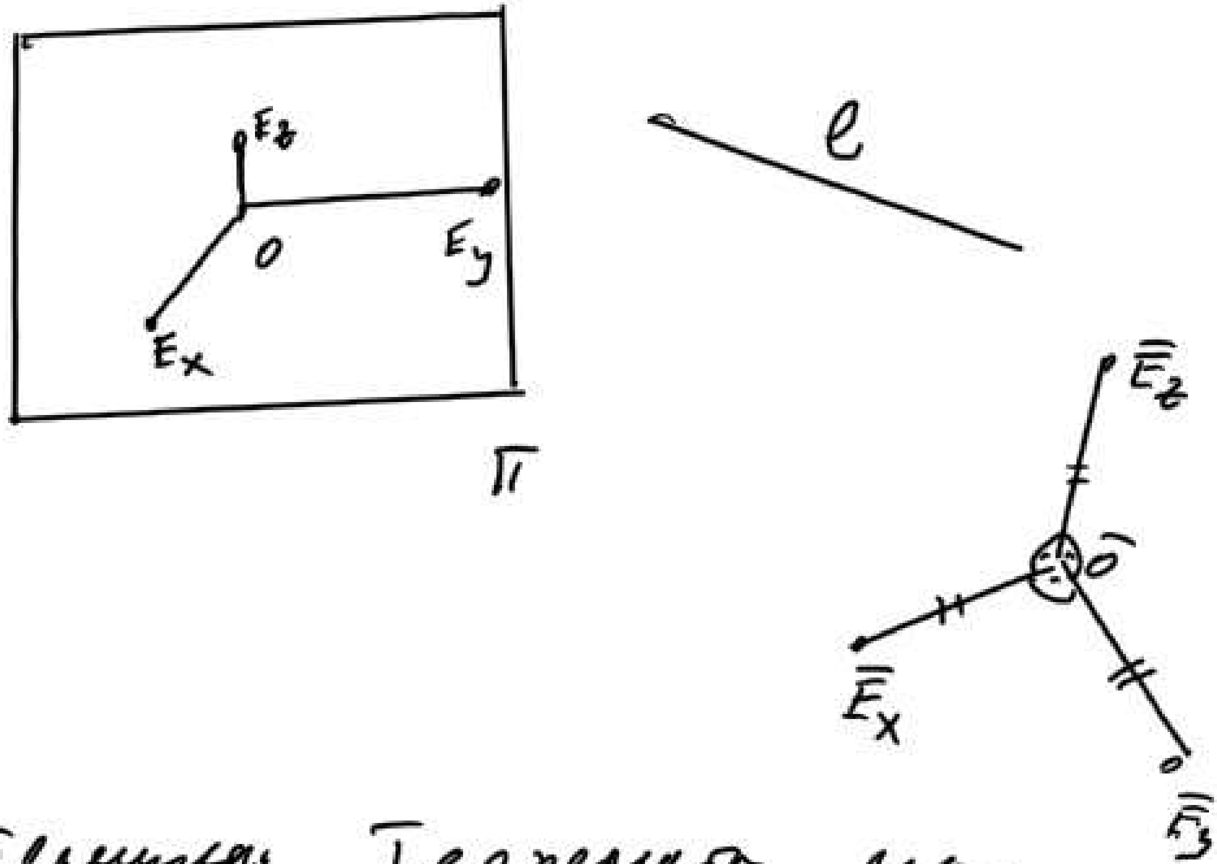
3) Построяваме точката A: $O A_1 A z_A$ – успоредник

$\Rightarrow$ $\bar{A}(A, A_1)$

<u>Теорема (основна теорема на аксонометрията, теорема на Полке–Шварц):</u>

Всеки три отсечки в проекционната равнина π, които имат общ край и никои две от тях не лежат на една права, може да се разглеждат като успоредна проекция на три взаимно перпендикулярни отсечки с общ край и равни дължини.

9



<u>Забележка:</u> Теоремата на Полке-Шварц ни казва, че има безброй много аксонометрични проекции. В практиката, обаче, само някои от тях са важни.

II Перспектива

(1) Проекциски апарат

1) Σ - предметна рамнина

2) π - картинска рамнина (проекциска рамнина), $\Sigma \perp \pi$

3) т. S - крајна точка, т. $S \notin \pi, \Sigma$

- проекциски центар (гледна точка)

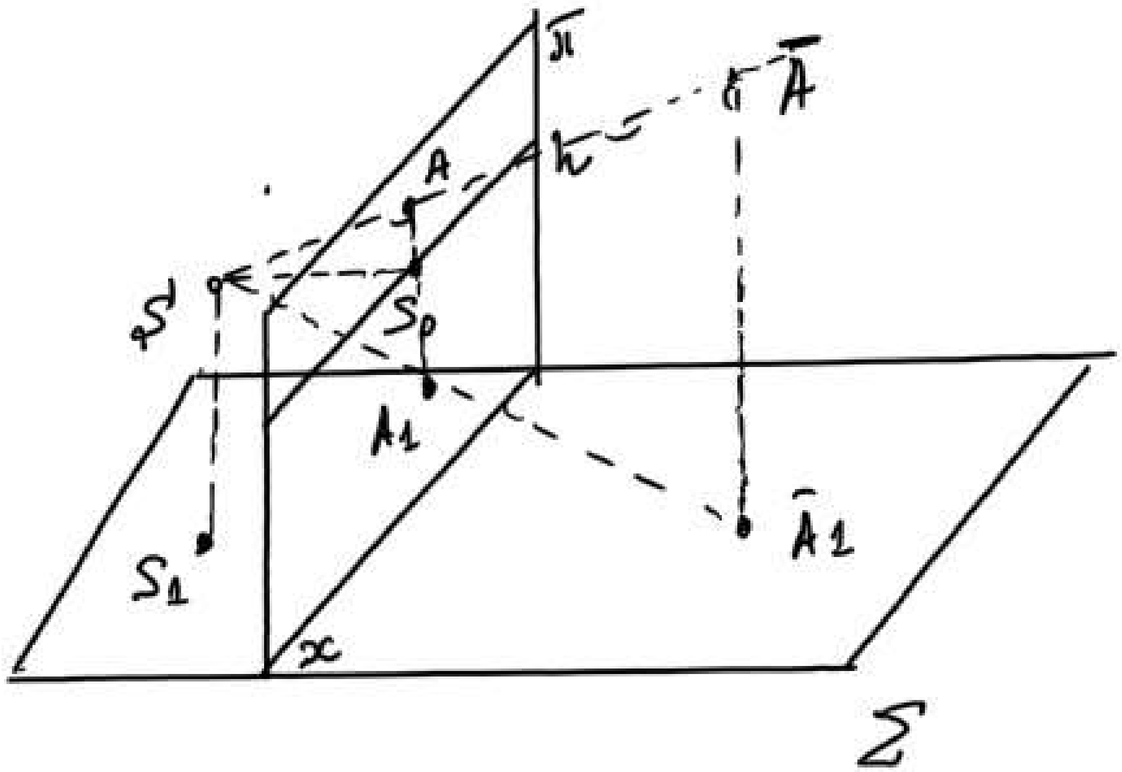
4) т S_0 - $\text{Пр}_{\pi} S$ - главна точка на картината

5) $\Sigma \cap \pi = x$ - основа на картината

6) $\Sigma_0 : \begin{cases} \ni т. S \\ \parallel \Sigma \end{cases}$, $\Sigma_0 \cap \pi = h$ - хоризонт

② Изобразяване на точка

$\bar{A}$ – точка от пространството, $\bar{A} \neq S$



$S\bar{A} \cap \pi =$ т. A – перспектива на т. $\bar{A}$

т. $\bar{A}_1$ – ортогонална проекция на т. $\bar{A}$ върху Σ, т.е. $\bar{A}_1 = пр_{\Sigma} \bar{A}$

$S\bar{A}_1 \cap \pi = A_1$ – вторична проекция на $\bar{A}$

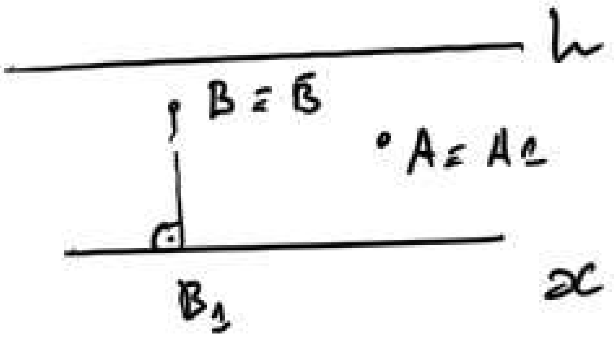
$S_1 = пр_{\Sigma} S$ – точка на стоене

$\bar{A}(A, A_1) \Leftrightarrow AA_1 \perp x$

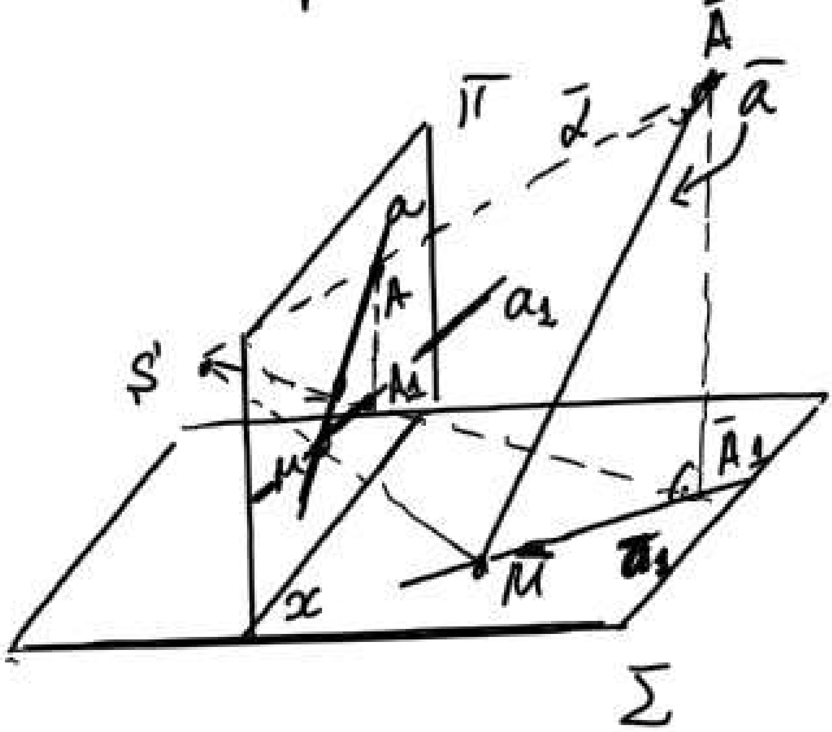
Частни случаи:

1) $\bar{A}(A, A_1)$, $A \equiv A_1 \iff \bar{A} \in \Sigma$

2) $\bar{B}(B, B_1)$, $\bar{B} \in \pi \iff B \equiv \bar{B}$, $B_1 \in x$



3. Изобразяване на права



$\bar{a}$ - права от пространството

$\bar{a} \cap \Sigma = т.\ \bar{M}$

$\bar{a}_1$ - ортогонална проекция на $\bar{a}$ върху Σ,

$\bar{a}_1 \ni т.\ \bar{M}$

Нека да разгледаме равнината, определена от S и $\bar{a}$, $\bar{\alpha} = (S, \bar{a})$

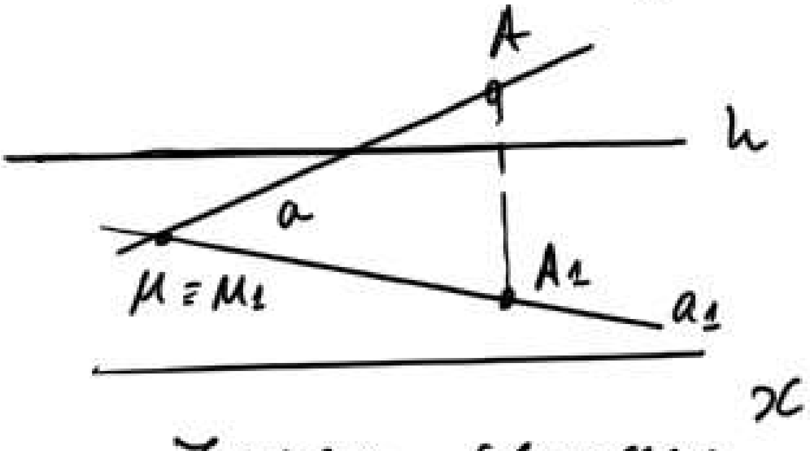
$\bar{\alpha} \cap \bar{\pi} = a$ – проекцията на $\bar{a}$

$\bar{\alpha}_1 = (S, \bar{a}_1)$ – равнината, определена от точката S и правата $\bar{a}_1$.

$\bar{\alpha}_1 \cap \bar{\pi} = a_1$ – вторична проекция на $\bar{a}$

$\bar{a}(a, a_1)$

$\bar{a} \ni т. \bar{A} \iff \begin{cases} a \ni A \\ a_1 \ni A_1 \end{cases}$



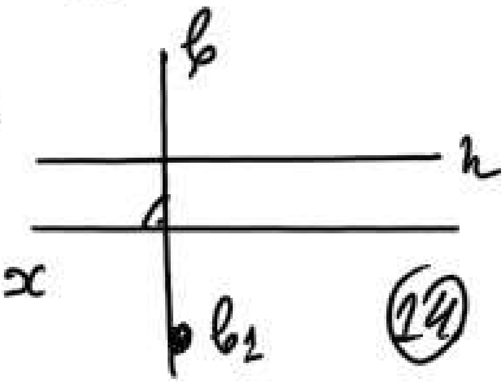
Частни случаи

1) $\bar{b} \perp \Sigma \Rightarrow \bar{b}_1$ – точка $\Rightarrow b_1$ – точка

$\bar{b}(b, b_1)$, $b \ni b_1$

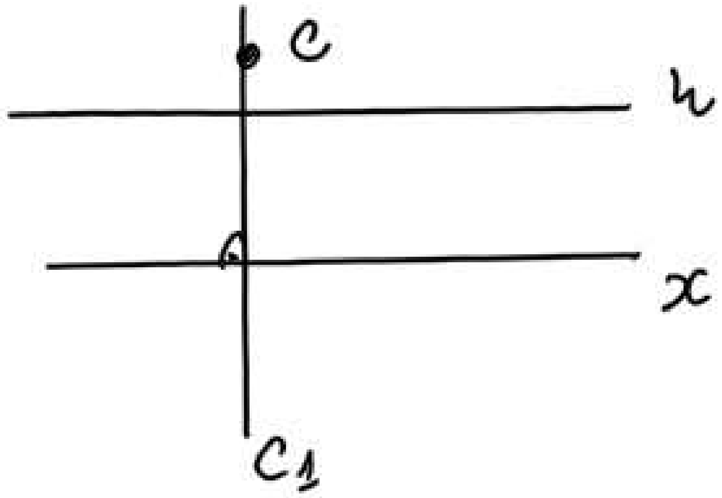
b – права $\perp x$

b_1 – точка



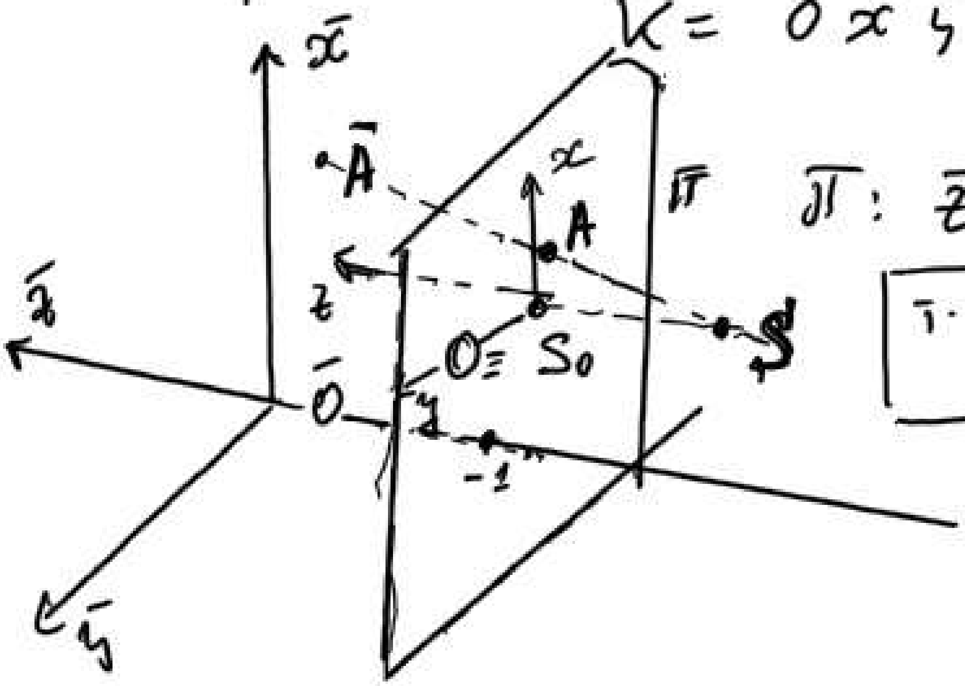
2) $\bar{C} \ni$ т. S => C – точка

C_1 – прямая $\perp$ x, $\bar{C}(C, C_1)$



④ Аналитическое представление перспективы

$\bar{K} = \bar{O}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ – ОКС в пространстве



$\bar{\pi}: \bar{z} + 1 = 0$

$\boxed{\text{т. } S(a, b, c, 1)_{\bar{K}}}$

$K = Oxyz$ – новая ОКС,

получена из $\bar{K}$ через трансляцию, так что $O \equiv$ т. S_0

$Oxy \equiv \pi$, т. $O \equiv$ т. S_0 – главна точка на картината, $Ox \equiv h$ – хоризонт

т. $\bar{A}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})_{\bar{K}}$

т. $A(x, y, z, t)_K$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c+1} & \frac{c}{c+1} \end{pmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \\ \bar{t} \end{pmatrix}}_{\bar{A}}$$

– за домашно

Задача Да се изобрази куб с ръб 1 в перспектива с главна точка $S'(3/2, 1/2, -2, 1)$ $(\pi: \bar{z} + 1 = 0)$.

Решения

Куб: $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}\,\bar{E}\,\bar{F}\,\bar{G}\,\bar{H}$

$\bar{A}(0,0,0,1)$, $\bar{B}(1,0,0,1)$, $\bar{C}(1,1,0,1)$,
$\bar{D}(0,1,0,1)$, $\bar{E}(0,0,1,1)$, $\bar{F}(1,0,1,1)$,
$\bar{G}(1,1,1,1)$, $\bar{H}(0,1,1,1)$ $\quad a=3/2,\ b=1/2,$
$c=-2$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\bar{A} \to A(x_A, y_A, z_A, t_A)$

$$C\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A(-3/2, -1/2, 0, 2)$$
$$= A(-3/4, -1/4, 0, 1)$$

$\Rightarrow A_{oxy}(-3/4, -1/4)$

$\bar{B} \to B(-1/2, -1/2, 0, 2) \to B_{0xy}(-1/4, -1/4)$

$\bar{C} \to C(-1/2, 1/2, 0, 2) \to C_{0xy}(-1/4, 1/4)$

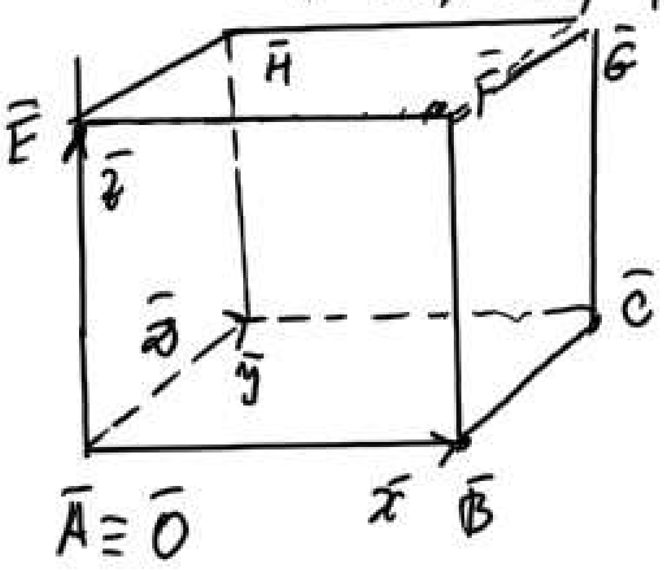
$\bar{D} \to D(-3/2, 1/2, 0, 2) \to D_{0xy}(-3/4, 1/4)$

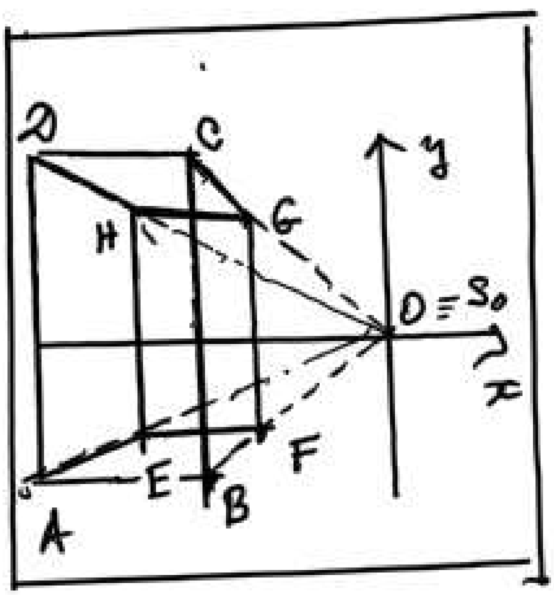
$\bar{E} \to E(-3/2, -1/2, 0, 3) \to E_{0xy}(-3/6, -1/6)$

$\bar{F} \to F(-1/2, -1/2, 0, 3) \to F_{0xy}(-1/6, -1/6)$

$\bar{G} \to G(-1/2, 1/2, 0, 3) \to G_{0xy}(-1/6, 1/6)$

$\bar{H} \to H(-3/2, 1/2, 0, 3) \to H_{0xy}(-3/6, 1/6)$





π

Перспектива