

# ИЗПИТ

по Анализ I част, специалност "Софтуерно инженерство"

16 февруари 2007г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Дайте дефиниция на "множество, ограничено отгоре". Дайте дефиниция на  $a_n \rightarrow +\infty$ , където  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  е редица от реални числа. Докажете, че всяка редица, която не е ограничена отгоре, притежава подредица, дивергираща към  $+\infty$ .

2. Формулирайте Теоремата на Болцано-Вайерщрас (принцип за компактност). Докажете я.

3. Какво означава функцията  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , където  $D \subset \mathbb{R}$ , да е непрекъсната в точката  $x_0 \in D$ ? Какво означава  $f$  да е прекъсната в  $x_0$ ? Дайте дефиниция на " $f$  е равномерно непрекъсната в  $D$ ". Какво означава обратното, т.е. " $f$  не е равномерно непрекъсната в  $D$ "? Непрекъсната ли е функцията  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ , където  $D = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$  и  $g(1/n) = (-1)^n$ ? А дали тя е равномерно непрекъсната?

4. Формулирайте и докажете правилото за диференциране на произведение на две диференцируеми функции.

5. Нека  $(a, b)$  е краен отворен интервал и  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  е диференцируема функция върху него. Нека производната на  $f$  е ограничена върху  $(a, b)$ . Докажете, че  $f$  е ограничена върху  $(a, b)$ . (Упътване: Използвайте Теоремата на Лагранж за крайните нараствания.)

6. Напишете формулата на Тейлор около нулата до ред  $n$  с остатъчен член във формата на Лагранж за функциите

$$f(x) = \sin x \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}.$$

7. Дайте дефиниция на изпъкнала функция.

(а) Формулирайте необходимо и достатъчно условие една диференцируема функция да е изпъкнала.

(б) Нека са дадени неотрицателните числа  $x_i, i = 1, \dots, n$  и положителните числа  $p_i, i = 1, 2, \dots, n$ , за които  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ . Да разгледаме величините

$$S_\alpha = \left( \sum_{i=1}^n p_i x_i^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Докажете, че  $S_\alpha \leq S_\beta$  винаги когато  $0 < \alpha < \beta$ . (Упътване: Използвайте неравенството на Йенсен за функцията  $f(x) = x^{\beta/\alpha}$  с подходящи точки.)

8. Изразете интеграла

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$$

чрез  $I_{n-1}$  (тук  $a$  е положителен параметър и  $n = 2, 3, 4, \dots$ ).