

ИЗПИТ

по Анализ I част, специалност "Компютърни науки"

1 февруари 2022г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Нека A е ограничено непразно множество от реални числа. Дайте дефиниция на $\sup A$ и $\inf A$. Какво означава, че $c \in \mathbb{R}$ не е инфимум на A ? Нека M и N са такива непразни множества от реални числа, че за всяко x от M и за всяко y от N е изпълнено неравенството $x \leq y$. Докажете, че съществува такова реално число r , че да са в сила неравенствата $x \leq r \leq y$ за всяко $x \in M$ и за всяко $y \in N$.

2. Дайте дефиниция на граница и на точка на сгъстяване на дадена редица от реални числа. Докажете, че ако съществува реално число a такова, че от всяка подредица на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ може да се избере подредица с граница a , то $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща редица с граница a .

3. Нека $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, където $D \subset \mathbb{R}$. Какво означава f да е непрекъсната в дадена точка? Какво означава f да е непрекъсната? Непрекъсната ли е функцията f , зададена с $f(x) = [x] \sin x$ (тук $[x]$ е цялата част на x). Формулирайте и докажете Теоремата на Вайерщрас.

4. Нека $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната и съществуват границите $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l_1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l_2$, като $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. Докажете, че f е ограничена. (Използвайте предишната задача.)

5. Напишете дефиницията за диференцируемост на функция в дадена точка. Диференцируема ли е функцията

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x^2} & , \text{ ако } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{e} & , \text{ ако } |x| > 1 \end{cases}$$

върху реалната права? Ако да, пресметнете производната на f . Формулирайте и докажете правилото за диференциране на композиция.

6. Формулирайте и докажете Теоремата на Лагранж за средните стойности. Докажете, че $|\arctg x - \arctg y| < |x - y|$ за всички реални числа x и y .

7. Напишете формулата на Тейлър с остатък във формата на Пеано и с остатък във формата на Лагранж, като формулирайте и достатъчни условия върху функцията, при които са в сила съответните формули. Докажете формулата на Тейлър с остатък във формата на Пеано.