

# Задачки ДИС2 - подготовка за 1 контролно

## 1 Определени интеграли

Пресметнете следните определени интеграли:

**Задача 1.1.**

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\operatorname{tg} x| dx$$

**Задача 1.2.**

$$\int_0^{10} \frac{[\sqrt{x}]}{x} dx$$

(Чисто формално за да бъде интегрируема функцията трябва допълнително да кажем, че е 0 в 0)

**Задача 1.3.**

$$\int_{-3}^3 \max(2 - x^2, -x) dx$$

**Задача 1.4.**

$$\int_{\frac{1}{e}}^1 \ln^2 x \, dx$$

**Задача 1.5.**

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin \sqrt{x} dx$$

**Задача 1.6.**

$$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x(\sqrt{e^x} - 1)}{e^x + 3} dx$$

**Задача 1.7.**

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \ln \left( \frac{1 + 7e^x}{1 + 7e^{-x}} \right) dx$$

**Задача 1.8.**

$$\int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^4} dx \quad (a > 0)$$

**Задача 1.9.**

$$\int_0^{100\pi} |\sin x| dx$$

**Задача 1.10.**

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^3 + 1}{\cos^2 x + \cos^4 x} dx.$$

**Задача 1.11.**

$$\int_{-2}^2 \left( x^3 \cos x + \frac{1}{2} \right) \sqrt{4 - x^2} dx$$

(Ако не сте виждали мийма, [тук](#))

## 1.1 гадни интеграли

Пресметнете следните интеграли:

**Задача 1.12.**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^\alpha x}{\sin^\alpha x + \cos^\alpha x} dx$$

за  $\alpha \geq 0$ .

Отг:  $\frac{\pi}{4}$

**Задача 1.13.** Докажете следното равенство:

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$$

**Задача 1.14.** Нека  $f(x)$  е нечетна функция и  $g(x)$  е четна. Докажете, че

$$\int_{-a}^a \frac{g(x)}{1 + e^{f(x)}} dx = \int_0^a g(x) dx$$

Използвайте полученото за да решите интеграла

$$\int_{-3}^3 \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{|x|}}{1 + (1 + x^2)^x} dx$$

## 2 Суми на Риман

Пресметнете следните граници:

**Задача 2.1.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}}$$

**Задача 2.2.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2n+k}{5n^2+4nk+k^2}$$

**Задача 2.3.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1+n}{n^2}\right) \left(\frac{4+2n}{n^2}\right) \cdots \left(\frac{n^2+n^2}{n^2}\right)}$$

**Задача 2.4.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{k^2+1}{n^3} \sin^2\left(\frac{k}{n}\right)$$

**Задача 2.5.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sin\left(\frac{3k+|\sin k|}{n}\right)$$

### 3 Геометрия

**Задача 3.1.** Намерете лицето на региона, заключен между графиките на функциите  $x \arctg(x+2)$  и  $\frac{\pi}{4}x$ .

**Задача 3.2.** Намерете лицето на региона, заключен между графиките на функциите  $\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ ,  $-x \ln(1+x)$  и  $x=2$ .

**Задача 3.3.** Намерете лицето на полумесеца, който се получава, като от окръжността с център  $(1,0)$  и радиус 1 извадим тази с център  $(0,0)$  и радиус 1.

**Задача 3.4.** Намерете лицето на фигурата зададена с:

$$S : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 15 + 2x \\ y \geq 2\sqrt{3} - 1 - x \\ y^2 \geq 2x \end{cases}$$

**Задача 3.5.** Ами ако в предишната задача обърнем неравенството на  $y^2 \leq 2x$ ?

**Задача 3.6.** Намерете дължината на частта от графиката на функцията  $3 + \frac{4}{5}(x+2)^{5/4}$  в интервала  $[2, 7]$ .

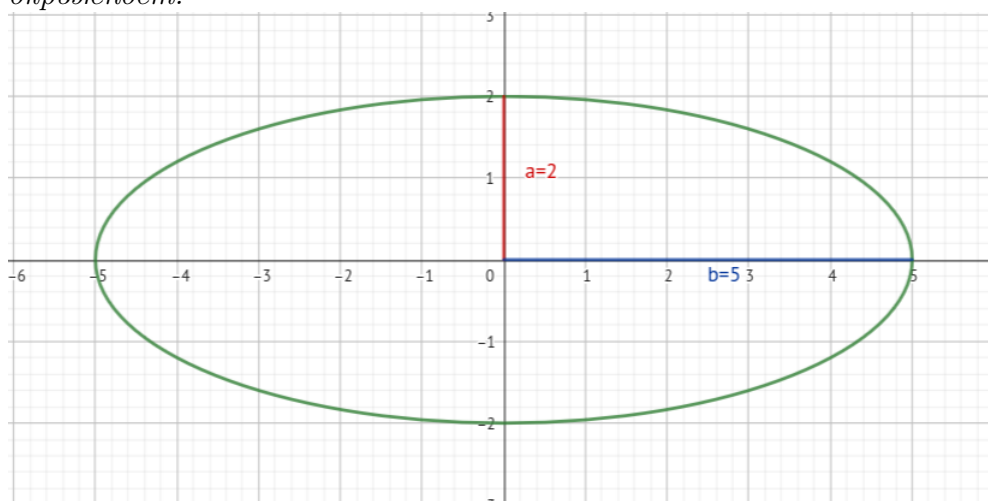
**Задача 3.7.** Намерете дължината на частта от графиката на функцията  $\ln(2-3x)$  между  $x=-1$  и  $x=0$ .

**Задача 3.8.** Намерете дължината на графиката на функцията  $x^2 + 2x + 4$  между точките, където допирателните към графиката минават през  $(0,0)$

**Задача 3.9.** Намерете лицето под логаритмичната спирала:

$$\Gamma : \begin{cases} r(\varphi) = Re^{k\varphi} \\ \varphi \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

**Задача 3.10.** Елипсата е фигура, която изглежда като разтеглена окръжност:



Най-често се задава с два радиуса -  $a$  и  $b$ . Тогава можем да изразим точките от елипсата като:

$$S : \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Намерете лицето на елипса с радиуси  $a$  и  $b$ . Изразете (без да пресмятате) периметъра на елипсата.

И до ден днешен **интегралите които се получават** са нерешени и нямаме обща формула за периметър на елипса.

**Задача 3.11.** Астроидата е фигура, която се задава с уравненията:

$$S : \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Намерете дължината ѝ.

**Задача 3.12.** Намерете дължината на кривата:

$$\Gamma : \begin{cases} x = \int_0^t \cos(\varphi^2) d\varphi \\ y = \int_0^t \sin(\varphi^2) d\varphi \\ t \in [0, \pi] \end{cases}$$

**Задача 3.13.** Намерете лицето на повърхнината и обема на конуса с височина  $h$  и радиус на основата  $r$ .

**Задача 3.14.** Намерете обема на фигурата, която получаваме като завъртим горната половина на астроидата

$$x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}$$

около оста  $O_x$ .

**Задача 3.15.** Намерете лицата на сферата с радиус  $R$  и торът с радиуси  $R$  и  $r$ .

## 4 Пресмятане на несобствени интеграли

**Задача 4.1.**

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$$

**Задача 4.2.**

$$\int_0^\infty \sin(x)e^{-x} dx$$

**Задача 4.3.**

$$\int_1^\infty \frac{x \ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

## 5 Разни задачи

**Задача 5.1.** 1) Докажете че интегралите

$$\int_2^\infty \frac{1}{x} dx \quad \text{и} \quad \int_2^\infty \frac{1}{x-1} dx$$

дивергират към  $\infty$ , но интегралът

$$\int_2^\infty \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} dx$$

не.

2) Изразете чрез формула несвдържаща интеграл количеството

$$1 + \int_2^n \frac{1}{[x]} dx$$

кой много известен ред е това?

3) Забележете, че  $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{[x]} \leq \frac{1}{x-1}$ .

Докажете, че редицата

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x} dx$$

е растящата и ограничена. Заключете че  $a_n$  има граница  $\gamma \leq 2 - \ln 2$ .

Това число се нарича константата на Ойлер.

Повече информация [тук](#).

**Задача 5.2.** Нека  $S$  е фигурата която се получава като завъртим графиката на функцията  $\frac{1}{x}$  около оста  $O_x$  в интервала  $x \in [1, \infty)$ . Намерете обема и лицето на околната повърхнина на  $S$ .

Този фигура е известна като [Gabriel's horn](#)

**Задача 5.3.** Нека:

$$f(x) = \int_1^{2^{\sqrt{x}}} \frac{\sin t}{t} dt$$

за  $x \geq 1$ . Пресметнете  $f'(x)$ . Колко е границата  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\sqrt{2^x}}$ ?