

# ИЗПИТ

по ДИС1, специалност "Компютърни науки"

31 януари 2019г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Дайте дефиниция на точна горна граница (супремум) на ограниченото отгоре множество от реални числа  $A$ . Нека  $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$  е фамилия от непразни ограничени отгоре множества от реални числа, чието обединение  $A := \bigcup \{A_\alpha : \alpha \in I\}$  е ограничено отгоре. Докажете, че множеството  $\{\sup A_\alpha : \alpha \in I\}$  е ограничено отгоре и

$$\sup A = \sup \{\sup A_\alpha : \alpha \in I\} .$$

2. Нека  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  е редица от реални числа. Какво означава тази редица да е сходяща? Формулирайте и докажете Лемата за двамата полицаи.

3. Нека  $D \subset \mathbb{R}$  и  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Какво означава  $x_0$  да е точка на съгъстяване на  $D$ ? Дайте дефиниция на  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  във формата на Хайне и във формата на Коши, където  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Докажете, че ако  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  в смисъл на Хайне, то  $f$  клони към  $+\infty$ , когато аргументът клони към  $x_0$ , в смисъл на Коши.

4. Дайте дефиниция на непрекъснатата функция. Какво означава дадена функция да не е непрекъснатата (тоест да е прекъснатата) във фиксирана точка от дефиниционната си област? Нека функцията  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ , където  $\Delta$  е отворен интервал, е строго монотонна. Докажете, че обратната ѝ функция  $f^{-1} : f(\Delta) \rightarrow \Delta$  е непрекъснатата. Начертайте графика на проста строго растяща функция, дефинирана в отворен интервал, с една точка на прекъсване, както и на нейната обратна.

5. Напишете дефиницията за локален екстремум на дадена функция. Формулирайте и докажете Теоремата на Ферма.

6. Формулирайте и докажете първата теорема на Лопитал (за граници от вида  $\left[\frac{0}{0}\right]$ , когато аргументът клони към реално число).

7. Пресметнете интеграла

$$\int \frac{3x + 5}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx .$$