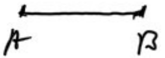
Геометрични вектори - определение и афинни операции

Две точки A и B определят една отсечка: (AB)



Ако т. A ≡ т. B, то отсечката (AA) се нарича нулева отсечка

$(AA) = (0)$

Деф: Ако за отсечката (AB) точката A е приета за начало, а точката B - за край, то казваме, че (AB) е насочена отсечка (свързан вектор) и бележим $\vec{AB}$. Ако т. A ≡ т. B, то $\vec{AA}$ наричаме нулева насочена отсечка: $\vec{AA} = \vec{0}$

$\vec{AB}$

Def: Нека $\vec{a}$ е произволен свободен вектор, $\lambda \in \mathbb{R}$. Под <u>произведение на λ с $\vec{a}$</u> разбираме свободния вектор $\vec{b}$, който се получава по следния начин: Избираме си произволен представител $\vec{OA} \in \vec{a}$ и намираме насочената отсечка $\lambda . \vec{OA}$. Тогава $\vec{b}$ е свободния вектор с представител $\lambda . \vec{OA}$. Означаваме

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}$$

Операциите "събиране на свободни вектори" и "умножение на число със свободен вектор" се наричат <u>афинни операции</u> (или още, <u>линейни операции</u>).

Свойства на събирането на вектори и умножението на число с вектор

<u>Теорема</u>: Нека $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са произволни свободни вектори, а $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ са произволни числа. Тогава:

(1) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \, [= \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}]$;

(2) $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$;

(3) $\vec{a}+\vec{o} = \vec{a}$;

(4) $\vec{a}+(-\vec{a}) = \vec{o}$;

(5) $1 . \vec{a} = \vec{a}$;

(6) $(\lambda+\mu) . \vec{a} = \lambda . \vec{a} + \mu . \vec{a}$;

(7) $\lambda . (\vec{a}+\vec{b}) = \lambda . \vec{a} + \lambda . \vec{b}$;

(8) $(\lambda . \mu) . \vec{a} = \lambda . (\mu . \vec{a})$;

(Без д-во)

Забележка:

Св.1 се нарича <u>асоциативност</u> на събирането на вектори.

Св.2 се нарича <u>комутативност</u> на събирането на вектори.

Св.6 се нарича <u>дистрибутивност</u> на умножението на вектор с число, <u>относно скаларния множител</u>

Св.7 се нарича <u>дистрибутивност</u> на умножението на вектор с число, <u>относно векторния множител.</u>

Забележка: Свойствата (1) ÷ (8) ни показват, че множеството на свободните вектори $\mathcal{L}$, снабдено с операциите "събиране на вектори (+)" и

"умножение на вектор с число (·)"
е линейно пространство (т.е. ЛП),
$(\mathcal{L}, +, \cdot)$ - ЛП.

Множеството от свободните вектори върху една права е 1-мерно ЛП;
Множеството от свободните вектори в равнината е 2-мерно ЛП;
Множеството от свободните вектори в пространството е 3-мерно ЛП;

Деф. Нека $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_k}$ са k вектора. Казваме, че те са линейно зависими (ЛЗ), ако ∃-т k числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, поне едно от които е $\neq 0$, т.е. $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_k^2 > 0$, за които $\lambda_1 . \vec{a_1} + \lambda_2 . \vec{a_2} + \dots + \lambda_k . \vec{a_k} = \vec{0}$ ЛЗ

Казваме, че $\vec{a_1}, \dots, \vec{a_k}$ са линейно независими (ЛНЗ), ако не са ЛЗ, т.е. от $\lambda_1 . \vec{a_1} + \lambda_2 . \vec{a_2} + \dots + \lambda_k . \vec{a_k} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

Деф. Нека $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_k}$ са k вектора, а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ са k числа (от $\mathbb{R}$). Линейна комбинация (ЛК) на $\vec{a_1}, \dots, \vec{a_k}$ с коефициенти съответно $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ наричаме вектора $\vec{b} = \lambda_1 . \vec{a_1} + \lambda_2 . \vec{a_2} + \dots + \lambda_k . \vec{a_k}$.

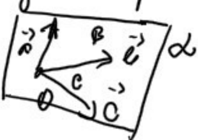
Размерност на едно ЛП:

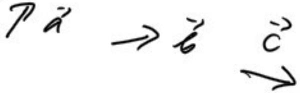
Деф: Казваме, че ЛП $\mathcal{L}$ е n-мерно, ако $\exists$-т n ЛНЗ вектори в него, а всеки $(n+1)$ вектора са ЛЗ. Записваме $\dim \mathcal{L} = n$.

Твърдение 1: Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни $\Leftrightarrow$ $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са ЛЗ. Като следствие, ако $\vec{b} \neq \vec{0}$ и $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\exists!$ число $\lambda \in \mathbb{R}$: $\vec{a} = \lambda . \vec{b}$.

Твърдение 2: Три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са компланарни $\Leftrightarrow$ $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ са ЛЗ. Като следствие, ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са ЛНЗ, а $\vec{c}$ е компланарен с $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то $\exists! (\lambda, \mu)$: $\vec{c} = \lambda . \vec{a} + \mu . \vec{b}$.

Понятие: Векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ се наричат компланарни, ако техните представители в произволна точка лежат в една равнина.





<u>Твърдение 3</u>: Всеки четири вектора в пространството са ЛЗ.

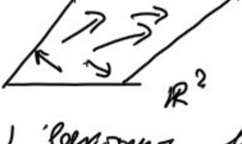
Тв.1, Тв.2 и Тв.3 ще ги докажем следващия път.

От Тв.1, Тв.2 и Тв.3 и дефиницията за размерност на едно ЛП $\Rightarrow$

(1) векторите върху една права образуват 1-мерно ЛП:

$\mathbb{R}^1$ ($\mathbb{E}^1$)

(2) векторите върху една равнина образуват 2-мерно ЛП:



$\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{E}^2$)

(3) Векторите в $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{E}^3$) образуват 3-мерно ЛП. //

Литература (за мотивираните читатели):

(1) Б. Петканчин, "Аналитична геометрия"

(2) Гр. Станилов, "Аналитична геометрия"

(3) И. Иванова-Каратопраклиева "Аналитична геометрия"

(4) И. Мартинов, "Аналитична геометрия"

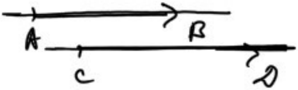
(5) А. Погорелов, "Аналитическая геометрия"

(6) С. Хинова, "Линейна алгебра и Аналитична геометрия" (ЛААГ)

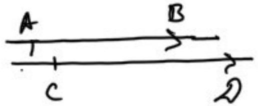
(7) А. Борисов, А. Пастов "Геометрия"

(8) D. Rogers, J. Adams "Mathematical Elements of Computer Graphics"

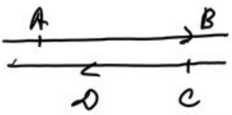
Деф: Две ненулеви насочени отсечки $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ наричаме <u>колинеарни</u> (<u>успоредни</u>), ако правите AB и CD са успоредни или съвпадат. Записваме $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$. По дефиниция, всяка нулева насочена отсечка е успоредна на всяка друга насочена отсечка.



Деф: Две ненулеви насочени отсечки $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ наричаме <u>еднопосочно</u> (респ. <u>противопосочно</u>) <u>колинеарни</u>, ако лъчите $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ са еднопосочни (респ. противопосочни). Бележим $\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{CD}$ (респ. $\vec{AB} \uparrow\downarrow \vec{CD}$).



$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$



$\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$

<u>Деф:</u> <u>Дължина</u> на насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ наричаме числото $|\overrightarrow{AB}| := |AB|$, т.е. дължината на отсечката (AB).
($|\overrightarrow{AB}| \geq 0$, като "=" т.с.т.к. $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$)

<u>Деф:</u> Две ненулеви насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ наричаме <u>равни</u>, и пишем $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, ако:

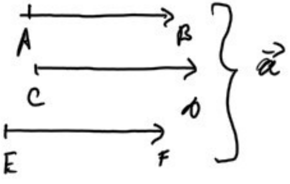
(а) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$;

(б) $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.

По дефиниция, всеки две нулеви насочени отсечки са равни.

<u>Деф:</u> Множеството от всички равни помежду си насочени отсечки наричаме <u>свободен вектор</u>.

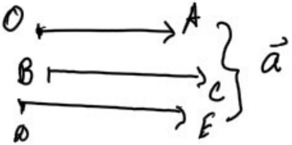
свободните вектори ще ги означаваме с малки букви: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.



Ако свободният вектор $\vec{a}$ е определен (генериран) от насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$, то пишем $\overrightarrow{AB} \in \vec{a}$.

Отсечката $\overrightarrow{AB}$ (и коя да е друга насочена отсечка от множеството $\vec{a}$) се нарича <u>представител</u> на вектора $\vec{a}$.

Нека т. O е произволна точка и $\vec{a}$ е произволен вектор. Построяването на този представител на $\vec{a}$, който има за начало т. O, се нарича пренасяне на $\vec{a}$ в т. O.



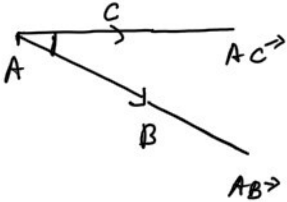
Def. Нулев свободен вектор наричаме множеството от всички нулеви насочени отсечки. Бележим с $\vec{0}$.

Def. Дължина на свободния вектор $\vec{a}$ наричаме числото $|\vec{a}| := |\vec{AB}|$, където $\vec{AB}$ е произволен представител на $\vec{a}$.

Def. Нека е дадена насочената отсечка $\vec{AB}$, и определеният от нея вектор е $\vec{a}$, т.е. $\vec{AB} \in \vec{a}$. Насочената отсечка $\vec{BA}$ се нарича противоположна на $\vec{AB}$, и означаваме $\vec{BA} = -\vec{AB}$. Свободният вектор $\vec{b}$, определен от $\vec{BA}$, наричаме противоположен на $\vec{a}$, и бележим така: $\vec{b} = -\vec{a}$.

Def. Нека $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ са две ненулеви насочени отсечки (с общо начало). Ъгъл, определен от $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.

наричаме ъгълът, определен от лъчите $AB^{\to}$ и $AC^{\to}$. Означаваме $\measuredangle(\vec{AB}, \vec{AC})$ $[:= \measuredangle(AB^{\to}, AC^{\to})]$.



Понякога се нарича и елементарно-геометричен ъгъл, и означаваме така $\measuredangle(\vec{AB}, \vec{AC})$ е $\in [0, \pi]$

Ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са произволни ненулеви свободни вектори, то ъгъл между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ наричаме ъгълът, определен от представителите на $\vec{a}$ и $\vec{b}$, пренесени в произволна точка. Означаваме $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$.

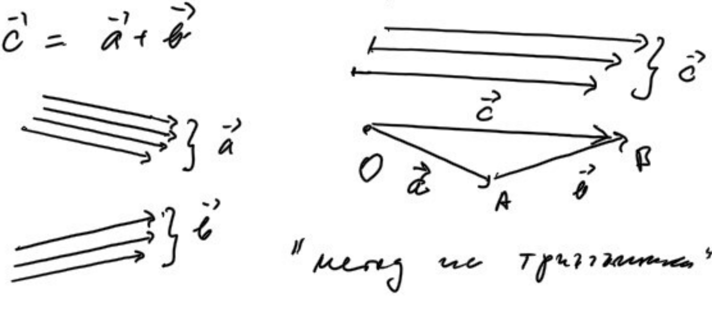
Def. Понятията "колинеарност", "еднопосочна колинеарност", "противопосочна колинеарност" и "равенство" се пренасят по естествен начин и 6 върху свободните вектори. Именно, казваме, че свободните вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са <u>колинеарни</u> (resp. <u>еднопосочно колинеарни</u>, <u>противопосочно колинеарни</u>, <u>равни</u>), ако произволен представител на $\vec{a}$ е в съответната релация с произволен представител на $\vec{b}$. Означенията са същите, както съответните означения при насочени отсечки: $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, $\vec{a} = \vec{b}$.

<u>Събиране на свободни вектори</u>

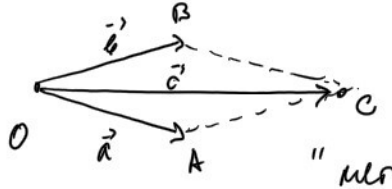
<u>Def:</u> Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са произволни свободни вектори. Под <u>сума</u> (<u>сбор</u>) на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ разбираме свободния вектор $\vec{c}$, получен по

следния начин: Избираме си произволна точка O и представяме $\vec{OA} \in \vec{a}$ и $\vec{AB} \in \vec{b}$. Насочената отсечка $\vec{OB}$ наричаме <u>сума</u> (<u>сбор</u>) на насочените отсечки $\vec{OA}$ и $\vec{AB}$, и бележим $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$. Свободният вектор $\vec{c}$, който има за представител насочената отсечка $\vec{OB}$, се нарича <u>сума на $\vec{a}$ и $\vec{b}$</u>, и означаваме

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$



"метод на триъгълника"



$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

"метод на успоредника"

Умножаване на число (скалар) със свободен вектор

Деф: Нека $\vec{OA}$ е насочена отсечка, а $\lambda \in \mathbb{R}$. Под *произведение* на λ с $\vec{OA}$ ще разбираме насочената отсечка $\vec{OM}$, която се получава по следния начин:

(а) $\vec{OM} = \vec{o}$, ако $\vec{OA} = \vec{o}$ *или* $\lambda = 0$;

(б) Ако $\vec{OA} \neq \vec{o}$ *и* $\lambda \neq 0$, то $|\vec{OM}| = |\lambda|\,|\vec{OA}|$, и:

(б.1) $\vec{OM} \uparrow\uparrow \vec{OA}$, ако $\lambda > 0$;

(б.2) $\vec{OM} \uparrow\downarrow \vec{OA}$, ако $\lambda < 0$.

Означаваме: $\vec{OM} = \lambda . \vec{OA}$.