

ИЗПИТ

по Анализ I част, специалност "Компютърни науки"

25 август 2011г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Дайте дефиниция на "множество, ограничено отгоре". Дайте дефиниция на $\sup A$, където A е ограничено отгоре множество от реални числа. Какво означава, че числото s **не** е супремум (точна горна граница) на множеството A ? Нека A и B са две ограничени отгоре множества от реални числа. Докажете, че множеството $A \cup B$ е ограничено отгоре и $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

2. Дайте дефиниция на сходяща редица. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ са две сходящи редици от реални числа, чиито граници са съответно a и b . Дадено е, че $a_n \leq b_n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Докажете, че $a \leq b$.

3. Нека $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, където D е множество от реални числа. Дайте дефиниция на " f е непрекъсната в D ". Непрекъсната ли е функцията

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ако } x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \\ x - 1, & \text{ако } x \in [1, +\infty) \end{cases} \quad ?$$

Формулирайте и докажете Теоремата на Вайерщрас.

4. Намерете супремума и инфимума от стойностите на функцията

$$f(x) = x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

5. Формулирайте Теоремата на Лагранж за крайните нараствания. Формулирайте и докажете принципа за константност. Използвайте го, за да докажете, че

$$\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = 2 \arctg x \quad \text{за } x \geq 0.$$

6. Използвайте полинома на Тейлър с остатък във формата на Пеано, за да пресметнете границата

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left(a^{\sqrt{1+x}} - a^{1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}} \right).$$

7. Пресметнете интеграла

$$\int \frac{x}{(x^2 + x + 1)^2} dx.$$