

ИЗПИТ

по ДИС1 част, специалност "Компютърни науки"

1 февруари 2020г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Нека $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е ограничена функция.

(а) Дайте дефиниция на точна долна граница (инфимум) и на точна горна граница (супремум) на множеството $f([a, b])$.

(б) Докажете, че

$$\sup \{|f(x) - f(y)| : x, y \in [a, b]\} = \sup \{f(x) : x \in [a, b]\} - \inf \{f(x) : x \in [a, b]\} .$$

2. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от реални числа и $a \in \mathbb{R}$. Какво означава тази редица да клони към a ? Какво означава a да е точка на сгъстяване на тази редица? Какво означава, че "редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ няма точки на сгъстяване"? Формулирайте и докажете Теоремата на Болцано-Вайерщрас (принцип за компактност).

3. Нека $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, където $D \subset \mathbb{R}$. Какво означава f да е непрекъсната? Докажете, използвайки само дефиницията, че ако f и g са непрекъснати, то функцията $\max\{f, g\} : D \rightarrow \mathbb{R}$, дефинирана с $\max\{f, g\}(x) := \max\{f(x), g(x)\}$, също е непрекъсната. Формулирайте и докажете Теоремата на Вайерщрас.

4. Напишете дефиницията за производна на функция в дадена точка. Докажете, че ако една функция е диференцируема в дадена точка, то тя е непрекъсната в същата точка. Формулирайте и докажете правилото за диференциране на композиция.

5. Дайте дефиниция на точка на условен екстремум за дадена функция. Формулирайте и докажете Теоремата на Ферма. Формулирайте и докажете Теоремата на Рол.

6. Напишете дефиницията на изпъкнала функция. Формулирайте и докажете необходимо и достатъчно условие за изпъкналост на диференцируема функция. Докажете, че

$$\frac{e^x + e^y}{2} \geq e^{\frac{x+y}{2}}$$

за произволни реални числа x и y .

7. Пресметнете интеграла

$$\int \frac{4x + 7}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx .$$