Линейни трансформации в E_2^*

E_2^* – разширената Евклидова равнина ДКС $K = Oxy$

Деф: Трансформация φ, която на точката $M(x_1, x_2, x_3)$ от E_2^* съпоставя точката $M'(x_1', x_2', x_3')$ от E_2^* така, че

$$(1)\ \varphi: \begin{cases} \rho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \rho x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \rho x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{cases}$$

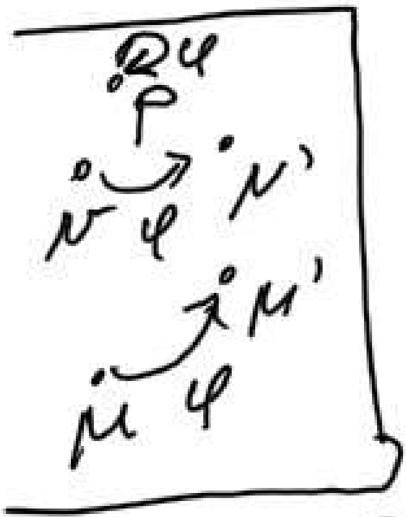
където $\rho \neq 0$ е реално число, се нарича линейна трансформация (колинеация) в E_2^*

$\varphi: E_2^* \to E_2^*$ $C = (a_{ij})_{3\times3}$ – матрица на лин. трансформ. φ.

1

φ_C – подчертаваме, че φ е определена с матрица C

$$M' = \varphi(M)$$



т. $M(x_1, x_2, x_3)$ – праобраз на т. M' под действието на φ

т. $M'(x_1', x_2', x_3')$ – образ на т. M под действието на линейната трансф. φ

E_2^*

Линейна трансформация $\Leftrightarrow$ ЛТ

Деф: Казваме, че т. M е неподвижна (двойна точка) под действието на ЛТ φ, ако $\varphi(M) = M$.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

$$(1) \Leftrightarrow \boxed{\exists \rho \in \mathbb{R}: \rho X' = CX} \quad (2)$$

За да бъде дефиницията на ПТ коректна, ще трябва да докажем, че тя не зависи от избора на 3-ките хомогенни координати на точките M и M'. Наистина, да предположим, че

$$\text{т. } M(\rho_1 x_1, \rho_1 x_2, \rho_1 x_3),\ \rho_1 \neq 0$$

$$\text{т. } M'(\rho_1' x_1', \rho_1' x_2', \rho_1' x_3'),\ \rho_1' \neq 0$$

Равенствата (1) могат да бъдат записани във вида

$$\varphi: \begin{cases} \rho \cdot \dfrac{\rho_1}{\rho_1'}\, \rho_1' x_1' = a_{11}\rho_1 x_1 + a_{12}\rho_1 x_2 + a_{13}\rho_1 x_3 \\ \rho \cdot \dfrac{\rho_1}{\rho_1'}\, \rho_1' x_2' = a_{21}\rho_1 x_1 + a_{22}\rho_1 x_2 + a_{23}\rho_1 x_3 \\ \rho \cdot \dfrac{\rho_1}{\rho_1'}\, \rho_1' x_3' = a_{31}\rho_1 x_1 + a_{32}\rho_1 x_2 + a_{33}\rho_1 x_3 \end{cases}$$

$$\tau := \rho \cdot \frac{\rho_1}{\rho_1'}$$

$$M'$$

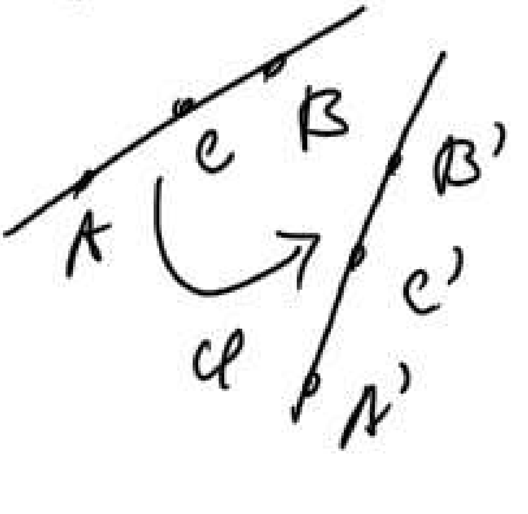
$$(3)\quad \varphi: \begin{cases} \tau \cdot \rho_1' x_1' = a_{11}\rho_1 x_1 + a_{12}\rho_1 x_2 + a_{13}\rho_1 x_3 \\ \tau \cdot \rho_1' x_2' = a_{21}\rho_1 x_1 + a_{22}\rho_1 x_2 + a_{23}\rho_1 x_3 \\ \tau \cdot \rho_1' x_3' = a_{31}\rho_1 x_1 + a_{32}\rho_1 x_2 + a_{33}\rho_1 x_3 \end{cases}$$

$\varphi: M' = CM, \quad M' = \varphi(M)$

<u>Теорема 1:</u> Ако $\det C \neq 0$, тогава ЛТ φ, зададена с матрицата C, е биективно изображение (биекция = инекция + сюрекция) на E_2^* в E_2^*.

<u>Теорема 2:</u> ЛТ φ, зададена с матрицата C изобразява колинеарни точки в колинеарни.

<u>Д-во:</u> Б.О.О., нека $A \neq B$



т. $C \in AB$

$$\boxed{C = \lambda A + \mu B, \ (\lambda, \mu) \neq (0,0)}$$

$\varphi(C) = \lambda \varphi(A) + \mu \varphi(B) \iff$

т. $C' = \lambda A' + \mu B' \Rightarrow$ т. A', т. B' и т. C' са колинеарни.

Следствие: Ако $\det C \neq 0$ (т.е. φ_C е неособена ЛТ), то φ_C изобразява права в права.

~~Непод~~. **Неподвижна точка**

$\varphi_C(M) = M \qquad M(x_1, x_2, x_3)$

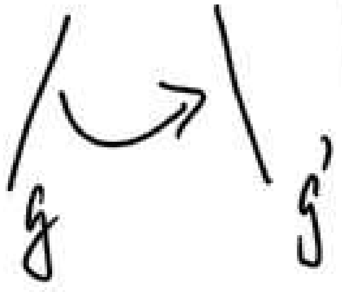
$$\exists \rho \neq 0: \quad \boxed{\rho \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} \quad (*)$$

$\Rightarrow$ неподвижните точки се намират като "собствени вектори" на C

$$g[u_1, u_2, u_3] \xrightarrow{\varphi_C} g'[u_1', u_2', u_3']$$

φ – неособ. $(\det C \neq 0)$

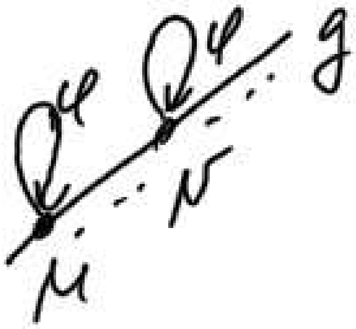
$$\exists \sigma \neq 0: \quad \boxed{\sigma(u_1', u_2', u_3') = (u_1, u_2, u_3)\, C^{-1}}$$



Деф: Казваме, че правата g е **неподвижна** (**двойна права**) под действието на φ, ако $\varphi(g) = g$.

Деф: Казваме, че правата g е **поточково неподвижна** под действието на φ, ако

$\varphi(M) = M$ за $\forall$ т. $M \in g$.



поточково неподвижна $\Rightarrow$ неподвижна

неподвижна $\not\Rightarrow$ поточково неподв.

$g[u_1, u_2, u_3]$ - неподвижна

$\varphi_c(g) = g$

$\exists\, \sigma \neq 0: \ \sigma(u_1 u_2 u_3) = (u_1, u_2, u_3)\, C^{-1}$

$$\Leftrightarrow \quad \sigma \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = (C^{-1})^t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ неподвижните прави се намират като "собствени вектори" на $(C^{-1})^t$.