2 зад

Затвореност спрямо събиране

1. Нека $f, g \in U$

$f(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$

$g(x) = b_0 x^0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4$,

то

$f(x) + g(x) = a_0 x^0 + b_0 x^0 + a_1 x^1 + b x^1 + a_2 x^2 + b_2 x^2 + a_3 x^3 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + a_4 x^4 =$

$= (a_0 + b_0) x^0 + (a_1 + b_1) x^1 + (a_2 + b_2) x^2 + (a_3 + b_3) x^3 + (a_4 + b_4) x^4 =$

$= (f + g)(x)$

$(f + g)(x) \in U$

$\Rightarrow (f+g)(2) = f(2) + g(2) = f(-2) + g(-2) = (f+g)(-2) \in U$

2. Затвореност спрямо умножение със скалар

2. Нека $\alpha \in \mathbb{R}$ $f \in U$

$(\alpha . f)(x) = \alpha a_0 x^0 + \alpha a_1 x^1 + \alpha a_2 x^2 + \alpha a_3 x^3 + \alpha a_4 x^4 =$

$= \alpha (a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4) =$

$= \alpha . f(x) \in U$

$\alpha . f''(0) = \alpha . 0 = 0 = (\alpha f'')(0) \in U$

От 1. и 2. следва че U е подпространство на $\mathbb{R}^{\leq 4}[x]$

Базис на U

Нека $f \in U$

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$

$f''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2$

$f''(0) = 0 \Rightarrow 2a_2 + 6a_3 \cdot 0 + 12a_4 0^2 = 0$

$2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$

$\Rightarrow f(x) = a_0 + a_1 x + a_3 x^3 + a_4 x^4$

$f(2) = f(-2)$

$a_0 + 2a_1 + 8a_3 + 16a_4 = a_0 - 2a_1 - 8a_3 + 16a_4$

$4a_1 = -16a_3$

$a_1 = -4a_3$

$f(x) = a_0 - 4a_3 x + a_3 x^3 + a_4 x^4$

$f(x) = a_0 + a_3(x^3 - 4x) + a_4 x^4$

$\Rightarrow$ Базис на U $\{x^4, x^3 - 4x, 1\}$