Линейни трансформации в E_3^*

E_3^* - разширено Евклидово пространство

$K = Oxyz$ - АКС

Деф: Трансформация φ, която на точката $M(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E_3^*$ съпоставя точката $M'(x_1', x_2', x_3', x_4') \in E_3^*$ така, че:

$$
(1) \quad \varphi: \begin{cases} \rho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ \rho x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ \rho x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ \rho x_4' = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \end{cases}
$$

където $\rho \neq 0$ е реално число, се нарича <u>линейна трансформация (ЛТ)</u>, или <u>колинеация</u> в E_3^*.

$C = (a_{ij})_{4\times 4}$, $\varphi_C : E_3^* \to E_3^*$

C - матрица на ПТ φ

$N \xrightarrow{\varphi_C} N'$

$M \xrightarrow{\varphi_C} M'$

$P \circlearrowleft \varphi_C$

т. $M \xrightarrow{\varphi_C}$ т. M'

$M' = \varphi_C(M)$

т. M' - образ на т. M под действието на φ_C

т. M - първообраз на т. M' под действието на φ_C

<u>Def:</u> Казваме, че т. M е <u>неподвижна под действието на φ_C</u>, ако $\varphi_C(M) = M$.

<u>Def:</u> (1) Казваме, че правата g е неподвижна под действието на φ_C, ако $\varphi_C(g) = g$

(2) Казваме, че правата g е поточково неподвижна под действието на φ_C, ако

$\varphi_C(M) = M$ за $\forall\, M \in g$

Забележка: Както и в E_2^*, ЛТ $\varphi_C: E_3^* \to E_3^*$ и нарича неособена (регулярна), ако $\det C \neq 0$. Също както в E_2^* се доказва, че колинеарни точки в E_3^* под действието на ЛТ φ_C отиват (се изобразяват) в колинеарни точки. Ако $\det C \neq 0$, то $\varphi_C: E_3^* \to E_3^*$ е биективно изображение (инекция + сюрекция). Когато $\det C \neq 0$, тогава φ_C изобразява права в права.

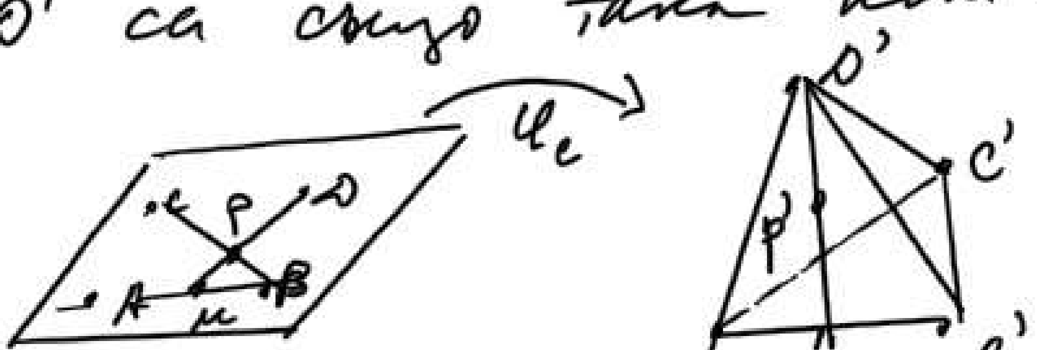
$g \xrightarrow{\varphi_C} g'$

Коректността на дефиницията на ЛТ в E_3^* се доказва по същия начин, както съответната дефиниция в E_2^*.

<u>Твърдение:</u> Ако $\varphi_c: E_3^* \to E_3^*$ е ЛТ, тогава компланарни точки се изобразяват в компланарни.

<u>Д-во:</u> Нека A, B, C и D са компланарни (лежат в една равнина), а $\varphi_c(A) = A'$, $\varphi_c(B) = B'$, $\varphi_c(D) = D'$, $\varphi_c(C) = C'$.

Искаме да докажем, че A', B', C' и D' са също така компланарни.



Б.О.О. т. $A \neq$ т. B, т. $M \in AB$, т. $M' = \varphi_c(M)$
$\Rightarrow$ т. $M' \in A'B'$

Нека $DM \cap BC = т.\ P$, $т.\ P' = И_C(P)$

$\Rightarrow$ D', P', M' - колинеарни
C', P', B' - колинеарни $\Bigg\} \Rightarrow$

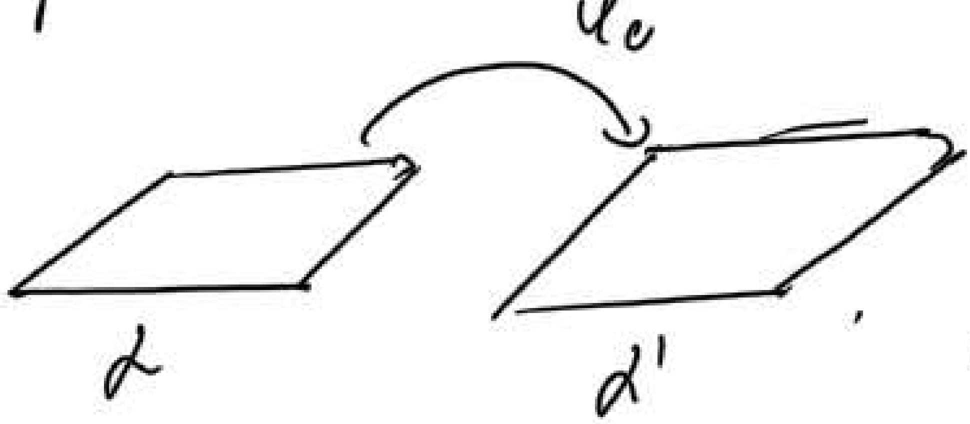
т. $P' \in B'C'$ $\Big\}$ с допускането

и т. $D' \notin (A'B'C')$ $\Rightarrow$

точките A', B', C' и D' са

компланарни

Следствие: Ако $И_C$ е изометрия ЛТ, тогава равнина се изобразява в равнина



$И_C : \alpha \to \alpha'$, $\alpha \xrightarrow{И_C} \alpha'$, $\alpha' = И_C(\alpha)$

<u>Def:</u> (1) Казваме, че равнината α е <u>неподвижна под действието на ЛТ φ_C</u> ($\det C \neq 0$), ако

$\varphi_C(\alpha) = \alpha$;

(2) Казваме, че равнината α е <u>поточково неподвижна под действието на ЛТ φ_C</u> ($\det C \neq 0$), ако $\varphi_C(M) = M$, $\forall$ т. $M \in \alpha$.

$$\text{т. } M(x_1, x_2, x_3, x_4) \xrightarrow[\varphi_C]{} \text{т. } M'(x_1', x_2', x_3', x_4')$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\exists \rho \neq 0 : \rho X' = CX}$$

Неподвижните точки се намират като собствени вектори на C.

$\alpha: u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$

$\alpha[u_1, u_2, u_3, u_4]$

$$\alpha[u_1, u_2, u_3, u_4] \xrightarrow{\ell_C} \alpha'[u_1', u_2', u_3', u_4']$$

праобраз на α' под действие на ℓ_C — образ на α под действие на ℓ_C

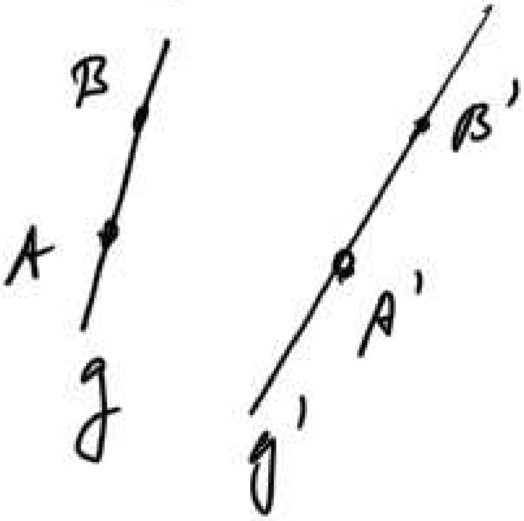
$\exists\, \rho \neq 0: \rho(u_1', u_2', u_3', u_4') = (u_1, u_2, u_3, u_4)\, C^{-1}$

$$\Leftrightarrow \rho \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \\ u_4' \end{pmatrix} = \left(C^{-1}\right)^t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

Неподвижните равнини се намират като собствени вектори на $\left(C^{-1}\right)^t$ $\Leftrightarrow$ собствени вектори на C^t.

<u>Забележка:</u> (1) Образ на права в E_3^* под действие на ЛТ ℓ_C се намира като с

изберете образите A' и B' на двете точки A и B, съответно, от изходната права (праообраза)



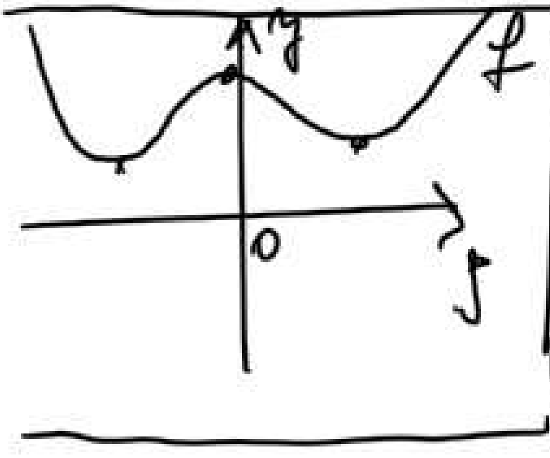
$\varphi_C(g) = g' = ?$

$\varphi_C(A) = A'$

$\varphi_C(B) = B'$

$g' = A'B'$

(2) Неподвижни прави под действие на ЛТ $\varphi_C : E_3^* \to E_3^*$ се намират когато и ску ги C или C^{-1} да имат двукратни собствени стойности.



напр.

деф: Казваме, че 5 точки в E_3^* са в общо положение, ако никои 4 от тях не са компла-

Твърдение Линейната трансформация
$\varphi: E_3^* \to E_3^*$ е еднозначно определена, ако е известно действието
ѝ върху 5 точки в общо положение