Безкрайни елементи и хомогенни координати

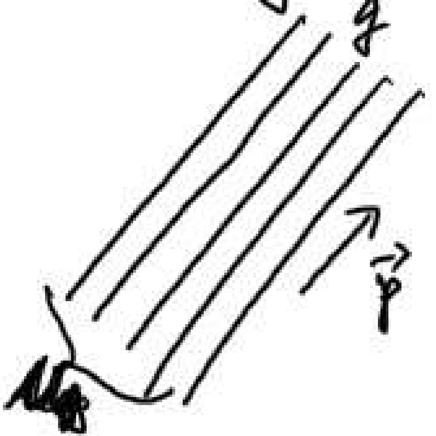
Точките, правите и равнините, с които се занимавахме до момента, ще наричаме "крайни".

I. Безкрайни елементи и хомогенни координати в равнината

E_2 - Евклидовата равнина

Нека g - права в E_2

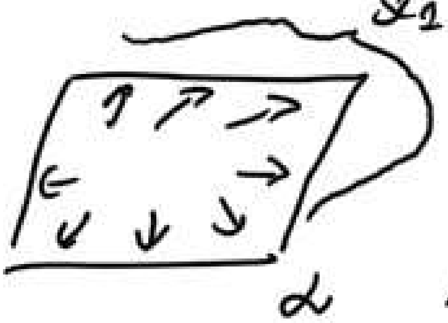
Деф: Безкрайна точка, определена от g, наричаме множеството от всички прави, които са успоредни или съвпадат с g. Означаваме с U_g



Ако $\vec{p} \neq \vec{0}$, $\vec{p} \parallel g$, то $\vec{p}$ също определя безкрайната точка U_g. Пишем $U_{\vec{p}}$.

Деф.: Множеството от всички безкрайни точки в равнината наричаме <u>безкрайна права на равнината</u>. Означаваме

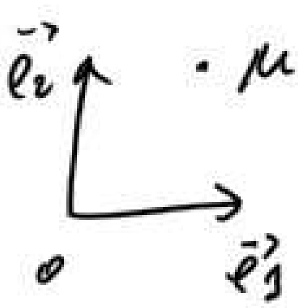
$$\Omega_1 \ (\Omega_1^{E_2}, \Omega_1^{\alpha}, \omega_1)$$



Деф.: Множеството от всички крайни и безкрайни точки на прави в равнината E_2 наричаме <u>разширена Евклидова равнина</u>. Означаваме с E_2^*.

С други думи, $E_2^* := E_2 \cup \Omega_1^{E_2}$

Нека $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2$ - АКС в E_2.



т. $M(X, Y)_K$ - афинни (нехомогенни) координати на т M относно K.

Деф.: (а) Ако т $M(X,Y)_K$ е крайна точка, тогава <u>афинни хомогенни координати</u> на т M

относно K иде наричаме всяка наредена 3-ка реални числа (x, y, t), $t \neq 0$, такива, че $\frac{x}{t} = X$, $\frac{y}{t} = Y$. Записваме т. $M(x, y, t)_K$.

б) Ако $M_{\vec{p}}$, $\vec{p} \neq \vec{0}$, $\vec{p}(x, y)_K$, то <u>афинни хомогенни координати</u> на $M_{\vec{p}}$ иде наричаме наредената 3-ка $(x, y, 0)$. Записваме

$M_{\vec{p}}(x, y, 0)_K$.

<u>Забележка:</u>

(1) Хомогенните координати са определени с точност до множител, т.е., ако т. $M(x, y, t)$, то т. $M(\rho x, \rho y, \rho t)$, $\rho \neq 0$.

(2) Наредената 3-ка $(0, 0, 0)$ <u>не представлява</u> хомогенни афинни координати на никоя точка!

Правило: (1) хомогенни $\to$ нехомогенни

т. $M(x, y, t) \longrightarrow$ т. $M\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right)$

крайна точка

(2) нехомогенни $\to$ хомогенни

т. $M(X, Y) \longrightarrow$ т. $M(X, Y, 1)$

крайна точка $\quad$ [т. $M(pX, pY, p)$]

$p \neq 0$

Уравнение на права в равнината в хомогенни координати

K – АКС в E_2

$g: aX + bY + c = 0$ – нехомогенно (общо) у-ние

$X \to \frac{x}{t}, \quad Y \to \frac{y}{t}$

$g: a\frac{x}{t} + b\frac{y}{t} + c = 0$

$g: ax + by + ct = 0$ – хомогенно (общо) у-ние

$g[a, b, c]$ – координати на права g.

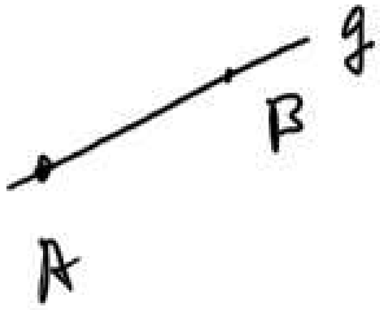
т. $M(x, y, t) \Longleftrightarrow$ т. $M(x_1, x_2, x_3)$

$\nwarrow \quad \nearrow$

еквивалентни означения на афинни хомогенни координати

$$g: \begin{cases} \text{през т. } A \\ \text{през т. } B \end{cases}$$

($A \neq B$, възможно е A или B да е безкрайна)



(Ако т. A е безкр. и т. B е безкр., то

$AB = \omega_1$)

$$\left.\begin{array}{l} \text{т. } A(x_1, x_2, x_3) \\ \text{т. } B(y_1, y_2, y_3) \end{array}\right\} \text{ хомогенни координати}$$

$$g: \begin{cases} x = \lambda x_1 + \mu y_1 \\ y = \lambda x_2 + \mu y_2 \\ \underbrace{t}_{\text{т. } M} = \lambda x_3 + \mu y_3 \end{cases}, \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

Скаларни параметрични уравнения на права g в хомогенни координати

$$\boxed{g:\ M = \lambda A + \mu . B}\ ,\ (\lambda, \mu) \neq (0,0)$$

Забележка: Изобщо, ако

$c:\ F(X,Y)=0$ – нехомогенно уравнение

$c:\ F\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right)=0$ – хомогенно уравнение

$\Omega_1:\ t=0 \quad (\Omega_1:\ x_3=0)$

$\Omega_1[0,0,1]$

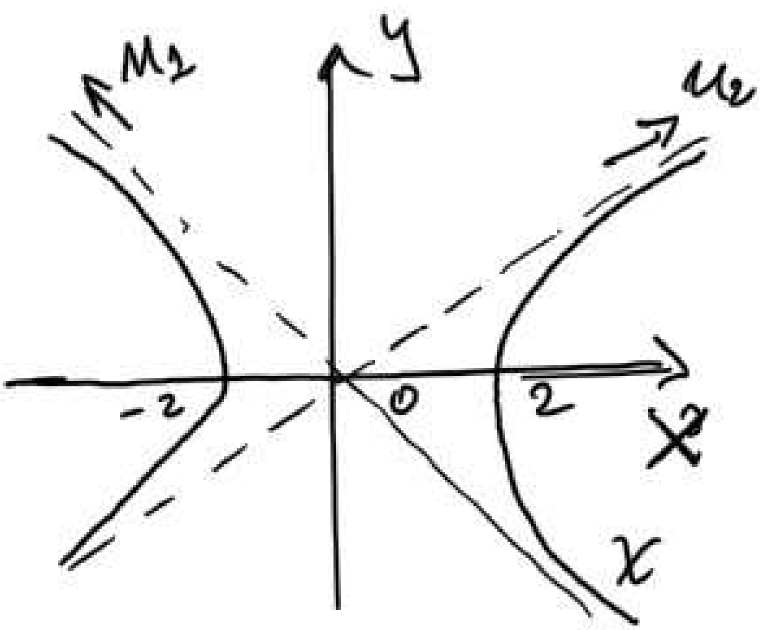
$(\Omega_1:\ 0.x_1 + 0.x_2 + 1.x_3 = 0)$

Примери

1) Хипербола

$\chi:\ \frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{3} = 1$ – нехомог. уравн.

$\chi: \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = t^2$ – хомогенно уравнение



Търсим безкрайните точки на χ

$\chi \cap \Omega_0 = ?$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = t^2 \\ t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3}\right)\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3}\right) = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

1 сл. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 0$ Б.О.О. $y = 3$

$\Rightarrow x = -2$

$\Rightarrow \boxed{M_1(-2, 3, 0)}$

2 сл. $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 0$ Б.О.О. $y = 3$

$\Rightarrow x = 2$

$\Rightarrow \boxed{M_2(2, 3, 0)}$

② Елипса

$\mathcal{E}: \dfrac{X^2}{4} + \dfrac{Y^2}{3} = 1$ – нехомог. уравн.

$\mathcal{E}: \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = t^2$ – хомог. уравн.

? Безкр. точки на $\mathcal{E}$?

$$\mathcal{E} \cap \Omega_1 : \left| \begin{array}{l} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = t^2 \\ t = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 0 \\ t = 0 \end{array} \right. \Rightarrow x = y = 0$$

$\Rightarrow \mathcal{E}$ няма (реални) безкр. точки

③ Парабола

$\pi: Y^2 = 4X$ – нехомог. ур.

$\pi: y^2 = 4xt$ – хомог. уравн.

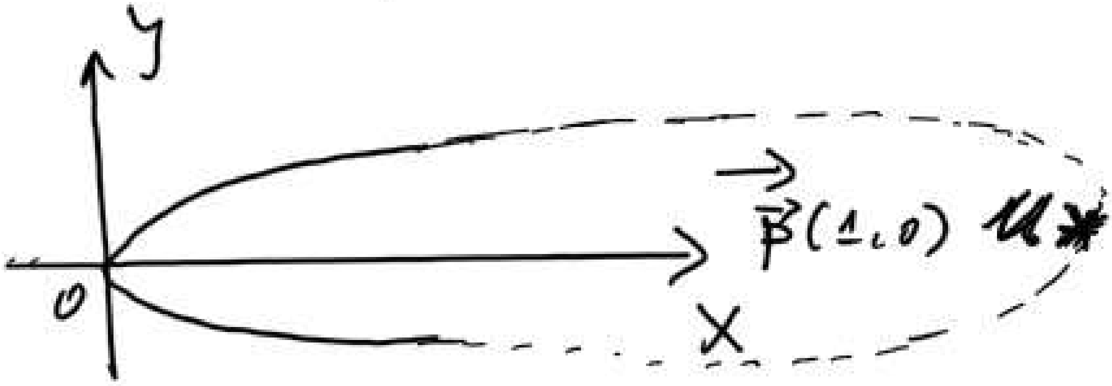
? Безкр. точки на π?

$$\pi \cap \Omega_1: \begin{cases} y^2 = 4xt \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x \neq 0$, Б.о.о. $x = 1$

$\Rightarrow \pi \cap \Omega_1 = U(1,0,0)$

$U = U_{\vec{p}}$, $\vec{p}(1,0)$



(II.) Безкрайни елементи и хомогенни координати в проективното

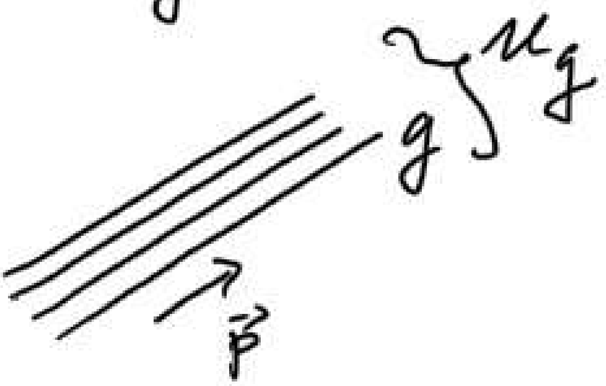
E_3 - Евклидовото пространство

Нека g - права в E_3

<u>Деф.:</u> <u>Безкрайна точка, определена от g</u>, наричаме множеството от всички прави

в пространството, които са успоредни или съвпадат с g. Бележим с $\mathcal{U}_g$

Ако $\vec{p} \neq \vec{0}$, $\vec{p} \parallel g$, тогава $\vec{p}$ също определя $\mathcal{U}_g$, и пишем $\mathcal{U}_{\vec{p}}$.

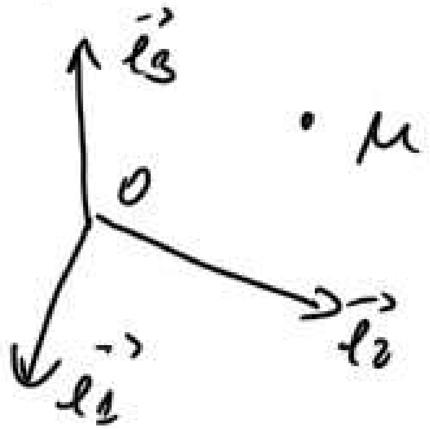


<u>Деф:</u> Множеството от всички безкрайни точки и безкрайни прави в пространството наричаме <u>безкрайна равнина</u> на пространството. Означаваме Ω_∞ (ω_∞).

<u>Деф:</u> Множеството от всички крайни и безкрайни точки, прави и равнини в пространството E_3 наричаме <u>разширено евклидово пространство</u>. Означаваме го с E_3^*.

С други думи, $E_3^* := E_3 \cup \Omega_e$.

Нека $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ – АКС в E_3



т. $M(X, Y, Z)_K$ – афинни (нехомогенни) координати на т. M.

__Деф:__ (а) Ако т. $M(X, Y, Z)_K$ е крайна точка, то __афинни хомогенни координати__ на т. M ще наричаме всяка наредена н-ка реални числа (x, y, z, t), $t \neq 0$, такива, че $\frac{x}{t} = X$, $\frac{y}{t} = Y$, $\frac{z}{t} = Z$.
Записваме т. $M(x, y, z, t)_K$.

б) Ако $U_{\vec{p}}$, $\vec{p} \neq \vec{0}$, $\vec{p}(x, y, z)_K$, то __афинни хомогенни координати__ на $U_{\vec{p}}$ ще наричаме наредената н-ка $(x, y, z, 0)$.
Записваме $U_{\vec{p}}(x, y, z, 0)_K$.

Забележка:

(1) Хомогенните координати на точките в E_3^* са определени с точност до ненулев множител, т.е. ако т. $M(x, y, z, t)$, то т. $M(\rho x, \rho y, \rho z, \rho t)$, $\rho \neq 0$,

(2) Наредената ч-ка $(0,0,0,0)$ не представлява хомогенни координати на никоя точка в E_3^*.

Правило: (1) хомогенни -> нехомогенни

$$т.\ M(x, y, z, t) \longrightarrow т.\ M\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right)$$

крайна точка

(2) нехомогенни -> хомогенни

$$т.\ M(X, Y, Z) \longrightarrow т.\ M(X, Y, Z, 1)$$

крайна точка

$$[\,т.\ M(\rho X, \rho Y, \rho Z, \rho),\ \rho \neq 0\,]$$

Примери: т. $P(4,2,1)$ – нехом. коорд.

т. $P(4,2,1,1)$
т. $P(8,4,2,2)$
т. $P(800,400,200,200)$

} хом. коорд.

- - - - . . . .

Уравнения на права и равнина в хомогенни координати

K – АКС в E_3

$\alpha: ax + by + cz + d = 0$

нехомог. уравнение на α.

$x \to \frac{x}{t}, \quad y \to \frac{y}{t}, \quad z \to \frac{z}{t}$

$$\boxed{\alpha: ax + by + cz + dt = 0}$$

хомог. уравнение

$\alpha[a, b, c, d]$ – координати на α

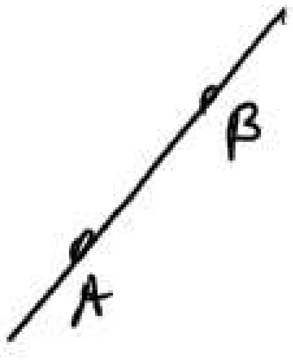
$\Omega_\infty[0,0,0,1]$

$\Omega_2: t=0$, $\Omega_2: 0.x+0.y+0.z+1.t=0$

т. $M(x,y,z,t) \longleftrightarrow$ т. $M(x_1,x_2,x_3,x_4)$

еквивалентни означения на афинни хомог. координати

$g: \begin{cases} 2 \text{ т. } A \\ 2 \text{ т. } B \end{cases}$ ($A \neq B$, възможно е A или B да бъде безкрайна точка)



$\left.\begin{matrix} \text{т. } A(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ \text{т. } B(y_1, y_2, y_3, y_4) \end{matrix}\right\}$ хомог. коорд.

$$g: \begin{cases} x = \lambda . x_1 + \mu . y_1 \\ y = \lambda . x_2 + \mu . y_2 \\ z = \lambda . x_3 + \mu . y_3 \\ t = \lambda . x_4 + \mu . y_4 \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \neq (0,0)$$

$\underbrace{\quad}_{M}$

скаларни параметрични уравнения на правата g в хомогенни координати

$$\boxed{g: M = \lambda . A + \mu . B, \ (\lambda, \mu) \neq (0,0)} \quad (14.)$$

Забележка: Ако $S: F(X, Y, Z) = 0$ е повърхнина в E_3^* (в нехомог. координати)

нехомог. уравнение

то $\boxed{S: F\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right) = 0}$ – хомог. уравнение

Пример 1 $S: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{1} = 1$

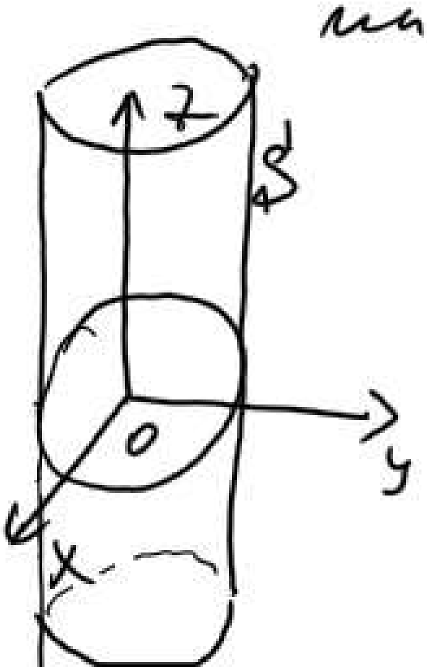
нехомог. уравн.

$S: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{1} = t^2$

хомог. уравнение

Пример 2! $S: x^2 + y^2 - 1 = 0$ (E_3

цилиндър с образуващи $\parallel$ на Oz



$S \cap \Omega_2 = ?$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - t^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = y = 0 \\ \cancel{z} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow z \neq 0 \Rightarrow$

Б.о.о. $z = 1 \Rightarrow S \cap \Omega_2 = \mathcal{U}(0,0,1,0)$

$= \mathcal{U}_{\vec{p}}\,,\ \vec{p}(0,0,1)$