

ИЗПИТ

по ДИС1 част, специалност "Компютърни науки"

27 август 2023г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Нека A е ограничено непразно множество от реални числа. Дайте дефиниция на $\sup A$ и $\inf A$. Какво означава, че $c \in \mathbb{R}$ не е инфимум на A ? Нека M и N са такива непразни множества от реални числа, че за всяко x от M и за всяко y от N е изпълнено неравенството $x \leq y$. Докажете, че съществува такова реално число r , че да са в сила неравенствата $x \leq r \leq y$ за всяко $x \in M$ и за всяко $y \in N$.

2. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от реални числа и $a \in \mathbb{R}$. Какво означава тази редица да клони към a ? Какво означава a да е точка на съгъстяване на тази редица? Какво означава, че "редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ няма точки на съгъстяване"? Формулирайте и докажете Теоремата на Болцано-Вайерщрас (принцип за компактност).

3. Дайте дефиниция на $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 7$ във формата на Хайне и във формата на Коши, където $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$. Какво трябва да предположите за D , за да е смислена дадената дефиниция? Докажете, че ако $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 7$ в смисъл на Коши, то f клони към 7, когато аргументът клони към $-\infty$, в смисъл на Хайне.

4. Нека $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, където $D \subset \mathbb{R}$. Какво означава f да е непрекъсната в дадена точка? Какво означава f да е непрекъсната? Формулирайте и докажете Теоремата на Вайерщрас.

5. Напишете дефиницията за производна на функция в дадена точка. В кои точки от дефиниционния си интервал е диференцируема функцията $f(x) = |(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|$? Обосновете се.

6. Напишете формулата на Тейлър за $n+1$ пъти диференцируема функция f около точката a до n -тия член с остатък във формата на Лагранж. Пресметнете границата

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+12x} - \sqrt{1+8x}}{x^2}$$

като използвате бинома на Нютон (развитието в полином на Тейлър на $(1+x)^\alpha$).

7. Дайте дефиниция на изпъкнала функция.

(а) Формулирайте необходимо и достатъчно условие една диференцируема функция да е изпъкнала.

(б) Докажете неравенството

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

при положителни x, y, p, q и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.