ИЗПИТ

по ДИС1, специалност "Компютърни науки"
18 февруари 2016г.
Име:... Фак.номер:............

1. Дайте дефиниция на граница на редица от реални числа и на сходяща редица. Какво означава една редица да е разходяща? Докажете, че сходящите редици са ограничени.

2. Дайте дефиниция на $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = -\infty$ във формата на Коши и във формата на Хайне. Докажете, че ако $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = -\infty$ в смисъл на Коши, то $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = -\infty$ в смисъл на Хайне.

3. Нека f е реалнозначна функция, дефинирана в цялата реална права. Дайте дефиниция на "f е непрекъсната". Едно подмножество U на реалната права ще наричаме *отворено*, ако заедно със всяка своя точка съдържа отворен интервал с център тази точка (т.е. ако $x \in U$, то съществува $\varepsilon > 0$ такова, че $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset U$). Докажете, че ако f е непрекъсната и U е отворено, то $f^{-1}(U) := \{x \in \mathbb{R} : \ f(x) \in U\}$ е отворено.

4. Напишете дефиницията за диференцируемост на функция в дадена точка. Разгледайте функцията $f : (-1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, зададена с

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} + e^x & , \text{ ако } x \neq 0 \ ; \\ 2 & , \text{ ако } x = 0 \ . \end{cases}$$

Непрекъсната ли е тази функция? А диференцируема ли е? Ако да, колко е стойността на производната ѝ в нулата?

5. Формулирайте и докажете принципа за константност.

6. Дайте дефиниция на изпъкнала функция. Формулирайте неравенството на Йенсен. Докажете, че ако $n \in \mathbb{N}$ и x_i, $i = 1, \ldots, n$ са положителни числа с $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, то

$$\frac{1}{n} \leq \prod_{i=1}^{n} x_i^{x_i} := x_1^{x_1} \cdot x_2^{x_2} \cdot \cdots \cdot x_n^{x_n} \ .$$

7. Формулирайте и докажете достатъчно условие една n-кратно диференцируема функция да има екстремум в дадена точка.

8. Дайте дефиниция на сума на Риман за функцията $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (като дефинирате и подразбиване, представителни точки и диаметър на подразбиване). Какво означава сумите на Риман за дадена функция да имат граница? Докажете, че ако сумите на Риман за дадена функция имат граница, то функцията е ограничена.