

ИЗПИТ

по ДИС1, специалност "Компютърни науки"

6 февруари 2021г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Дайте дефиниция на "множество от реални числа, което е ограничено отгоре". Какво означава една редица от реални числа да дивергира към $+\infty$? Какво означава това да не е вярно? Докажете, че ако множеството от членовете на една редица от реални числа не е ограничено отгоре, то тя притежава подредица, която дивергира към $+\infty$.

2. Формулирайте и докажете необходимото и достатъчно условие на Коши за сходимост на редица.

3. Нека D е множество от реални числа и $+\infty$ е точка на съгъстяване на D . Какво означава това? Нека $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Дайте дефиниция на граница на f (границата е реално число), когато аргументът клони към $+\infty$, във формата на Хайне и във формата на Коши. Докажете, че ако тази граница съществува в смисъл на дефиницията на Хайне, то тя съществува и в смисъл на дефиницията на Коши, и има същата стойност.

4. Дайте дефиниция на непрекъснатост в точка. Намерете множеството от точки, в които е непрекъсната функцията

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

5. Напишете дефиницията за производна на функция в дадена точка. В кои точки от дефиниционния си интервал е диференцируема функцията $f(x) = |(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|$? Обосновете се.

6. Формулирайте и докажете Теоремата на Лагранж за крайните нараствания. Формулирайте и докажете Принципа за монотонност.

7. Формулирайте и докажете първата теорема на Лопитал (за граници от вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, когато аргументът клони към реално число).

8. Дайте дефиниция на изпъкнала функция.

(а) Формулирайте необходимо и достатъчно условие една диференцируема функция да е изпъкнала.

(б) Докажете неравенството

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

при положителни x, y, p, q и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.