4 зад D е мн-во от диференцируеми функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$D \times D \to D$, $(f,g) \to f+g$, $(f+g)(x) := f(x)+g(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall f,g \in D$

$\mathbb{R} \times D \to D$, $(\lambda, f) \to \lambda . f$, $(\lambda f)(x) := \lambda f(x), \forall x \in \mathbb{R} \; \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in D$

(i) Да се док че D е лин пр-во над $\mathbb{R}$

1. Комутативност при събирането

$\forall f, g \in D \; \forall x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$$

2. Асоциативност при събирането

$\forall f, g, h \in D \; \forall x \in \mathbb{R}$:

$$(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$$

3. Неутрален елемент спрямо събирането

$\forall f \in D \; \exists h$ така че $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) + h(x) = f(x) \quad (h(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R})$$

4. ~~Обратен~~ Противоположен елемент при събирането

$\forall f \in D \; \exists (-f) \mid \forall x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) + (-f(x)) = 0$$

5. Дистрибутивност при скаларно умножение.

Нека $f \in D$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, тогава:

$\forall f \; \alpha \beta$ е вярно: $(\alpha + \beta) f = \alpha f + \beta f$

6. Дистрибутивност на скалар умножен със сбор
Нека $\alpha \in \mathbb{R}$ $f, g \in D$, тогава
$$\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g$$

~~7. Дистрибутивност~~

Следователно от 1., 2., 3., 4., 5., 6.
D е линейно пространство над $\mathbb{R}$

(ii) $C = \{ f \in D \mid f(x) = f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \}$
$U = \{ f \in D \mid f(0) = 0 \}$

1) Нека $f, g \in C$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = f(y) + g(y) = (f+g)(y)$$
$$\Rightarrow (f+g) \in C$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha . f(x) = \alpha . f(y) = (\alpha f)(y)$$
$$\Rightarrow \alpha . f \in C$$

~~Следователно~~ От $(f+g), (\alpha f) \in C$, следва че C е подпространство на D

2) Нека $f, g \in U$ и $\alpha \in \mathbb{R}$

$f(0) = g(0) = 0$

$(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0+0 = 0$

$\Rightarrow f+g \in U$

$(\alpha f)(0) = \alpha . f(0) = \alpha . 0 = 0$

$\Rightarrow (\alpha f) \in U$

От $(f+g)$, $\alpha f \in U$, следва че

U е подпространство на D

3) Нека $f: U \cap C$

$f(0) = 0$ и $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Тази ф-я е $f(x) = 0 = \mathcal{O}(x)$.

$\mathcal{O}(x)$ е константна ф-ия и $\mathcal{O}(0) = 0$

От $U \cap C = \{\mathcal{O}\} \Rightarrow U$ и C са различни подпространства на D

Нека $f \in D$ $\quad (D = U + C)$

~~f(x) ∈ C~~ $f(x) = y$

$f_1 = f(0) \in C$

$f_2 = f(x) - f(0) \in U$

$f(x) = f_1 + f_2 = \underbrace{f(0)}_{C} + \underbrace{f(x) - f(0)}_{U} = f(x)$

$\Rightarrow D = U \oplus C$