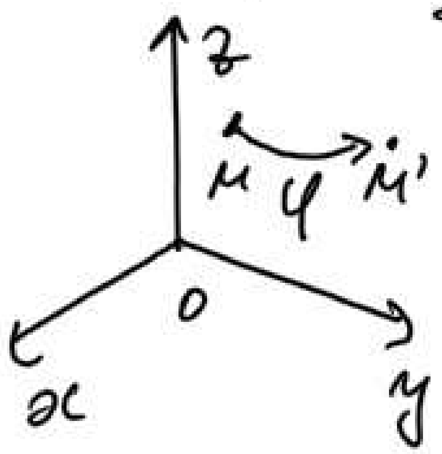
Класификация на еднаквостите в пространството

Работим в $\mathbb{E}_3$, при фиксирана ОКС $\underline{K = Oxyz}$

Деф: Еднаквост в пространството наричаме всяко изображение

$\varphi: E_3 \to E_3$, което запазва разстоянията между точките.



Теорема: Нека $\varphi: E_3 \to E_3$ е еднаквост в пространството, и т. $M(x,y,z)_K \xrightarrow{\varphi}$ т. $M'(x',y',z')_K$.

Тогава

$$\varphi: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + B \quad (1),$$

където A е ортогонална матрица ($\overset{def}{\Leftrightarrow} AA^t = E$) от тип 3×3, а B е матрица от тип 3×1 (матрица стълб). (Без д-во).

<u>Деф:</u> Ако $\det A = 1$, тогава еднаквостта $\mathcal{U}$ се нарича <u>движение</u>.

Ако $\det A = -1$, тогава еднаквостта $\mathcal{U}$ се нарича <u>отражение</u>.

<u>Забележка:</u> Ако A е ортогонална матрица, тогава $\det A = 1$ или $\det A = -1$. Действително, от $AA^t = E \Rightarrow \det(AA^t) = 1 \Leftrightarrow \det A \det A^t = 1 \Leftrightarrow (\det A)^2 = 1$

$$\det A = \det A^t$$

$\Leftrightarrow$ $\underline{\det A = \pm 1}$.

Класификация

(I) $\det A = 1$ (движения)

1) **идентитет:** $\varphi = id$, $\varphi(M) = M$

т. $M(x,y,z) \xrightarrow{\varphi}$ т. $M(x,y,z)$

$$\varphi: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = E_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = E_3, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Неподвижни точки: $\forall$ точка

неподвижни прави: $\forall$ права

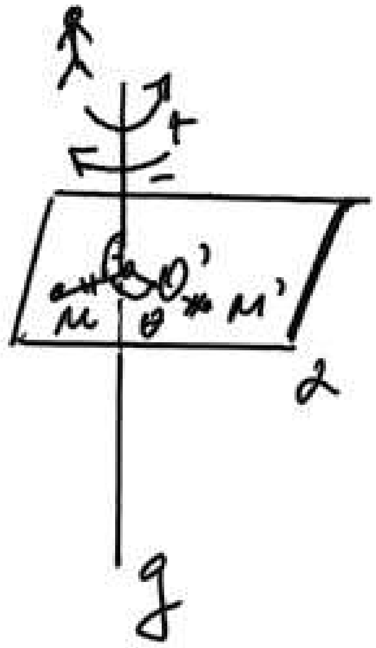
неподвижни равнини: $\forall$ равнина

2) **ротация около ос** $\varphi = \rho_g(\theta)$

g – права – ос на ротация

$\theta \in (0, 2\pi)$ или $\theta \in (0, \pi)$ или $\theta \in (-\pi, 0)$

– ъгъл на ротация



$\alpha: \begin{cases} \ni M \\ \perp g \end{cases}$

т. $O' = \alpha \cap g$

$\underline{\varphi(M) = M'}$, където т. $M' \in \alpha$, $|O'M| = |O'M'|$, $\measuredangle MO'M' = \theta$

Ако $g \equiv Oz$, тогава

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ако $g \equiv Ox$, тогава

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ако $g \equiv Oy$, тогава

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Неподвижни точки: $\forall$ т. $M \in g$

Неподвижни прави: $\begin{cases} g, & \theta \neq \pi \\ g \text{ и } \forall h \begin{cases} \perp g \\ \cap g \neq \emptyset, \end{cases} & \text{ако } \theta = \pi \end{cases}$

Неподвижни равнини:

$$\begin{cases} \forall \alpha \perp g, \text{ ако } \theta \neq \pi \\ \forall \alpha \perp g \text{ и } \forall \beta \supset g, \text{ ако } \theta = \pi \end{cases}$$

3) Транслация: $\varphi = \tau_{\vec{p}}$, $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ – вектор на транслацията

$$\varphi(M) = M'$$

$M \xrightarrow{\vec{p}} M'$ $\quad$ т. $M(x, y, z) \xrightarrow{\tau_{\vec{p}}}$ т. $M'(x', y', z')$

$$x' = x + p_1, \quad y' = y + p_2, \quad z' = z + p_3$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = E_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A = E_3, \quad B = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

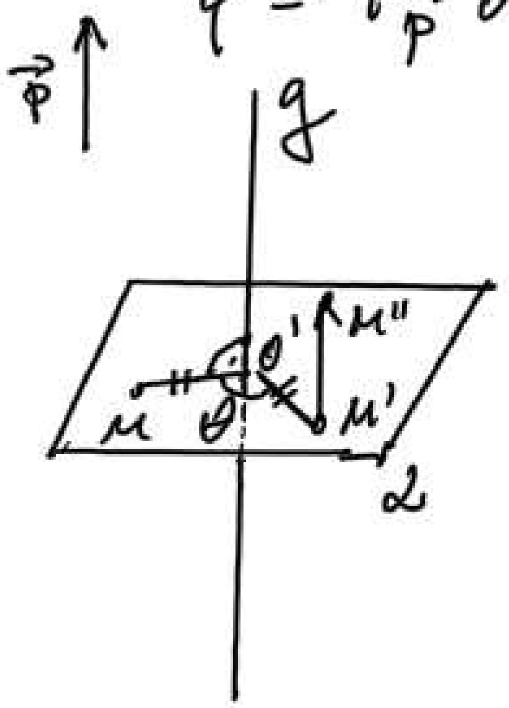
Неподвижни точки: няма

Неподвижни прави: $\forall g \parallel \vec{p}$

Неподвижни равнини: $\forall \alpha \parallel \vec{p}$

4) Винтово движение:

$$\varphi = T_{\vec{p}} \circ \rho_g(\theta) = \rho_g(\theta) \circ T_{\vec{p}}, \quad \vec{p} \parallel g$$



$$\text{т. } M \xrightarrow{\rho_g(\theta)} \text{т. } M' \xrightarrow{T_{\vec{p}}} M''$$

$$\varphi(M) = M''$$

Ако $g \equiv Oz$, $\vec{p}(0,0,p_3)$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Неподвижни точки: няма

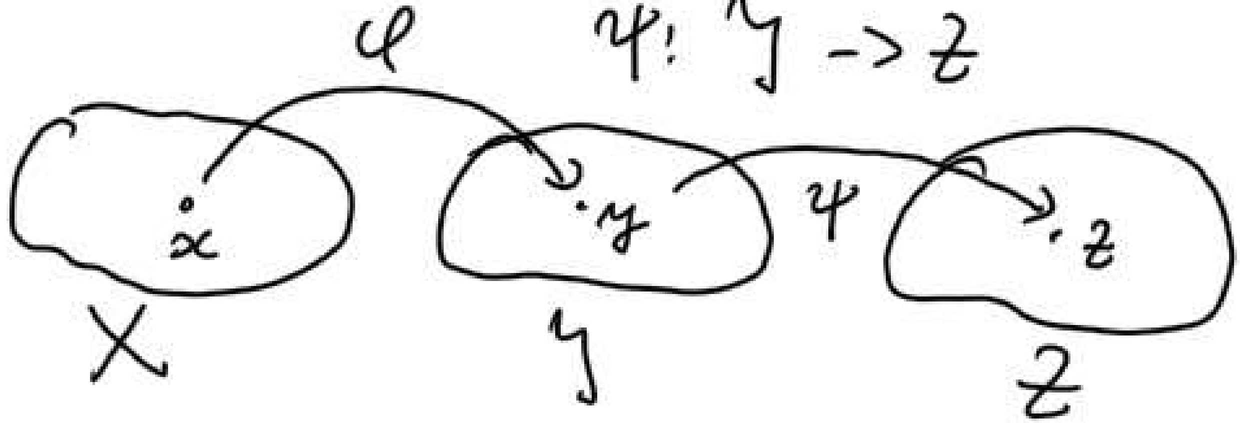
Неподвижни прави: g

Неподвижни равнини:

$$\begin{cases} \text{няма, ако } \theta \neq \pi \\ \forall \beta \supset g, \text{ ако } \theta = \pi \end{cases}$$

Забележка: $\varphi: X \to Y$

$\psi: Y \to Z$



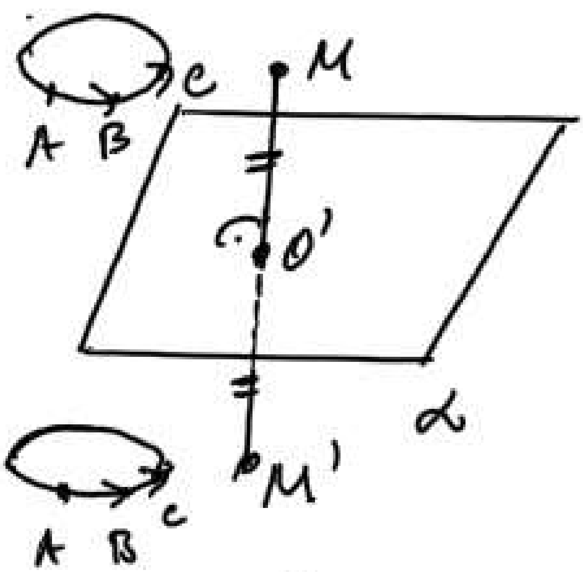
$\psi \circ \varphi : X \to Z$

Ако $x \in X$, $\varphi(x) = y$, $\psi(y) = z$

$(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) = \psi(y) = z.$

II $\det A = -1$ ([illegible])

1) симетрія відносно площини: $\varphi = \sigma_\alpha$



$\varphi(M) = M'$

α – симетральна площина до (MM')

т. $O' = MM' \cap \alpha$

Якщо $\alpha \equiv Oxy$, то

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{т. } M(x, y, z) \xrightarrow{\sigma_\alpha} \text{т. } M'(x, y, -z)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

Неподвижни точки: $\forall$ т. $M \in \alpha$

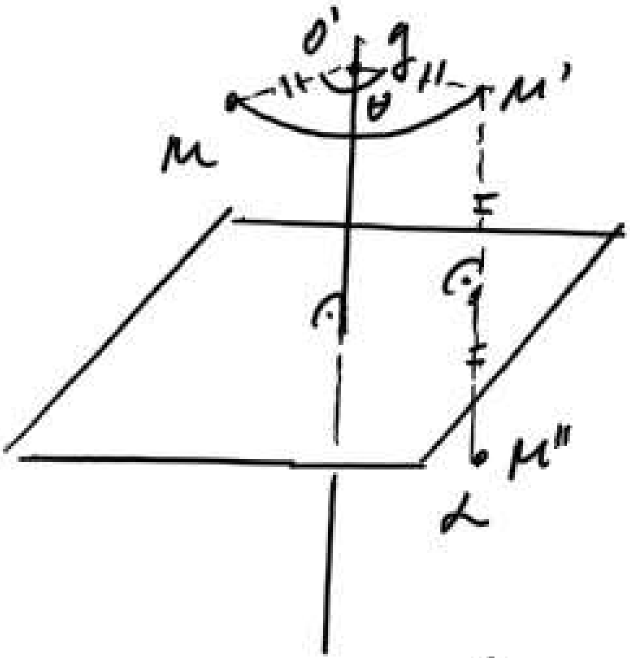
Неподвижни прави: $\forall g \subset \alpha$, $\forall h \perp \alpha$

Неподвижни равнини: α, $\forall \beta \perp \alpha$

2) Въртящо отражение:

(симетрия + ротация)

$$\varphi = \sigma_\alpha \circ \rho_g(\theta) = \rho_g(\theta) \circ \sigma_\alpha, \quad g \perp \alpha$$



$$\text{т. } M \xrightarrow{\rho_g(\theta)} \text{т. } M' \xrightarrow{\sigma_\alpha} \text{т. } M''$$

$$\text{т. } M'' = \varphi(\text{т. } M)$$

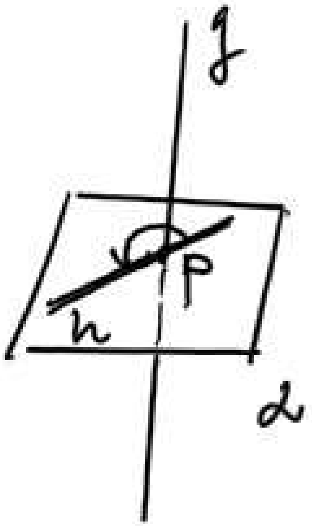
Ако $\begin{cases} \alpha \equiv Oxy \\ g \equiv Oz \end{cases}$,

тогава

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Неподвижни точки: т. $P = \alpha \cap g$

Неподвижни прави:



$$\begin{cases} g, \text{ ако } \theta \neq \pi \\ g \text{ и } \forall h \begin{cases} \subset \alpha \\ \ni \text{т. } P = \alpha \cap g \end{cases}, \\ \quad \text{ако } \theta = \pi \end{cases}$$

Неподвижни равнини:

$$\begin{cases} \alpha, \text{ ако } \theta \neq \pi \\ \alpha \text{ и } \forall \beta \supset g, \text{ ако } \theta = \pi \end{cases}$$

(1) "Геометрия", Адриан Борисов и Атанас Лангов

② "Ръководство по Геометрия", Милен Христов и Таня Йончева

③ "Ръководство за решаване на задачи по Геометрия за информатици", Манчо Манев, ...

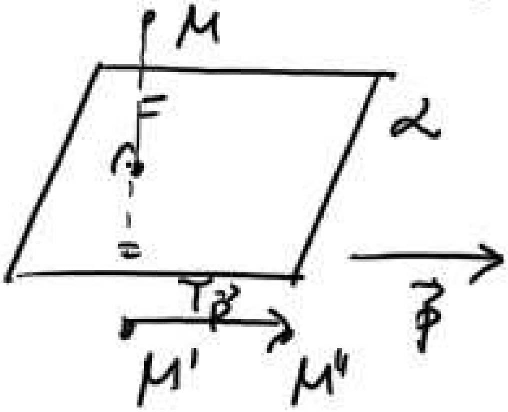
④ "Mathematical Elements for Computer Graphics", D. Rogers & J. Adams

---

3) <u>Плъзгащо огледално</u>

(симетрия + транслация)

$\varphi = \sigma_\alpha \circ \tau_{\vec{p}} = \tau_{\vec{p}} \circ \sigma_\alpha, \ \vec{p} \parallel \alpha$



$\text{т.}M \xrightarrow{\sigma_\alpha} \text{т.}M' \xrightarrow{\tau_{\vec{p}}} \text{т.}M''$

$\text{т.}M'' = \varphi(\text{т.}M)$

Ако $\alpha = Oxy$, то $\vec{p}(p_1, p_2, 0)$,

и $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Неподвижни точки: няма

Неподвижни прави: $\forall g \begin{cases} \subset \alpha \\ \parallel \vec{p} \end{cases}$

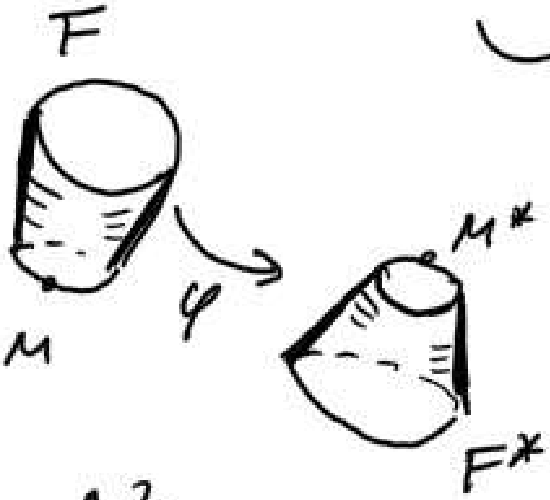
Неподвижни равнини: α,

и $\forall \beta : \begin{cases} \perp \alpha \\ \parallel \vec{p} \end{cases}$

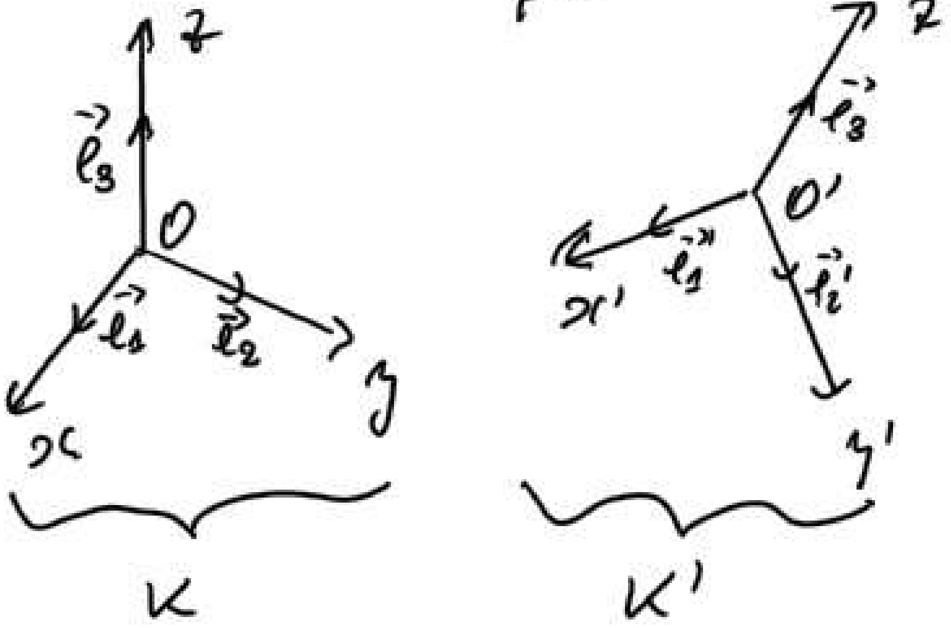
Връзка между матриците на дадена еднаквост при смяна на ОКС

E_3 $\quad$ φ - еднаквост в E_3

$$\underbrace{K = Oxyz,\ K' = O'x'y'z'}_{\text{ОКС-ми}}$$



$\varphi(M) = M^*$



X - вектор-стълб от координатите на т. M относно K, т.е. $M(X)_K$, а X^* - вектор-стълб от координатите на M^* относно K, т.е. $M^*(X^*)_K$

$\varphi: X^* = AX + B$ (1)

A – 3×3 ортогонална матрица

B – 3×1 матрица

(1) – аналитично представяне на еднаквостта φ относно K

$M(X')_{K'}$, $M^*(X^{*'})_{K'}$

$\varphi: X^{*'} = A'X' + B'$ (2)

A' – 3×3 ортогонална матрица

B' – 3×1 матрица

(2) – аналитично представяне на еднаквостта φ относно K'

Ако $\vec{OO'} = \vec{S}$, $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ и $\{\vec{e_1'}, \vec{e_2'}, \vec{e_3'}\}$ – съответните ортонормирани 3-ки базисни вектори на K и K'

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1{}' \\ \vec{e}_2{}' \\ \vec{e}_3{}' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}$$

T - матрица на прехода от базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ към базиса $\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'\}$, T - ортогонална м-ца

$\vec{S}$ - вектор на транслацията при смяната $K \to K'$

Възниква въпросът: като знаем матриците A' и B' на еднаквостта φ в "новата" ОКС K', както и матрицата T и координатите спрямо K на $\vec{S}$, как да се намерят матриците A и B на φ в "старата" ОКС K?

Имаме, че $X' = T(X - \vec{S})$ (3)

$$(X^*)' = T(X^* - \vec{S}) \quad (4)$$

Като заместим (3) и (4) в (2), получаваме:

$$T^{-1} \cdot \backslash \; T(X^* - \vec{S}) = A'T(X - \vec{S}) + B' \iff$$

$$\iff X^* - \vec{S} = T^{-1}A'T(X - \vec{S}) + T^{-1}B' \iff$$

$$\iff (5)\; X^* = (T^{-1}A'T)X - (T^{-1}A'T)\vec{S} + T^{-1}B' + \vec{S}$$

Сравняваме (1) и (5), и получаваме

$$\boxed{A = T^{-1}A'T = T^{t}A'T}$$

$$\boxed{\begin{aligned} B &= -(T^{-1}A'T)\vec{S} + T^{-1}B' + \vec{S} = \\ &= -A\vec{S} + T^{t}B' + \vec{S} \end{aligned}}$$