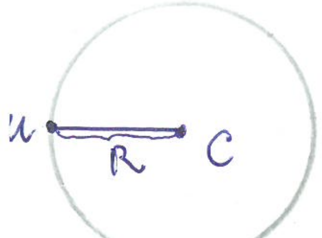
Окръжност и сфера

E^2 - Евклидовата равнина

Деф: Нека т. $C \in E^2$, а R е положително число. Множеството от всички точки M в E^2, които се намират на разстояние R от т. C, се нарича окръжност с център точката C и радиус R.

Означение: $K(C;R)$ (например!)

E^2



$K(C;R)$

Нека в E^2 е дадена ОКС $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2$, относно която т. $C(a,b)$, а т. $M(x,y)$. Условието т. $M \in K(C;R)$ се задава с

$$|CM| = R \iff |\vec{CM}| = R,$$

или, в координатна форма, отчитайки, че $\vec{CM}(x-a, y-b)$, имаме:

$$\boxed{(1)\quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2}$$

Уравнението (1) се нарича нормално уравнение на $K(C;R)$. В случая, когато т. $C \equiv$ т. O, т.е. $C(0,0)$, уравнението (1) има вида

$$\boxed{(2)\quad x^2 + y^2 = R^2}$$

Уравнението (2) се нарича централно уравнение на $K(O;R)$.

Единична окръжност наричаме окръжност с радиус 1.

Следната теорема ни дава характеризация кога едно уравнение е уравнение на окръжност:

Теорема: Уравнението (3) $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ е уравнение на окръжност точно тогава, когато е изпълнено (4) $\alpha^2 + \beta^2 - 4\gamma > 0$.

Доказателство: ($\Rightarrow$) Нека (3) е уравнение на окръжност $k(C;R)$, $C(a,b)$. Видяхме, че $k(C;R)$ има уравнение (1), или като разкрием, имаме

$$(5)\quad x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0.$$

Тъй като (3) и (5) са уравнения на една и съща окръжност, ~~то след почленното~~ изваждане на (3) и (5) получаваме, че всяка точка $M(x,y)\in k(C;R)$ удовлетворява уравнението

$$(\alpha+2a)x+(\beta+2b)y+\gamma-a^2-b^2+R^2=0$$

Ако $\alpha+2a\neq 0$ или $\beta+2b\neq 0$, то горното уравнение е уравнение на права $\Rightarrow$ невъзможно, т.е. трябва $\alpha=-2a$, $\beta=-2b$, и като следствие $\gamma=a^2+b^2-R^2$. Тогава имаме $\alpha^2+\beta^2-4\gamma=\cancel{4a^2}+\cancel{4b^2}-\cancel{4a^2}-\cancel{4b^2}+4R^2=$ $=4R^2>0$.

($\Leftarrow$) Нека е дадено уравнението (3) при условието (4). Ще докажем, че това е уравнение на някаква окръжност. Действително, нека да разгледаме окръжността $k(C;R)$, където (6) $C\left(-\frac{\alpha}{2},-\frac{\beta}{2}\right)$, а (6') $R=\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2-4\gamma}$. Тогава имаме, че $k(C;R)$ е с уравнение $\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\beta}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(\alpha^2+\beta^2-4\gamma)$,

т.е. $k(C;R):\ x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$, което е точно (3). ■

1 зад. Една окръжност c има уравнение(*)

$$(1)\quad x^2+y^2+2x-y+1=0.$$

Да се намерят координатите на центъра C и дължината на радиуса на c.

(*) За отделните задачи, както и за отделните части на теоретичния материал, ще използваме отделна номерация на формулите.

Решение: Преобразуваме (1):

$$x^2+y^2+2x-y+1=0 \iff (x+1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0$$

$$\iff (x+1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$ което е уравнение на окръжност с център $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ и радиус $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$

$C\left(-1,\frac{1}{2}\right)$, $r=\frac{1}{2}$; Може да използваме направо и формулите (6), (6') от стр. 2.

2 зад. Да се намери окръжност, която минава през точките $L(0,1)$, $M(2,2)$ и $N(2,-3)$.

Решение: Нека (1) $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$ е уравнението на търсената окръжност. Изразяваме аналитично условието точките L, M и N да лежат на окръжността, т.е. координатите им да удовлетворяват (1), при което получаваме линейна система относно α, β и γ:

$$\begin{cases} 1+\beta+\gamma=0 \\ 4+4+2\alpha+2\beta+\gamma=0 \\ 4+9+2\alpha-3\beta+\gamma=0 \end{cases} \sim \begin{cases} \beta+\gamma=-1 \\ 2\alpha+2\beta+\gamma=-8 \;/.(-1) \\ 2\alpha-3\beta+\gamma=-13 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} \beta+\gamma=-1 \\ 2\alpha+2\beta+\gamma=-8 \\ -5\beta=-5 \end{cases} \sim \begin{cases} \gamma=-2 \\ \alpha=-4 \\ \beta=1 \end{cases}$$, т.е. уравнението на

търсената окръжност е $\boxed{x^2+y^2-4x+y-2=0}$

3 зад. Дадени са: точка $A\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ и права $l: x+y-1=0$. Нека $L\left(\frac{1}{2},y\right)$ е точка от l. Да се получи уравнението на окръжността, която минава през A и се допира до l в точката L.

Решение: От т. $L \in \ell \Rightarrow \frac{1}{2} + y - 1 = 0$, т.е. $y = \frac{1}{2}$ и т. $L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Нека $k: x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ е търсената окръжност. От т. $A \in k \Rightarrow \frac{1}{16} + \frac{7}{16} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}\beta + \gamma = 0$,

т.е. $\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}\beta + \gamma = 0$, или (1) $\alpha + \sqrt{7}\beta + 4\gamma = -2$

Изразяваме условието k и ℓ да имат единствена точка L аналитично: системата

$$(2)\ \left|\begin{array}{ll} x + y - 1 = 0 & (I) \\ x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 & (II) \end{array}\right.$$ трябва да има единствено

решение (относно (x, y)), именно $(1/2, 1/2)$.

От (I) имаме $x = 1 - y$, което заместваме в (II):

$(1-y)^2 + y^2 + \alpha(1-y) + \beta y + \gamma = 0 \Leftrightarrow 1 - 2y + y^2 + y^2 + \alpha - \alpha y + \beta y + \gamma = 0$

$\Leftrightarrow 2y^2 + (\beta - \alpha - 2)y + \gamma + \alpha + 1 = 0$, и значи (2) е еквивалентна на

$$(3)\ \left|\begin{array}{l} x + y - 1 = 0 \\ 2y^2 + (\beta - \alpha - 2)y + \gamma + \alpha + 1 = 0 \end{array}\right.$$. За да има (3)

единствено решение $(1/2, 1/2)$, необходимо и достатъчно е второто ѝ уравнение да има единствено решение $y = 1/2$, т.е.: $\mathcal{D} = (\beta - \alpha - 2)^2 - 8(\alpha + \gamma + 1) = 0$ (4)

и $2 \cdot \frac{1}{4} + (\beta - \alpha - 2) \cdot \frac{1}{2} + \gamma + \alpha + 1 = 0$ (5)

Уравненията (1), (4) и (5) ни образуват системата

$$\left|\begin{array}{l} \alpha + \sqrt{7}\beta + 4\gamma = -2 \\ (\beta - \alpha)^2 - 4(\beta - \alpha) + 4 - 8\alpha - 8\gamma - 8 = 0 \\ \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \gamma + \frac{1}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

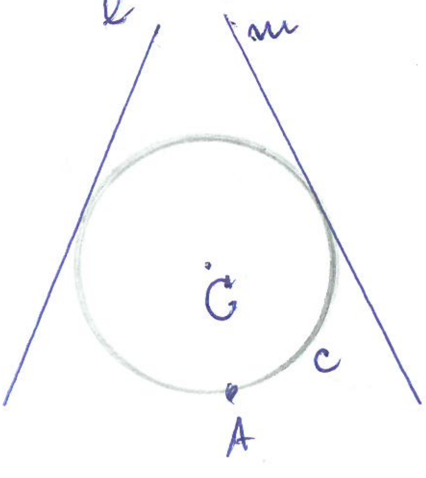
$$\Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} \alpha+\sqrt{7}\beta+4\gamma=-2 \\ (\beta-\alpha)^2-4(\alpha+\beta)-8\gamma-4=0 \\ \alpha+\beta+2\gamma+1=0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} \alpha+\sqrt{7}\beta+4\gamma=-2 \\ (\beta-\alpha)^2-4(-1-2\gamma)-8\gamma-4=0 \\ \alpha+\beta=-1-2\gamma \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} \alpha+\sqrt{7}\alpha+4\gamma=-2 \\ \alpha=\beta \\ 2\alpha+2\gamma=-1 \;/\cdot(-2) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} (1+\sqrt{7}-4)\alpha=0 \\ \alpha=\beta \\ 2\alpha+2\gamma=-1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} \alpha=0 \\ \beta=0 \\ \gamma=-\frac{1}{2} \end{array}\right.,$$

и значи търсената окръжност има уравнение

$k: x^2+y^2-\frac{1}{2}=0$, или $\boxed{k: 2x^2+2y^2-1=0}$

4 зад. Да се намери окръжност c, която се допира до правите $l: x+3y-3=0$ и $m: x-3y+2=0$ и минава през точката $A(2,2)$. Да се намери центърът C и радиусът r на c.



Решение: Нека търсената окръжност има уравнение $c: x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$.

От условието т. $A\in c \Rightarrow$

$4+4+2\alpha+2\beta+\gamma=0$, т.е.

$$\boxed{(1)\quad 2\alpha+2\beta+\gamma=-8}$$

Условието l и c да имат една обща точка на аналитичен език означаваме системата

$$(2)\left|\begin{array}{l} x+3y-3=0 \\ x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0 \end{array}\right.$$ трябва да има единствено решение.

Изразяваме $x=3-3y$ от първото уравнение на (2) и го заместваме във второто уравнение на (2).

Така имаме: $9(1-y)^2+y^2+3\alpha(1-y)+\beta y+\gamma=0$,

т.е. $$\boxed{10y^2+(-3\alpha+\beta-18)y+3\alpha+\gamma+9=0 \quad (3)}$$

Така, условието системата (2) да има единствено решение е еквивалентно с условието (3) да има единствено решение, т.е. $D=(-3\alpha+\beta-18)^2-$
$-40(3\alpha+\gamma+9)=0 \iff 9\alpha^2-6\alpha\beta+\beta^2-36(-3\alpha+\beta)+$
$+18^2-120\alpha-40\gamma-360=0 \iff 9\alpha^2+\beta^2-6\alpha\beta-12\alpha-36\beta$
$-40\gamma-36=0$, т.е.

$$\boxed{(4)\ (3\alpha-\beta)^2-12(\alpha+3\beta)-40\gamma-36=0}$$

Аналогично изразяваме условието m и c да имат една обща точка: системата

$$(5)\ \begin{cases} x-3y+2=0 \\ x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0 \end{cases}$$

трябва да има единствено решение. Заместваме $x=3y-2$ във второто уравнение на (5), при което имаме:

$$(3y-2)^2+y^2+\alpha(3y-2)+\beta y+\gamma=0 \iff$$

$$\boxed{10y^2+(3\alpha+\beta-12)y-2\alpha+\gamma+4=0 \quad (6)}$$

Условието (5) да има единствено решение е еквивалентно на условието (6) да има единствено решение, т.е. $D=(3\alpha+\beta-12)^2-40(-2\alpha+\gamma+4)=0 \iff$

$\iff 9\alpha^2+6\alpha\beta+\beta^2-24(3\alpha+\beta)+144+80\alpha-40\gamma-160=0$

$\iff 9\alpha^2+\beta^2+6\alpha\beta+8\alpha-24\beta-40\gamma-16=0$, т.е.

$$\boxed{(6)\ (3\alpha+\beta)^2+8(\alpha-3\beta)-40\gamma-16=0}$$

Уравненията (1), (4) и (6) ни образуват система, която ще ни даде търсените α, β и γ...

Заместваме $\gamma = -8 - 2\alpha - 2\beta$ от (1) в (4) и (6), при което свеждаме до система от две уравнения с две неизвестни α и β:

$$\begin{cases} (3\alpha-\beta)^2 - 12(\alpha+3\beta) + 320 + 80\alpha + 80\beta - 36 = 0 \\ (3\alpha+\beta)^2 + 8(\alpha-3\beta) + 320 + 80\alpha + 80\beta - 16 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3\alpha-\beta)^2 + 68\alpha + 44\beta + 284 = 0 \quad / \cdot(-1) \\ (3\alpha+\beta)^2 + 88\alpha + 56\beta + 304 = 0 \quad + \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3\alpha-\beta)^2 + 68\alpha + 44\beta + 284 = 0 \\ 12\alpha\beta + 20\alpha + 12\beta + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3\alpha-\beta)^2 + 68\alpha + 44\beta + 284 = 0 \\ (\alpha+1)(3\beta+5) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Второто уравнение на (7) ни дава, че $\alpha = -1$ или $\beta = -\frac{5}{3}$. Разглеждаме двата случая:

I сл. $\boxed{\alpha = -1}$ Заместваме в първото уравнение на (7), при което получаваме $(3+\beta)^2 - 68 + 44\beta + 284 = 0$

$\Leftrightarrow \beta^2 + 50\beta + 225 = 0$, $D = 625 - 225 = 400$

$$\beta_1 = \frac{-25+20}{1} = -5, \quad \beta_2 = \frac{-25-20}{1} = -45$$

Следователно този случай ни дава решенията

$$\begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \beta_1 = -5 \\ \gamma_1 \underset{(1)}{=} 4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \alpha_2 = -1 \\ \beta_2 = -45 \\ \gamma_2 \underset{(1)}{=} 84 \end{cases}$$

и търсената окръжност е съответно

$C_1: x^2 + y^2 - x - 5y + 4 = 0$ или

$C_2: x^2 + y^2 - x - 45y + 84 = 0$

Да намерим сега центровете и радиусите на C_1 и C_2. За центъра C_1 на c_1 имаме

$C_1\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$, а за радиуса r_1 на c_1 получаваме

$$r_1 = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+(-5)^2-4.4} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

За центъра C_2 на c_2 имаме $C_2\left(\frac{1}{2}, \frac{45}{2}\right)$, а

за радиуса r_2 на c_2 имаме

$$r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+(-45)^2-4.84} = \frac{1}{2}\sqrt{2026-4.84} = \frac{1}{2}\sqrt{1690} = \frac{13}{2}\sqrt{10}$$

II сл. $\boxed{\beta = -\frac{5}{3}}$ Заместваме в първото уравнение

на (7), при което имаме:

$$\left(3\alpha+\frac{5}{3}\right)^2+68\alpha-44\cdot\frac{5}{3}+284=0 \iff 9\alpha^2+10\alpha+\frac{25}{9}+68\alpha$$

$$-\frac{220}{3}+284=0 \iff 9\alpha^2+78\alpha+\frac{25-660+2556}{9}=0$$

$$\iff 9\alpha^2+78\alpha+\frac{1921}{9}=0, \quad D = 39^2-\cancel{9}\cdot\frac{1921}{\cancel{9}} = 1521-1921=$$

$= -400 < 0 \Rightarrow$ няма реални корени и следователно този случай го изключваме.

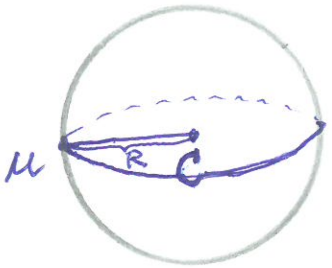
Продължаваме със сфера, която е двумерен аналог на окръжността.

E^3 – Евклидовото пространство

Деф: Нека т. $C \in E^3$, а R е положително число. Множеството от всички точки M в E^3, които се намират на разстояние R от т. C, се нарича **сфера** с център точката C и радиус R.

Означение: $\mathcal{S}(C; R)$ (например!)

E^3



<u>Забележка:</u> (*) 1-мерна сфера в E^2 = <u>окръжност</u>

(*) 2-мерна сфера в E^3 = <u>сфера</u>

(понятието от училище и тук)

(*) n-мерна сфера в E^{n+1} — дефинира се аналогично на горните две понятия.

$\sigma(C;R)$ Нека се върнем в E^3, където предполагаме, че е дадена ОКС $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, относно която т. $C(a,b,c)$, а т. $M(x,y,z)$. Разглежданията тук са напълно аналогични с разглежданията при окръжността. Разликата е, че се добавя още една координата. Така, имаме, че т. $M(x,y,z) \in \sigma(C;R)$ точно тогава, когато

$$\boxed{(1)\quad (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2}$$

Уравнението (1) се нарича <u>нормално уравнение</u> на $\sigma(C;R)$. В случая, когато т. $C \equiv$ т. O, т.е. т. $C(0,0,0)$, уравнението (1) добива вида

$$\boxed{(2)\quad x^2+y^2+z^2=R^2}$$

Уравнението (2) се нарича <u>централно уравнение</u> на $\sigma(O;R)$.

<u>Единична сфера</u> наричаме сфера с радиус <u>1</u>. Следващата теорема дава характеризация кога едно уравнение е уравнение на сфера.

<u>Теорема:</u> Уравнението (3) $x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$ е уравнение на сфера точно тогава, когато е изпълнено (4) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-4\delta>0$.

Доказателство: То е напълно аналогично на доказателството на съответната теорема за окръжност, но тук ще го скицираме за пълнота.

($\Rightarrow$) Ако (3) е уравнение на сферата $\mathcal{S}(C;R)$, където $C(a,b,c)$, то видяхме, че $\mathcal{S}(C;R)$ има уравнение (1), или, еквивалентно,

$$(5)\quad x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2-R^2=0$$

От (3) и (5) получаваме, че $\forall$ т. $M(x,y,z)\in\mathcal{S}(C;R)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\quad (\alpha+2a)x+(\beta+2b)y+(\gamma+2c)z+\delta-a^2-b^2-c^2+R^2=0$$

Ако $\alpha+2a\neq 0$ или $\beta+2b\neq 0$ или $\gamma+2c\neq 0$, то горното уравнение е уравнение на равнина, което е невъзможно за всяка точка от $\mathcal{S}(C;R)\Rightarrow$ $\alpha=-2a$, $\beta=-2b$, $\gamma=-2c$, $\delta=a^2+b^2+c^2-R^2$.

Тогава очевидно $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-4\delta=4R^2>0$.

($\Leftarrow$) Ако е дадено уравнението (3) при условието (4), разглеждаме сферата $\mathcal{S}(C;R)$, където

$$(6)\quad C\left(-\frac{\alpha}{2},-\frac{\beta}{2},-\frac{\gamma}{2}\right),\ \text{а}\ R=\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-4\delta}.$$

Лесно се вижда, че $\mathcal{S}(C;R)$ има уравнение (3). ■

5 зад. Да се намерят координатите на центъра и дължината на радиуса на сферите, представени с уравненията:

(а) $S_1: x^2+y^2+z^2-4x-6y-8z+28=0$;

(б) $S_2: x^2+y^2+z^2-2x=0$;

(в) $S_3: x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+2=0$.

Решение: Може да използваме направо формулите (6) от тази страница! Може и чрез преобразувания:

(а) $x^2+y^2+z^2-4x-6y-8z+28 = x^2-4x+4+y^2-6y+9+z^2-8z+16-1 \Rightarrow$

$S_1: (x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=1$, и следователно

$C_1(+2,+3,+4)$, $R_1=1$

(б) $x^2+y^2+z^2-2x = x^2-2x+1+y^2+z^2-1 =$

$=(x-1)^2+(y-0)^2+(z-0)^2-1$, т.е.

$S_2: (x-1)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=1$, и следователно

$C_2(1,0,0)$, $R_2=1$

(в) $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+2 = x^2-2x+1+$

$+y^2-2y+1+z^2-2z+1-1$, т.е.

$S_3: (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$, и значи

$C_3(1,1,1)$, $R_3=1$.

6 зад. Да се намери нормалното уравнение на сферата, която минава през точките $A(1,0,0)$, $B(3,0,0)$, $C(0,2,0)$ и $D(0,0,3)$.

Решение: Нека търсената сфера S има уравнение (1) $S: x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$ имаме, че точките A, B, C и D удовлетворяват (1) и следователно получаваме система от 4 уравнения с 4 неизвестни:

$$\left|\begin{array}{l} 1+\alpha+\delta=0 \;/\cdot(-1) \\ 9+3\alpha+\delta=0 \;\;+ \\ 4+2\beta+\delta=0 \\ 9+3\gamma+\delta=0 \end{array}\right. \sim \left|\begin{array}{l} \delta=-1-\alpha \\ 2\alpha+8=0 \\ 4+2\beta+\delta=0 \\ 9+3\gamma+\delta=0 \end{array}\right. \sim \left|\begin{array}{l} \delta=3 \\ \alpha=-4 \\ \beta=-\frac{7}{2} \\ \gamma=-4 \end{array}\right.,$$

и следователно $S: x^2+y^2+z^2-4x-\frac{7}{2}y-4z+3=0$,

т.е. $S: (x-2)^2+\left(y-\frac{7}{4}\right)^2+(z-2)^2=\left(\frac{\sqrt{129}}{4}\right)^2$

За радиуса и центъра имаме $R=\frac{\sqrt{129}}{4}$, $C\left(2,\frac{7}{4},2\right)$

7 зад. Да се намери уравнение на сферата σ, минаваща през точките $A(3,4,4)$, $B(1,2,2)$ и с център върху правата $a: \frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+1}{1}$.

Решение: Нека (1) $\sigma: x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$ е уравнението на търсената сфера. Тогава центърът ѝ е $C\left(-\frac{\alpha}{2},-\frac{\beta}{2},-\frac{\gamma}{2}\right)$. От т. $A, B \in \sigma \Rightarrow$ координатите на A и B удовлетворяват (1), т.е.

$9+16+16+3\alpha+4\beta+4\gamma+\delta=0$, т.е.

(2) $3\alpha+4\beta+4\gamma+\delta+41=0$ и

$1+4+4+\alpha+2\beta+2\gamma+\delta=0$, т.е.

(3) $\alpha+2\beta+2\gamma+\delta+9=0$

От т. $C \in a \Rightarrow \dfrac{-\frac{\alpha}{2}-1}{2} \overset{①}{=} \dfrac{-\frac{\beta}{2}-4}{2} \overset{②}{=} \dfrac{-\frac{\gamma}{2}+1}{1}$,

т.е. получаваме още две зависимости между α, β, γ и δ:

(4) $\alpha-\beta-6=0$ и

(5) $\beta-2\gamma+12=0$.

Уравненията (2), (3), (4) и (5) представляват система с 4 неизвестни α, β, γ и δ, която решаваме (например по метода на Гаус):

$$\begin{cases} \alpha-\beta-6=0 \\ \beta-2\gamma+12=0 \\ 3\alpha+4\beta+4\gamma+\delta+41=0 \\ \alpha+2\beta+2\gamma+\delta+9=0 \end{cases}$$

Решенията ѝ са
$$\begin{cases} \alpha=-\frac{26}{5} \\ \beta=-\frac{56}{5} \\ \gamma=\frac{2}{5} \\ \delta=\frac{89}{5} \end{cases},$$

и следователно $\sigma: x^2+y^2+z^2-\frac{26}{5}x-\frac{56}{5}y+\frac{2}{5}z+\frac{89}{5}=0$,

т.е. $\sigma: 5(x^2+y^2+z^2)-26x-56y+2z+89=0$.