

ИЗПИТ

по ДИС1, специалност "Компютърни науки"

19 февруари 2015г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Дайте дефиниция на граница на редица от реални числа и на сходяща редица. Какво означава една редица да е разходяща?

2. Формулирайте необходимото и достатъчно условие на Коши за сходимост на редица. Ще казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е с ограничена вариация, ако съществува такова число M , че

$$|a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_n - a_{n-1}| \leq M$$

за всяко естествено $n \geq 2$. Докажете, че всяка редица с ограничена вариация е сходяща.

3. Дайте дефиниция на $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5$ във формата на Коши и във формата на Хайне.

Докажете, че ако $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5$ в смисъл на Хайне, то $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5$ в смисъл на Коши.

4. Нека D е множество от реални числа, а f е реалнозначна функция, дефинирана в D . Дайте дефиниция на " f е непрекъсната". Формулирайте и докажете теоремата на Болцано (за междинните стойности).

5. Напишете дефиницията за диференцируемост на функция в дадена точка. Скицирайте графиката на функцията $f(x) = x^x$, без да се интересувате от интервалите на вдлъбнатост и изпъкналост. Има ли гранично положение допирателната към графиката на тази функция, когато аргументът клони към нула?

6. Напишете формулата на Тейлър с остатък във формата на Пеано и с остатък във формата на Лагранж, като формулирате и достатъчни условия върху функцията, при които са в сила съветните формули. Напишете развитията на косинуса и експонентата около нулата и ги използвайте, за да пресметнете границата

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}.$$

7. Дайте дефиниция на риманов интеграл чрез похода на Дарбу, като формулирате и докажете и двете леми, необходими за това.

8. Формулирайте теоремата на Лайбниц и Нютон. Пресметнете границата

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sqrt[3]{x^4}} \sin t^2 dt}{x^4},$$

като обосновете стъпките си.