ИЗПИТ

по ДИС 1, специалност "Компютърни науки"
12 юли 2019г.
Име:... Фак.номер:............

1. Нека A и B са множества от реални положителни числа, които са ограничени.
(а) Дайте дефиниция на точна горна граница (супремум) на множеството A.
(б) Докажете, че

$$\inf\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{\inf A}{\sup B}\ , \text{ ako } \frac{A}{B} = \left\{\frac{a}{b}\ :\ a \in A,\ b \in B\right\}\ .$$

2. Формулирайте и докажете необходимото и достатъчно условие на Коши една редица от реални числа да е сходяща.

3. Нека $D \subset \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$. Какво означава x_0 да е точка на сгъстяване на D? Кои са точките на сгъстяване на множеството $(-3,0) \cup \{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$? Дайте дефиниция на $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ във формата на Хайне и във формата на Коши, където $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Какво означава, че $f(x)$ не клони към $-\infty$, когато аргументът клони към x_0?

4. Дайте дефиниция на непрекъсната функция. Формулирайте и докажете Теоремата на Вайерщрас.

5. Напишете дефиницията за производна на функция в дадена точка. Докажете, че ако една функция е диференцируема в дадена точка, то тя е непрекъсната в същата точка. В кои точки не е диференцируема функцията

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako } x = 0 \\ |x^2 \sin \frac{1}{x}|, & \text{ako } x \neq 0 \end{cases}$$

6. Напишете формулата на Тейлър за $n+1$ пъти диференцируема функция f около точката a до n-тия член с остатък във формата на Лагранж. Пресметнете границата

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+12x} - \sqrt{1+8x}}{x^2}$$

като използвате бинома на Нютон (развитието в полином на Тейлър на $(1+x)^\alpha$).

7. Формулирайте Теоремата на Лагранж за крайните нараствания. Формулирайте и докажете принципа за монотонност.

8. Дайте дефиниция на изпъкнала функция. Формулирайте неравенството на Йенсен. Докажете, че функцията $f(x) = x^x$ е изпъкнала в интервала $(0, +\infty)$. Използвайте това, за да докажете неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} (2i)^{2i} \geq n(n+1)^{n+1}\ .$$

Изполвайте наготово формулата $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)$.