

ИЗПИТ

по ДИС1, специалност "Компютърни науки"

30 януари 2019г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Нека A и B са непразни множества от реални числа и A е ограничено отгоре, а B е ограничено отдолу.

(а) Дайте дефиниции на точна горна граница (супремум) на множеството A и точна долна граница (инфимум) на множеството B .

(б) Докажете, че

$$\sup(A - B) = \sup A - \inf B, \quad \text{ако} \quad A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}.$$

2. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от реални числа. Какво означава тази редица да е сходяща? Докажете, че частно на сходяща редица и сходяща редица, чиято граница не е нула, е сходяща редица.

3. Нека $D \subset \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$. Какво означава x_0 да е точка на сгъстяване на D ? Дайте дефиниция на $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ във формата на Хайне и във формата на Коши, където $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Какво означава, че $f(x)$ не клони към $-\infty$ в смисъл на Хайне, когато аргументът клони към x_0 ? Какво означава, че $f(x)$ не клони към $-\infty$ в смисъл на Коши, когато аргументът клони към x_0 ? Докажете, че ако $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ в смисъл на Коши, то f клони към $-\infty$, когато аргументът клони към x_0 , в смисъл на Хайне.

4. Дайте дефиниция на непрекъснатата функция. Формулирайте Теоремата на Болцано (за междинните стойности). Нека функцията $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъснатата инекция. Докажете, че f е строго монотонна.

5. Напишете дефиницията за производна на функция в дадена точка. В кои точки е диференцируема функцията $f(x) := |(x-1)(x-3)^3|$? Формулирайте и докажете теоремата на Рол.

6. Формулирайте и докажете достатъчно условие една n -кратно диференцируема функция да има екстремум в дадена точка.

7. Изразете интеграла

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$$

чрез I_{n-1} (тук a е положителен параметър и $n = 2, 3, 4, \dots$).