В $\mathbb{C}^4$ са дадени $U = l(a_1, a_2, a_3)$, $W = l(b_1\ b_2\ b_3)$

$a_1 = (1, 1, 0, -1)$ $a_2 = (2, -1, 3, -2)$ $a_3 = (4, 1, 3, -4)$

$b_1 = (1, -1, 1, 0)$ $b_2 = (1, -2, 3, -1)$ $b_3 = (2, -3, 4, -1)$

Да се намерят базиси на U, W, $U + W$, $U \cap W$

базис на U:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_{21}(-1) \\ R_{41}(1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_{32}(1) \\ R_2(-\frac{1}{3}) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_{12}(-2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

От матрицата следва че a_1, a_2 са базис на U и $a_3 = 2a_1 + 1a_2$.

$\Rightarrow |U| = 2$ $U = l(a_1, a_2)$

базис на W

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_{21}(1) \\ R_{31}(-1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_{32}(2) \\ R_{42}(-1) \\ R_2(-1) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_{12}(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

От матрицата следва че b_1 и b_2 са базис на W и $b_3 = 1 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2$

$\Rightarrow |W| = 2$ и $W = l(b_1, b_2)$

базис на $U + W$

Нека $\vec{x} \in U + W$

$$\vec{x} = \vec{u} + \vec{w}, \quad \vec{u} \in U \text{ и } \vec{w} \in W$$

$$\vec{x} = \underbrace{\lambda_1(a_1) + \lambda_2(a_2) + \lambda_3(b_1) + \lambda_4(b_2)}_{\ell(a_1, a_2, b_1, b_2)}$$

Намираме базис

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_{21}(-1) \\ R_{41}(1) \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_{32}(1) \\ R_2(-\frac{1}{3}) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_{43}(1) \sim \\ R_3(-1) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_{23}(-\frac{2}{3}) \\ R_{13}(-1) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_{12}(-2) \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

От Матрицата следва че a_1, a_2, b_1 са базис на $U + W$

и $b_2 = -1 . a_1 + 1 . a_2 + 0 . b_1$

$\Rightarrow |U + W| = 3$ $\qquad U + W = \ell(a_1, a_2, b_1)$

базис на $U \cap W$

От $|U+W| = |U| + |W| - |U \cap W|$

$3 = 2 + 2 - |U \cap W|$

$|U \cap W| = 4 - 3 = 1$

$\Rightarrow$ $U \cap W$ има един базисен вектор

$U = \ell(a_1, a_2)$ $\quad W = \ell(b_1, b_2)$

$U \cap W = \ell(a_1, a_2) \cap \ell(b_1, b_2)$

b_1 е ЛНЗ от $a_1, a_2 \Rightarrow b_1 \notin U \cap W$

$b_2 = -1a_1 + 1 \cdot a_2$

$\ell(a_1, a_2) \cap \ell(b_1, -1a_1 + 1 \cdot a_2) = \ell(-1a_1 + 1a_2) =$

$= \ell(b_2) \Rightarrow$ базис на $U \cap W$ е b_2