ИЗПИТ

по ДИС1, специалност "Компютърни науки"
31 януари 2020г.
Име:... Фак.номер:.............

1. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от реални числа. Какво означава тази редица да е сходяща? Какво означава тази редица да е разходяща? Какво означава тази редица да е монотонна? Докажете, че ако една монотонна редица от реални числа притежава сходяща подредица, то цялата редица също е сходяща.

2. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от реални числа. Какво означава тази редица да е фундаментална? Формулирайте и докажете необходимото и достатъчно условие на Коши за сходимост на редица.

3. Нека $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, където $D \subset \mathbb{R}$. Какво означава f да е непрекъсната? Какво означава f да е равномерно непрекъсната? Формулирайте и докажете Теоремата на Кантор. Равномерно непрекъсната ли е функцията $f(x) := e^{-x^2}$ върху $\mathbb{R}$? Обосновете отговора си.

4. Напишете дефиницията за производна на функция в дадена точка. Докажете, че ако една функция е диференцируема в дадена точка, то тя е непрекъсната в същата точка. Диференцируема ли е функцията

$$f(x) = \begin{cases} 0\ , & \text{ако } \ x = 0 \\ \frac{\sin(\sin x) - x}{x^2}\ , & \text{ако } \ x \neq 0 \end{cases}$$

в нулата? Ако да, пресметнете производната в точката нула. Формулирайте и докажете правилото за диференциране на произведение.

5. Напишете полинома на Тейлър за дадена функция до n-ти ред. Напишете формулата на Тейлър с остатък във формата на Пеано и я докажете, като формулирате съответните предположения.

6. Напишете дефиницията на изпъкнала функция. Формулирайте и докажете неравенството на Йенсен. Докажете, че

$$\frac{\ln x + \ln y}{2} \leq \ln \frac{x+y}{2}$$

за произволни положителни числа x и y.

7. Изразете интеграла

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^{n+\frac{1}{2}}}$$

чрез I_{n-1} (тук a е положителен параметър и $n = 2, 3, 4, \ldots$).