Повърхнини от втора степен. Метрична класификация и канонични уравнения на повърхнините от втора степен. Забележителни повърхнини от втора степен.

I.) Повърхнини от втора степен - определение

Нека в Евклидовото пространство E_3 е фиксирана ОКС $K = Oxyz$.

Деф.: Множеството S от всички точки M в пространството E_3, чиито координати (x, y, z) относно K удовлетворяват уравнение от вида

$$\boxed{(*)\ S: F(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,}$$

в което поне един от коефициентите $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}$ и a_{23} пред вторите степени е различен от нула, се нарича повърхнина от втора степен, а уравнението $(*)$ - нейно общо уравнение.

Примери:

(1) $S_1: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{a^2} = 1$ (ротационен плосък елипсоид)

(2) $S_2: \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{a^2} = 1$ (ротационен прост хиперболоид)

(3) $S_3: y^2 + z^2 = 2px$ (ротационен параболоид)

(4) $S_4: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ (конус от втора степен)

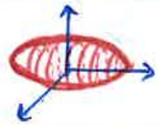
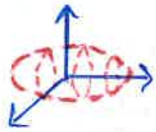
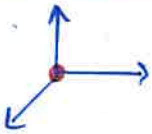
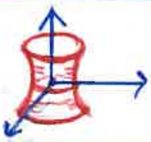
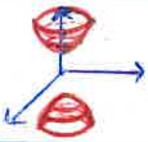
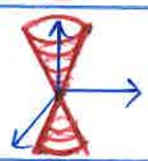
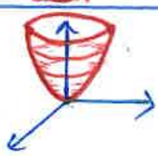
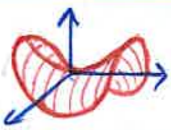
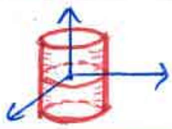
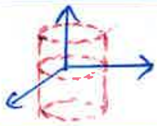
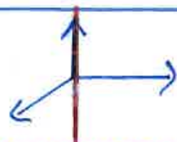
(5) $S_5: z^2 = 4 \Leftrightarrow \sigma_1: z = 2,\ \sigma_2: z = -2$ (двойка успоредни равнини)

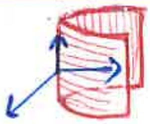
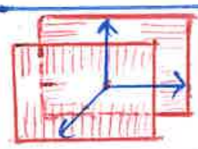
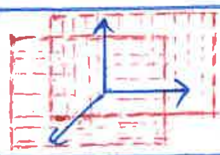
Примерите (1), (2) и (3) ги разгледахме в темата за Цилиндрични, конични и ротационни повърхнини. Пример (4) е конична повърхнина (конус) с връх - началото т. $O(0,0,0)$ на ОКС, понеже функцията $F(x,y,z) := \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2}$ е хомогенна от степен (ред) 2 (вж. споменатата по-горе тема). Пример (5) е "изроден" случай на повърхнина от $2^{ра}$ степен. В следващата точка ще дадем т.нар. метрична класификация на повърхнините от втора степен, даваща ни всички възможни такива повърхнини.

II. Метрична класификация и канонични уравнения на повърхнините от втора степен.

В сила е следната:

Теорема: Всяко уравнение от вида (*) на повърхнина от втора степен, зададена спрямо ОКС, с помощта на подходяща ортогонална трансформация и транслация на координатната система, може да се приведе в един от следните 17 вида:

(1) $\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1$		елипсоид
(2) $\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=-1$		имагинерен елипсоид
(3) $\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=0$		имагинерен конус
(4) $\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-\frac{\zeta^2}{c^2}=1$		прост хиперболоид
(5) $-\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1$		двоен хиперболоид
(6) $\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-\frac{\zeta^2}{c^2}=0$		конус от втора степен
(7) $\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=2\zeta$		елиптичен параболоид
(8) $\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}=2\zeta$		хиперболичен параболоид ("хипар")
(9) $\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=1$		елиптичен цилиндър
(10) $\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=-1$		имагинерен елиптичен цилиндър
(11) $\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=0$		двойка комплексно спрегнати равнини, пресичащи се в реалната права $\begin{cases}\xi=0\\ \eta=0\end{cases}$

(12) $\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1$		хиперболичен цилиндър
(13) $\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 0$		двойка реални пресичащи се равнини
(14) $\xi^2 = 2p\eta$		параболичен цилиндър
(15) $\xi^2 - a^2 = 0$		двойка реални успоредни равнини
(16) $\xi^2 + a^2 = 0$		двойка комплексно-спрегнати успоредни равнини
(17) $\xi^2 = 0$		двойка съвпадащи равнини, двойна равнина

Уравненията (1) ÷ (17), написани в горната теорема, се наричат нормални канонични уравнения на съответните повърхнини. Самата теорема, която няма да доказваме, ни казва, че съществуват точно седемнадесет вида повърхнини от втора степен.

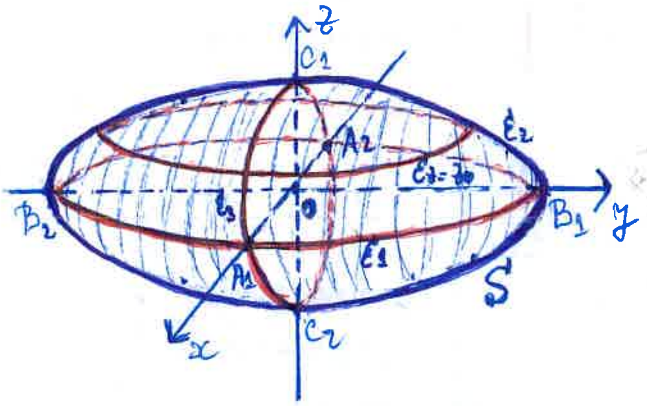
Забележка: И тук, както в теорията на кривите от $2^{ра}$ степен, могат да се въведат понятията инварианти и семиинварианти, с помощта на които да се определя непосредствено вида повърхнината от $2^{ра}$ степен. На този въпрос няма да се спираме.

III. Забележителни повърхнини от $2^{ра}$ степен.

1. **Елипсоид** Както видяхме, нормалното канонично уравнение на елипсоида е:

$$\boxed{(18)\quad S:\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\ .}$$

От (18) следва веднага, че S е симетрична фигура относно координатните равнини, координатните оси и началото O на координатната система. Освен това, очевидно $|x| \le a$, $|y| \le b$, $|z| \le c$, т.е. елипсоидът е разположен в правоъгълния паралелепипед с дължини на ръбовете $2a$, $2b$ и $2c$, чиито стени са успоредни на координатните равнини, и т. O е пресечна



(черт. 1)

точка на диагоналите му.

Координатната равнина $z=0$ пресича елипсоида S по елипсата

$$\boxed{\varepsilon_1: \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}}.$$

Координатната равнина $x=0$ пресича елипсоида S по елипсата

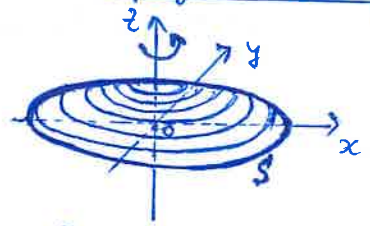
$$\boxed{\varepsilon_2: \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \end{cases}}.$$

Накрая, координатната равнина $y=0$ пресича елипсоида S по елипсата $\boxed{\varepsilon_3: \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \end{cases}}$ (вж. черт. 1).

При $z_0: |z_0|<c$, равнината $z=z_0$ пресича S по елипсата

$$\boxed{\varepsilon_{z=z_0}: \begin{cases} \dfrac{x^2}{a'^2}+\dfrac{y^2}{b'^2}=1 \\ z=z_0 \end{cases}},$$

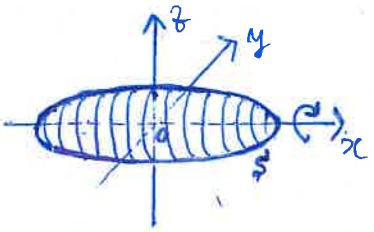
където положихме $a' := a\sqrt{1-\frac{z_0^2}{c^2}}$, $b'=b\sqrt{1-\frac{z_0^2}{c^2}}$. Координатните оси Ox, Oy и Oz пресичат елипсоида S в точките $A_1(a,0,0)$, $A_2(-a,0,0)$, $B_1(0,b,0)$, $B_2(0,-b,0)$, $C_1(0,0,c)$ и $C_2(0,0,-c)$, които наричаме върхове на елипсоида. Точката O наричаме център на елипсоида. Координатните оси Ox, Oy и Oz се наричат оси на елипсоида. Когато числата a, b и c са две по две различни, елипсоидът се нарича тривосен. Например, ако $a>b>c$, тогава a се нарича голяма полуос, b - средна полуос, а c - малка полуос на S.



(черт. 2)

При $a=b>c$ получаваме ротационен сплеснат елипсоид ("диск", "летяща чиния"):

$$\boxed{S: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$$ (вж. черт. 2)



(черт. 3)

При $a>b=c$ получаваме ротационен продълговат елипсоид ("топка за ръгби"):

$$\boxed{S: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1}$$ (вж. черт. 3).

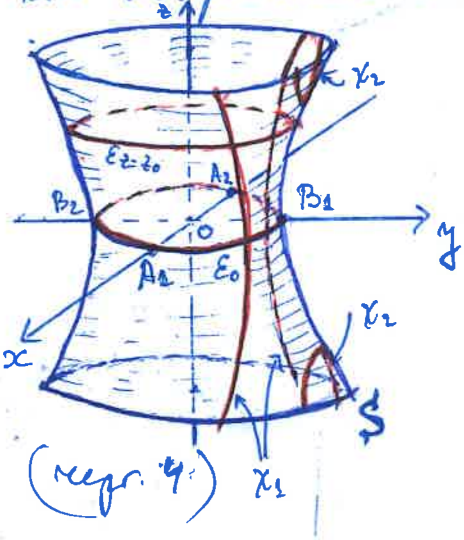
Ако $a = b = c$ получаваме сфера с център т. O и радиус $R = a$, $S(O; a)$. Следователно <u>елипсоидът е обобщение на сферата.</u>

2. Прост хиперболоид

Видяхме, че нормалното канонично уравнение на простия хиперболоид е:

$$\boxed{(19)\ S': \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

От (19) веднага следва, че S' е <u>симетрична фигура</u> относно координатните равнини, координатните оси и началото O на координатната система. Равнината $z = z_0$ пресича S' по <u>елипсата</u>



(черт. 4)

$$\boxed{\mathcal{E}_{z=z_0}: \begin{cases} \dfrac{x^2}{a'^2} + \dfrac{y^2}{b'^2} = 1 \\ z = z_0 \end{cases}}$$

, където положихме

$$a' := a\sqrt{1 + \frac{z_0^2}{c^2}}, \quad b' := b\sqrt{1 + \frac{z_0^2}{c^2}}.$$

При $z_0 = 0$ получаваме сечението на S' с <u>равнината $z = 0$</u>; това е <u>елипсата</u>

$$\boxed{\mathcal{E}_0: \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}}$$

, която се нарича <u>гърлова елипса</u> на хиперболоида. Равнината $y = y_0$ пресича хиперболоида по <u>хипербола</u>, ако $y_0 \neq \pm b$. Ако $y_0 = \pm b$ то равнината $y = +b$ (или $y = -b$) пресича хиперболоида по <u>двойката прави</u>

$$\boxed{g_{1,2}: \begin{cases} \dfrac{x}{a} \pm \dfrac{z}{c} = 0 \\ y = b \ (\text{или } y = -b) \end{cases}}$$

. Да отбележим, че вида хиперболи, които се явяват пресечници на S' с равнината $y = y_0$, $y_0 \neq \pm b$, <u>е различен</u> в зависимост от това, дали $|y_0| < b$ или $|y_0| > b$. На черт. 4 хиперболата χ_1 се явява пресечница в случая $|y_0| < b$, а хиперболата χ_2 – в случая $|y_0| > b$. В граничното положение ($y_0 = \pm b$) хиперболата се "изражда" в двойка пресичащи се прави, както видяхме по-горе. Същите факти важат и за сечението на хиперболоида с равнината $x = x_0$.

Точките $A_1(a,0,0)$, $A_2(-a,0,0)$, $B_1(0,b,0)$ и $B_2(0,-b,0)$, които се явяват върхове на гърловата елипса, се наричат <u>върхове на простия хиперболоид</u>. Точката O се нарича <u>център на S'</u>. Осите Ox и Oy се наричат <u>оси на простия хиперболоид</u>. При $a=b$ получаваме <u>прост ротационен хиперболоид</u>, получен от въртенето на хиперболата $\boxed{\chi:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}}$ около оста Oz, т.е.

$$\boxed{S':\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}.$$

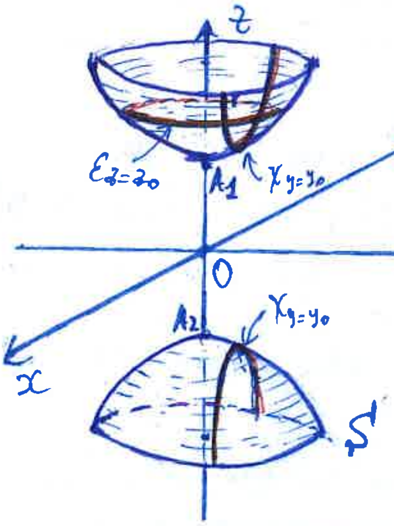
③ **Двоен хиперболоид**. Метричното канонично уравнение на двойния хиперболоид е:

$$\boxed{(20)\quad S':\ -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.}$$

От (20) непосредствено се вижда, че S' е <u>симетрична повърхнина</u> относно координатните равнини, координатните оси и началото O на координатната система. Равнината $z=z_0$ при $|z_0|>c$ пресича S' по елипсата

$$\boxed{\varepsilon_{z=z_0}:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a'^2}+\dfrac{y^2}{b'^2}=1\\ z=z_0\end{cases},}$$

където положихме $a':=a\sqrt{\frac{z_0^2}{c^2}-1}$, $b':=b\sqrt{\frac{z_0^2}{c^2}-1}$.



(черт. 5) –

Равнината $y=y_0$ $(x=x_0)$ пресича хиперболоида по хиперболата

$$\boxed{\chi_{y=y_0}:\begin{cases}\dfrac{z^2}{c'^2}-\dfrac{x^2}{a'^2}=1\\ y=y_0\end{cases},}$$

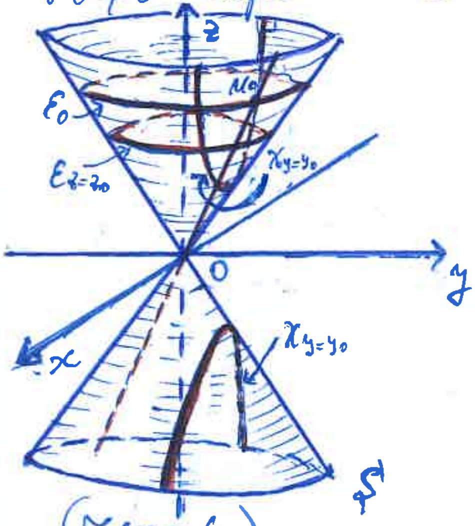
където положихме $c':=c\sqrt{1+\frac{y_0^2}{b^2}}$, $a':=a\sqrt{1+\frac{y_0^2}{b^2}}$. Точките $A_1(0,0,c)$ и $A_2(0,0,-c)$ се наричат <u>върхове на двойния хиперболоид</u>. Точката O се нарича <u>център на хиперболоида</u>, а координатната ос Oz – негова <u>ос</u>. При $a=b$ получаваме <u>двоен ротационен хиперболоид</u>, получен от въртенето на хиперболата,

$$\boxed{\chi: \begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}}$$ около оста Oz, т.е. $$\boxed{S': -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.}$$

(4.) **Конус от втора степен**. Метричното канонично уравнение на конуса от втора степен е:

$$\boxed{(21) \quad S': \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.}$$

От (21) непосредствено се вижда, че конусът S' е симетрична повърхнина относно координатните равнини, координатните оси и началото O на координатната система. Равнината $z = z_0$ при $z_0 \neq 0$ пресича S' по елипсата



(черт. 6)

$$\boxed{\mathcal{E}_{z=z_0}: \begin{cases} \dfrac{x^2}{a'^2} + \dfrac{y^2}{b'^2} = 1 \\ z = z_0 \end{cases}}$$, където положихме

$a' := \frac{a}{c}|z_0|$, $b' := \frac{b}{c}|z_0|$. В частност, ако вземем $z_0 = c$, получаваме, че равнината $z = c$ пресича S' по елипсата

$$\boxed{\mathcal{E}_0: \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = c \end{cases}}$$. Нека $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{E}_0$

е произволна точка, и да разгледаме правата OM_0. Имаме, че

$$OM_0: \begin{cases} \ni O(0,0,0) \\ \parallel \overrightarrow{OM_0}(x_0, y_0, z_0) \end{cases} \Rightarrow \boxed{OM_0: \begin{cases} x = x_0 s \\ y = y_0 s, \quad s \in (-\infty, +\infty). \\ z = z_0 s \end{cases}}$$ Ако т. $M(x_0 s, y_0 s, z_0 s)$

е произволна точка върху OM_0, то имаме, че $\frac{(x_0 s)^2}{a^2} + \frac{(y_0 s)^2}{b^2} - \frac{(z_0 s)^2}{c^2} =$ $\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2}\right)s^2 = (1 - 1)s^2 = 0$, където използвахме, че т. $M_0 \in \mathcal{E}_0$, т.е., че $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ и $z_0 = c$. Следователно всяка точка от правата OM_0 лежи на S', т.е. $OM_0 \subset S'$ (вж. черт. 6). Така, елипсата $\mathcal{E}_0$ (и коя да е елипса $\mathcal{E}_{z=z_0}$, например) се явява управителна крива на S', точката O (която е център на симетрия за S') се явява връх на S', а всяка права през т. O и пресичаща $\mathcal{E}_0$ (например OM_0) е образуваща.

Равнината $y = y_0$ при $y_0 \neq 0$ пресича конуса по хиперболата $\boxed{\chi_{y=y_0}: \begin{cases} \frac{z^2}{c'^2} - \frac{x^2}{a'^2} = 1 \\ y = y_0 \end{cases}}$, където положихме

$c' := \frac{c}{b}|y_0|$ и $a' := \frac{a}{b}|y_0|$. При $y_0 = 0$, равнината $y = 0$ пресича конуса по две лъчеви образуващи, именно:

$$\boxed{g_{1,2}: \begin{cases} \frac{x}{a} \pm \frac{z}{c} = 0 \\ y = 0 \end{cases}}.$$

Естествено, аналогични факти важат и за сечението на S' с равнините $x = x_0$.

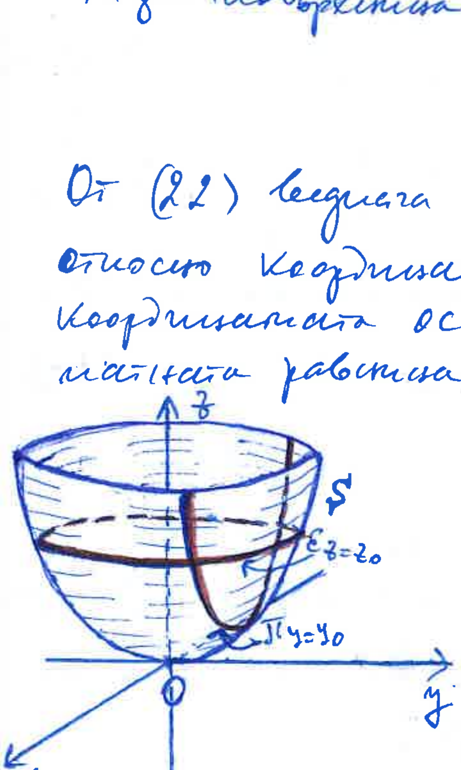
Може да се докаже, че сеченията на S' с равнини, успоредни на образуващите на S, са параболи.

Оста Oz се нарича ос на конуса S'. При $a = b$ получаваме ротационен конус от втора степен (или още, прав кръгов двоен конус), който се получава от завъртането на правата $\boxed{g_1: \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0 \\ y = 0 \end{cases}}$ (или на правата $\boxed{g_2: \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0 \\ y = 0 \end{cases}}$) около оста Oz, именно, $\boxed{S': \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.}$

5. $\boxed{\text{Елиптичен параболоид}}$ Неговото канонично уравнение на тази повърхнина е:

$$\boxed{(22)\quad S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z.}$$

От (22) веднага се вижда, че S' е симетрична повърхнина относно координатните равнини $x = 0$ и $y = 0$, както и относно координатната ос Oz. Освен това, тя е разположена "над" координатната равнина $z = 0$, тъй като от $(22) \Rightarrow z \geq 0$ (вж. черт. 7).



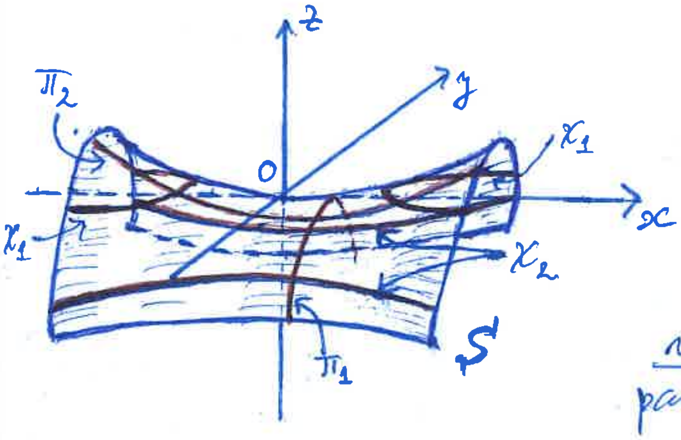
(черт. 7)

Равнината $z = z_0 > 0$ пресича S' по елипсата

$$\boxed{E_{z=z_0}: \begin{cases} \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1 \\ z = z_0 \end{cases}},$$ където положихме $a' := a\sqrt{2z_0}$, $b' := b\sqrt{2z_0}$.

Равнината $y = y_0$ $(x = x_0)$ пресича S' по параболата $\Pi_{y=y_0}: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=2z \\ y=y_0 \end{cases}$. Точката O се нарича връх на елиптичния параболоид, а оста Oz - негова ос. При $a=b$ получаваме ротационен елиптичен параболоид, получен от въртенето на параболата $\Pi: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}=2z \\ y=0 \end{cases}$ около оста Oz, т.е. $S': \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=2z.$

(6.) Хиперболичен параболоид, "хипар", "седло"



(черт. 8)

Метричното канонично уравнение на тази повърхнина е:

$$(23)\quad S': \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z.$$

От (23) се вижда, че S' е симетрична повърхнина относно координатните равнини $x=0$ и $y=0$, както и относно оста Oz. (вж. черт. 8).

При $z_0\neq 0$ равнината $z=z_0$ пресича S' по хиперболата $X_{z=z_0}: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z_0 \\ z=z_0 \end{cases}$. Веднага се съобразява, че видът на хиперболата е различен в зависимост от това, дали $z_0>0$ или $z_0<0$. На черт. 8 хиперболата X_1 се получава при пресичането на S' с равнина $z=z_0>0$, а хиперболата X_2 - при пресичане на S' с равнина $z=z_0<0$.

При $z_0=0$ равнината $z=0$ пресича S' в двойката прави $g_{1,2}: \begin{cases} \frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0 \\ z=0 \end{cases}$, които се явяват "гранично положение" между двата вида хиперболи, които са пресечници на S' с равнините $z=z_0$.

Сеченията на S' с равнините $x=x_0$ и $y=y_0$ са параболите

$\boxed{\Pi_{x=x_0}: \begin{cases} \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \\ x = x_0 \end{cases}}$ и $\boxed{\Pi_{y=y_0}: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 2z \\ y = y_0 \end{cases}}$, съответно.

Така например, на черт. 8 параболата Π_1 се получава като пресечница на S с равнина $x = x_0$, а пък параболата Π_2 – като пресечница на S с равнина $y = y_0$. Точката O се нарича връх (седловидна точка) на хиперболичния параболоид.

IV. Праволинейни образуващи на повърхнините от втора степен.

Конусът от втора степен, като пример на конична повърхнина, може да бъде "образуван" от "движението" на права, една фиксирана точка от която е неподвижна (връх на конуса), а самата права се "плъзга" по управителната крива. Ако приемем последователните положения на въпросната права като различни прави, то можем да заключим, че ~~коничните~~ повърхнини от втора степен (и изобщо коничните повърхнини) са образувани от "плътно наредени една до друга прави". Същото наблюдение важи и за цилиндричните повърхнини, както и за равнините. Оказва се, че от 17-те вида повърхнини от втора степен, това свойство притежават и простия хиперболоид и хиперболичния параболоид. Преди да разгледаме този въпрос, ще дадем формалната дефиниция.

(черт. 9)

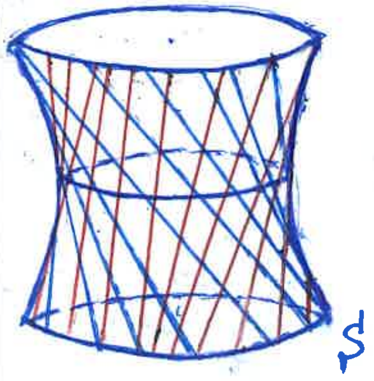
Деф.: Фамилия от праволинейни образуващи на (върху) една повърхнина S наричаме такова множество $\mathcal{F}$ от прави, което притежава свойствата:

(1) ако $p \in \mathcal{F}$, то $p \subset S$, т.е. всяка права от фамилията $\mathcal{F}$ се съдържа изцяло в S;

(2) за всяка точка $M \in S$ съществува права $p \in \mathcal{F}$, такава, че $p \ni M$. (вж. черт. 9).

Образно казано, фамилия от праволинейни образуващи ~~на~~ една повърхнина е такова множество от прави, което "покрива" изцяло повърхнината.

1. Праволинейни образуващи на простия хиперболоид



(черт. 10)

Разглеждаме простия хиперболоид

$$(24)\quad S:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Да вземем двете фамилии прави

$$(25)\quad F_1^{\lambda}: \begin{cases} \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\lambda\left(1-\frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{y}{b}\right) \end{cases},\ \lambda\neq 0$$

$$(26)\quad F_2^{\mu}: \begin{cases} \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\mu\left(1+\frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\frac{1}{\mu}\left(1-\frac{y}{b}\right) \end{cases},\ \mu\neq 0.$$

За всяко фиксирано $\lambda\neq 0$ от първата фамилия (25) получаваме права – именно като пресечница на две равнини. Веднага се вижда, че тя лежи на повърхнината S, тъй като ако умножим левите и десните страни на двете уравнения в (25) получаваме, че координатите (x,y,z) на точките от съответната права удовлетворяват и (24). Така F_1^{λ} е 1-параметрична фамилия от прави върху S. Абсолютно по същия начин се вижда, че F_2^{μ}, зададено с (26), е 1-параметрична фамилия от прави върху S. В сила е следното

Твърдение 1: Всяка от фамилиите прави F_1^{λ} и F_2^{μ}, зададени съответно с (25) и (26), е фамилия от праволинейни образуващи върху S. При това:

(1) Всеки две прави от F_1^{λ} са кръстосани; аналогично, всеки две прави от F_2^{μ} са кръстосани;

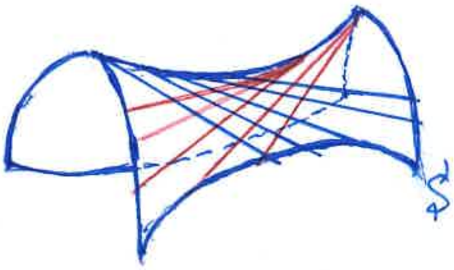
(2) Всяка права от едната фамилия пресича всяка права от другата фамилия.

Доказателство няма да даваме. На черт. 10 едната фамилия прави F_1^{λ} е означена със синьо, а другата фамилия прави F_2^{μ} е означена с червено.

② Праволинейни образуващи на хиперболичния параболоид

Разглеждаме хиперболичния параболоид

$$(27)\quad S:\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$



(черт. 11)

Да вземем двете фамилии прави

$$(28)\quad \Phi_1^{\lambda}:\ \begin{cases} 2z = \lambda\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \\ 1 = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \end{cases},\ \lambda \neq 0$$

$$(29)\quad \Phi_2^{\mu}:\ \begin{cases} 2z = \mu\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \\ 1 = \frac{1}{\mu}\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \end{cases},\ \mu \neq 0$$

По същия начин, както в случая на прост хиперболоид, и тук се доказва, че Φ_1^{λ} и Φ_2^{μ}, зададени съответно чрез (28) и (29), образуват 1-параметрични фамилии от прави върху S. И тук (без доказателство) формулираме следното

Твърдение 2: Всяка от фамилиите Φ_1^{λ} и Φ_2^{μ}, зададени съответно с (28) и (29) е фамилия от праволинейни образуващи върху S. При това:

(1) Всеки две прави от Φ_1^{λ} са кръстосани; аналогично, всеки две прави от Φ_2^{μ} са кръстосани;

(2) Всяка права от едната фамилия пресича всяка права от другата фамилия.

На черт. 11 едната фамилия прави Φ_1^{λ} е означена със синьо, а другата фамилия прави Φ_2^{μ} е означена с червено.