

ИЗПИТ

по Анализ I част, специалност "Софтуерно инженерство"

13 февруари 2008г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Дайте дефиниция на сходяща редица. Формулирайте необходимото и достатъчно условие на Коши за сходимост на редица. Какво означава за една редица условието на Коши да не е вярно?
2. Нека D е множество от реални числа. Какво означава $\xi \in R$ да е точка на сгъстяване на D ? Нека $f : D \rightarrow R$ и ξ е точка на сгъстяване на D . Дайте дефиниция на граница на f , когато аргументът клони към ξ , във формата на Хайне и във формата на Коши. Докажете еквивалентността на двете дефиниции.
3. Формулирайте и докажете Теоремата на Кантор (за равномерна непрекъснатост на непрекъснатите функции върху краен и затворен интервал).
4. Напишете дефиницията за производна на функция в дадена точка. В кои точки от дефиниционния си интервал е диференцируема функцията $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$? В кои точки тя не е диференцируема и защо?
5. Нека $[a, b]$ е краен затворен интервал и $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъснатата функция върху него, която е диференцируема в отворения интервал (a, b) . Нека знаем, че съществува границата $\lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = l$. Докажете, че f е диференцируема отдясно в a и дясната ѝ производна в a е равна на l . Разгледайте функцията $g(x) = x(1 + \frac{1}{x})^x$, дефинирана в интервала $(0, +\infty)$. Може ли да я додефинирате по подходящ начин за $x = 0$ така, че получената функция да е непрекъсната в нулата? Използвайте току-що доказвания факт, за да намерите ъгловия коефициент на допирателната към графиката на додефинираната функция в точката от нейната графика с нулева първа координата.
6. Напишете формулата на Тейлор около нулата до ред n с остатъчен член във формата на Лагранж за функциите

$$f(x) = \cos x \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1+x}}.$$

7. Изразете интеграла

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1/2}}$$

чрез I_{n-1} (тук a е положителен параметър и $n = 2, 3, 4, \dots$).