

ИЗПИТ

по Анализ I част, специалност "Компютърни науки"

25 януари 2012г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Дайте дефиниция на "множество от реални числа, което е ограничено отдолу". Какво означава една редица от реални числа да дивергира към $-\infty$? Какво означава това да не е вярно? Докажете, че ако множеството от членовете на една редица от реални числа не е ограничено отдолу, то тя притежава подредица, която дивергира към $-\infty$.

2. Формулирайте и докажете необходимото и достатъчно условие на Коши за сходимост на редица.

3. Нека D е множество от реални числа и $-\infty$ е точка на сгъстяване на D . Какво означава това? Нека $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Дайте дефиниция на граница на f (границата е реално число), когато аргументът клони към $-\infty$, във формата на Хайне и във формата на Коши. Докажете, че ако тази граница съществува в смисъл на дефиницията на Хайне, то тя съществува и в смисъл на дефиницията на Коши, и има същата стойност.

4. Дайте дефиниция на непрекъснатост в точка. Намерете множеството от точки, в които е непрекъснатата функцията

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

5. Напишете дефиницията за производна на функция в дадена точка. В кои точки от дефиниционния си интервал е диференцируема функцията

$f(x) = (x - 3)|x - 3| + \operatorname{sign} x$, където $\operatorname{sign} x = -1$ при $x < 0$, $\operatorname{sign} x = 1$ при $x > 0$ и $\operatorname{sign} 0 = 1$? Обосновете се.

6. Формулирайте теоремата на Рол. Формулирайте и докажете обобщената теорема за крайните нараствания.

7. Формулирайте и докажете първата теорема на Лопитал (за граници от вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, когато аргументът клони към реално число).

8. Изразете интеграла

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1/2}}$$

чрез I_{n-1} (тук a е положителен параметър и $n = 2, 3, 4, \dots$).