

ИЗПИТ

по Анализ I част, специалност "Софтуерно инженерство"

13 февруари 2010г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Дайте дефиниция на точна горна граница (супремум) на ограниченото отгоре множество от реални числа A . Какво означава едно число c да не е точна горна граница на A ? Докажете принципа за отделимост: Нека A и B са непразни множества от реални числа такива, че за всяко x от A и за всяко y от B да е изпълнено неравенството $x \leq y$. Тогава съществува такова реално число c , че да са в сила неравенствата $x \leq c \leq y$ за всяко $x \in A$ и за всяко $y \in B$.

2. Формулирайте необходимото и достатъчно условие на Коши за сходимост на дадена редица от реални числа. Докажете, че ако една редица удовлетворява това условие, то тя е ограничена.

3. Дайте дефиниция на $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty$ във формата на Хайне и във формата на Коши, където $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$. Какво трябва да предположите за D , за да е смислена дадената дефиниция? Изследвайте поведението на функцията $f(x) = (\operatorname{arctg}(3 - 2x))^{-1}$ около крайщата на дефиниционните интервали (включително $+\infty$ и $-\infty$).

4. Формулирайте и докажете Теоремата на Вайерштрас. Нека $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъснатата функция и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Докажете, че f е ограничена (използвайте наготово Теоремата на Вайерштрас).

5. Напишете дефиницията за производна на функция в дадена точка. Докажете правилото за диференциране на произведение.

6. Формулирайте и докажете Теоремата на Лагранж за крайните нараствания. Формулирайте и докажете Принципа за монотонност.

7. Нека f е $n + 1$ пъти диференцируема във фиксирана околност на точката a . Напишете полинома на Тейлър за f около a до n -ти ред с остатък във формата на Лагранж. Използвайте полинома на Тейлър с остатък във формата на Пеано, за да напишете развитието на $f(x) = \sqrt[3]{1 + 2x} - \sqrt[3]{1 - 3x}$ до члена $o(x^3)$.

8. Пресметнете интеграла

$$\int \frac{3x + 5}{(x^2 + 2x + 3)^2} \cdot$$