ИЗПИТ

по Анализ I част, специалност "Компютърни науки"
9 февруари 2017г.
Име:.. Фак.номер:............

1. Нека A и B са ограничени отдолу множества от реални числа.
(а) Дайте дефиниция на точна долна граница (инфимум) на множеството A.
(б) Докажете, че

$$\inf (A+B) = \inf A + \inf B\ , \quad \text{ако} \quad A+B = \{a+b\ :\ a \in A,\ b \in B\}\ .$$

2. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от реални числа и $a \in \mathbb{R}$. Какво означава тази редица да клони към a? Какво означава a да е точка на сгъстяване на тази редица? Какво означава, че "редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ няма точки на сгъстяване"? Формулирайте и докажете Теоремата на Болцано-Вайерщрас (принцип за компактност).

3.Дайте дефиниция на $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ във формата на Хайне и във формата на Коши, където $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$. Какво трябва да предположите за D, за да е смислена дадената дефиниция? Докажете, че ако $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ в смисъл на Коши, то f клони към l, когато аргументът клони към x_0, в смисъл на Хайне.

4. Дайте дефиниция на непрекъсната функция. Нека $f : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната и съществува границата $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, като $f(a) < l$, $l \in \mathbb{R}$. Докажете, че f е ограничена и достига най-малката си стойност.

5. Напишете дефиницията за производна на функция в дадена точка. Докажете, че ако една функция е диференцируема в дадена точка, то тя е непрекъсната в същата точка.
Диференцируема ли е функцията

$$f(x) = \begin{cases} 0\ , & \text{ако} \ \ x = 0 \\ \frac{1}{x} \ln \frac{\sin x}{x}\ , & \text{ако} \ \ x \neq 0 \end{cases}$$

в нулата? Ако да, пресметнете производната в точката нула.

6. Формулирайте Теоремата на Лагранж за средните стойности. Формулирайте и докажете принципа за константност.

7. Формулирайте и докажете първата теорема на Лопитал (за граници от вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, когато аргументът клони към реално число).

8. Изразете интеграла

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n+\frac{1}{2}}}$$

чрез I_{n-1} (тук a е положителен параметър и $n = 2, 3, 4, \ldots$).