

ИЗПИТ

по ДИС1, специалност "Компютърни науки"

2 февруари 2022г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Дайте дефиниция на граница на редица от реални числа и на сходяща редица. Какво означава една редица да е разходяща? Формулирайте и докажете Лемата за двамата полицаи.

2. Формулирайте необходимото и достатъчно условие на Коши за сходимост на редица. Ще казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е с ограничена вариация, ако съществува такова число M , че

$$|a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_n - a_{n-1}| \leq M$$

за всяко естествено $n \geq 2$. Докажете, че всяка редица с ограничена вариация е сходяща.

3. Нека $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, където $D \subset \mathbb{R}$. Какво означава f да е непрекъснатата? Какво означава f да е равномерно непрекъснатата? Докажете, че функцията $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ е равномерно непрекъснатата в интервала $(0, +\infty)$.

4. Формулирайте и докажете Теоремата на Кантор.

5. Напишете дефиницията за производна на функция в дадена точка. Докажете, че ако една функция е диференцируема в дадена точка, то тя е непрекъснатата в същата точка. Диференцируема ли е функцията

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ \frac{\sin(\sin x) - x}{x^2}, & \text{ако } x \neq 0 \end{cases}$$

в нулата? Ако да, пресметнете производната в точката нула. Формулирайте и докажете правилото за диференциране на произведение.

6. Дайте дефиниция на локален екстремум на дадена функция. Формулирайте и докажете Теоремата на Ферма. Формулирайте и докажете Теоремата на Рол.

7. Формулирайте и докажете достатъчното условие една n -кратно диференцируема функция да има екстремум в дадена точка.