ИЗПИТ

по Анализ I част, специалност "Компютърни науки"
8 февруари 2017г.
Име:.. Фак.номер:............

1. Нека A и B са ограничени множества от реални положителни числа.
(а) Дайте дефиниция на точна горна граница (супремум) на множеството A.
(б) Докажете, че

$$\inf\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{\inf A}{\sup B}\ , \quad \text{ако} \quad \frac{A}{B} = \left\{\frac{a}{b}\ :\ a \in A,\ b \in B\right\}\ .$$

2. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от реални числа. Какво означава тази редица да е сходяща? Какво означава тази редица да е фундаментална? Формулирайте и докажете необходимото и достатъчно условие на Коши за сходимост на редица.

3. Нека $D \subset \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$. Какво означава x_0 да е точка на сгъстяване на D? Кои са точките на сгъстяване на множеството $(-\infty, 0) \cup \{3 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$? Дайте дефиниция на $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ във формата на Хайне и във формата на Коши, където $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Какво означава, че $f(x)$ не клони към $-\infty$, когато аргументът клони към x_0? Докажете, че ако $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ в смисъл на Хайне, то f клони към $-\infty$, когато аргументът клони към x_0, в смисъл на Коши.

4. Дайте дефиниция на непрекъсната функция. Нека $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната и съществуват границите $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l_1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l_2$, като $l_1,\ l_2 \in \mathbb{R}$. Докажете, че f е ограничена.

5. Напишете дефиницията за производна на функция в дадена точка. Докажете, че ако една функция е диференцируема в дадена точка, то тя е непрекъсната в същата точка. Диференцируема ли е функцията

$$f(x) = \begin{cases} 0\ , & \text{ако } \ x = 0 \\ \frac{\sin(\sin x) - x}{x^2}\ , & \text{ако } \ x \neq 0 \end{cases}$$

в нулата? Ако да, пресметнете производната в точката нула.

6. Формулирайте Теоремата на Лагранж за средните стойности. Формулирайте и докажете принципа за монотонност.

7. Формулирайте и докажете достатъчно условие една n-кратно диференцируема функция да има екстремум в дадена точка.

8. Изразете интеграла

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^n}$$

чрез I_{n-1} (тук a е положителен параметър и $n = 2, 3, 4, \ldots$).