ИЗПИТ

по ДИС I част, специалност "Компютърни науки"
5 февруари 2018г.
Име:... Фак.номер:............

1. Нека A е ограничено непразно множество от реални числа. Дайте дефиниция на $\sup A$ и $\inf A$. Нека M и N са такива непразни множества от реални числа, че за всяко x от M и за всяко y от N е изпълнено неравенството $x \leq y$. Докажете, че съществува такова реално число r, че да са в сила неравенствата $x \leq r \leq y$ за всяко $x \in M$ и за всяко $y \in N$.

2. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от реални числа. Какво означава тази редица да е сходяща? Какво означава тази редица да е разходяща? Какво означава тази редица да е фундаментална? Какво означава тази редица да не е фундаментална? Формулирайте и докажете необходимото и достатъчно условие на Коши за сходимост на редица.

3.Дайте дефиниция на $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 6$ във формата на Хайне и във формата на Коши, където $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$. Какво трябва да предположите за D, за да е смислена дадената дефиниция? Докажете, че ако $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 6$ в смисъл на Коши, то f клони към 6, когато аргументът клони към $-\infty$, в смисъл на Хайне.

4. Нека $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, където $D \subset \mathbb{R}$. Какво означава f да е непрекъсната? Какво означава f да е равномерно непрекъсната? Докажете, че функцията $f(x) = e^{-x^2}$, дефинирана в цялата реална права, е равномерно непрекъсната.

5. Разгледайте функцията

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \frac{\alpha}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + \frac{x}{2} \ln \alpha\ .$$

Намерете супремума и инфимума на стойностите на f в интервала $[1, +\infty)$, ако $0 < \alpha < 1$. (Приемаме, че супремумът на неограничено отгоре множество е $+\infty$, а инфимумът на неограничено отдолу множество е $-\infty$.)

6. Напишете дефиницията за производна на функция в дадена точка. Формулирайте и докажете правилото за диференциране на произведение.

7. Формулирайте и докажете първата теорема на Лопитал (за граници от вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, когато аргументът клони към реално число).

8. Дайте дефиниция на риманов интеграл чрез похода на Дарбу, като формулирате и докажете и двете леми, необходими за това. Докажете, че монотонните функции са интегруеми.