,,parskip

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Algebra y Geometría Analítica II

Año 2022

Notas de curso

Autoras: Isolda E. Cardoso y Paola B. Tolomei
Redactaron, ampliaron, compilaron, corrigieron y editaron sobre notas de Silvio Reggiani (unidades 1, 2 y 3) y Francisco Vittone (unidades 5 y 6).

Estas notas pretenden plasmar de alguna manera el trabajo realizado durante el período 2018 - 2022 como docentes de la asignatura Álgebra y Geometría Analítica II (AyGAII), que se dicta en común para las carreras Licenciatura en Ciencias de la Computación (LCC), Licenciatura en Física (LF), Licenciatura en Matemática (LM), Profesorado en Física (PF) y Profesorado en Matemática (PM). Dicha asignatura tomó estas características comunes luego de un trabajo en conjunto de la Escuela de Cs. Naturales y Exactas (ECEN), aprovechando los cambios de planes de LM y PM.

La asignatura se sitúa en el segundo cuatrimestre de todas estas carreras, y es la continuación natural de Álgebra y Geometría Analítica I (AyGAI). Partiendo de un sintético, una versión oral de lo dictado en AyGAI, algunas notas no digitalizadas propias de versiones anteriores de la asignatura y basándonos fuertemente en notas digitalizadas de los docentes Silvio Reggiani y Francisco Vittone, dictamos por primera vez en 2018 la asignatura. Con la firme idea de que las cátedras funcionen en conjunto, fuimos compilando las notas que teníamos digitalizadas y armando nuevas para los temas faltantes, tanto para teoría como para práctica.

Innumerables docentes han pasado por esta cátedra como JTPs, auxiliares de primera categoría y de segunda categoría. A todxs ellxs va nuestro agradecimiento por la paciencia que nos han tenido. De todxs nos llevamos algo y esperamos haberles devuelto algo también. En particular quisiéramos nombrar a algunxs compañerxs y amigxs que han sido protagonistas de esta etapa. Eduardo Philipp, que ha compartido estos 5 años con nosotras, Lelu gracias por la confianza en nosotras y en nuestro criterio. También a María Inés Lopez Pujato que nos acompañó en algunas de las cursadas, Ine mil gracias por estar siempre con la mejor onda y ofreciéndonos tu matemática impecable. A Gerardo Sbérgamo, que arma los parciales y finales más lindos e innovadores, Gera te extrañamos este último año pero te deseamos lo mejor en esta etapa. A Florencia Trottini, que se puso la 10 y nos ayudó a imprimir en 3D el cono de Apolonio y las cuádricas. Y a Jorge Flamini, que durante todos estos años se hizo cargo de los redictados, y con quien compartimos mesas de examenes y sobre todo las angustias de la pandemia. A todxs lxs demás auxiliares que no hemos nombrado, no quiere decir que no lxs tengamos en nuestros corazones, gracias de verdad.

Pretendemos que estas notas sean de utilidad para quienes continuen con el dictado los años subsiguientes, seguramente este será un punto de quiebre para ambas. La pandemia nos obligó a dictar la asignatura dos años consecutivos en forma virtual. Sin mucha pericia y con muchas dudas producimos material audiovisual y aprendimos muchísimo, el Campus Virtual de la FCEIA fue nuestro aliado, pero no fue el único recurso. Algo de eso también queremos compartir, para ello hemos destinado un repositorio de Github: https://github.com/IsoldaEugenia/Algebra-y-Geometria-Analitica.

Las presentes notas abarcan un desarrollo teórico con muchísimos ejemplos, pensado para que (en caso de pandemia por ejemplo), lxs estudiantes puedan leer por su cuenta sin mayores dificultades. Hemos dividido la asignatura en seis unidades temáticas, y cada una de ellas tiene una sección correspondiente. Cada sección comienza con la teoría y sigue con los ejercicios propuestos para trabajar en el práctico. En algunas hemos agregado además algunos juegos de repaso que realizamos durante las clases por videollamada, obviamente adaptados al formato papel dado que no podemos repetir las dinámicas virtuales. Finalmente, en algunas secciones hemos trabajado con laboratorios, el software de elección fue en un comienzo Maxima, y luego viramos a SageMath. Algunas notebooks de Jupyter con código de SageMath también quedan disponibles en el repositorio.

Dedicado, con todo nuestro afecto, a nuestrxs alumnxs.

Contents

1 Análisis Combinatorio **7**
1.1 Reglas de la suma y del producto. 7
1.2 Disposiciones lineales. Permutaciones. 11
1.3 Combinaciones. El Binomio de Newton. 21
1.4 Combinaciones con repetición: Distribuciones. 29
1.5 El principio de las casillas, o de las cajas, o del palomar, o de Dirichlet, o... 31
1.6 Ejercicios sugeridos 34
1.7 Repaso 40

2 Matrices y Determinantes **47**
2.1 Matrices 47
2.1.1 Operaciones entre matrices 51
2.1.2 Ejemplo de aplicación. 61
2.2 Determinantes 64
2.2.1 Permutaciones 64
2.2.2 Determinantes 68
2.2.3 Propiedades 70
2.2.4 Matrices inversibles 77
2.2.5 Desarrollo del determinante por filas o columnas 79
2.3 Ejercicios sugeridos 86
2.4 Repaso 91

3 Sistemas de Ecuaciones Lineales **94**
3.1 introducción 94
3.2 Sistemas de ecuaciones lineales 95
3.3 Operaciones elementales 97
3.3.1 Operaciones elementales de ecuaciones 97
3.3.2 Operaciones elementales por filas (OEF) 98
3.4 Matrices elementales 101
3.5 Matrices escalón reducidas por filas 104

3.6 Resolución de sistemas no homogéneos 107
3.7 Sistemas cuadrados 109
3.8 eliminación Gaussiana 112
3.9 aplicación a determinantes 113
3.10 Regla de Cramer 115
3.11 Ejercicios sugeridos 116
3.12 Repaso 119

4 Los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$. 123

4.1 Los espacios $\mathbb{F}^n$ 124
4.1.1 Definiciones elementales 124
4.1.2 Los 10 axiomas de Espacio Vectorial 125
4.1.3 Propiedades y consecuencias inmediatas 129
4.2 Los espacios $\mathbb{F}_n[x]$ y $\mathbb{F}^{m\times n}$ 132
4.3 Espacios vectoriales 133
4.4 Bases y dimensión en $\mathbb{F}^n$ 135
4.4.1 Independencia lineal 135
4.4.2 generación 140
4.4.3 Bases y dimensión 144
4.5 Ejercicios sugeridos 146

5 Geometría analítica del Plano 149

5.1 introducción y repaso. 149
5.1.1 Lugares geométricos 150
5.1.2 Recta en el Plano 153
5.2 Secciones cónicas 157
5.2.1 Circunferencia 159
5.2.2 Elipse 161
5.2.3 Hipérbola 167
5.2.4 Parábola 175
5.3 Ejercicios sugeridos 180

6 Geometría analítica del Espacio 186

6.1 Ecuaciones vectorial y paramétrica de una recta y un plano 186
6.2 Ecuación general del plano y ecuaciones de la recta en el espacio 193
6.3 Superficies cuádricas 197
6.3.1 Elipsoides y esferas 200
6.3.2 Hiperboloides y conos 204
6.3.3 Superficies parabólicas y cilindros 211
6.4 Curvas en el espacio 216
6.5 Superficies parametrizadas y superficies de revolución 223

6.6 Ejercicios sugeridos 231

7 Apéndices **237**

7.1 Material extra 237

7.2 Observaciones al material 238

Chapter 1

Análisis Combinatorio

El Análisis Combinatorio es la rama de la Matemática Discreta que se ocupa del estudio de las formas de contar, coloquialmente podemos decir que *estudia cómo contar sin contar*. Aparte del interés que tiene en sí misma, la combinatoria tiene aplicaciones de gran importancia en otras áreas como la teoría de códigos, la probabilidad y estadística, el análisis de algoritmos, la ciencia de datos, etc.

Nos referiremos a análisis combinatorio, teoría combinatoria, conteo, etc. de manera indistinta.

1.1 Reglas de la suma y del producto.

Comencemos presentando dos principios básicos del conteo: las reglas de la suma y del producto. Veremos que estos principios los aplicamos a diario y nos resultan extremadamente naturales. Y como suele suceder en estos casos, es más difícil *formalizarlos* que aplicarlos. Sólo una comprensión profunda nos va a permitir describirlos en lenguaje matemático, que es nuestro objetivo.

En efecto, supongamos que vamos al cine. Están exhibiendo 2 películas de terror y 3 de acción. Podemos elegir entonces entre 5 películas. Supongamos que hemos elegido y pasamos por el candy bar. Las opciones son pochoclo o maní con chocolate acompañadas de gaseosas de 3 sabores. Las combinaciones de menú para disfrutar nuestra peli son entonces 6. ¿Qué es diferente en cada caso?

Si nos ponemos a analizar estas respuestas tan naturales, observamos que en la elección de película, al elegir una ya no podemos tomar ninguna decisión sobre las otras. En el caso de los menúes, si elegimos pochoclo podemos luego elegir Fanta o Coca-Cola o Sprite. Sutil, ¿no? En el primer caso aplicamos la regla de la suma. En el segundo, la regla del producto.

Vamos ahora a intentar describir este tipo de situaciones de manera más general. Comenzamos con la regla suma.

Regla de la suma: Si una primera tarea puede realizarse de m formas, mientras que una segunda tarea puede realizarse de n formas, y no es posible realizar ambas tareas simultáneamente, entonces la tarea de llevar a cabo cualquiera de ellas puede realizarse de $m+n$ formas.

Nota 1.1.1 *Vale destacar que cuando decimos que una tarea puede realizarse de m formas, supondremos que estas m son distintas, salvo que se indique lo contrario.*

Ejemplo 1.1.2 *La biblioteca de la facultad tiene 15 libros de Matemática Discreta y 7 de Geometría Analítica. Por la regla de la suma, un estudiante puede elegir entre $15+7=22$ libros de texto para aprender acerca de alguno de estos temas.*

Claramente, esta regla puede ampliarse a más de dos tareas. En efecto, si suponemos que el estudiante está interesado, además en el área del Cálculo, y se sabe que la biblioteca cuenta con 35 libros de este tema, podemos asegurar que el estudiante podrá elegir entre $15+7+35=57$ libros para aprender acerca de alguno de estos temas.

Ahora bien, ¿cómo formulamos matemáticamente la regla de la suma? Para responder esta pregunta recurrimos a las propiedades de los conjuntos y de las funciones. Empecemos por la notación que vamos a utilizar.

- Sean $m, n, \in \mathbb{N}$, $m \leq n$. Notaremos al conjunto de números enteros entre m y n de la siguiente forma
$$[\![m,n]\!] = \{m, m+1, \cdots, n\} = \{k \in \mathbb{N}\colon\ m \leq k \leq n\}.$$
- Cantidad de elementos del conjunto: $|[\![m,n]\!]| = n-(m-1) = n-m+1$.

La cantidad de elementos de un conjunto se conoce como el cardinal del conjunto. Formalmente:

Definición 1.1.3 *Un conjunto X tiene* ***cardinalidad*** *n, con $n \in \mathbb{N}$, si existe una función biyectiva $f\colon [\![1,n]\!] \to X$. El cardinal del conjunto X se denota $|X| = n$. Para $X = \emptyset$ definimos $|X| = 0$. Todo conjunto que tenga cardinalidad n, para algún $n \in \mathbb{N}$ se dirá un conjunto finito.*

El siguiente Teorema se conoce como Principio de Adición, y es la formalización de la regla de la suma.

Teorema 1.1.4 ***(Principio de Adición)*** *Si A y B son dos conjuntos finitos disjuntos entonces*
$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Demostración. Siendo A y B conjuntos finitos, existen n y m naturales y dos funciones biyectivas $f\colon [\![1,n]\!] \to A$ y $g\colon [\![1,m]\!] \to B$.
La función

$$h\colon [\![1,n+m]\!] \to A\cup B \,/\, h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [\![1,n]\!] \\ g(x-n), & x \in [\![n+1,n+m]\!] \end{cases}$$

es biyectiva puesto que está definida por leyes de dos funciones biyectivas que no se solapan en sus dominios ni codominios (observar que una de las leyes es la traslación de la función g, luego también es es biyectiva). Luego $|A\cup B| = n+m = |A|+|B|$. ∎

El siguiente Corolario justifica la ampliación de la regla de la suma a más tareas. Su demostración queda como ejercicio.

Corolario 1.1.5

1. *Si A_1, $A_2, \cdots, A_n$ son conjuntos disjuntos dos a dos entonces* $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$.

2. *Si A, B son conjuntos finitos entonces* $|A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B|$.

¿Cómo se aplica el teorema para justificar la respuesta al Ejemplo 1? Si llamamos A al conjunto de libros de Matemática Discreta y con B al conjunto de libros de Geometría Analítica, tenemos que ambos conjuntos son disjuntos, $|A| = 15$ y $|B| = 7$. Luego, elegir alguno de los libros es elegir un libro del conjunto unión $A\cup B$, que tiene $|A\cup B|$ elementos. El teorema dice que $|A\cup B| = |A|+|B| = 15+7 = 22$.

Pasemos ahora a la regla del producto.

Regla del producto: Si un procedimiento se puede descomponer en las etapas primera y segunda, de manera que existen m resultados posibles de la primera etapa, y, para cada uno de estos resultados existen n resultados posibles para la segunda etapa, entonces el procedimiento total se puede realizar, en el orden dado, de mn formas.

Ejemplo 1.1.6 *Veamos algunos ejemplos:*

1. *Se tienen en una heladeria 8 sabores y 3 toppings. Cada copa helada lleva un sabor y un topping. Por la regla del producto, existen* $8x3 = 24$ *copas heladas diferentes.*

2. *Las patentes del Mercosur para la Argentina cuentan de 2 letras, 3 números y 2 letras, (por ejemplo* AA 345 EX*). Argentina descartó la letra Ñ para que no sea confundida con la N. ¿Qué cantidad de autos es posible patentar?*

3. *Queremos plantear un problema donde las variables son sólo letras, o bien una letra seguida de un número. ¿Entre cuántas variables puedo elegir si*
   i) las mayúsculas y minúsculas son indistinguibles?
   ii) se distingue entre mayúsculas y minúsculas?

4. *Las ciudades A, B, y C están conectadas de la siguiente manera: hay seis caminos de A a B y cuatro de B a C, pero ninguno de A a C directamente. ¿De cuántas maneras podemos ir de A a C?*

El siguiente Teorema es la formalización de la regla del producto:

Teorema 1.1.7 *Si A, B son conjuntos finitos entonces $|A \times B| = |A||B|$.*

Demostración. Sean $A = \{a_1, \cdots, a_m\}$ y $B = \{b_1, \cdots, b_n\}$. Tenemos que probar que $|A \times B| = mn$. Fijaremos n y haremos la prueba por inducción sobre m.

1. $m = 1$. $A \times B = \{(a_1, b_1), \cdots, (a_1, b_n)\}$. Definiendo la función $f\colon [\![1, n]\!] \to A \times B$ por $f(i) = (a_1, b_i)$, resulta que f es biyectiva y por lo tanto $|A \times B| = n = 1 \cdot n$ como queríamos ver.

2. Supongamos ahora que si A tiene m elementos entonces $|A \times B| = m \cdot n$. Queremos ver que esto es válido también para $m + 1$.
   Sea entonces $A = \{a_1, \cdots, a_{m+1}\}$. Poniendo $A \times B = ((A - \{a_{m+1}\}) \times B) \cup (\{a_{m+1} \times B\})$, resulta que hemos escrito a $A \times B$ como unión disjunta de conjuntos y, utilizando el principio de adición y la HI, resulta que

$$|A \times B| = mn + n = (m + 1)n.$$

■

Hagamos esta vez el análisis reverso: ¿cómo se puede interpretar el siguiente Corolario?

Corolario 1.1.8 *Si A_1, $A_2, \cdots, A_n$ son conjuntos finitos, entonces*

$$|A_1 \times A_1 \times \cdots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Justifiquemos el ejemplo de las copas heladas a partir del teorema: Sea A el conjunto de sabores, y sea B el conjunto de toppings. Tenemos que $|A| = 8$ y $|B| = 3$. Cada copa helada es un par sabor-topping, o lo que es lo mismo, un elemento (a, b) del producto cartesiano $A \times B$. Luego la cantidad de copas diferentes es la cantidad de elementos del producto cartesiano $A \times B$, que según el teorema es $|A \times B| = |A||B| = 8.3 = 24$.

Tanto la regla de la suma como la del producto pueden ser aplicadas reiteradamente. A veces es necesario combinar estas reglas de conteo para la solución de un problema.

Ejemplo 1.1.9 *Una persona visita dos tiendas con intención de comprar un pantalón. En la primera tienda hay seis modelos diferentes y para cada uno hay tres colores. En la segunda hay diez modelos y cuatro colores para cada modelo. ¿Entre cuántos pantalones tiene que escoger la persona?*

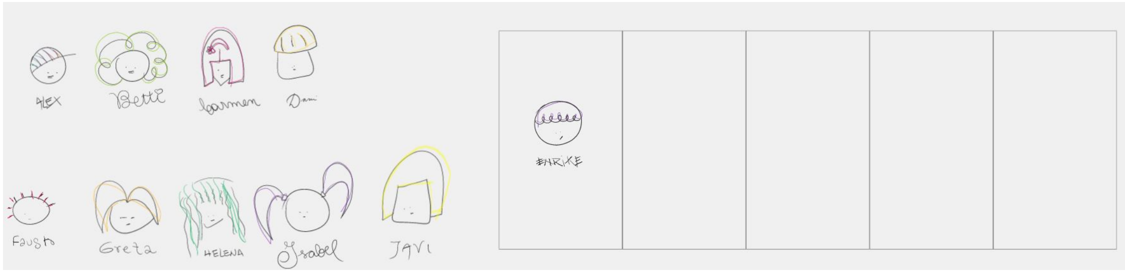
1.2 Disposiciones lineales. Permutaciones.

Hay problemas de conteo cuya solución quizás no es tan inmediata pero que con un poquito de análisis podemos, intuitivamente, llegar a su respuesta. Pensemos ahora en el siguiente ejemplo: en un grupo de 10 estudiantes, se desea elegir a 5 y ubicarlos en fila para tomar una foto. ¿Cuántas fotos distintas podemos tomar?

En principio no podemos dar una respuesta que se presente naturalmente, sino que debemos razonar. Razonemos, entonces: observemos que si bien cualquiera de los 10 estudiantes puede ocupar el lugar de la izquierda, sólo podremos elegir entre los 9 restantes para ocupar el segundo lugar. Una vez que elegimos quién se ubicará en el segundo lugar, nos queda elegir entre 8 estudiantes para completar la tercera ubicación, y así sucesivamente.

Seamos más gráficxs: supongamos que nuestrxs estudiantes son Alex, Betti, Carmen, Dani, Enrique, Fausto, Greta, Helena, Isabel y Javi:

Para la primera elección tenemos 10 posibilidades. Supongamos que elegimos a Enrique:



Para la segunda elección quedan entonces 9 posibilidades, pues lxs estudiantes no pueden clonarse. Supongamos que elegimos a Helena:

Para la tercera elección quedan entonces 8 posibilidades. Supongamos que elegimos a Alex:

Para la penúltima elección quedan entonces 7 posibilidades. Supongamos que elegimos a Carmen:

Finalmente, para la última elección nos quedan sólo 6 posibilidades. Supongamos que elegimos a Isabel:

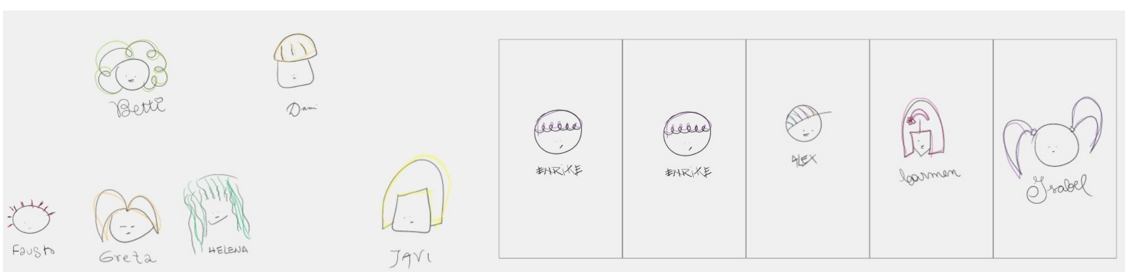
Obtenemos así una foto posible.

Analicemos un poco el proceso.

En primer lugar, observemos que si hubiésemos elegido primero a Helena y luego a Enrique, la foto obtenida no será la misma:

Esto nos da la pauta de que **el orden** en el proceso de elección **es muy importante**.

En segundo lugar, observemos que la siguiente foto es imposible:



Esto nos da la pauta de que **la repetición** en el proceso de elección **no es posible**.

Ahora que hemos explorado un poco más cómo resolver este problema, intentemos ir enunciando el proceso de a poco.

Definición 1.2.1 *Dada una colección de n objetos distintos, cualquier disposición (lineal) de estos objetos se denomina* permutación *de la colección.*

Ejemplo 1.2.2 *Consideremos las cinco vocales de nuestro alfabeto. ¿De cuántas formas podemos permutarlas? Si, en cambio, queremos disponer de dos de estas letras, ¿cuántas permutaciones de tamaño dos podemos realizar?*

En general, si existen n objetos distintos a los que podemos denotar con a_1, a_2, ..., a_n y r es un entero $1 \leq r \leq n$, entonces, por la regla del producto, el número de permutaciones de tamaño r para los n objetos es

$$\underset{\text{1ra. posic.}}{n} \quad \times \quad \underset{\text{2da. posic.}}{(n-1)} \quad \times \quad \underset{\text{3ra. posic.}}{(n-2)} \quad \times \quad \cdots \quad \times \quad \underset{\text{r-ésima posic.}}{(n-r+1)}$$

y lo notaremos con $P(n,r)$. Para $r = 0$, $P(n,0) = 1$.

Una forma más práctica para escribir este tipo de productos es mediante la utilización del *símbolo factorial* que se define:

$$\begin{aligned} &0! = 1 \\ &n! = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Luego,

$$P(n,r) = n(n-1)\cdots(n-r+1) \times \frac{(n-r)(n-(r+1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1)}{(n-r)(n-(r+1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1)} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Ejemplo 1.2.3 *El número de permutaciones de la palabra MURCIÉLAGO es* $10!$. *Si sólo se utilizan 4 de las letras, el número de permutaciones (de tamaño 4) es* $P(10,4) = \frac{10!}{(10-4)!}$. *Si se permiten repeticiones de las letras, el número de secuencias posibles de 12 letras es* 10^{12}.

Evidentemente la formalización matemática del concepto de permutaciones o disposiciones lineales requiere de esfuerzo. El siguiente ejemplo nos da una pista para iniciar el análisis riguroso necesario.

Supongamos que tenemos el conjunto $X = \{1,2,3\}$ y queremos saber cuántas funciones $f \colon X \to X$ existen.
Si asociamos a cada posible función con la terna $(f(1), f(2), f(3))$ entonces tendremos las siguientes posibilidades:

$(1,1,1)$	$(1,1,2)$	$(1,1,3)$	$(1,2,1)$	$(1,2,2)$	**(1,2,3)**	$(1,3,1)$	**(1,3,2)**	$(1,3,3)$
$(2,1,1)$	$(2,1,2)$	**(2,1,3)**	$(2,2,1)$	$(2,2,2)$	$(2,2,3)$	**(2,3,1)**	$(2,3,2)$	$(2,3,3)$
$(3,1,1)$	**(3,1,2)**	$(3,1,3)$	**(3,2,1)**	$(3,2,2)$	$(3,2,3)$	$(3,3,1)$	$(3,3,2)$	$(3,3,3)$

Ası, hemos identificado por ejemplo la función $f : \{1, 2, 3\} \mapsto \{1, 2, 3\}$ que asigna $f(1) = 2$, $f(2) = 2$ y $f(3) = 3$ con la terna $(2, 2, 3)$.
Y la terna $(3, 1, 2)$ define unívocamente a la función $f : \{1, 2, 3\} \mapsto \{1, 2, 3\}$ que asigna $f(1) = 3$, $f(2) = 1$ y $f(3) = 2$.
Observemos que de las 27 posibles funciones que existen, sólo 6 son inyectivas.

De este análisis sigue que:

- **Preguntarnos cuántas funciones $f\colon X \to X$ existen es equivalente a preguntarnos cuántas disposiciones lineales de tres elementos con repeticiones pueden realizarse.**
  Por la regla del producto, sabemos que la respuesta a esta pregunta es: $3^3 = 27$.

- **Preguntarnos cuántas funciones inyectivas $f\colon X \to X$ existen es equivalente a preguntarnos cuántas permutaciones de tres elemento pueden realizarse.**
  Vimos que la respuesta a esta pregunta es: $P(3) = 3! = 6$.

Más formalmente, tenemos el siguiente Teorema.

Teorema 1.2.4 *Sean A y B dos conjuntos finitos con $|A| = n$ y $|B| = m$. Si $\mathcal{F}(A, B)$ es el conjunto de **todas** las funciones de A en B, entonces $|\mathcal{F}(A, B)| = m^n$.*

Demostración. Basta observar que si f es una función de A en B y, si ponemos $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$, entonces $f(a_i) = b_i$ donde b_i es algún elemento de B. Podemos así, identificar a f con la *n-upla* $(f(a_1), \cdots, f(a_n)) \in B \times \cdots \times B$. Por Teorema 1.1.7, la cantidad de elementos de $B \times \cdots \times B$ es m^n. Luego $|\mathcal{F}(A, B)| = m^n$. ∎

Al conjunto de todos los subconjuntos de A (incluyendo al conjunto vacío y al mismo A) se lo conoce como el conjunto de *partes de* A, y se denota por $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subset A\}$. Podemos identificar a cada subconjunto $B \subset A$ con la función llamada función característica o indicadora del conjunto B

$$\chi_B\colon A \to \{0, 1\} \;/\; \chi_B(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin B. \\ 1, & \text{si } x \in B \end{cases}$$

Claramente, $\chi_\emptyset(x) = 0, \forall\, x \in A$ y $\chi_A(x) = 1, \forall\, x \in A$.

La correspondencia $B \longleftrightarrow \chi_B$ es biunívoca. Luego, si $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$, contar la cantidad de subconjuntos B de A es equivalente a contar la cantidad de funciones características χ_B cuyo dominio es A. Aplicando el teorema anterior resulta que

$$|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{F}(A, \{0, 1\})| = 2^n.$$

Nota 1.2.5 *Recordemos que una función $f\colon A \to B$ es una relación de A en B en la que cada elemento de A aparece exactamente una vez como la primer componente de un par ordenado en la relación.*

Por otro lado, vimos que cualquier subconjunto de $A \times B$ es una relación de A en B, luego

$$\mathcal{F}(A, B) \subset \mathcal{P}(A \times B).$$

En particular si $|A| = n$ y $|B| = m$, se verifica que $|\mathcal{P}(A \times B)| = 2^{mn}$ y $|\mathcal{F}(A, B)| = m^n \leq 2^{mn}$.

Utilizaremos también las siguientes notaciones:

$\mathcal{F}_i(A, B) = \{f \in \mathcal{F}(A, B) : f \, \textit{inyectiva}\}$ y $\mathcal{F}_b(A, B) = \{f \in \mathcal{F}(A, B) : f \, \textit{biyectiva}\}$.

Veremos al finalizar la unidad que si $|A| > |B|$ (o sea, $n > m$), entonces $|\mathcal{F}_i(A, B)| = 0$. Esto quiere decir que si una función parte de un conjunto A que tiene más elementos que el conjunto de llegada B, esa función no puede ser inyectiva.

Del siguiente teorema seguirá la formalización de la noción de permutación.

Teorema 1.2.6 *Si $|A| = n$, $|B| = m$ y $n \leq m$, entonces $|\mathcal{F}_i(A, B)| = \frac{m!}{(m-n)!}$.*

Demostración. Como antes, si $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$, podemos identificar a f con la $n - upla$ $(f(a_1), \cdots, f(a_n)))$ donde debido a la inyectividad de f podemos asegurar que hay:

- m valores posibles para $f(a_1)$,
- $m - 1$ valores posibles para $f(a_2)$,
- $\cdots$
- $m - (n - 1)$ valores posibles para $f(a_n)$.

Luego, $|\mathcal{F}_i(A, B)| = m(m-1)(m-2)\cdots(m-(n-1)) = \frac{m!}{(m-n)!}$. ∎

Corolario 1.2.7 *Si $n = m$ entonces $|\mathcal{F}_b(A, B)| = m!$.*

Nota 1.2.8 *Como dijimos anteriormente, podemos hacer la siguiente asociación*

disposiciones lineales $\longleftrightarrow$ ***funciones***

Por ejemplo:

1. *Queremos saber cuántas banderas se pueden hacer con tres bandas verticales de colores rojo, blanco, azul y verde, si se permiten dos o más franjas del mismo color...*

   posible disposición: <u>*1° color*</u> <u>*2° color*</u> <u>*3° color*</u> $\longleftrightarrow$ $f\colon \{1, 2, 3\} \to \{R, B, A, V\}$

Luego, por teorema 1.2.4:

$$\text{Cantidad de banderas } \underline{4} \times \underline{4} \times \underline{4} \quad \longleftrightarrow \quad |\mathcal{F}(\{1,2,3\}, \{R,B,A,V\})| = 4^3 = 64.$$

2. *Si queremos saber cuántas banderas se pueden hacer con tres bandas verticales de colores rojo, blanco, azul y verde, si NO se permiten dos o más franjas del mismo color...*

   posible disposición: $\underline{1^\circ \text{ color }}\ \underline{2^\circ \text{ color }}\ \underline{3^\circ \text{ color}} \quad \longleftrightarrow \quad f\colon \{1,2,3\} \to \{R,B,A,V\}$

   Luego, por teorema 1.2.6:

   $$\text{Cantidad de banderas } \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} \quad \longleftrightarrow \quad |\mathcal{F}_i(\{1,2,3\}, \{R,B,A,V\})| = \tfrac{4!}{(4-3)!} = 24.$$

3. *Si en un colectivo hay* 10 *asientos vacíos, ¿de cuántas maneras distintas pueden sentarse 7 personas?*

   $$|\mathcal{F}_i([\![1,7]\!], [\![1,10]\!])| = \frac{10!}{(10-7)!} = 604800.$$

4. *Si bien pensar a las disposiciones como funciones formaliza nuestros planteos, no siempre es fácil definirlas y, por ejemplo, para contar cuántos números capicúas de cinco dígitos hay, es mejor razonar con un esquema, como hicimos en la sección anterior:*

   $$\text{número capicúa}\, xyzyx, \quad x \in [\![1,9]\!],\ y,\ z \in [\![0,9]\!].$$

Definición 1.2.9 *Sea A un conjunto de n elementos y sea $r \leq n$. Llamaremos* ***permutación*** *o* ***disposición lineal ordenada*** *de n elementos de A a cualquier función inyectiva $f\colon [\![1,n]\!] \to A$. Es común representar una permutación con la $n-$upla $(a_1, \cdots, a_n)$ donde $a_i \in A$ son todos distintos.*

Corolario 1.2.10 $P(n) = n!$ *y* $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Ahora que hemos formalizado el concepto, veamos cómo podemos aplicarlo a nuevas situaciones, a saber: cuando se repiten los objetos a permutar y cuando la disposición es *circular* en lugar de lineal.

Analicemos qué ocurre si quisiéramos permutar ahora las letras de una palabra donde hay letras repetidas.

Ejemplo 1.2.11

1. *Consideremos la palabra CASA. Si las letras A fueran distinguibles, digamos CA_1SA_2, claramente tendríamos $P(4,4) = 4!$ permutaciones diferentes. Ahora bien, si fueran indistinguibles, podemos realizar la siguiente tabla donde a cada par de casos distintos le asociamos sólo:*

$$\begin{array}{cc|c}
CSA_1A_2 & CSA_2A_1 & CSAA \\
A_1CSA_2 & A_2CSA_1 & ACSA \\
A_1A_2CS & A_2A_1CS & AACS \\
SA_1A_2C & SA_2A_1C & SAAC \\
CA_1SA_2 & CA_2SA_1 & CASA \\
A_1SA_2C & A_2SA_1C & ASAC \\
SA_1CA_2 & SA_2CA_1 & SACA \\
A_1CA_2S & A_2CA_1S & ACAS \\
SCA_1A_2 & SCA_2A_1 & SCAA \\
A_1SCA_2 & A_2SCA_1 & ASCA \\
A_1A_2SC & A_2A_1SC & AASC \\
CA_1A_2S & CA_2A_1S & CAAS
\end{array}$$

   En este caso, tenemos un par de letras repetidas y podemos ver que se pueden realizar 12 permutaciones.

$$\textit{Cant. de permut. de 4 con dos objetos repetidos} = \frac{4!}{2}.$$

2. *Supongamos ahora que queremos permutar las letras de la palabra BANANA. Si razonamos como en el ejemplo anterior, suponiendo primero que las tres letras son distinguibles, $BA_1N_1A_2N_2A_3$, tendríamos $6!$ permutaciones.*
   Ahora bien, ¿cuántas de estas disposiciones son en realidad las mismas si las letras son indistinguibles?
   Con respecto a la letra A, las $3!$ formas de combinar las tres letras A corresponden a la misma combinación:

$$\begin{array}{lcl}
BA_1N_1A_2N_2A_3 & & \\
BA_1N_1A_3N_2A_2 & & \\
BA_2N_1A_3N_2A_1 & \longrightarrow & BAN_1AN_2A \\
BA_2N_1A_1N_2A_3 & & \\
BA_3N_1A_2N_2A_1 & & \\
BA_3N_1A_1N_2A_2 & &
\end{array}$$

   Con respecto a la letra N, las $2!$ formas de combinar las dos letras N corresponden a la misma combinación:

$$BAN_1AN_2A, BAN_2AN_1A \longrightarrow BANANA.$$

Por lo tanto, la cantidad de permutaciones de letras de la palabra BANANA, donde hay 3 letras A y 2 letras N, es:

$$\textit{número de disposiciones de las letras BANANA } = \frac{6!}{3!2!}.$$

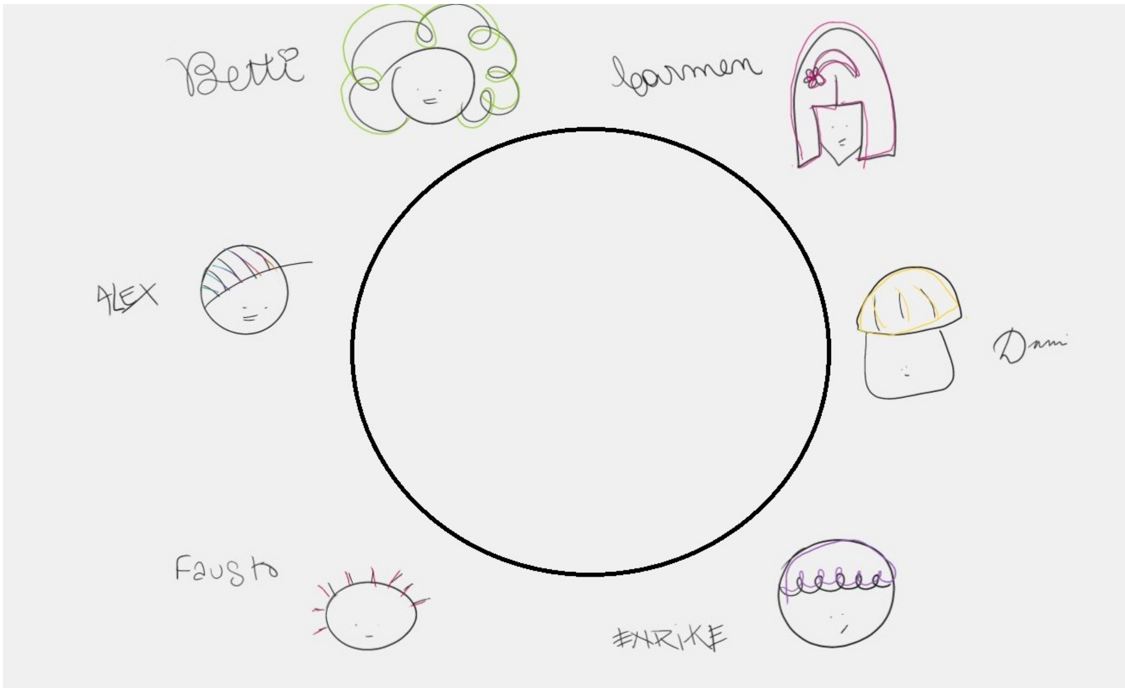
En general...

Si existen n objetos con n_1 de un primer tipo, n_2 de un segundo tipo,..., y n_r de un r-ésimo tipo, donde $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$, entonces existen $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$ disposiciones lineales de los n objetos. (Los objetos del mismo tipo son indistinguibles).

Ejemplo 1.2.12 *Determinar el número de trayectorias escalonadas del plano xy del punto* $(2,1)$ *al* $(7,4)$*, entendiendo por trayectoria escalonada a aquellas formadas por escalones individuales que van una unidad hacia la derecha (D) o una unidad hacia arriba (A).*
Notemos que cada trayectoria consta de 5 movimientos hacia la derecha y 3 hacia arriba (DDADADAD es un camino posible), luego, la cantidad de trayectoria corresponde a la cantidad de disposiciones lineales con repeticiones de 5 letras D y 3 letras A, y esto se obtiene realizando el cálculo $\frac{8!}{5!3!} = 56$.

Un caso especial es el de las **disposiciones circulares**, esto es, en vez de ubicar los elementos en fila, lo hacemos de forma circular.

Ejemplo 1.2.13 *Supongamos que queremos designar los lugares de 6 estudiantes Alex, Betty, Carmen, Dani, Enrique y Fausto alrededor de una mesa circular.*



1. *Si las disposiciones fueran lineales, claramente tendríamos* $6!$ *formas diferentes de realizar las disposiciones. Ahora bien, si la disposición es alrededor de una mesa circular las siguientes disposiciones serán indistinguibles:*

$$ABCDEF,\ BCDEFA,\ CDEFAB,\ DEFABC,\ EFABCD,\ \text{ y } FABCDEF.$$

O sea que 6 disposiciones lineales corresponden a una misma disposición circular, ya que dos disposiciones circulares serán idénticas si podemos obtener una de la otra mediante una rotación. Podemos deducir entonces que existen $\frac{6!}{6} = 5! = 120$ *disposiciones de A, B, C, D, E y F alrededor de una mesa redonda.*

2. *Otra forma de resolver este mismo problema, es plantear que fijamos la letra A en un lugar determinado (que luego será, eventualmente, cualquier lugar alrededor de la mesa). Observemos que podemos ocupar los lugares que faltan ubicando de manera lineal las 5 letras restantes y esto puede hacerse de* $5! = 120$ *maneras diferentes.* ***Haber fijado una letra, transformó el problema de las disposiciones circulares en un problema de disposiciones lineales.***

3. *Supongamos ahora que las 6 personas que deseamos ubicar alrededor de la mesa son 3 científicxs y 3 artistas, y queremos ubicarlas alternando las profesiones.*
Tenemos entonces C_1, C_2, C_3 *y* A_1, A_2 *y* A_3. *Podemos proceder según el método anterior y fijar una letra cualquiera, digamos* C_3. *Pero entonces tenemos 3 opciones*

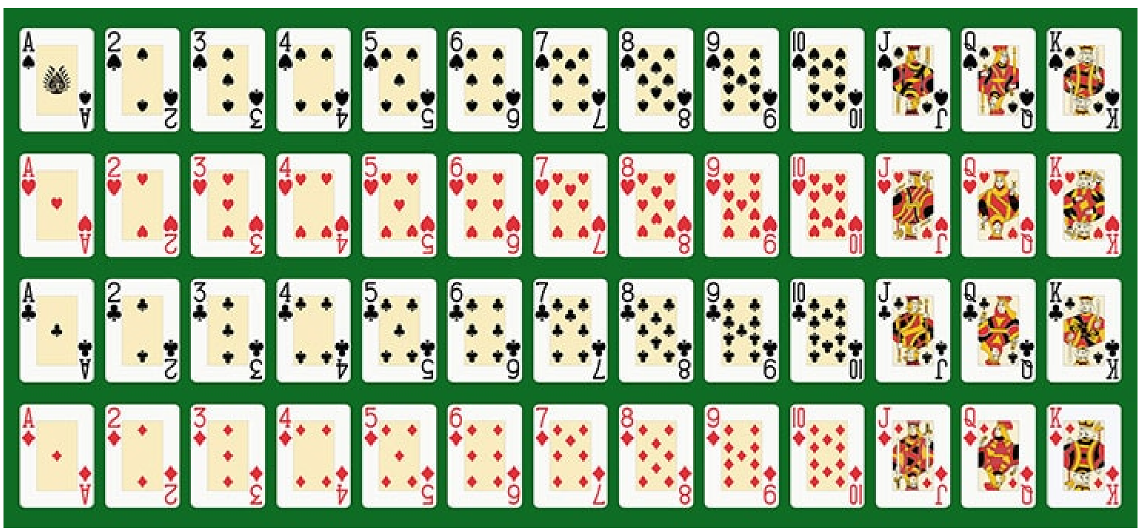
(a elegir entre A_1, A_2 y A_3) para el siguiente lugar, dos opciones (a elegir entre C_1 y C_2) para el tercero, y así sucesivamente...
O sea que una vez bien planteado el problema, lo resolvemos mediante la regla del producto y tenemos por lo tanto

$$3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 12$$

maneras diferentes de sentar a las seis personas alrededor de la mesa redonda alternando las profesiones.

1.3 Combinaciones. El Binomio de Newton.

Vamos a estudiar ahora problemas como el siguiente. La baraja francesa es un conjunto de naipes, formado por 52 unidades repartidas en cuatro palos: corazones (C), diamantes (D), tréboles (T) y picas (P). Cada palo tiene 13 cartas: A,2, $3, \cdots, 9, 10$,J, Q y K.

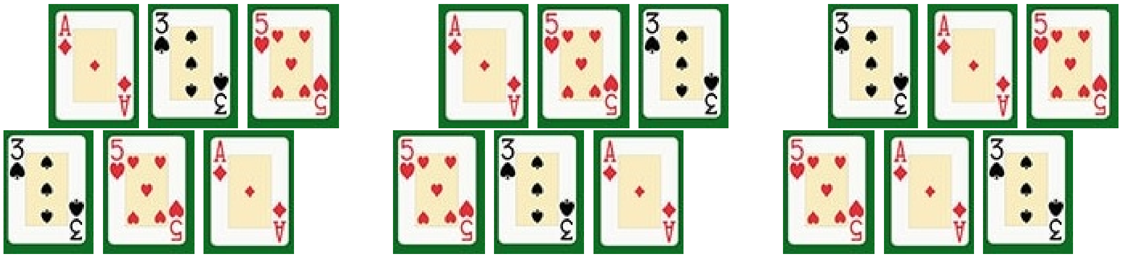


Si nos piden sacar tres cartas, una tras otra y sin sustituirlas, ¿de cuántas formas podemos hacerlo?

Si nos importara el orden en que disponemos de las tres cartas, tendríamos

$$52 \times 51 \times 50 = P(52, 3).$$

Ahora bien, en este caso las siguientes disposiciones se corresponden al mismo conjunto de cartas elegidas:



Es decir, **no nos interesa el orden en el cual las cartas son elegidas** pues nos interesa cuáles son las cartas y no la posición relativa que ocupan. Así, las 6 opciones $AD - 3P - 5C$, $AD - 5C - 3P$, $3P - AD - 5C$, $3P - 5C - AD$, $5C - 3P - AD$ y $5C - AD - 3P$ representan un mismo caso. Observemos que estas 6 opciones no son otra cosa que la permutación de 3 cartas, es decir, 3!. Luego, la cantidad de formas diferentes que tenemos de extraer 3 cartas sin importar el orden es de $\frac{P(52,3)}{3!} = \frac{52!}{49!3!}$.

Lo que estamos eligiendo es una *combinación* de tres cartas de un total de 52. Tratemos de describir entonces este nuevo concepto, el de combinación.

Si existen n objetos distintos, cada selección o **combinación** de r de esos objetos, sin hacer referencia al orden, corresponde a $r!$ permutaciones de tamaño r de los n objetos. Así, el número de combinaciones de tamaño r de una colección de tamaño n, que se denota $C(n,r)$, donde $0 \leq r \leq n$ está dado por

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}, \qquad 0 \leq r \leq n.$$

La formalización de este concepto es ahora inmediata (el esfuerzo lo hicimos antes!). Como hemos dicho en las combinaciones $C(n,r)$ no interesa el orden en la selección, luego si tomamos las permutaciones de r elementos tomados de n, tendremos $r!$ permutaciones de esos r elementos que para nosotros corresponderán a la misma combinación. Así, la formalización de las combinaciones sigue entonces del Teorema 1.2.6:

Corolario 1.3.1 $C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$.

En matemática esta cantidad se llama *número combinatorio* y tiene importancia en si misma, aparece de diversas formas y en infinidad de contextos. Sus simetrías no sólo son una simple curiosidad, sino que también son una gran herramienta.

Definición 1.3.2 *Se denomina* ***número combinatorio*** *al definido por* $\binom{n}{r} := \frac{n!}{(n-r)!r!}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}_0$ *y* $r \in \mathbb{N}_0$ *tal que* $0 \leq r \leq n$.

Resulta entonces que, el número combinatorio $\binom{n}{r}$ nos dice la cantidad de formas distintas que tenemos de elegir r elementos tomados de entre n elementos, **sin considerar el orden**.

*En adelante, será **fundamental** preguntarnos a la hora de plantear un problema, si **importa el orden, o no**.*

Ejemplo 1.3.3

1. *En una escuela secundaria, la profesora de gimnasia debe elegir a nueve estudiantes de segundo y tercer año para el equipo de voley femenino. Si hay 28 estudiantes en segundo y 25 en tercero, ella puede hacer la elección de* $\binom{53}{9} = 4.431.613.550$ *formas.*

2. *Supongamos ahora que la profesora debe formar cuatro equipos, de 9 integrantes cada uno, con las 36 estudiantes de su curso de primer año. ¿De cuántas formas puede elegir estos equipos?*

   Supongamos que denominamos a los equipos por A, B, C y D. Para armar el equipo A cuenta con $\binom{36}{9}$ *formas de elegir. A la vez, por cada una de esas formas, quedan ahora 27 estudiantes y puede elegir de* $\binom{27}{9}$ *formas para el equipo B. Nuevamente, por cada una de estas opciones, tenemos ahora* $\binom{18}{9}$ *posibles elecciones para el equipo C y finalmente restan* $\binom{9}{9} = 1$ *para el equipo D.*

   Por la regla del producto, resulta que la profesora puede elegir los cuatro equipos de

$$\binom{36}{9} \cdot \binom{27}{9} \cdot \binom{18}{9} \cdot \binom{9}{9} = \frac{36!}{9!27!} \cdot \frac{27!}{9!18!} \cdot \frac{18!}{9!9!} \cdot \frac{9!}{9!0!} = \frac{36!}{9!9!9!9!}$$

   formas.

3. *Otra forma de plantear el caso anterior es la siguiente. Alineamos a los 36 estudiantes:*

1°	2°	···	35°	36°
estudiante	estudiante	···	estudiante	estudiante

   Para seleccionar los 4 equipos podemos distribuir las letras A, B, C y D en los 36 espacios. O sea, debemos realizar disposiciones de 36 letras donde 4 de ellas se repiten 9 veces. Sabemos que esto se calcula por $\frac{36!}{9!9!9!9!}$.

Cadenas: En teoría de códigos y de lenguaje de computación, se consideran ciertas disposiciones llamadas *cadenas* (o strings), formadas a partir de un *alfabeto* que consta de

determinados símbolos.
Si el alfabeto consta de los símbolos 0, 1 y 2, entonces 01, 11, 21 y 20 son cuatro de las nueve cadenas de *longitud dos*. Posibles cadenas de entre las 27 de longitud 3 son: 000, 012 o 202.

En general, si n es un entero positivo, por la regla del producto existen 3^n cadenas de longitud n para el alfabeto $0, 1$ y 2. Si $x = x_1x_2\cdots x_n$ es una de estas cadenas, definimos el *peso* de x, que se denota $wt(x) = x_1 + \cdots + x_n$. Por ejemplo $wt(12) = 3$, $wt(210) = 3$ y $wt(101) = 2$.

Entre las 3^{10} cadenas de longitud 10, queremos determinar el número de ellas que tengan peso par. Observemos que esto depende sólo del número de unos que contenga! Completemos entonces la siguiente tabla para realizar el conteo:

Número de unos	**Número de cadenas**	**Explicaciones**
0	2^{10}	Cada posición puede ser ocupada por un 0 o un 2
2	$\binom{10}{2}\cdot 2^8$	Podemos elegir las posiciones de los dos 1 de $\binom{10}{2}$ formas, y por cada una de ellas habrá 2^8 formas de ubicar 0 y 2.
4	$\binom{10}{4}\cdot 2^6$	
6	$\binom{10}{6}\cdot 2^4$	
8	$\binom{10}{8}\cdot 2^2$	
10	$\binom{10}{10}$	

Luego, por la regla de la suma, el número de cadenas de longitud 10 que tienen peso par es:

$$2^{10} + \binom{10}{2}\cdot 2^8 + \binom{10}{4}\cdot 2^6 + \binom{10}{6}\cdot 2^4 + \binom{10}{8}\cdot 2^2 + \binom{10}{10} = \sum_{k=0}^{5}\binom{10}{2k}\cdot 2^{10-2k}.$$

Ejemplo 1.3.4 ***Un error muy escurridizo...***
Supongamos que queremos extraer 5 cartas de una baraja francesa.

- *¿Cuántas selecciones de cartas existen si pedimos que no hayan tréboles en la elección?*

  En este caso, tendremos que pensar en las combinaciones de todas las cartas menos los tréboles ($52 - 13 = 39$)*, esto es* $C(39, 5) = 575.757$.

- *¿Cuántas selecciones son posibles si pedimos que en el conjunto de 5 cartas haya AL MENOS un trébol?*

  Claramente, estas opciones son las que no se consideraron en el apartado anterior, luego tenemos
$$\binom{52}{5} - \binom{39}{5} = 2.598.960 - 575.757$$
  posibilidades.

- *Supongamos ahora que, para contestar la misma pregunta del ejercicio anterior, hacemos el siguiente razonamiento:*
  Como queremos tener al menos un trébol en la mano, contamos primero esta posibilidad, que puede hacerse de $\binom{13}{1}$ formas. Una vez que no tenemos que preocuparnos por tener un trébol, el resto de las posibilidades son $\binom{51}{4}$. Por la regla del producto, la cantidad de opciones son:
$$\binom{13}{1} \cdot \binom{51}{4} = 13 \cdot 249.900 = 3.248.700.$$
  Ups!!! Hay un millón de posibilidades de diferencia respecto de la respuesta dada anteriormente!!

  El error está en el razonamiento actual ya que las siguientes opciones:

  3T - 5T 3C QD AC y 5T - 3T 3C QD AC

  son distintas en este razonamiento, pero son idénticas en lo que de verdad nos concierne. O sea que estamos contando de más...

- *Una forma de contar esta situación de un modo parecido al anterior, PERO CORRECTO, es:*

N° de ♣	***N° de formas de selecc. este n°. de ♣***	***N° de cartas que NO son ♣***	***N° de formas de selec. este n° de NO ♣***
1	$\binom{13}{1}$	4	$\binom{39}{4}$
2	$\binom{13}{2}$	3	$\binom{39}{3}$
3	$\binom{13}{3}$	2	$\binom{39}{2}$
4	$\binom{13}{4}$	4	$\binom{39}{1}$
5	$\binom{13}{5}$	0	$\binom{39}{0}$

La suma de estas posibilidades $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\binom{13}{i}\binom{39}{5-i} = 2.023.203.$

La notación que utilizamos para el número combinatorio es universal: siempre va entre paréntesis y sus dos índices encolumnados: $\binom{n}{r}$. Aunque ahora nos parezca descabellado, existen extensiones de esta definición más allá de los números naturales (números complejos por ejemplo!). más aún, para lxs curiosos, pueden googlear *símbolos de Pochhammer*, íntimamente ligados a los números combinatorios y de fundamental utilización en el área de las Funciones Especiales, una exquisita rama de la matemática, de carácter transversal. Vamos entonces a aprender un poco sobre los números combinatorios y sus propiedades.

Proposición 1.3.5 *Sean $r \leq n$ dos enteros no negativos. Entonces:*

1. $\binom{n}{1} = n$.
2. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.
3. $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$ *(Triángulo de Pascal).*

Demostración. Ejercicio. ∎

Proposición 1.3.6 *Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Para todo $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $0 \leq k \leq n$, el número combinatorio $\binom{n}{k}$ es un número natural.*

Demostración. Consideremos la proposición

$$P(n)\colon\ \forall k \in \mathbb{N}_0,\ \text{ tal que } 0 \leq k \leq n,\ \text{ el número combinatorio },\binom{n}{k}\ \text{ es un número natural.}$$

Debemos probar que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$. Completar la prueba por inducción. *Ayuda: aplicar adecuadamente el triángulo de Pascal.* ∎

Veamos porqué el item 3 es llamado el Triángulo de Pascal: consideremos la siguiente configuración

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}$$

Que, resolviendo los números combinatorios nos da:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Estos números aparecen como coeficientes en las sucesivas potencias de la suma de dos números cualesquiera:

$$\begin{array}{rcl}
(x+y)^2 & = & x^2+2xy+y^2 \\
(x+y)^3 & = & x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \\
(x+y)^4 & = & (x+y)^3(x+y)=(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)(x+y) \\
 & = & (x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)x+(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)y \\
 & = & x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4
\end{array}$$

y, en general vale el siguiente teorema:

Teorema 1.3.7 ***(El teorema del binomio de Newton)*** *Sean $x,\ y \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}_0$. Entonces*

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= \binom{n}{0}x^ny^0+\binom{n}{1}x^{n-1}y^1+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\cdots+\binom{n}{n-1}x^1y^{n-1}+\binom{n}{n}x^0y^n \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k.
\end{aligned}$$

Demostración. Haremos la demostración por inducción:

- El caso $n=1$ claramente se verifica.
- Supongamos que $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$. Queremos probar entonces que $(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^ky^{n+1-k}$.

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n(x+y) = (x+y)^n x + (x+y)^n y \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right)x + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right)y \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k+1} \\
&= \binom{n}{n}x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]x^k y^{n-k+1} + \binom{n}{0}y^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0}x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^k y^{n-k+1} + \binom{n+1}{n+1}y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k y^{n-k+1}.
\end{aligned}$$

■

Nota 1.3.8 *Acabamos de mostrar que*

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\cdots(x+y) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k y^{n-k}$$

donde c_k es la cantidad de sumandos en los cuales aparece k veces la x y $n-k$ veces la y. Si aplicáramos arriba la propiedad distributiva, cada sumando sería una "palabra" de n letras formadas por letras x e y. El coeficiente c_k, corresponde a la cantidad de palabras de n letras en las que hay k letras x y $n-k$ letras y. Luego $c_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$.

Corolario 1.3.9

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = 0.$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n.$

Ejemplo 1.3.10 *El coeficiente de x^5y^2 en el desarrollo de $(x+y)^7$ es $\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = 21$. El coeficiente de a^5b^2 en el desarrollo de $(2a-3b)^7$ es $\binom{7}{5}(2)^5(-3)^2$.*

Teorema 1.3.11 *Sean $n_1, \cdots, n_r \in \mathbb{N}_0$ tales que $n_i \leq n$, $i = 1, \cdots, r$ y $n_1 + \cdots + n_r = n$. Entonces el coeficiente de $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r}$ en el desarrollo de $(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n$ es*

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}.$$

1.4 Combinaciones con repetición: Distribuciones.

Conforme hemos avanzado en este capítulo, la complejidad de los problemas ha ido en aumento. El concepto de *distribuciones* es uno de los más complejos, pero nos brinda solución a problemas que antes no eran sencillos de resolver. Cuando se permiten las repeticiones, hemos visto que, para n objetos distintos, una disposición de tamaño r de estos objetos puede obtenerse de n^r formas, para un entero $r \geq 0$. Ahora analizaremos el problema comparable para las combinaciones y de nuevo obtendremos un problema relacionado con el anterior cuya solución sigue de las reglas de conteo anteriores.

Ejemplo 1.4.1

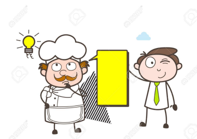
1. *Siete amigos van a cenar a un restaurante donde hay 4 menúes fijos entre los cuales pueden elegir. ¿Cuántas compras diferentes son posibles?*

Observemos que nos interesa el número de menúes de cada tipo que se encarguen sin importar el orden en que se encarguen.
Veamos algunas posibles representaciones del pedido (cada número corresponde a un menú):

a) $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4$
b) $1, 1, 1, 2, 2, 2, 4$
c) $1, 2, 2, 4, 4, 4, 4.$

No podemos decir que estamos haciendo combinaciones de 28 elementos tomados de a 7 ya que entre estos 28 elementos hay muchos repetidos... Tampoco son permutaciones con repeticiones pues no me interesa el orden en que pida los menúes...

Busquemos entonces otra forma de representar los mismos pedidos que antes. Para esto le preguntamos al mozo y al chef, que nos cuentan la ingeniosa forma que tienen de comunicarse de manera efectiva y sin posibilidad de equivocaciones.



Ambos nos muestran entonces un papelito que dice Así:

a) $x\,x\,|\,x\,x\,|\,x\,x\,|\,x$
b) $x\,x\,x\,|\,x\,x\;x\,|\,|\,x$
c) $x\,|\,x\,x\,|\,|\,x\,x\,x\,x.$

y nos explican que los x a la izquierda de la primera barra representan el primer menú, y así sucesivamente.
En este caso, podemos notar que cada posible pedido es una disposición lineal de letras x y barras "$|$". Esto es, ***debemos contar la cantidad de formas de disponer 10 letras donde hay 7 x y 3 barras****. O sea, tenemos $\frac{10!}{7!3!} = \binom{10}{3}$ formas diferentes de encargar el pedido.*

2. *¿De cuántas formas podemos distribuir siete manzanas y seis naranjas entre cuatro niños de modo de que cada uno reciba al menos una manzana?*

   Si cada niño recibe una manzana, en realidad debemos repartir 3 manzanas y 6 naranjas entre los 4 niños.

$$\textit{Opciones de reparto de manzanas: } m|m|m|,\ mm||m|,\ ||m|mm \to \frac{6!}{3!3!} = 20$$

$$\textit{Opciones de reparto de naranjas: } nn|n|n|nn,\ nnn||n|nn,\ nnn|n|n|n \to \frac{9!}{6!3!} = 84$$

   Por la regla del producto, podemos distribuir las frutas de $20 \cdot 84$ formas diferentes.

En general...

Si X es un conjunto con n elementos distintos, y queremos elegir r pero tenemos la posibilidad de repetir objetos en la elección, estamos considerando todas las disposiciones de r letras x y $n-1$ $|$, que se calcula: $\frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!} = \binom{n+r-1}{r}$.
Luego, el número de combinaciones de r objetos tomados de X permitiendo **repeticiones** es $C(r+n-1, r)$.

Nota 1.4.2 *En el ejemplo 1. $r = 7$ y $n = 4$. O sea que cuando trabajamos con combinaciones con repeticiones puede ser $r > n$. Pero observemos que en la forma de calcularlas, siempre debe ser $n + r - 1 \geq r$ (de acuerdo a nuestra definición de número combinatorio).*

La dificultad en la resolución de estos problemas radica fundamentalmente en entender qué cantidad juega el papel del n y qué cantidad juega el papel del r en la formulación. Hacer la analogía con las barras "'—"' y las cruces "'x"' puede ayudar a esclarecer este punto.

El siguiente ejemplo es un problema muy importante en matemática discreta, y hay que aprenderlo bien.

Ejemplo 1.4.3 *Soluciones enteras no negativas de ecuaciones:*

1. *Queremos determinar la cantidad de soluciones enteras no negativas de la ecuación*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \quad x_i \geq 0 \;\forall\, i = 1, \cdots, 4.$$

   Podríamos pensar que resolver esa ecuación en el conjunto de los naturales y el cero, es equivalente a disponer 7 elementos entre 4 casilleros (separados por 3 barras!), donde estos elementos son exactamente iguales (a una unidad). Luego tendremos $C(7 + 4 - 1, 7) = \frac{10!}{7!3!} = 120$ soluciones.

   Notemos que hubiera sido lo mismo preguntarnos de cuántas formas podemos distribuir 7 canicas en 4 recipientes.

2. *Supongamos que nos preguntamos ahora cuántas soluciones enteras no negativas hay de la inecuación*

$$x_1 + \cdots + x_6 < 10.$$

   Pero esto es equivalente a preguntarnos cuántas soluciones no negativas hay de la ecuación

$$x_1 + \cdots + x_6 + x_7 = 10 \quad \text{con } x_7 > 0.$$

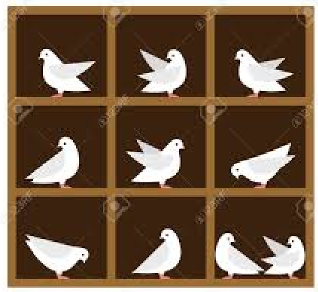
   O bien cuántas soluciones no negativas hay de la ecuación

$$y_1 + \cdots + y_6 + y_7 = 9 \quad \text{donde } y_i = x_i,\, i = 1, \cdots, 6 \;\text{ e }\; y_7 = x_7 - 1$$

   Por lo analizado antes sabemos que las soluciones de esta ecuación son $\frac{(9+6)!}{9!6!} = 5005$.

1.5 El principio de las casillas, o de las cajas, o del palomar, o de Dirichlet, o...

Para finalizar el capítulo de conteo veremos uno de los principios más reconocidos (y con más nombres populares!), el *principio del palomar*. Les sugerimos que googleen el término, hay infinidad de videos explicativos, algunos más ocurrentes que otros. En el Campus Virtual les dejaremos alguna selección. El principio del palomar nos indica que si hay 9 casillas y 10 palomas, en al menos una casilla hay más de una paloma:



Si hay n objetos para ser ubicados en m lugares, con $n > m$, en alguno de los lugares se situarán más de un objeto.

La formalización de este principio requiere, nuevamente, de la herramienta de las funciones.

Teorema 1.5.1 ***(Principio de las casillas.)*** *Sean $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $n > m$. Entonces no existe ninguna función inyectiva $f\colon [\![1,n]\!] \to [\![1,m]\!]$.*

Demostración. Definamos el conjunto

$$H := \{n \in \mathbb{N}\colon \ \text{existe un } \ m < n, \ \text{ y existe una función } \ f\colon [\![1,n]\!] \to [\![1,m]\!] \ \text{inyectiva}\ \}\,.$$

Debemos probar que $H = \emptyset$. Por el contrario, supongamos que esto no ocurre, o sea que H es un subconjunto de los naturales no vacío. Luego, por el principio del buen orden, debe existir un primer elemento de H, digamos $h \in H$. Luego, por definición de H, existe un $m < h$ y una $f\colon [\![1,h]\!] \to [\![1,m]\!]$ que es inyectiva.
Ahora bien, sea $c = f(h)$. Definimos la siguiente función

$$g\colon [\![1,m]\!] \to [\![1,m]\!],\, g(i) = \begin{cases} i & i \neq c, i \neq m \\ m, & i = c \\ c, & i = m \end{cases}\,.$$

Claramente g es biyectiva. Además para todo $i \in [\![1,h-1]\!]$, $f(i) \neq c$. Luego $g(f(i)) \neq m$. Luego, si definimos la función j en $[\![1,h-1]\!]$ por $j(i) = g(f(i))$, resultará que $j(i) \in [\![1,m-1]\!]$. Hemos encontrado entonces una función inyectiva $j\colon [\![1,h-1]\!] \to [\![1,m-1]\!]$

donde $m-1 < h-1$. Pero entonces $h-1 \in H$! Absurdo!
Este absurdo proviene de suponer que $H \neq \emptyset$. Luego $H = \emptyset$. ∎

En otras palabras, el teorema nos dice expresamente que **si quisiéramos ubicar n objetos en m casillas, entonces tendremos que poner más de un elemento en alguna de las casillas**.

El principio del palomar es bastante sencillo de entender, no tan natural para formalizar y más difícil de probar. De todas formas, es indudablemente más difícil de aplicar a casos concretos. La manera de enunciar un problema o traducirlo al lenguaje matemático no siempre es clara, y hay que resolver muchos problemas para lograr darse una idea. Les daremos una lista de ejercicios pero consideramos que para un entendimiento más profundo seráa muy útil buscar más ejercicios, ejemplos, resoluciones y explicaciones por sus propios medios en libros especializados (www.youtube.com, por ejemplo).

Ejemplo 1.5.2

1. *Dadas 13 personas, hay dos que cumplen años el mismo mes.*
2. *En un conjunto A de $m \geq 2$ personas, existen dos personas con el mismo números de amigos (en A).*

   Vamos a convenir que a es amigo de a para todo $a \in A$. Además, notemos que

   $$a \text{ es amigo de } b \Leftrightarrow b \text{ es amigo de } a.$$

   Luego, si $f(x) :=$número de amigos de x en A, *resulta que:*

   - *Si alguien tiene m amigos, entonces nadie puede tener un solo amigo y $f\colon A \to [\![2, m]\!]$.*
   - *Si nadie tiene m amigos, entonces $f\colon A \to [\![1, m-1]\!]$.*

   En ambos casos, resulta que, por el principio de las casillas f no puede ser inyectiva y, por lo tanto existen dos personas que tienen la misma cantidad de amigos en A.

Corolario 1.5.3 *Si $n \neq m$, no existe $f\colon [\![1, n]\!] \to [\![1, m]\!]$ biyectiva.*

Corolario 1.5.4 *$f\colon [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ es inyectiva sii es sobreyectiva sii es biyectiva.*

Corolario 1.5.5 *Si A y B son dos conjuntos finitos con $|A| > |B|$, entonces cualquier función $\varphi : A \to B$ no puede ser inyectiva.*

Demostración. Sean n y m los cardinales de A y B, respectivamente, y sean $f : A \to [\![1, n]\!]$ y $g : B \to [\![1, m]\!]$ dos funciones biyectivas.

Luego la función composición $h : [\![1, n]\!] \to [\![1, m]\!]$ definida según $h = g \circ \varphi \circ f$ no puede ser inyectiva, por el principio del palomar, puesto que $n > m$.

Entonces existen $a \neq b$ en $[\![1, n]\!]$ tales que $h(a) = h(b)$. Por definición de h, sigue que $g \circ \varphi(f^{-1}(a)) = g \circ \varphi(f^{-1}(b))$. Como g es biyectiva, sigue que $\varphi(f^{-1}(a)) = \varphi(f^{-1}(b))$. Ahora bien, f es biyectiva, luego si $a \neq q$ debe ser $f^{-1}(a) \neq f^{-1}(b)$ y por lo tanto son dos elementos diferentes del dominio de φ que asumen el mismo valor por φ, luego ésta no puede ser inyectiva. ■

1.6 Ejercicios sugeridos

1. (a) El consejo directivo de una empresa farmacéutica tiene 10 miembros. Se ha programado una próxima reunión de accionistas para aprobar una nueva lista de ejecutivos (elegidos entre los miembros del consejo). cuántas listas diferentes, formada por un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero, puede presentar el consejo a los accionistas para su aprobación?

   (b) Tres miembros del consejo de directores (de la parte (a)) son médicos. cuántas listas de la parte (a) tienen:

      i. un médico nominado para la presidencia?

      ii. exactamente un médico en la lista?

      iii. al menos un médico en la lista?

2. Un sábado, cuando iban de compras, Juana y Teresa vieron a dos hombres alejarse en automóvil de la fachada de una joyeríaR, justo antes de que sonara la alarma contra robos. Aunque todo ocurrió muy rápido, cuando fueron interrogadas, pudieron dar a la policía la siguiente información acerca de la patente (que constaba de dos letras seguidas de cuatro dígitos) del auto que huyó. Teresa estaba segura de que la segunda letra de la placa era una O o una Q y que el último dígito era un 3 o un 8. Juana dijo que la primera letra de la patente era una C o una G y que el primer dígito era un 7. cuántas patentes diferentes tendrá que verificar la policía?

3. Para una carrera de 10 kilómetros, cada participante tiene la probabilidad de ganar uno de los trofeos de distinto tamaño que se entregarán a los primeros ocho corredores que lleguen a la meta.

   (a) Si 30 personas entran a la carrera, de cuántas formas será posible entregar los trofeos?

   (b) Si Roberta y Clara son dos de las participantes, de cuántas formas se pueden otorgar los trofeos de modo que ellas queden entre los tres primeros lugares?

4. Pamela tiene 15 libros distintos, de cuántas formas puede colocar sus libros en dos repisas de modo que haya al menos un libro en cada una? (Tenga en cuenta que los libros, en cualquier disposición, están ordenados uno junto a otro, y el primer libro de cada repisa queda en el lado izquierdo de la misma).

5. De cuántas formas es posible ordenar los símbolos $a, b, c, d, e, e, e, e, e$ de modo que ninguna e quede junto a otra?

6. Para la transmisión de mensajes en un sistema de comunicación se usa un alfabeto de 40 símbolos. cuántos mensajes distintos de 25 símbolos puede generar el transmisor si los símbolos se pueden repetir en el mensaje? cuántos, si 10 de los 40 símbolos sólo pueden aparecer como el primero o el último símbolo del mensaje, o en ambas posiciones a la vez, los restantes 30 símbolos pueden aparecer en cualquier parte, y las repeticiones de todos los símbolos están permitidas?

7. Un profesor de LCC tiene siete libros de programación diferentes en una estantería. Tres son de Racket, los otros cuatro de Python. De cuántas formas puede ordenar el profesor estos libros:

   (a) si no hay restricciones?

   (b) si los lenguajes deben alternar?

   (c) si todos los libros de Racket deben estar juntos?

   (d) si todos los libros de Racket deben estar juntos y los de Python también?

8. (a) cuántas disposiciones hay de todas las letras de la palabra SOCIOLOGICAL?

   (b) En cuántas están juntas la A y la G?

   (c) En cuántas están juntas todas las vocales?

9. cuántas trayectorias distintas hay de $(0, 0)$ a $(7, 7)$ en el plano xy si una trayectoria se construye paso a paso, yendo ya sea un espacio hacia la derecha o un espacio hacia arriba? cuántas de estas trayectorias hay de $(2, 7)$ a $(9, 14)$? Puede hacerse un enunciado general que incorpore estos dos resultados?

10. Una serie de letras de la forma *abcba*, en las que la expresión no cambia al invertir su orden, es un ejemplo de *palíndromo* de cinco letras.

    (a) Si una letra puede aparecer más de una vez, cuántos palíndromos de cinco letras se pueden formar? De seis letras?

    (b) Repita la parte (a) con la condición de que ninguna letra aparezca más de dos veces.

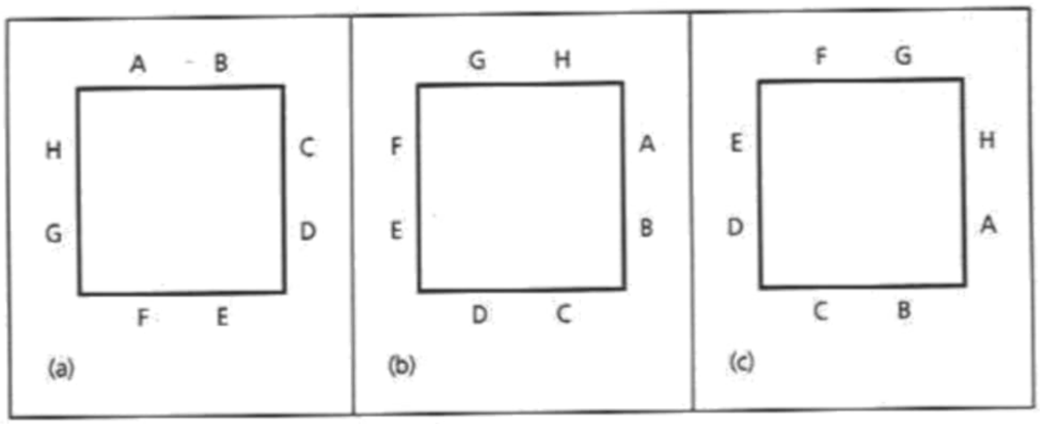
11. (a) De cuántas formas puede un estudiante responder un examen de 10 preguntas de verdadero o falso?

    (b) De cuántas formas puede un estudiante responder un examen de la parte (a) si es posible dejar una pregunta sin respuesta para evitar que se penalice una respuesta equivocada?

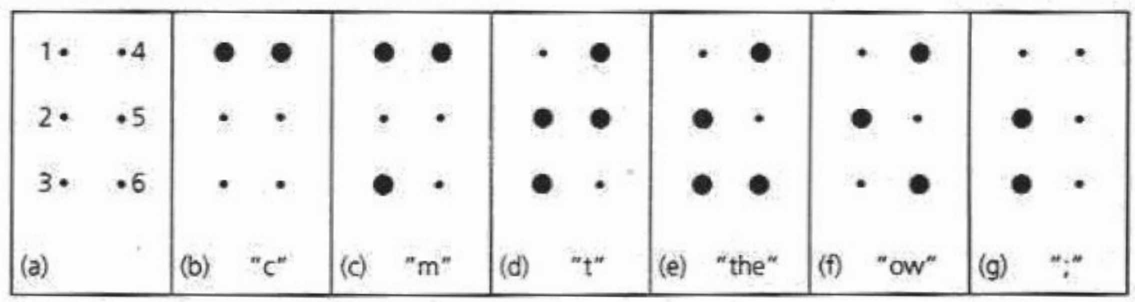
12. (a) De cuántas formas se pueden sentar ocho personas, $A, B, \ldots, H$ alrededor de una mesa cuadrada de la Figura donde las subfiguras (a) y (b) se consideran iguales pero distintas de la (c)?

    (b) Si dos de las ocho personas, digamos A y B, no se llevan bien, cuántas disposiciones diferentes en las que A y B no se sienten juntos son posibles?

    (c) cuántas de las disposiciones del item (b) evitan que A y B se sienten uno frente al otro?



13. En el sistema Braille, un símbolo, como una letra minúscula, un signo de puntuación, un sufijo, etc., se describe resaltando al menos uno de los puntos de la disposición de seis puntos que aparece en en la parte (a) de la figura. (Las seis posiciones Braille se enumeran en esta parte de la figura.) Por ejemplo, en la parte (b) los puntos de las posiciones 1 y 4 están resaltados y esta disposición de seis puntos representa la letra c. En las partes (c) y (d) de la figura, tenemos las representaciones de las letras m y t, respectivamente. El artículo definido "the" se muestra en la parte (e), mientras que la parte (f) contiene la forma para el sufijo "ow". Por último, el punto y coma (;) aparece en la disposición de seis puntos de la pate (g), donde los puntos de las posiciones 2 y 3 aparecen en relieve.



(NOTA: la interpretación de los símbolos del sistema Braille enunciada en el corresponde al idioma inglés, y difiere de la utilizada en el "Braille español".)

(a) ¿cuántos símbolos diferentes podemos representar en el sistema Braille?

(b) ¿cuántos símbolos tienen exactamente tres puntos en relieve?

(c) ¿cuántos símbolos tienen un par de puntos en relieve?

(d) ¿cuántos símbolos tienen al menos cuatro puntos en relieve?

14. Un comité de 12 personas será elegido entre 10 hombres y 10 mujeres. ¿De cuántas formas se puede hacer la selección si (a) no hay restricciones? (b) debe haber seis hombres y seis mujeres? (c) debe haber un número par de mujeres? (d) debe haber más mujeres que hombres? (e) debe haber al menos ocho hombres?

15. Un estudiante debe responder siete de las diez preguntas de un examen. ¿De cuántas formas puede hacer su selección si (a) no hay restricciones? (b) debe contestar las dos primeras preguntas? (c) debe responder al menos cuatro de las primeras seis preguntas?

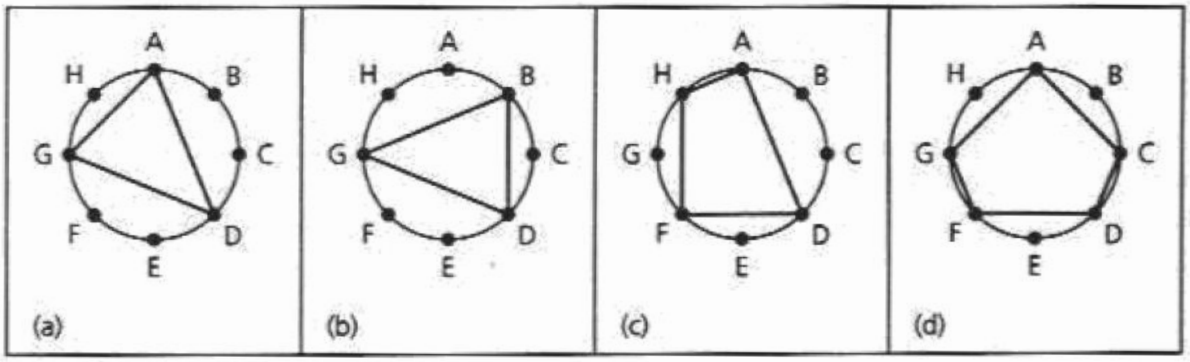
16. De cuántas formas es posible distribuir 12 libros diferentes entre cuatro niños de modo que (a) cada niño reciba tres libros? (b) los dos niños mayores reciban cuatro libros cada uno y los dos menores reciban dos libros cada uno?

17. ¿Cuántas disposiciones de las letras de MISSISSIPPI no tienen letras S consecutivas?

18. (a) En un plano se tienen quince puntos, de los cuales no hay tres que están alineados. ¿Cuántas rectas determinan?

    (b) Se tienen veinticinco puntos en el espacio, de forma que cuatro de ellos cualesquiera no son coplanares. ¿cuántos triángulos determinan? ¿cuántos planos? ¿cuántos tetraedros (sólidos piramidales con cuatro caras triangulares)?

19. En las cuatro partes de la siguiente figura, se han marcado ocho puntos equidistantes sobre la circunferencia de un círculo dado.



(a) Para las partes (a) y (b) de la figura, tenemos dos triángulos diferentes (aunque congruentes). Estos dos triángulos (que se distinguen mediante sus vértices) surgen de dos selecciones de tamaño tres de los vértices A, B, C, D, E, F, G, H. ¿cuántos triángulos diferentes (congruentes o no) podemos inscribir de esta forma en el círculo?

(b) ¿cuántos de los triángulos del item anterior son isósceles?

(c) ¿cuántos cuadriláteros diferentes podemos inscribir en el círculo usando los vértices marcados? (Uno de tales cuadriláteros aparece en la parte (c) de la figura.)

(d) ¿cuántos de los cuadriláteros del item anterior son cuadrados? ¿cuántos de ellos son rectángulos no cuadrados?

(e) En la parte (d) de la figura tenemos un pentágono inscrito en nuestro círculo. ¿cuántos pentágonos podemos inscribir en el círculo dado usando los vértices marcados?

(f) ¿cuántos polígonos diferentes, de tres o más lados, podemos inscribir en el círculo dado usando tres o más de los vértices marcados?

20. Determine el coeficiente de x^9y^3 en los desarrollos de (a) $(x+y)^{12}$, (b) $(x+2y)^{12}$ y (c) $(2x-3y)^{12}$.

21. Determine el coeficiente de $w^2x^2y^2z^2$ en los desarrollos de (a) $(w+x+y+z+1)^{10}$, (b) $(2w-x+3y+z-2)^{12}$ y (c) $(v+w-2x+y+5z+3)^{12}$.

22. Muestre que para todos los enteros $n \geq 2$, $\binom{n+1}{2} = \binom{n}{2} + n$.

23. Para cualquier n entero positivo, determine

$$(a) \quad \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!(n-i)!}. \qquad\qquad (b) \quad \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!(n-i)!}.$$

24. Muestre que para todos los enteros positivos n y m, $n\binom{m+n}{m} = (m+1)\binom{m+n}{m+1}$.

25. Con n un entero positivo, evalúe la suma

$$\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + 2^k\binom{n}{k} + \cdots + 2^n\binom{n}{n}.$$

26. Determine x si $\sum_{i=0}^{50} \binom{50}{i} 8^i = x^{100}$.

27. ¿De cuántas formas es posible distribuir 10 monedas (idénticas) entre cinco niños si (a) no hay restricciones? (b) cada niño recibe al menos una moneda? (c) el niño mayor recibe al menos dos monedas?

28. Una tienda de helados tiene disponibles 31 sabores de helado. ¿De cuántas formas se puede obtener una docena de conos de helado si (a) no queremos el mismo sabor más de una vez? (b) un sabor puede ordenarse hasta 12 veces? (c) un sabor puede ordenarse hasta 11 veces?

29. Determine el número de soluciones enteras de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 < 40$, donde

$$(a) \quad x_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq 5 \qquad\qquad (b) \quad x_i \geq -3,\ 1 \leq i \leq 5.$$

30. ¿De cuántas formas se pueden colocar 12 canicas del mismo tamaño en cinco recipientes distintos si (a) todas las canicas son negras? (b) cada canica es de distinto color?

31. Dados m, n enteros positivos con $m \geq n$ muestre que el número de formas de distribuir m objetos idénticos en n recipientes distintos, sin que quede un recipiente vacío, es $C(m-1, m-n) = C(m-1, n-1)$.

32. Demuestre que si se escogen siete números del 1 al 12, dos de estos sumarán 13.

33. Demuestre que si se escogen ocho números positivos cualesquiera, dos de ellos tendrán el mismo resto al ser divididos por 7.

34. Si se pintan 50 bicicletas usando siete colores, ¿cuántas bicicletas, al menos, tendrán el mismo color?

35. Demuestre que debe haber por lo menos 90 maneras de escoger seis números del 1 al 15 de modo que todas las selecciones al sumarse den el mismo resultado.

36. ¿cuántos amigos debe tener usted para garantizar que por lo menos cinco de ellos cumplen los años en un mismo mes?

37. Demuestre que si se escogen 14 números cualesquiera del 1 al 25, uno de ellos es múltiplo del otro.

1.7 Repaso

Juego 1:

Unir los conceptos con las definiciones correctas. Leer atentamente!!

CONCEPTOS

A Regla de la suma.

B Regla del producto.

C Intervalo entero $[\![m, n]\!]$.

D Cardinal de un conjunto.

E Permutaciones de n objetos tomados de a r.

DEFINICIONES

1. Si se tienen n objetos diferentes y r es un entero en $[\![1, n]\!]$, entonces el número de permutaciones de tamaño r para los n objetos es $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$. Si $r = 0$, $P(n, 0) = 1$.
2. Si una primera tarea puede realizarse de m formas, mientras que una segunda tarea puede realizarse de n formas, entonces la tarea de llevar a cabo cualquiera de ellas puede realizarse de $m+n$ formas.
3. Si para realizar la tarea 1 se cuenta con m maneras distintas y para realizar la tarea 2 se cuenta con n maneras distintas, y no se pueden llevar a cabo al mismo tiempo, entonces para realizar cualquiera de ambas tareas hay $m + n$ maneras.
4. Si existen n objetos distintos a los que podemos denotar con $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y r es un entero $1 \leq r \leq n$, entonces, por la regla de la suma, el número de permutaciones de tamaño r para los n objetos es $n(n-1)\ldots(n-r+1)$ y lo notaremos con $P(n, r) = \frac{n!}{(n+r)!}$. Para $r = 0$, $P(n, 0) = 1$.
5. $[\![m, n]\!] = \{n, n-1, n-2, \ldots, m+1, m\} = \{k \in \mathbb{Z} : m \leq k \leq n\}$.
6. Un conjunto X tiene cardinalidad n, con $n \in N$, si existe una función $f : [\![1, n]\!] \mapsto X$ y se denota $|X| = n$. Para $X = \emptyset$ definimos $|X| = 0$.
7. Si un procedimiento se puede descomponer en las etapas primera y segunda, de manera que existen m resultados posibles de la primera etapa, y existen n resultados posibles para la segunda etapa, entonces el procedimiento total se puede realizar, en el orden dado, de mn formas.
8. $[\![m, n[\![= \{m, m+1, \ldots, n-1\} = \{k \in \mathbb{N} : m \leq k < n\}$.
9. Un conjunto Y tiene cardinalidad k, con $k \in \mathbb{N}$, si existe una función biyectiva $g : [\![1, k]\!] \mapsto Y$ y se denota $|Y| = k$. Para $Y = \{\}$ definimos $|Y| = 0$.
10. Si una tarea puede realizarse en dos instancias, donde la primera tiene m resultados posibles y para cada uno de estos la segunda tiene n resultados posibles, entonces la tarea original tiene mn resultados posibles.

Juego 2:
Complete los espacios en blanco.

1. **definición:** Un conjunto X tiene .... n, con n en $\mathbb{N}$, si existe una .... $f : [\![1, n]\!] \mapsto X$ y se denota $|X| = n$. Para $X =$ .... definimos $|X| = 0$. Todo conjunto que tenga cardinalidad n, para algún n en $\mathbb{N}$ se dirá un conjunto ....

2. **Teorema (....................):** Si A, B son dos conjuntos finitos .... entonces $|A \cup B| = |A|$....................$|B|$.

   Demostración:

   Siendo A y B conjuntos ...., existen n y m naturales y dos funciones .... $f : [\![1, n]\!] \mapsto A$ y $g : [\![1, m]\!] \mapsto B$. Notemos que, la función $h : [\![1, n + m]\!] \mapsto A \cup B$ tal que $h(x) = f($....................$)$ si x pertenece a $[\![1, n]\!]$ y $h(x) = g($....................$)$, si x pertenece a $[\![n + 1, n + m]\!]$ es .... Luego $|A \cup B| = n + m = |A| + |B|$.

   -QED-

3. **Teorema (Regla del producto):** Si A, B son conjuntos .... entonces $|A \times B| = |A||B|$.

   Demostración:

   Sean $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ y $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Tenemos que probar que $|A \times B| = mn$.

   Fijaremos .... y haremos la prueba por .... sobre ....

   Caso Base. $m = 1$.

   $A \times B = \{(a_1, b_1), \ldots, (a_1, b_n)\}$. Definiendo la función $f : [\![1, n]\!] \mapsto A \times B$ por $f(i) = (a_1, b_i)$, resulta que f es .... y por lo tanto $|A \times B| = n = 1 \cdot n$.

   Paso inductivo. Supongamos ahora que si A tiene m elementos entonces $|A \times B| = n = 1 \cdot n$. Queremos ver que esto es válido también para .... Sea entonces $A = \{a_1, \ldots, a_{m+1}\}$. Poniendo $A \times B = ((A - a_{(}$..........$)) \times B) \cup (a_{m+1} \times B)$, resulta que hemos escrito a $A \times B$ como unión .... de conjuntos y, utilizando el principio de .... y la HI, resulta que $|A \times B| =$ .... $+ m = (m + 1)n$.

   -QED-

4. **Teorema:** Sean A y B dos conjuntos .... con $|A| = n$ y $|B| = m$. Si $\mathcal{F}(A, B)$ es el conjunto de todas las de A en B, entonces $|\mathcal{F}(A, B)| =$ ....

   Demostración:

   Basta observar que si f es una función de A en B y, si ponemos $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, entonces $f(a_i) = b_i$ donde b_i es algún elemento de B. Podemos Así .... a f

con la n-upla $(f(a_1), \ldots, f(a_n))$ en $B \times \cdots \times B$. Por la regla .... la cantidad de elementos de $B \times \cdots \times B$ es .... Luego $|\mathcal{F}(A, B)| = mn$.

-QED-

5. **Teorema:** Si $|A| = n$, $|B| = m$ y $n \leq m$ y $\mathcal{F}_i(A, B)$ es el conjunto de todas las funciones .... de A en B, entonces $|\mathcal{F}_i(A, B)| = \frac{m!}{(\ldots\ldots\ldots\ldots)!}$.

   Demostración:

   Como antes, si $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, podemos identificar a f con la $n-$ .... $(f(a_1), \ldots, f(a_n)))$ donde debido a la .... de f podemos asegurar que hay:

   - m valores posibles para $f(a_1)$,

   -.................... valores posibles para $f(a_2)$,

   - ...

   - $m - (n - 1)$ valores posibles para $f(a_n)$.

   Luego, $|\mathbb{F}_i(A, B)| = m(m - 1)(m - 2) \ldots (m - (n - 1)) = \frac{m!}{(m-n)!}$.

   -QED-

6. **definición:** Sea A un .... de n elementos y sea $r \leq n$. Llamaremos .... o disposición .... ordenada de n elementos de A a cualquier función .... $f : [\![1, n]\!] \mapsto A$.

   Es común representar una permutación con la n - upla $(a_1, \ldots, a_n)$ donde a_i en A son todos ....

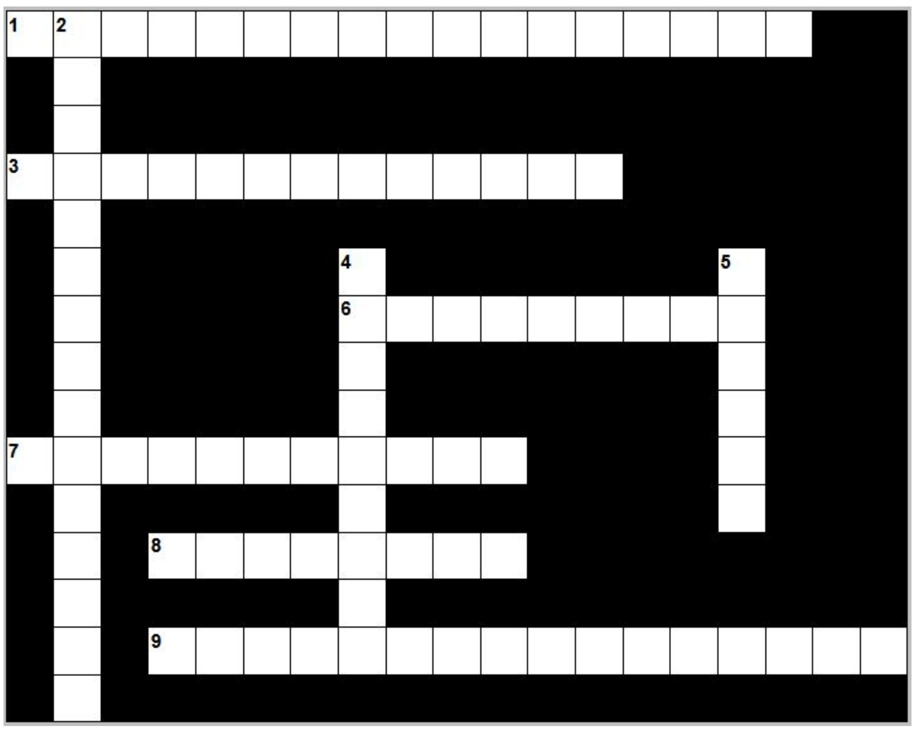
Juego 3:
Complete el siguiente crucigrama.

HORIZONTALES:

1. permutación
3. Principio de adición.
6. Si $f(x) = f(y)$ entonces $x = y$.
7. Orden de los elementos de un conjunto.
8. Cantidad de elementos de un conjunto.
9. Si A y B son finitos, entonces $|A \times B| = |A||B|$.

VERTICALES:

2. $\{k \in \mathbb{Z} : m \leq k \leq n\}$.
4. función 1 a 1.
5. $P(n, r)$: permutación de n elementos de .... r.



Juego 4:
Elija la respuesta correcta:

1. ¿qué utiliza para resolver el siguiente problema?

   Las ciudades A, B , y C están conectadas de la siguiente manera: hay cinco caminos de A a B y siete de B a C , pero ninguno de A a C directamente. ¿De cuántas maneras podemos ir de A a C ?

   (a) permutación de 12 objetos de tamaño 3.
   (b) Regla del producto.
   (c) Regla de la suma.
   (d) permutación de 12 objetos con 5 y 7 repetidos.

2. 4 personas de Central y 4 personas de ñuls se sientan alrededor de una mesa circular para la previa del clásico, alternando los cuadros para demostrar que es más importante la amistad que un partido de fútbol. ¿De cuántas maneras posibles pueden sentarse?

   a) 36. b) 720. c) 144. d) 120.

3. ¿Cuántas permutaciones distintas de las letras de la palabra NARANJA se pueden obtener?

   a) 420. b) 2520. c) 5040. d) 840.

4. ¿qué utiliza para resolver el siguiente problema?

   Las ciudades A, B , y C están conectadas de la siguiente manera: hay cinco caminos de A a B y siete de A a C , pero ninguno de B a C directamente. ¿De cuántas maneras podemos ir desde A a B o a C ?

   (a) permutación de 12 objetos de tamaño 3.
   (b) Regla del producto.
   (c) Regla de la suma.
   (d) permutación de 12 objetos con 5 y 7 repetidos.

Juego 5:
Seleccione la respuesta correcta:

1. $(x+y)^n = ...$

   a) $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$. b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^{n-k} x^k$. c) $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$. d) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^n$.

2. Cada combinación de r objetos entre n distintos, sin hacer referencia al orden, corresponde a .... permutaciones.

   a) $n!$ b) $(n-r)!$ c) $(n+r)!$ d) $r!$

3. $\{m \in \mathcal{N} : \exists\, n < m \vee \exists\, f : [\![1, m]\!] \mapsto [\![1, n]\!]$ inyectiva$\} = \emptyset$.

   a) Verdadero b) Falso

4. La cantidad de soluciones enteras de la ecuación $x_1 + \cdots + x_n = m$ equivale a disponer

   a) $m-1$ cruces y $n-1$ barras.

   b) $m-1$ cruces y n barras.

   c) m cruces y $n-1$ barras.

   d) m cruces y n barras.

5. El número $\binom{n}{r}$ indica la cantidad de formas distintas que tenemos de elegir r elementos de entre n, considerando el orden.

   a) Verdadero b) Falso

6. $\binom{n}{1} = ...$

   a) n. b) 1. c) 0. d) $n-1$.

7. El número combinatorio $\binom{n}{r}$ es un número real.

   a) Verdadero b) Falso

8. La propiedad del triángulo de Pascal dice que...

a) $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n}{r+1}$.

b) $\binom{n}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$.

c) $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$.

d) $\binom{n+1}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$.

9. La función $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \mapsto \{a, b, c\}$ tal que $f(x) = a$ para todo $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se representa por (a, a, a).

a) Verdadero

b) Falso

Respuestas:

Juego 1 A 3 - B 10 - C 5 - D 9 - E 1.

Juego 2 1) cardinalidad - función biyectiva - finito
2) Principio de adición - disjuntos - + - finitos - biyectivas - x - $x - n$ - biyectiva
3) finitos - n - inducción - m - biyectiva - $m + 1$ - $m + 1$ - disjunta - adición - mn
4) finitos - funciones - mn - identificar - del producto - mn
5) inyectivas - $m - n$ - upla - inyectividad - $m - 1$
6) conjunto - permutación - lineal - inyectiva - distintos.

Juego 3 HORIZONTALES: 1) disposiciónLINEAL 3) REGLADELASUMA 6) INYECTIVA 7) permutación 8) CARDINAL 9) REGLADELPRODUCTO
VERTICALES: 2) INTERVALOENTERO 4) BIYECTIVA 5) tamaño.

Juego 4 1) b, 2) c, 3) a, 4) c.

Juego 5 1) b, 2) c, 3) a, 4) c, 5) b, 6) a, 7) a, 8) c, 9) b.

Chapter 2

Matrices y Determinantes

En esta Unidad temática estudiaremos una herramienta fundamental: las matrices y sus determinantes. Las matrices son una forma de representar datos tabulados con una doble entrada: desde los píxeles de una pantalla hasta las coordenadas geoespaciales son representados matemáticamente utilizando matrices. Una de las aplicaciones que mejor demuestra la potencia de esta herramienta es su aplicación en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (y todo lo que ello implica), tema que abordaremos en la próxima Unidad temática de la materia. El uso de las matrices no culminará en esta materia, sino todo lo contrario, a partir de ahora será muy difícil encontrar un tema de la matemática (tanto pura como aplicada) donde las matrices no intervengan.

En lo que sigue supondremos que $\mathbb{F}$ es el *cuerpo*[1] de los números racionales, reales o complejos. O sea, $\mathbb{F}$ será $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

2.1 Matrices

Muchxs conocemos esta imagen por la saga *The Matrix*, que tiene tantas interpretaciones como se les ocurra a las personas que la hayan visto. Una posible es que el protagonista Neo, comienza en algún punto a ver más allá de la realidad aparente, y a interpretar,

[1] *Cuerpo* es un concepto que será explorado en otras materias de las diferentes carreras, por ahora sepamos que nos referimos a estos conjuntos numéricos con dos operaciones, una suma y un producto, que verifican las propiedades que todos conocemos.

conocer y manipular la estructura de esta realidad. Para nosotrxs las matrices son justamente eso, la estructura del álgebra lineal, y por ende, la estructura de nuestra comprensión de la realidad. No estamos ni cerca de Neo en comprensión ni habilidades, pero por algo se empieza. Vamos por partes.

Todxs han escuchado sobre *matrices*, pero... **¿qué es una matriz?** Hay que estar dispuestx a usar la matemática que conocemos para poder definir rigurosamente este concepto. ¿qué elegís?

Antes de dar la definición precisa, veamos qué NO es una matriz:

- *rectángulo numérico,*
- *un arreglo ordenado de números,*
- *un conjunto bidimensional de números,*
- *un conjunto de números o expresiones dispuesto de forma rectangular,*
- *una tabla bidimensional de números,*
- ... etc.

Todas estas frases coloquiales pretenden describir una matriz, pero la definición precisa y formal debe hacerse en términos de los elementos que conocemos: conjuntos, funciones, relaciones, etc.

Ahora si, vamos directamente a la formalidad.

Definición 2.1.1 *Una* matriz A *de tamaño* $m \times n$ *con coeficientes en* $\mathbb{F}$ *es una función*

$$A : [\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!] \to \mathbb{F},$$

en donde $[\![1, m]\!] = \{1, 2, \ldots, m\}$ *y* $[\![1, n]\!] = \{1, 2, \ldots, n\}$. *El conjunto de todas las matrices* $m \times n$ *con coeficientes en* $\mathbb{F}$ *se denotará por* $\mathbb{F}^{m \times n}$. *En algunos libros se denota el conjunto de matrices* $m \times n$ *también por* $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ *o* $M(m, n, \mathbb{F})$.

Notación 1 *Representamos a una matriz* $A : [\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!] \to \mathbb{F}$ *como un arreglo rectangular*

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{ll} \to & \textit{fila 1} \\ \to & \textit{fila 2} \\ \vdots & \quad\vdots \\ \to & \textit{fila m} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \textit{col } 1 & \textit{col } 2 & \cdots & \textit{col } n \end{array} & \end{array}$$

en donde $a_{ij} = A(i, j)$ *son los llamados coeficientes de la matriz* A*. también se dice que* A *tiene* m filas *y* n columnas.

Otras notaciones frecuentes, y que a menudo emplearemos son las siguientes. Una matriz $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ *se denota abreviadamente como* $A = (a_{ij})$ *o* $A = (a_{ij})_{ij}$*, o cuando hay dudas sobre el tamaño de la matriz se suele escribir* $A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m,\, j=1,\ldots,n}$*, en donde los coeficientes de la matriz* A *son* a_{ij}*. Otra notación muy frecuente es la que nombra los coeficientes de la matriz* A *con la misma letra (en mayúscula en este caso) indicando con un subíndice la posición fila-columna, es decir,* $A = (A_{ij})$*. Esta notación resulta muy útil cuando la matriz en cuestión no esté denotada con una letra del alfabeto latino. Por último, a veces para referinos al elemento en la posición* ij *de una matriz* A*, escribiremos* $[A]_{ij}$*.*

Definición 2.1.2 *Diremos que dos matrices* $A = (a_{ij})$ *y* $B = (b_{ij})$ *son* iguales *si tienen la misma cantidad de filas, la misma cantidad de columnas y* $a_{ij} = b_{ij}$ *para todos* i, j*.*

Ejemplo 2.1.3 *Observemos que*

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

En efecto, si bien en algún sentido ambas matrices nos dan la "misma información" (pues todo coeficiente de una aparece en alguna posición de la otra), la primera matriz es de tamaño 2×3*, en tanto que la segunda es* 3×2*. más generalmente, si* $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ *y* $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$*, con* $n \neq m$*, entonces* $A \neq B$*.*

Ejemplo 2.1.4 $\mathbb{F}^{1\times 1} = \mathbb{F}$*, o sea, una matriz* 1×1 *es un escalar. A decir verdad, una matriz* 1×1 *es una función* $A : \{1\} \times \{1\} \to \mathbb{F}$*, pero en estas notas identificaremos* A *con su imagen, o sea* $A = A(1, 1) = a_{11}$*.*

Ejemplo 2.1.5 *Consideremos la matriz $A \in \mathbb{F}^{3\times 3}$ dada por $a_{ij} = i + j$. Entonces*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Definición 2.1.6 *Diremos que una matriz $v \in \mathbb{F}^{1\times n}$ es un* vector fila *de tamaño n, o sea*

$$v = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix},$$

y lo identificamos con el vector $\overline{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Por otra parte, una matriz $v \in \mathbb{F}^{m\times 1}$ se dirá un vector columna *de tamaño m, o sea*

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}.$$

Definición 2.1.7 *Una matriz A se dice* cuadrada *si tiene la misma cantidad de filas y columnas. Es decir, si $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ para algún n. En tal caso, el* vector diagonal *de A es*

$$\mathrm{diag}(A) = (a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}).$$

Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ se dice:

- triangular superior *si $a_{ij} = 0$ para $i > j$;*
- triangular superior estricta *si $a_{ij} = 0$ para $i \geq j$;*
- triangular inferior *si $a_{ij} = 0$ para $i < j$;*
- triangular inferior estricta *si $a_{ij} = 0$ para $i \leq j$;*
- diagonal *si A es triangular superior y triangular inferior.*

Las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

son triangular superior, triangular superior estricta, triangular inferior y diagonal, respectivamente.

Definición 2.1.8 *La* matriz nula $0 = 0_{m\times n} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ *es la matriz de tamaño $m \times n$ que tiene todas sus entradas iguales a cero, o sea,*

$$0_{m\times n} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{n \text{ columnas}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}\right\} m \text{ filas}$$

Si bien hemos abusado de la notación denotando por 0 *a la matriz nula, con el mismo símbolo que usamos para denotar el elemento nulo en $\mathbb{F}$, no debemos confundir estos conceptos. El significado de* 0 *debería ser claro del contexto. De todas formas, cuando se presente alguna duda, preferiremos la notación $0_{m\times n}$. ¿Es $0_{2\times 3} = 0_{3\times 2}$?*

Definición 2.1.9 *La* matriz identidad *de orden n es la matriz $I = I_n \in \mathbb{F}^{n\times n}$ tal que $I_{ij} = \delta_{ij}$, en donde δ_{ij} es la llamada delta de Kronecker*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j. \end{cases}$$

Es decir,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

es la matriz diagonal con $\operatorname{diag}(I) = (1, 1, \ldots, 1)$.

2.1.1 Operaciones entre matrices

Es evidente la similaridad que tienen las matrices con los vectores, de hecho, hemos visto que los vectores *son* matrices (en algún sentido). Es por lo tanto natural pensar en operar con matrices de una forma análoga a la que se hace con los vectores. Así es que definiremos un **producto por escalar** y una **suma**. Para multiplicar matrices, lo más parecido que tendremos será el **producto escalar**.

Definición 2.1.10 *La multiplicación de la matriz $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ por el escalar $\alpha \in \mathbb{F}$ se define como la matriz $C = \alpha A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ dada por $c_{ij} = \alpha a_{ij}$.*

Por ejemplo,

$$2\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 18 \\ -14 & 6 \end{pmatrix}.$$

Definición 2.1.11 *Si $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$, la suma de A con B es la matriz $C = A+B \in \mathbb{F}^{m\times n}$ dada por $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.*

Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ -3 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 12 \\ -5 & 0 & 22 \end{pmatrix}.$$

Hemos definido la operación suma para matrices del mismo tamaño. Luego sólo podremos sumar matrices del mismo tamaño.

Ejercicio 2.1.12 *MUY IMPORTANTE. Dados $A, B, C \in \mathbb{F}^{m\times n}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, verificar las siguientes propiedades.*

- $0A = 0_{m\times n}$.
- $\alpha 0_{m\times n} = 0_{m\times n}$.
- *La suma de matrices es asociativa, o sea $A + (B + C) = (A + B) + C$.*
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.
- $A + 0_{m\times n} = 0_{m\times n} + A = A$, *es decir, la matriz nula es el elemento neutro para la suma de matrices.*
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$, *o sea, la suma en $\mathbb{F}$ es distributiva con respecto a la multiplicación de una matriz por un escalar.*
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, *o sea, la multiplicación por un escalar es distributiva con respecto a la suma de matrices.*

A continuación definiremos la multiplicación de matrices. Intuitivamente, uno querría que la multiplicación de matrices respetara las formas que ya tenemos de multiplicar vectores, es decir, el producto escalar y el producto de sus coordenadas. Recordemos que tenemos dos formas matriciales de pensar un vector en $\mathbb{F}^n$: como un vector fila o como un vector columna. La multiplicación de matrices impone ciertos requerimientos al tamaño de las matrices para poder calcular el producto, pero bajo tales condiciones serán validas las siguientes identidades, por ejemplo para $n = 3$, para vectores fila y vectores columna:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \qquad \text{(producto escalar)},$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_3 & a_3b_3 \end{pmatrix} \qquad \text{(producto de coordenadas)}.$$

Notar que en el primer caso, el producto de una matriz 1×3 por una matriz 3×1 nos da una matriz 1×1, en tanto que en el segundo caso, el producto de una matriz 3×1 por una matriz 1×3 nos da una matriz 3×3.

Antes de pasar a la definición del producto de matrices, pensemos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.1.13 *Supongamos que un comerciante tiene tres carribares, uno ubicado en la zona sur, otro en la zona norte y el último en la zona oeste de su ciudad. En cada carribar se venden los siguientes productos: maní, panchos y gaseosas. En las siguientes tablas se resumen en pesos los artículos vendidos y sus precios en el cierre de caja del mediodía:*

ARTICULOS VENDIDOS	*maní*	*pancho*	*gaseosa*
local sur	1200	2500	3050
local norte	2070	1400	4200
local oeste	300	1200	1900

PRECIOS	*costo*	*venta*
maní	1	2
pancho	2	3
gaseosa	$1,5$	3

Para saber cuánto gastó el local de la zona oeste debemos realizar el siguiente cálculo:

$$300 \times 1 + 1200 \times 2 + 1900 \times 1,5 = 5550,$$

y para saber cuánto vendió el local de zona norte simplemente calculamos

$$2070 \times 2 + 1400 \times 3 + 4200 \times 3 = 62460.$$

De esta forma podemos armarnos otra tabla donde se indiquen los totales (ejercicio: completar la tabla):

TOTALES	*costo*	*venta*
local sur	$(1200, 2500, 3050) \times (1, 2, 1.5) =$	
local norte		$(2070, 1400, 4200) \times (2, 3, 3) = 62460$
local oeste	5550	

Vale decir, toda la información esté condensada en tres matrices (completar): A representa las cantidades vendidas por artículo y por local, P representa los precios de costo y venta por unidad de cada artículo y T representa los totales de costos y de ingresos por ventas por local.

$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}, \qquad P_{3\times 2} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ & \\ & \end{pmatrix} \qquad y \qquad T_{3\times 2} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ & \\ & \end{pmatrix}.$$

La matriz T es la obtenida multiplicando la matriz A por la matriz P. Observemos los tamaños: A es 3×3 referidos a 3 locales y 3 artículos, P es 3×2 referidos a 3 artículos y 2 *precios y T es 3×2 referidos a 3 locales y 3 precios totales. Los tamaños no son casuales: la cantidad de columnas de A debe ser igual a la cantidad de filas de P, que en ambos casos refieren a los artículos, y es posible entonces efectuar el producto escalar de la fila por la columna correspondiente. En la matriz T la información de los artículos se pierde, y sólo tenemos la información de los locales y los totales de precios.*

Con este ejemplo en mente, veamos ahora la definición de producto matricial.

Definición 2.1.14 *Si $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{F}^{n\times p}$ definimos el* producto *de A con B como la matriz $C = AB \in \mathbb{F}^{m\times p}$ dada por*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

En otras palabras, el lugar $(AB)_{ij}$ esté dado por el producto escalar entre la i-ésima fila de A y la j-ésima columna de B.

Ejemplo 2.1.15 *Sean*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 7 & 5 & -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Observar que como A es 2×3 y B es 3×4 esté definido el producto AB (¡y será una matriz 2×4!):

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & -1 \\ 30 & 18 & 7 & 29 \end{pmatrix}.$$

Una forma sencilla para recordar la fórmula del producto de matrices es la siguiente: se traza una cruz y se disponen los coeficientes de la matriz A en el cuadrante inferior izquierdo, y los coeficientes de la matriz B en el cuadrante superior derecho. Para calcular el coeficiente $(AB)_{ij}$, se calcula el producto escalar entre la fila i de A y la columna j de B. Observar que si uno traza una línea horizontal según la fila i de A y una línea vertical según la columna j de B, entonces el lugar i,j de la matriz AB se encuentra justamente donde se cortan estas líneas

$$\begin{array}{crrr|rrrr}
 & & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & & & & 0 & 1 & \mathbf{-5} & 3 \\
 & & & & 2 & 1 & \mathbf{0} & -2 \\
 & & & & 7 & 5 & \mathbf{-2} & 10 \\
\cline{2-8}
\rightarrow & 1 & 2 & 0 & 4 & 3 & -5 & -1 \\
\rightarrow & \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & 30 & 18 & \mathbf{7} & 29
\end{array}$$

En el ejemplo anterior tenemos resaltado en negrita la fila 2 de A y la columna 3 de B, Así como el lugar $(AB)_{23}$. Notemos que efectivamente

$$(AB)_{23} = (-3, 1, 4) \times (-5, 0, -2) = (-3) \cdot (-5) + 2 \cdot 0 + 4 \cdot (-2) = 15 - 8 = 7.$$

Si bien este modo de calcular el producto de matrices es bastante intuitivo, resulta un poco tedioso en algunas situaciones (por ejemplo cuando queremos calcular el producto de tres o más matrices). Sin embargo, con un poco de práctica y para matrices razonables, el lector podrá calcular los productos mentalmente.

Observación 2.1.16 *MUY IMPORTANTE.* ***El producto de matrices no es conmutativo.***

En efecto, calculemos el producto de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observemos que tanto A como B son matrices 2×2, por lo tanto tiene sentido preguntarse si AB es igual a BA. Por un lado

$$\begin{array}{cc|cc} & & 1 & 0 \\ & & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \qquad\qquad AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

y por el otro

$$\begin{array}{cc|cc} & & 1 & 2 \\ & & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad\qquad BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

de donde sigue que $AB \neq BA$.

Si bien acabamos de observar que el producto de matrices cuadradas del mismo tamaño no es conmutativo, sí es cierto que este producto es asociativo. más aún, se tiene el siguiente resultado

Teorema 2.1.17 *El producto de matrices es asociativo, o sea, si $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n \times p}$ y $C \in \mathbb{F}^{p \times q}$, entonces*

$$A(BC) = (AB)C.$$

Demostración 1 *En primer lugar, observemos que los dos productos mencionados en el teorema están bien definidos. En efecto como A es $m \times n$ y BC es $n \times q$, entonces $A(BC)$ es $m \times q$. Asimismo, como AB es $m \times p$ y C es $p \times q$, $(AB)C$ también es $m \times q$.*

La prueba es por cálculo directo usando la definición. Sean $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq q$. Entonces, por un lado

$$(A(BC))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(BC)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \sum_{\ell=1}^{p} B_{k\ell}C_{\ell j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{p} A_{ik}B_{k\ell}C_{\ell j} \tag{2.1}$$

y por el otro

$$((AB)C)_{ij} = \sum_{\ell=1}^{p}(AB)_{i\ell}C_{\ell j} = \sum_{\ell=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{k\ell}C_{\ell j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{p} A_{ik}B_{k\ell}C_{\ell j}. \tag{2.2}$$

Como (2.1) coincide con (2.2) para todos i, j, concluimos que $A(BC) = (AB)C$.

El siguiente teorema dice que valen las leyes distributivas para el producto de matrices con respecto a la suma. Observemos que como el producto no es conmutativo, debemos expresar (y probar) ambos enunciados.

Teorema 2.1.18 *1. Si $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ y $B, C \in \mathbb{F}^{n\times p}$, entonces*

$$A(B + C) = AB + AC.$$

2. Si $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$ y $C \in \mathbb{F}^{n\times p}$, entonces

$$(A + B)C = AC + BC.$$

Demostración 2 *Para probar 1 observamos que para $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq p$,*

$$\begin{aligned}(A(B + C))_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(B + C)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(B_{kj} + C_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} + \sum_{k=1}^{n} A_{ik}C_{kj} = (AB)_{ij} + (AC)_{ij} = (AB + AC)_{ij}.\end{aligned}$$

La parte 2 queda como ejercicio.

Teorema 2.1.19 *Sea $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, entonces*

$$I_mA = AI_n = A.$$

En particular, la matriz identidad I_n es el elemento neutro para el producto en $\mathbb{F}^{n\times n}$.

Demostración 3 *Recordemos que $(I_m)_{ij} = \delta_{ij}$ es la delta de Kronecker. Luego*

$$(I_m A)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} (I_m)_{ik} A_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik} A_{kj} = A_{ij},$$

de donde sigue que $I_m A = A$. Probar como ejercicio que $AI_n = A$.

Ejemplo 2.1.20 *Consideremos la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y calculemos las potencias sucesivas de A. Es decir, $A^2 = AA$, $A^3 = AA^2 = AAA$, $A^4 = AA^3 = A^2A^2 = AAAA$, etc. En efecto,

$$\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
A^3 = AA^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
A^4 = AA^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\
A^5 = AA^4 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

El lector quizáz ya pueda intuir que el resultado general es

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

en donde los números F_n son los números de la sucesión de Fibonacci, dada por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ para $n \geq 1$. En efecto, probemos la fórmula (2.3) por inducción. Es claro que (2.3) vale para $n = 1$, pues $A^1 = A$ (de hecho, ya lo probamos para $n = 1, 2, 3, 4, 5$). Supongamos que dicha fórmula vale para un cierto $n \geq 2$ y verifiquemos el resultado para $n + 1$:

$$\begin{aligned}
A^{n+1} = AA^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n & F_n + F_{n-1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

con lo cual la fórmula (2.3) vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Hay otro tipo de operación que se puede aplicar sobre una matriz, la cual no involucra operaciones algebraicas (como sumar o multiplicar).

Definición 2.1.21 *Dada $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ se define la* matriz transpuesta *de A, como la matriz $A^t \in \mathbb{F}^{n\times m}$ dada por*

$$(A^t)_{ij} = A_{ji}.$$

Es decir, A^t es la matriz cuyas columnas son las filas de A.

Ejemplo 2.1.22 *Notemos si una matriz tiene tamaño, digamos, 2×3 entonces su transpuesta tendrá tamaño 3×2. Por ejemplo,*

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -7 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.1.23 *Si A es una matriz diagonal, entonces $A^t = A$.*

Proposición 2.1.24 *Sean $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $\alpha \in \mathbb{F}$. Entonces:*

1. $(A^t)^t = A$;
2. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$;
3. $(A+B)^t = A^t + B^t$.

Demostración 4 *Observar que para todos $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ valen*

$$((A^t)^t)_{ij} = (A^t)_{ji} = A_{ij},$$

de donde sigue que $(A^t)^t = A$;

$$((\alpha A)^t)_{ij} = (\alpha A)_{ji} = \alpha A_{ji} = \alpha (A^t)_{ij} = (\alpha A^t)_{ij},$$

de donde sigue que $(\alpha A)^t = \alpha A^t$; y

$$((A+B)^t)_{ij} = (A+B)_{ji} = A_{ji} + B_{ji} = (A^t)_{ij} + (B^t)_{ij} = (A^t + B^t)_{ij},$$

de donde sigue que $(A+B)^t = A^t + B^t$.

Notar que la transposición no es una operación multiplicativa, es decir, no vale en general que $(AB)^t = A^t B^t$, de hecho, quizáz ni siquiera tenga sentido el producto del lado derecho de esta igualdad. Sin embargo, se tiene el siguiente resultado que relaciona la transposición con el producto de matrices.

Proposición 2.1.25 *Si* $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ *y* $B \in \mathbb{F}^{n\times p}$ *entonces*

$$(AB)^t = B^t A^t.$$

Demostración 5 *Queda como ejercicio calcular la buena definición, en cuanto a tamaños.*

Por un cálculo directo se tiene que

$$((AB)^t)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}B_{ki} = \sum_{k=1}^{n} B_{ki}A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} (B^t)_{ik}(A^t)_{kj} = (B^tA^t)_{ij}$$

para todos $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq m$. *Por tanto,* $(AB)^t = B^tA^t$.

Definición 2.1.26 *Sea* $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. *Decimos que* A *es:*

- simétrica *si* $A^t = A$*;*
- antisimétrica *si* $A^t = -A$.

Ejemplo 2.1.27 *La matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

es simétrica, $A^t = A$, *en tanto que la matriz*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -7 \\ -5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

es antisimétrica, $B^t = -B$. *Observar que "simetría" o "antisimetría" para matrices, significa simetría o antisimetría con respecto a la diagonal. En particular, una matriz simétrica queda determinada por los coeficientes ubicados de la diagonal para arriba.*

Ejemplo 2.1.28 *Si* A *es antisimétrica entonces* $\mathrm{diag}(A) = (0, 0, \ldots, 0)$.

Proposición 2.1.29 *Toda matriz* $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ *puede escribirse como la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica. Es decir,*

$$A = A_{\mathrm{sim}} + A_{\mathrm{anti}},$$

con $(A_{\mathrm{sim}})^t = A_{\mathrm{sim}}$ *y* $(A_{\mathrm{anti}})^t = -A_{\mathrm{anti}}$.

Demostración 6 *Observemos que*

$$A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t).$$

Luego, si llamamos

$$A_{\text{sim}} = \frac{1}{2}(A + A^t), \qquad\qquad A_{\text{anti}} = \frac{1}{2}(A - A^t),$$

entonces por la Proposición 2.1.24, se tiene que

$$(A_{\text{sim}})^t = \left(\frac{1}{2}(A + A^t)\right)^t = \frac{1}{2}(A^t + A) = \frac{1}{2}(A + A^t) = A_{\text{sim}}$$

y

$$(A_{\text{anti}})^t = \left(\frac{1}{2}(A - A^t)\right)^t = \frac{1}{2}(A^t - A) = -\frac{1}{2}(A - A^t) = -A_{\text{anti}},$$

como se quería probar.

Ejercicio 2.1.30 *Probar que la descomposición de la Proposición 2.1.29 es única. Es decir, si $A = A' + A''$ con $(A')^t = A'$ y $(A'')^t = -A''$, entonces $A' = A_{\text{sim}}$ y $A'' = A_{\text{anti}}$.*

Definición 2.1.31 *Dada $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, se define la* traza *de A como*

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}.$$

Ejemplo 2.1.32 *Para la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

tenemos que

$$\operatorname{tr} A = 2 + 7 - 9 = 0.$$

Ejercicio 2.1.33 *Dados $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $\alpha \in \mathbb{F}$, probar que:*

1. $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$;
2. $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr} A$;
3. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Proposición 2.1.34 *Si $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, entonces*

$$\operatorname{tr}(AA^t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^2.$$

Demostración 7 *Observemos que*

$$(AA^t)_{ii} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(A^t)_{ji} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}^2,$$

de donde se obtiene que

$$\operatorname{tr}(AA^t) = \sum_{i=1}^{n}(AA^t)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^2.$$

Comentario 1

1. *Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, puede pensarse en el número $\operatorname{tr}(AA^t)$ como el "módulo" al cuadrado de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pues este número se calcula sumando los cuadrados de todos los coeficientes de la matriz A. Esto introduce una noción geométrica de distancia en el conjunto $\mathbb{R}^{n\times n}$, es decir, la distancia entre dos matrices $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ se define como el módulo de la diferencia $B - A$,*

   $$\operatorname{dist}(A, B) = \operatorname{tr}\left((B-A)(B-A)^t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

   A partir de esta distancia, es posible definir muchas otras nociones geométricas.

2. *El conjunto de todas las matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tales que*

   $$\operatorname{tr} A = \text{const.}$$

   puede pensarse como un "hiperplano" en $\mathbb{R}^{n\times n}$, pues dichas matrices satisfacen una especie de "ecuación general del plano": una ecuación lineal generalizada a n^2 variables.

Ejemplo 2.1.35 *El hiperplano de todas las matrices 2×2 de traza cero, con coeficientes reales, esté dado por*

$$\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : x + w = 0\right\}.$$

2.1.2 Ejemplo de aplicación.

Así como guardamos información en vectores (por ejemplo velocidades, posición, color RGB de un pixel, etc.) también en las matrices podemos almacenar datos. Vimos en un ejemplo cómo un comerciante almacenaba datos de las ventas de los artículos por local, y los costos. Para ubicar un pixel en la pantalla también se utilizan matrices. Al complejizar la información, el ente matemático que precisamos también se vuelve más complejo. Incluso para ciertos datos se utilizan *arreglos* de mayor *dimensión*, donde estas nociones tienen una definición precisa y unas ciertas reglas aritméticas. En este curso no trabajaremos con éstas, pues debemos para ello primero comprender bien el concepto de matriz.

En esta sección queremos dar una idea muy simplificada de aplicación de matrices a la Ciencia de Datos. Si bien aún no contamos con los temas propios del álgebra lineal, sino tan solo con la definición de matriz, intentaremos describir al menos el modelo de un sistema de recomendación. Netflix, Google, Spotify, YouTube y miles de apps más utilizan algoritmos de recomendación, y los principios de los mismos están dados en términos de álgebra lineal, y consiguientemente, en términos de vectores y matrices.

Consideremos un servicio de streaming que tiene guardados los siguientes datos de 6 clientes: 1: Alex, 2: Betty, 3: Carmen, 4: Dani, 5: Enrique, 6: Fausto

que han indicado cuáles películas han visto y les han gustado de entre las 7 películas: 1: Godzilla, 2: Hamlet, 3:Ishtar, 4: JFK, 5: King Kong, 6:Lincoln, 7: Macbeth.

Las películas 1 y 5 son ambas películas de monstruos, las 2 y 7 están basadas en obras de Shakespeare, las 4 y 6 están basadas en vidas de presidentes norteamericanos y la película 3 es una comedia. Esta información no la podemos tabular, sin embargo buscamos una forma de que el algoritmo *infiera* similaridades y diferencias entre las películas a partir de los datos. Esto es lo que se busca en la ciencia de datos.

Al usuario 1, Alex, le han gustado Godzilla y King Kong. A Betty le ha gustado Hamlet, JFK, Lincoln y Macbeth. A Carmen le gustó Ishtar y King Kong. Esta información, y la de los demás usuarios, la han tabulado en una matriz A 7×6 como sigue:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En esta matriz claramente las 7 filas se corresponden a las 7 películas mientras que las 6 columnas se corresponden a lxs 6 clientes. En la primera columna esté la información de Alex, que es el cliente 1, a quien le gustaron las películas 1 y 5 (Godzilla y King Kong) cuya información la encontramos en las filas 1 y 5 respectivamente. Podemos observar que en las posiciones 11 y 15 hay números 1 y en las demás posiciones de la primera columna hay 0. Así se tabula la información. Si pasamos a la segunda columna, vemos que Betty tiene 1 en la segunda, cuarta, sexta y síptima columnas, como era esperable. idéntico análisis para Carmen. Para Dani no dijimos qué información teníamos pero podemos recuperarla mirando la columna 4: a Dani le han gustado las películas 1, 2 y 5, o sea, Godzilla, Hamlet y King Kong. ¿qué películas les han gustado a Enrique y a Fausto? ¿A quiénes les ha gustado la película Macbeth? Toda esta información se recupera fácilmente con nuestra matriz. Una matriz que encierra este tipo de información se conoce como *term-by-document matrix*.

Se une al servicio de streaming una nueva usuaria, Greta. Greta indica que ha visto y le ha gustado Godzilla (1), JFK (4) y Macbeth (7). ¿qué otras películas le podráan gustar a Greta? Hay muchésimas formas de dar una respuesta a esta pregunta. Vamos a intentar describir una solución al problema de la recomendación, muy sencilla.

La información que Greta proveyó puede, en el espíritu del razonamiento previo, guardarse en un vector columna $v = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1)^T$. Para poder recomendar una película, podráamos pensar en las columnas $A_1, \ldots, A_6$ de nuestra matriz A, y tratar de considerar la columna que más se aproxime a v, en algún sentido. Esto nos estaría indicando cuál usuarix del servicio tiene gustos más parecidos a los de Greta, para luego sugerirle alguna película que ella no haya visto y que dichx usuarix haya disfrutado. El sentido de *cercanía* que le vamos a dar en esta resolución es el del ángulo que forma la columna correspondiente al usuarix con el vector v: buscaremos el menor ángulo entre todos los vectores columna de A y v.

Cada vector columna $\overline{u}$, identificado como el vector libre A_j^T de $\mathbb{R}^7$, podemos proyectarlo sobre el vector libre $\overline{v}$ que también lo interpretamos como un vector de $\mathbb{R}\mathbb{R}^7$, como sigue:

$$\text{proy}_{\overline{v}}\overline{u} = \frac{\overline{u} \times \overline{v}}{|\overline{v}|},$$

de donde se deduce que el ángulo es

$$\cos(\alpha_j) = \frac{\overline{u} \times \overline{v}}{|\overline{u}||\overline{v}|} = \frac{A_j^T v}{||A_j||||v||},$$

donde hemos denotado con $||v||$ a la norma del vector $\overline{v}$, es decir, $||v|| = |v|$ (la diferencia esté en que v es una matriz columna y $\overline{v}$ es un vector, o sea, es sólo de notación).

Resolviendo estos cálculos (queda como ejercicio para el lector), vemos que los usuarios 1 (Alex) y 4 (Dani) producen valores del coseno cercanos a $0,577$. En general, un valor mayor a $0,5$ se considera bastante bueno. Si miramos los gustos de Alex y Dani, vemos que ambos comparten Godzilla y King Kong. Además, a Dani le gustó Hamlet. Se le podráa sugerir a Greta que mire King Kong, o Hamlet. Con más datos, seguramente nuestro recomendador podráa hacer un mejor trabajo.

Hemos dicho que el modelo era muy simplificado, y efectivamente, cuanto más sepamos de matrices y álgebra lineal, mejor podremos aprovechar las herramientas para armar un modelo más apropiado. Pero, como primera aproximación, este modelo es bastante interesante. ¿Se les ocurre qué cosas podráan mejorarse?

2.2 Determinantes

2.2.1 Permutaciones

Recordemos que para $n \in \mathbb{N}$, se denota por $[\![1, n]\!] = \{1, 2, \ldots, n\}$ el intervalo de todos los enteros comprendidos entre 1 y n.

Definición 2.2.1 *Dado $n \in \mathbb{N}$, denotaremos por*

$$S_n = \{\sigma : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!] : \sigma \text{ es biyectiva}\}$$

el conjunto de permutaciones de n elementos.

Observación 2.2.2 *Ya hemos probado los siguientes hechos.*

- *Hay $n!$ permutaciones de n elementos, o sea $|S_n| = n!$.*
- *Si $\sigma, \tau \in S_n$ entonces $\sigma \circ \tau \in S_n$, en donde $\sigma \circ \tau$ es la* composición *de σ con τ y esté definida por $(\sigma \circ \tau)(i) = \sigma(\tau(i))$ para todo $i \in [\![1, n]\!]$.*
- *La función identidad* $\mathrm{id} : S_n \to S_n$ *se comporta como el "elemento neutro" de S_n con respecto a la operación composición, es decir,*

  $$\mathrm{id} \circ \sigma = \sigma \circ \mathrm{id} = \sigma$$

  para toda $\sigma \in S_n$.

- *Toda $\sigma \in S_n$ tiene una inversa, es decir, existe una permutación $\sigma^{-1} \in S_n$ tal que*

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = \mathrm{id}\,.$$

- *Se puede identificar una permutación $\sigma \in S_n$ con una n-upla de números entre 1 y n, todos distintos,*

$$\sigma \longleftrightarrow (\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)).$$

  más aún, en la presente unidad abusaremos de la notación escribiendo

$$\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)).$$

  Por ejemplo, la n-upla $(1, 2, \ldots, n)$ representa la permutación identidad, en tanto que $(2, 1, 3, 4, \ldots, n)$ representa la permutación que intercambia el 1 con el 2 y deja fijos los demás elementos.

Las permutaciones que intercambian solamente dos elementos forman una familia muy importante y llevan nombre propio.

Definición 2.2.3 *Una* trasposición *es una permutación que intercambia sólo dos elementos. O sea, $\tau \in S_n$ es una trasposición si existen $i, j \in [\![1, n]\!]$, $i \neq j$, tales que*

$$\tau(k) = \begin{cases} j & \text{si } k = i, \\ i & \text{si } k = j, \\ k & \text{si } k \neq i, j. \end{cases}$$

Notación 2 *Denotaremos por $\tau_{i,j}$ la transposición que intercambia i con j. Observemos que esta notación es ambigua pues, por ejemplo, $\tau_{1,2}$ representa permutaciones distintas según consideremos $\tau_{1,2} \in S_2$ o $\tau_{1,2} \in S_3$. En el primer caso $\tau_{1,2} = (2, 1)$ y en el segundo $\tau_{1,2} = (2, 1, 3)$. Por ende, para indicar una trasposición $\tau_{i,j}$ también deberíamos indicar el n tal que $\tau_{i,j} \in S_n$. Sin embargo, en lo que sigue siempre podremos deducir quién es n a partir del contexto. Observemos que para $i < j$, la transposición que intercambia i con j se representa mediante la n-upla*

$$\tau_{i,j} = (1, \ldots, i-1, j, i+1, \ldots, j-1, i, j+1, \ldots, n).$$

Observación 2.2.4 *Es importante notar que si τ es una trasposición, entonces $\tau \circ \tau = \mathrm{id}$, o sea, τ es su propia inversa, $\tau = \tau^{-1}$.*

Usando trasposiciones, uno puede calcular fácilmente la inversa de una permutación arbitraria $\sigma \in S_n$. En efecto, simplemente debemos reordenar de menor a mayor la n-upla $(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$ intercambiando sólo dos elementos en cada paso.

Ejemplo 2.2.5 *Sea $\sigma \in S_6$ la permutación representada por la 6-upla $\sigma = (2,4,3,1,6,5)$. En un primer paso podemos intercambiar 1 con 2 para obtener la 6-upla $(1,4,3,2,6,5)$, o más formalmente*

$$\tau_{1,2} \circ \sigma = (1,4,3,2,6,5).$$

Luego podemos intercambiar 2 con 4 para obtener

$$\tau_{2,4} \circ \tau_{1,2} \circ \sigma = (1,2,3,4,6,5).$$

Finalmente, para llegar a la identidad, debemos intercambiar 5 con 6,

$$\tau_{5,6} \circ \tau_{2,4} \circ \tau_{1,2} \circ \sigma = (1,2,3,4,5,6) = \mathrm{id}\,.$$

Por lo tanto,

$$\sigma^{-1} = \tau_{5,6} \circ \tau_{2,4} \circ \tau_{1,2},$$

de donde se desprende que $\sigma = (\tau_{1,2})^{-1} \circ (\tau_{2,4})^{-1} \circ (\tau_{5,6})^{-1}$ y como cada trasposición es su propia inversa, se obtiene que

$$\sigma = \tau_{1,2} \circ \tau_{2,4} \circ \tau_{5,6},$$

es decir, logramos escribir σ como una composición de trasposiciones. Este es un hecho general, como lo refleja el siguiente teorema.

Teorema 2.2.6

1. *Toda $\sigma \in S_n$ se puede escribir como una composición de trasposiciones,*

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_k,$$

con τ_i trasposición.

2. *Dada $\sigma \in S_n$, la cantidad k de trasposiciones τ_i usadas en una descomposición σ como la dada en el ítem anterior es siempre par o siempre impar.*

Demostración 8 *Daremos la idea de la prueba, dejando para lxs lectores los detalles.*

1. Dada $\sigma \in X_n$, definimos $\sigma_0 = \sigma$ y luego recursivamente $\sigma_j \in S_n$, para $j = 1, \ldots, n$ como sigue:

- si $\sigma_{j-1}(j) \neq j$, $\sigma_j := \tau_{j\sigma_{j-1}} \circ \sigma_{j-1}$;

- si $\sigma_{j-1}(j) = j$, $\sigma_j := \sigma_{j-1}$.

Así definida sigue que $\sigma_j(k) = k$ para todo $k = 1, \ldots, j$. Finalmente, $\sigma_n = id$, de donde vemos que una composición de transposiciones debe ser la inversa de σ, luego σ no es otra cosa que la inversa de esa composición de transposiciones, vale decir, una composición de transposiciones en si misma.

Sugerencia MUY FUERTE para comprender el enunciado correctamente: armar $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ y chequear en cada caso las afirmaciones hechas.

2. Dejamos como ejercicio probar que para describir la identidad como composición de transposiciones siempre se requiere de una cantidad par. Luego, si $\sigma \in S_n$ puede escribirse *de dos maneras como composición de transposiciones, por ejemplo:* $\sigma = \tau_{i_1 j_1} \circ \cdots \circ \tau_{i_k j_k}$ *y* $\sigma = \tau_{i'_1 j'_1} \circ \cdots \circ \tau_{i'_l j'_l}$*, con* k *y* l *las cantidades respectivas, podemos considerar* $\sigma \circ \sigma^{-1} = id$*, de donde podemos obtener la identidad componiendo* $k+l$ *transposiciones. Como* $k+l$ *debe ser par (por el ejercicio anterior), se tiene que o bien* k *y* l *son ambos pares o bien* k *y* l *son ambos impares.*

Ejemplo 2.2.7 *Consideremos* $\sigma = (2,4,3,1) \in S_4$*. Razonando como en el Ejemplo 2.2.5 obtenemos que*

$$\begin{aligned} \tau_{1,2} \circ \sigma &= (1,4,3,2) \\ \tau_{2,4} \circ \tau_{1,2} \circ \sigma &= (1,2,3,4), \end{aligned}$$

de donde $\sigma = \tau_{1,2} \circ \tau_{2,4}$ *y logramos escribir* σ *como una composición de* $k = 2$ *trasposiciones. Obviamente esta no es la única manera de reordenar de menor a mayor los números* $(2,4,3,1)$*, uno podráa hacer también*

$$\begin{aligned} \tau_{1,3} \circ \sigma &= (2,4,1,3), \\ \tau_{1,4} \circ \tau_{1,3} \circ \sigma &= (2,1,4,3), \\ \tau_{1,2} \circ \tau_{1,4} \circ \tau_{1,3} \circ \sigma &= (1,2,4,3), \\ \tau_{3,4} \circ \tau_{1,2} \circ \tau_{1,4} \circ \tau_{1,3} \circ \sigma &= (1,2,3,4), \end{aligned}$$

de donde sigue que σ *también se puede escribir como la composición* $\sigma = \tau_{1,3} \circ \tau_{1,4} \circ \tau_{1,2} \circ \tau_{3,4}$ *usando* $k = 4$ *trasposiciones. Notemos que en ambos casos necesitamos una cantidad par de trasposiciones para descomponer* σ*.*

Definición 2.2.8 *El* signo *de una permutación* $\sigma \in S_n$ *se define por*

$$\mathrm{sg}(\sigma) = (-1)^k,$$

en donde $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_k$ *con* τ_i *trasposición (notar que el signo esté bien definido por el Teorema 2.2.6). Diremos que* σ *es*

- *una permutación* par *si* $\mathrm{sg}(\sigma) = 1$*,*
- *o una permutación* impar *si* $\mathrm{sg}(\sigma) = -1$*.*

Teorema 2.2.9 *1.* $\mathrm{sg}(\mathrm{id}) = 1$*.*

2. $\mathrm{sg}(\sigma \circ \tau) = \mathrm{sg}(\sigma)\,\mathrm{sg}(\tau)$ *para todas* $\sigma, \tau \in S_n$*.*

3. $\mathrm{sg}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sg}(\sigma)^{-1} = \mathrm{sg}(\sigma)$ *para toda* $\sigma \in S_n$*.*

Demostración 9 *La primera parte sigue inmediatamente del Teorema 2.2.6 y la definición de signo de una permutación. Para la segunda, usando el Teorema 2.2.6, podemos escribir* $\sigma = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_k$ *y* $\tau = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_\ell$ *con* σ_i, τ_j *trasposiciones. Luego*

$$\sigma \circ \tau = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_k \circ \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_\ell$$

es composición de $k + \ell$ *trasposiciones y por consiguiente*

$$\operatorname{sg}(\sigma \circ \tau) = (-1)^{k+\ell} = (-1)^k (-1)^\ell = \operatorname{sg}(\sigma) \operatorname{sg}(\tau).$$

Para probar la tercera parte podemos usar lo que acabamos de demostrar. En efecto, como $\sigma \circ \sigma^{-1} = \mathrm{id}$*, sigue que*

$$1 = \operatorname{sg}(\mathrm{id}) = \operatorname{sg}(\sigma \circ \sigma^{-1}) = \operatorname{sg}(\sigma) \operatorname{sg}(\sigma^{-1}),$$

con lo cual

$$\operatorname{sg}(\sigma^{-1}) = \frac{1}{\operatorname{sg}(\sigma)} = \operatorname{sg}(\sigma)^{-1}.$$

Observar que si $\operatorname{sg}(\sigma) = 1$*, entonces* $\operatorname{sg}(\sigma^{-1}) = 1/1 = 1$ *y si* $\operatorname{sg}(\sigma) = -1$*, entonces* $\operatorname{sg}(\sigma^{-1}) = 1/(-1) = -1$*. En cualquiera de los dos casos vale* $\operatorname{sg}(\sigma) = \operatorname{sg}(\sigma^{-1})$*.*

Con estos preliminares sobre permutaciones estamos ya en condiciones de definir el determinante de una matriz cuadrada.

2.2.2 Determinantes

Definición 2.2.10 *Sea* $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$*, el* determinante *de* A *se define como*

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sg}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)}. \tag{2.4}$$

En otras palabras, para calcular el determinante de A *hay que sumar todos los posibles factores que se pueden armar con coeficientes de* A*, tomando un elemento en cada fila y cada columna, en donde el factor* $A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \cdots A_{n\sigma(n)}$ *debe ir multiplicado por el signo de la permutación de las columnas* σ*.*

Es común la notación que indica el determinante de la matriz $A = (a_{ij})$ utilizando barras verticales:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

A continuación estudiamos algunos casos particulares que ayudarán a clarificar la definición del determinante.

Para el caso de una matriz $A = (a) \in \mathbb{F}^{1\times 1}$ tenemos que $S_1 = \{\mathrm{id}\}$ y por ende

$$\det A = a.$$

Cuando $n = 2$ tenemos que $S_2 = \{(1,2),(2,1)\}$, en donde $\mathrm{sg}((1,2)) = \mathrm{sg}(\mathrm{id}) = 1$ y $\mathrm{sg}((2,1)) = -1$, pues $(2,1) = \tau_{1,2}$ es una trasposición. Luego, si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

tendremos que

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{\sigma\in S_2} \mathrm{sg}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \\ &= \mathrm{sg}((1,2) a_{11}a_{22} + \mathrm{sg}((2,1)) a_{12}a_{21} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.\end{aligned}$$

Esta fórmula a veces se escribe como

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Estudiemos ahora el caso de matrices 3×3. Notemos que para $n = 3$, la suma (2.4) tiene 6 sumandos pues $|S_3| = 3! = 6$. más precisamente,

$$S_3 = \{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}.$$

Pero para calcular el determinante de una matriz 3×3 no solo debemos conocer todas las permutaciones de 3 elementos, sino también sus signos. Para hacer esto notemos que:

- $(1,2,3) = \mathrm{id} \Rightarrow \mathrm{sg}((1,2,3)) = 1$,
- $(1,3,2) = \tau_{2,3} \Rightarrow \mathrm{sg}((1,3,2)) = -1$,
- $(2,1,3) = \tau_{1,2} \Rightarrow \mathrm{sg}((2,1,3)) - 1$,
- $(2,3,1) = \tau_{2,3} \circ \tau_{1,3} \Rightarrow \mathrm{sg}((2,3,1)) = 1$,
- $(3,1,2) = \tau_{1,2} \circ \tau_{1,3} \Rightarrow \mathrm{sg}((3,1,2)) = 1$,
- $(3,2,1) = \tau_{1,3} \Rightarrow \mathrm{sg}((3,2,1)) = -1$.

Luego, si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sg}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \\ &= \operatorname{sg}((1,2,3)) a_{11}a_{22}a_{33} + \operatorname{sg}((1,3,2)) a_{11}a_{23}a_{32} + \operatorname{sg}((2,1,3)) a_{12}a_{21}a_{33} \\ &\quad + \operatorname{sg}((2,3,1)) a_{12}a_{23}a_{31} + \operatorname{sg}((3,1,2)) a_{13}a_{21}a_{32} + \operatorname{sg}((3,2,1)) a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

Reemplazando los signos de las permutaciones por los calculados más arriba y reordenando los sumandos, se obtiene la fórmula

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{2.5}$$

A continuación derivamos propiedades importantes de la función determinante.

2.2.3 Propiedades

Proposición 2.2.11 *Si* $I \in \mathbb{F}^{n\times n}$ *es la matriz identidad, entonces* $\det I = 1$.

Demostración 10 *Por definición tenemos que*

$$\det I = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sg}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} I_{i\sigma(i)},$$

pero $I_{i\sigma(i)} \neq 0$ *si y sólo si* $\sigma(i) = i$, *y en tal caso se tiene* $I_{ii} = 1$. *Luego, la suma anterior tiene un único sumando no nulo, el correspondiente a* $\sigma = \mathrm{id}$, *por tanto*

$$\det I = \operatorname{sg}(\mathrm{id}) \prod_{i=1}^{n} I_{ii} = 1.$$

Ejercicio 2.2.12 *Usando la misma idea que en la Demostración de la Proposición 2.2.11, probar que si* $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ *es una matriz diagonal entonces* $\det A = A_{11}A_{22}\cdots A_{nn}$.

Proposición 2.2.13 *Si* $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ *entonces,*

$$\det A = \det A^t.$$

Demostración 11 *Si $\sigma \in S_n$, para $i \in [\![1,n]\!]$ será $\sigma(i) = j \in [\![1,n]\!]$. Luego, $i = \sigma^{-1}(j)$. Entonces*

$$\prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} = \prod_{j=1}^{n} A_{\sigma^{-1}(j)j},$$

de modo que

$$\begin{aligned}\operatorname{sg}(\sigma)A_{1\sigma(1)}A_{2\sigma(2)}\cdots A_{n\sigma(n)} &= \operatorname{sg}(\sigma^{-1})A_{\sigma^{-1}(1)1}A_{\sigma^{-1}(2)2}\cdots A_{\sigma^{-1}(n)n}\\ &= \operatorname{sg}(\sigma^{-1})(A^t)_{1\sigma^{-1}(1)}(A^t)_{2\sigma^{-1}(2)}\cdots (A^t)_{n\sigma^{-1}(n)}.\end{aligned}$$

Luego

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sg}(\sigma)\prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} = \sum_{\sigma^{-1}\in S_n} \operatorname{sg}(\sigma^{-1})\prod_{i=1}^{n} (A^t)_{i\sigma^{-1}(i)} = \det A^t.$$

Proposición 2.2.14 *Si $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ tiene dos columnas (o filas) iguales, entonces*

$$\det A = 0.$$

Demostración 12 *Supongamos primero que A tiene dos columnas iguales, digamos la columna k es igual a la columna j con $k < j$. Esto quiere decir que $a_{ik} = a_{ij}$ para todo $i = 1,\ldots,n$. Dada $\sigma \in S_n$, sea $\tilde{\sigma} = \tau_{k,j}\circ\sigma$. Se tiene que*

$$A_{1\sigma(1)}A_{2\sigma(2)}\cdots A_{n\sigma(n)} = A_{1\tilde{\sigma}(1)}A_{2\tilde{\sigma}(2)}\cdots A_{n\tilde{\sigma}(n)},$$

pues $\sigma(i) = k$ implica $\tilde{\sigma}(i) = j$ y por tanto $A_{i\sigma(i)} = A_{i\tilde{\sigma}(i)}$. análogamente $A_{j\sigma(j)} = A_{j\tilde{\sigma}(j)}$ y $A_{k\sigma(k)} = A_{k\tilde{\sigma}(k)}$ para $k \neq i, j$. Además

$$\operatorname{sg}(\tilde{\sigma}) = \operatorname{sg}(\tau_{k,j}\circ\sigma) = \operatorname{sg}(\tau_{k,j})\operatorname{sg}(\sigma) = -\operatorname{sg}(\sigma).$$

Por ende

$$\operatorname{sg}(\sigma)\prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} + \operatorname{sg}(\tilde{\sigma})\prod_{i=1}^{n} A_{i\tilde{\sigma}(i)} = 0.$$

Así, los sumandos en la fórmula

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sg}(\sigma)\prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)}$$

se van cancelando de a pares, de donde se concluye que $\det A = 0$. Para justificar este último paso observemos que S_n se descompone como la unión disjunta de las permutaciones pares y las permutaciones impares: $S_n = S_n^{\text{par}} \cup S_n^{\text{impar}}$. más aún, dada la transposición $\tau_{k,j}$, los subconjuntos de transposiciones pares e impares se relacionan de la siguiente forma:

$\sigma \in S_n^{\text{par}} \iff \tau_{k,j} \circ \sigma = \tilde{\sigma} \in S_n^{\text{impar}}$. Además, es claro que $\tau_{k,j} \circ \sigma_1 = \tau_{k,j} \circ \sigma_2$ si y sólo si $\sigma_1 = \sigma_2$. Luego,

$$
\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sg}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n^{\text{par}}} \operatorname{sg}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} + \sum_{\sigma \in S_n^{\text{impar}}} \operatorname{sg}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n^{\text{par}}} \operatorname{sg}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} + \sum_{\sigma \in S_n^{\text{par}}} \operatorname{sg}(\tilde{\sigma}) \prod_{i=1}^{n} A_{i\tilde{\sigma}(i)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n^{\text{par}}} \left[\operatorname{sg}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} + \operatorname{sg}(\tilde{\sigma}) \prod_{i=1}^{n} A_{i\tilde{\sigma}(i)} \right] = 0.
\end{aligned}
$$

Finalmente, si A tiene dos filas iguales, entonces A^t tiene dos columnas iguales. Por lo que acabamos de ver, y usando la Proposición 2.2.13, tenemos que $\det A = \det A^t = 0$.

Notación 3 *En lo que sigue usaremos la siguiente convención para describir una matriz en términos de sus columnas o filas. En primer lugar si $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ son vectores columna, denotaremos por*

$$A = (C_1\, C_2\, \cdots\, C_n)$$

la matriz cuyas columnas son $C_1, C_2, \ldots, C_n$. En tanto que si $F_1, F_2, \ldots, F_n \in \mathbb{F}^{1\times n}$ son vectores fila, denotaremos por

$$A = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$$

la matriz cuyas filas son $F_1, F_2, \ldots, F_n$.

Proposición 2.2.15 *Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ vectores columna y sea $\alpha \in \mathbb{F}$. Entonces*

$$\det(A_1\, \cdots\, \alpha A_k\, \cdots\, A_n) = \alpha \det(A_1\, \cdots\, A_k\, \cdots\, A_n).$$

En otras palabras, si $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ y A' es la matriz que se obtiene de A multiplicando la k-ésima columna por α, entonces

$$\det A' = \alpha \det A.$$

Demostración 13 *Observemos que*

$$A'_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & si\ j \neq k \\ \alpha A_{ik} & si\ j = k. \end{cases}$$

Luego, dada $\sigma \in S_n$*, se tiene*

$$A'_{1\sigma(1)}A'_{2\sigma(2)}\cdots A'_{n\sigma(n)} = \alpha A_{1\sigma(1)}A_{2\sigma(2)}\cdots A_{n\sigma(n)}$$

y por tanto

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sg}(\sigma)\prod_{i=1}^{n} A'_{i\sigma(i)} = \alpha \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sg}(\sigma)\prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} = \alpha \det A.$$

Ejercicio 2.2.16 *Usando la proposición anterior, probar que:*

1. *si* $\alpha \in \mathbb{F}^{n\times n}$ *y* $\alpha \in \mathbb{F}$*, entonces* $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$*;*
2. *si* $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ *tiene una columna (o fila) nula, entonces* $\det A = 0$*.*

Corolario 2.2.17 *Sean* $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{F}^{1\times n}$ *vectores fila y sea* $\alpha \in \mathbb{F}$*. Entonces*

$$\det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \alpha A_k \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}.$$

En otras palabras, si $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ *y* A' *es la matriz que se obtiene de* A *multiplicando la* k*-ésima fila por* α*, entonces*

$$\det A' = \alpha \det A.$$

Demostración 14 *Ejercicio (aplicar la Proposición 2.2.15 a la matriz* A^t*).*

Ejemplo 2.2.18 *Se pueden usar los resultados anterior para calcular el determinante de una matriz diagonal sin usar la definición:*

$$\det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = a \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = ab \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = abc \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = abc.$$

Proposición 2.2.19 *Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ y sean $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ las columnas de A. Supongamos que $A_k = B_k + C_k$ y sean las matrices*

$$B = (A_1 \cdots A_{k-1}\, B_k\, A_{k+1} \cdots A_n), \qquad C = (A_1 \cdots A_{k-1}\, C_k\, A_{k+1} \cdots A_n).$$

Entonces

$$\det A = \det B + \det C.$$

Demostración 15 *Denotemos*

$$B_k = \begin{pmatrix} B_{1k} \\ B_{2k} \\ \vdots \\ B_{nk} \end{pmatrix}, \qquad C_k = \begin{pmatrix} C_{1k} \\ C_{2k} \\ \vdots \\ C_{nk} \end{pmatrix},$$

de donde sigue que

$$B_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } j \neq k \\ B_{ik} & \text{si } j = k, \end{cases} \qquad C_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } j \neq k \\ C_{ik} & \text{si } j = k. \end{cases}$$

Luego, si $\sigma \in S_n$, tenemos que

$$A_{1\sigma(1)}A_{2\sigma(2)} \cdots A_{n\sigma(n)} = B_{1\sigma(1)}B_{2\sigma(2)} \cdots B_{n\sigma(n)} + C_{1\sigma(1)}C_{2\sigma(2)} \cdots C_{n\sigma(n)}$$

pues siempre existe un $\ell \in [\![1, n]\!]$ tal que $\sigma(\ell) = k$, y Así $A_{\ell\sigma(\ell)} = B_{\ell\sigma(\ell)} + C_{\ell\sigma(\ell)}$. Finalmente

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sg}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sg}(\sigma) \left[\prod_{i=1}^{n} B_{i\sigma(i)} + \prod_{i=1}^{n} C_{i\sigma(i)}\right] \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sg}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} B_{i\sigma(i)} + \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sg}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} C_{i\sigma(i)} = \det B + \det C. \end{aligned}$$

Corolario 2.2.20 *Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ y sean $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{F}^{1\times n}$ las filas A. Supongamos que $A_k = B_k + C_k$ y sean las matrices B cuyas filas son $A_1, \ldots, A_{k-1}, B_k, A_{k+1}, \ldots A_n$, y C cuyas filas son $A_1, \ldots, A_{k-1}, C_k, A_{k+1}, \ldots A_n$. Entonces*

$$\det A = \det B + \det C.$$

Demostración 16 *Ejercicio.*

Corolario 2.2.21 *Sean $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{F}^{n\times 1}$, entonces*

$$\det(A_1 \cdots \underbrace{A_j}_{\text{columna } i} \cdots \underbrace{A_i}_{\text{columna } j} \cdots A_n) = -\det(A_1 \cdots \underbrace{A_i}_{\text{columna } i} \cdots \underbrace{A_j}_{\text{columna } j} \cdots A_n).$$

En otras palabras, si $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ y A' es la matriz que se obtiene de A intercambiando la i-ésima columna con la j-ésima columna, con $i \neq j$, entonces

$$\det A' = -\det A.$$

Demostración 17 *Consideremos la matriz*

$$\tilde{A} = (A_1 \, \cdots \, (A_i + A_j) \, \cdots \, (A_i + A_j) \, \cdots \, A_n),$$

o sea, $\tilde{A}$ *es la matriz cuyas columnas* i *y* j *son iguales a* $A_i + A_j$ *y por lo tanto tiene determinante nulo. Además, usando las Proposiciones 2.2.19 y 2.2.14 obtenemos que*

$$\begin{aligned}
0 = \det \tilde{A} &= \det(A_1 \, \cdots \, (A_i + A_j) \, \cdots \, (A_i + A_j) \, \cdots \, A_n) \\
&= \det(A_1 \, \cdots \, A_i \, \cdots \, (A_i + A_j) \, \cdots \, A_n) + \det(A_1 \, \cdots \, A_j \, \cdots \, (A_i + A_j) \, \cdots \, A_n) \\
&= \det(A_1 \, \cdots \, A_i \, \cdots \, A_i \, \cdots \, A_n) + \det(A_1 \, \cdots \, A_i \, \cdots \, A_j \, \cdots \, A_n) \\
&\qquad + \det(A_1 \, \cdots \, A_j \, \cdots \, A_i \, \cdots \, A_n) + \det(A_1 \, \cdots \, A_j \, \cdots \, A_j \, \cdots \, A_n) \\
&= \det(A_1 \, \cdots \, A_i \, \cdots \, A_j \, \cdots \, A_n) + \det(A_1 \, \cdots \, A_j \, \cdots \, A_i \, \cdots \, A_n),
\end{aligned}$$

de donde se concluye que

$$\det(A_1 \, \cdots \, A_j \, \cdots \, A_i \, \cdots \, A_n) = -\det(A_1 \, \cdots \, A_i \, \cdots \, A_j \, \cdots \, A_n).$$

Ejercicio 2.2.22 *Enunciar y demostrar el resultado análogo para el intercambio de filas.*

Proposición 2.2.23 *Sea* $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ *y sea* A' *la matriz que se obtiene de* A *sumando a la* j*-ésima columna un múltiplo de la* k*-ésima columna, con* $j \neq k$*. Entonces*

$$\det A' = \det A.$$

Demostración 18 *Supongamos sin perder generalidad que* $j < k$*. Denotemos por* $A_1, \ldots, A_n$ *las columnas de la matriz* A*. Entonces*

$$A' = (A_1 \, \cdots \, A_{j-1} \, (A_j + \alpha A_k) \, A_{j+1} \, \cdots \, A_k \, \cdots \, A_n)$$

para cierto $\alpha \in \mathbb{F}$*. Luego, usando las Proposiciones 2.2.14, 2.2.15 y 2.2.19 tenemos que*

$$\begin{aligned}
\det A' &= \det(A_1 \, \cdots \, A_{j-1} \, (A_j + \alpha A_k) \, A_{j+1} \, \cdots \, A_k \, \cdots \, A_n) \\
&= \det(A_1 \, \cdots \, A_{j-1} \, A_j \, A_{j+1} \, \cdots \, A_k \, \cdots \, A_n) \\
&\qquad\qquad + \det(A_1 \, \cdots \, A_{j-1} \, \alpha A_k \, A_{j+1} \, \cdots \, A_k \, \cdots \, A_n) \\
&= \det A + \alpha \det(A_1 \, \cdots \, A_{j-1} \, A_k \, A_{j+1} \, \cdots \, A_k \, \cdots \, A_n) \\
&= \det A.
\end{aligned}$$

Ejercicio 2.2.24 *Enunciar y demostrar el resultado análogo para operaciones sobre las filas de la matriz.*

Con los resultados anteriores el calculo del determinante se simplifica drásticamente.

Ejemplo 2.2.25 *Calculemos el determinante de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

La idea es "mejorar" la matriz A aplicando las operaciones de intercambio de filas o columnas y sumando o restando a una fila/columna un múltiplo de otra fila/columna. Como ya demostramos, al hacer intercambios de filas o columnas, el determinante cambia de signo, en tanto que si a una fila o columna le sumamos un múltiplo de otra, el determinante no cambia. Para justificar las operaciones que usamos en cada paso usaremos la siguiente notación. Para el intercambio de filas o columnas escribiremos, por ejemplo, $\texttt{f1} \leftrightarrow \texttt{f2}$ *para indicar que intercambiamos la fila 1 con la fila 2, en tanto que* $\texttt{c2} \leftrightarrow \texttt{c4}$ *indica que intercambiamos la columna 2 con la columna 4. Por otro lado, la notación* $\texttt{f3} \to \texttt{f3} - \texttt{2f1}$ *significa que reemplazamos la fila 3 por la fila 3 menos 2 veces la fila 1. Aclarado esto, tenemos que*

$$\begin{aligned}
\det A &\overset{\texttt{f1}\leftrightarrow\texttt{f2}}{=} -\det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{\texttt{f3}\to\texttt{f3}-\texttt{2f1}}{=} -\det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
&\overset{\texttt{f4}\to\texttt{f4}-\texttt{f1}}{=} -\det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{\texttt{c2}\leftrightarrow\texttt{c4}}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \\
&\overset{\texttt{f2}\leftrightarrow\texttt{f3}}{=} -\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \overset{\texttt{f4}\leftrightarrow\texttt{f4}+\texttt{f3}}{=} -\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego hemos mostrado que el determinante de A es igual al determinante de una matriz triangular superior, los cuales son muy fáciles de calcular usando la siguiente proposición.

Proposición 2.2.26 *Si $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ es triangular superior, entonces*

$$\det A = A_{11}A_{22}\cdots A_{nn}.$$

Demostración 19 *Una matriz triangular superior tiene la forma*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

es decir $A_{ij} = 0$ si $i > j$. Ahora bien, para $\sigma \in S_n$, $\sigma \neq \mathrm{id}$, siempre existe un i tal que $i > \sigma(i)$. En efecto, si esto no sucediera, se tendráa $n \leq \sigma(n) \leq n$, de donde sigue $\sigma(n) = n$. Luego $n-1 \leq \sigma(n-1) \leq n-1$, lo cual implica $\sigma(n-1) = n-1$. Así siguiendo, se obtiene que $\sigma(i) = i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Absurdo, pues supusimos $\sigma \neq \mathrm{id}$. Esto dice que en la definición de $\det A$ todos los sumandos correspondientes a $\sigma \neq \mathrm{id}$ son nulos, por tanto

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sg}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} = \mathrm{sg}(\mathrm{id}) \prod_{i=1}^{n} A_{ii} = \prod_{i=1}^{n} A_{ii}$$

como queríamos probar.

Ejemplo 2.2.25 (continuación) *Usando el resultado anterior concluimos que*

$$\det A = -\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = -(1 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-3)) = 6.$$

2.2.4 Matrices inversibles

Una de las propiedades más importantes de la función determinante es la siguiente.

Teorema 2.2.27 *Si $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, entonces*

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

Demostración 20 *La veremos más adelante.*

Definición 2.2.28 *Una matriz $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ se dice* invertible *si existe $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ tal que $AB = BA = I$. En caso de que exista una tal B, ésta se llama la* matriz inversa *de A y se denota por $B = A^{-1}$.*

Observación 2.2.29 *Si $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ es invertible, entonces la inversa es única. En efecto, supongamos que existen $B, C \in \mathbb{F}^{n\times n}$ tales que $BA = AB = I = CA = AC$. Sigue que*

$$B = BI = BAC = IC = C.$$

Ejemplo 2.2.30 *1. La matriz identidad es invertible. ¿Por qué?*

2. La matriz nula no es invertible. ¿Por qué?

Ejemplo 2.2.31 *¿Cuándo es invertible una matriz 2×2? Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es invertible, entonces existe una matriz $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ tal que*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lo cual es equivalente al siguiente sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas (las incógnitas son e, f, g, h):

$$ae + bg = 1 \tag{2.6}$$
$$af + bh = 0 \tag{2.7}$$
$$ce + dg = 0 \tag{2.8}$$
$$cf + dh = 1 \tag{2.9}$$

Si multiplicamos la ecuación (2.6) por d y le restamos b veces la ecuación (2.8) obtenemos

$$d(ae + bg) - b(ce + dg) = (ad - bc)e = d.$$

Trabajando análogamente con las ecuaciones (2.7) y (2.9) obtenemos que

$$\begin{aligned} d(af + bh) - b(cf + dh) &= (ad - bc)f = -b \\ a(ce + dg) - c(ae + bg) &= (ad - bc)g = -c \\ a(cf + dh) - c(af + bh) &= (ad - bc)h = a, \end{aligned}$$

de donde sigue que si $\det A = ad - bc \neq 0$ *entonces el sistema tiene solución y la matriz inversa es*

$$B = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Corolario 2.2.32 *Una matriz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ es invertible si y sólo si* $\det A \neq 0$. *más aún, si A es invertible, entonces* $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

Demostración 21 *Si A es invertible entonces existe la inversa A^{-1} de A y vale $AA^{-1} = I$. Luego por el Teorema 2.2.27 se tiene $1 =$* $\det I = \det A \det A^{-1}$, *por ende, tanto* $\det A$ *como* $\det A^{-1}$ *deben ser no nulos. Notar que esta ecuación también implica que* $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

La recíproca la probaremos en el próximo apartado, cuando exhibamos un método para calcular la matriz inversa de una matriz A tal que $\det A \neq 0$.

2.2.5 Desarrollo del determinante por filas o columnas

En este apartado presentamos un método alternativo para el cálculo del determinante. Dicho método no presenta ninguna ventaja sobre la definición 2.2.10 en lo que respecta a la complejidad de cálculo, pero sí tiene importancia teórica como veremos en breve.

Definición 2.2.33 *Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ y sean $i, j \in [\![1, n]\!]$. Se define $A(i|j)$ como la matriz $(n-1)\times(n-1)$ que se obtiene suprimiendo la i-ésima fila y la j-ésima columna de la matriz A.*

Ejemplo 2.2.34 *Si*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

entonces

$$A(1|1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad A(1|3) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad A(3|2) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

más aún, el proceso se puede repetir,

$$A(1|1)(2|3) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A(1|1)(2|3)(2|2) = 4.$$

A continuación presentamos una fórmula recursiva para el cálculo de la función determinante, para lo cual necesitamos hacer unas observaciones.

Observemos que el conjunto de todas las permutaciones de n elementos, puede describirse como la unión disjunta de las permutaciones que mandan el 1 a un elemento especificado $j \in [\![1, n]\!]$. más precisamente, si llamamos

$$S_n^j = \{\sigma \in S_n : \sigma(1) = j\},$$

entonces se tiene

$$S_n = S_n^1 \cup S_n^2 \cup \cdots \cup S_n^n$$

y esta unión es disjunta, es decir, $S_n^j \cap S_n^k = \varnothing$, si $j \neq k$. Esto es, si $\sigma \in S_n$ entonces $\sigma \in S_n^{\sigma(1)}$.

Ahora bien, un elemento $\sigma \in S_n^j$ puede pensarse como una permutación de $n-1$ elementos, o sea, como un elemento de S_{n-1}. En efecto, sabemos que todos los elementos de S_n^j mandan 1 en j, luego, podemos pensar que los elementos de S_n^j permutan los números $\{1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n\}$. esquemáticamente:

$$\begin{array}{ccc}
\sigma \in S_n^j & \leftrightsquigarrow & \sigma^j \in S_{n-1} \\
\sigma : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!] & \leftrightsquigarrow & \sigma^j : [\![1, n-1]\!] \to [\![1, n-1]\!] \\
1 & \leftrightsquigarrow & 1 \\
2 & \leftrightsquigarrow & 2 \\
 & \vdots & \\
j-1 & \leftrightsquigarrow & j-1 \\
j+1 & \leftrightsquigarrow & j \\
 & \vdots & \\
n-1 & \leftrightsquigarrow & n-2 \\
n & \leftrightsquigarrow & n-1.
\end{array}$$

Esto puede formalizarse diciendo que a cada elemento $\sigma \in S_n^j$ le corresponde un único elemento $\sigma^j \in S_{n-1}$. Esta identificación puede resultar un poco difícil de entender, pues $\sigma \in S_n^j$ permuta los elementos $\{1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n\}$, pero σ^j permuta los elementos $\{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Veamos unos ejemplos para clarificar esta noción.

Ejemplo 2.2.35 *Consideremos la permutación $\sigma \in S_7^3$ dada por $\sigma = (3, 2, 1, 6, 5, 4, 7)$. Luego $\sigma(1) = 3$ y σ reordena la 6-upla $(1, 2, 4, 5, 6, 7)$ en $(2, 1, 6, 5, 4, 7)$. O sea, el 1er elemento va al 2do lugar, el 2do elemento va al 1er lugar, el 3er elemento va al 5to lugar, el 4to elemento va al 4to lugar, el 5to elemento va al 3er lugar y el 6to elemento va al 6to lugar. Luego, la identificación en este caso seráa*

$$\sigma = (3, 2, 1, 6, 5, 4, 7) \longleftrightarrow \sigma^3 = (2, 1, 5, 4, 3, 6).$$

Ejemplo 2.2.36 *Otro ejemplo: ¿qué permutación $\sigma \in S_7^3$ corresponde a la permutación* $\mathrm{id} \in S_6$*? En este caso debería ser $\sigma(1) = 3$ pero σ tiene que mantener el orden de los restantes elementos* $(1, 2, 4, 5, 6, 7)$. *Luego*

$$\sigma = (3, 1, 2, 4, 5, 6, 7) \longleftrightarrow \sigma^3 = (1, 2, 3, 4, 5, 6) = \mathrm{id}\,.$$

La pregunta clave en la Demostración del teorema siguiente será: dada $\sigma \in S_n^j$, ¿cuál es el signo de la permutación $\sigma^j \in S_{n-1}$? Para responder esta pregunta, observemos que para calcular $\mathrm{sg}(\sigma)$ uno debe expresar σ como una composición de trasposiciones, o dicho de otra manera, necesitamos contar la cantidad de intercambios de dos elementos necesarios para llegar de $(1, 2, \ldots, n)$ a $(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$. En tanto que, al ser $\sigma(1) = j$, para calcular el signo de σ^j uno tiene contar la cantidad de intercambios de dos elementos necesarios para pasar de $(1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n)$ a $(\sigma(2),\sigma(3),\ldots,\sigma(n))$. Ahora bien, la relación entre $\operatorname{sg}(\sigma)$ y $\operatorname{sg}(\sigma^j)$ viene dada como sigue: para pasar de $(1,2,\ldots,n)$ a

$$(\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n)) = (j,\sigma(2),\ldots,\sigma(n))$$

uno puede hacer primero $j-1$ intercambios para pasar de $(1,2,\ldots,n)$ a $(j,2,3,\ldots,n)$ y luego hacer los intercambios necesarios sobre los últimos elementos para transformar $(j,2,3,\ldots,n)$ en $(j,\sigma(2),\sigma(3),\ldots,\sigma(n))$. Por tanto

$$\operatorname{sg}(\sigma) = (-1)^{j-1}\operatorname{sg}(\sigma^j) = (-1)^{1+j}\operatorname{sg}(\sigma^j).$$

Teorema 2.2.37 (Desarrollo del determinante por la primera fila) *Si $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, entonces*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}A_{1j}\det A(1|j).$$

Demostración 22 *Para probar el teorema usaremos a lo largo de los cálculos las observaciones que hemos hecho anteriormente.*

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sg}(\sigma)\prod_{i=1}^{n}A_{i\sigma(i)} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n^j}\operatorname{sg}(\sigma)\prod_{i=1}^{n}A_{i\sigma(i)}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n^j}\operatorname{sg}(\sigma)A_{1j}\prod_{i=2}^{n}A_{i\sigma(i)}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{\sigma^j\in S_{n-1}}(-1)^{1+j}\operatorname{sg}(\sigma^j)A_{1j}\prod_{i=1}^{n-1}A(1|j)_{i\sigma^j(i)}\\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}A_{1j}\sum_{\sigma^j\in S_{n-1}}\operatorname{sg}(\sigma^j)\prod_{i=1}^{n-1}A(1|j)_{i\sigma^j(i)}\\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}A_{1j}\det A(1|j).
\end{aligned}$$

Veamos algunos casos particulares de aplicación del teorema anterior.

Ejemplo 2.2.38 *Calculemos, usando el Teorema 2.2.37, el determinante de*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}.$$

En efecto,

$$\det A = a_{11}\det A(1|1) - a_{12}\det A(1|2) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

también podemos calcular el determinante de una matriz 3×3 *usando determinantes de matrices* 2×2. *Si*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \det A(1|1) - a_{12} \det A(1|2) + a_{13} \det A(1|3) \\ &= a_{11} \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

Observación 2.2.39 *En algunos libros de texto el determinante se define recursivamente usando la fórmula del Teorema 2.2.37. Es decir, para matrices* $A \in \mathbb{F}^{1\times 1} = \mathbb{F}$, *se define* $\det A = A$ *y luego, dado* $n \in \mathbb{N}$, *se define el determinante de una matriz* $A \in \mathbb{F}^{(n+1)\times(n+1)}$ *como*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{1+j} A_{1j} \det A(1|j).$$

Como el determinante de una matriz es igual al determinante de su transpuesta y el determinante cambia de signo si en una matriz intercambiamos filas o columnas, se pueden deducir fórmulas para el desarrollo del determinante por cualquier fila o columna de la matriz. Queda como ejercicio hacer las demostraciones de los siguientes resultados.

Corolario 2.2.40 (Desarrollo del determinante por la i-ésima fila) *Sean* $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, *e* $i \in [\![1, n]\!]$. *Entonces*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \det A(i|j).$$

Corolario 2.2.41 (Desarrolo del determinante por la j-ésima columna) *Sean* $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, *y* $j \in [\![1, n]\!]$. *Entonces*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \det A(i|j).$$

A continuación mostramos un método para calcular la inversa de una matriz A (si es que ésta existe).

Definición 2.2.42 *Sea* $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, *el escalar* $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i|j)$ *se llama el* cofactor i, j *de* A. *La matriz* $C = (C_{ij})$ *se llama* matriz de los cofactores *de* A.

Definición 2.2.43 *La* matriz adjunta *de* $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, *denotada por* $\operatorname{adj} A$, *es la matriz transpuesta de la matriz de los cofactores de* A. *Es decir, el lugar* i, j *de* $\operatorname{adj} A$ *esté dado por el cofactor* j, i *de* A:

$$(\operatorname{adj} A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(j|i).$$

Teorema 2.2.44 *Si* $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, *entonces*

$$A \operatorname{adj} A = (\operatorname{adj} A)A = (\det A)I$$

Demostración 23 *Debemos probar que* $(A \operatorname{adj} A)_{ij} = ((\operatorname{adj} A)A)_{ij} = (\det A)\delta_{ij}$, *en donde* δ_{ij} *es la delta de Kronecker (vale* 1 *si* $i = j$ *y* 0 *si* $i \neq j$*). Probaremos que* $(A \operatorname{adj} A)_{ij} = \delta_{ij}$, *dejando como ejercicio el comprobar que* $((\operatorname{adj} A)A)_{ij} = \delta_{ij}$. *Para ello, calculamos la matriz producto* $A \operatorname{adj} A$ *por definición. En primer lugar, si* $i \neq j$ *tenemos que*

$$(A \operatorname{adj} A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(\operatorname{adj} A)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} A_{ik} \det A(j|k) = \det A'n,$$

usando el Corolario 2.2.40, en donde A' *es la matriz tal que* $(A')_{ik} = (A')_{jk}$ *para todo* $k = 1, \ldots, n$ *y tiene todas sus otras entradas iguales a las entradas de* A. *Pero en* A', *la columna* i *es igual a la columna* j, *luego, por la Proposición 2.2.14, se tiene que* $0 = \det A' = (A \operatorname{adj} A)_{ij}$.

Finalmente,

$$(A \operatorname{adj} A)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(\operatorname{adj} A)_{ki} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} A_{ik} \det A(i|k) = \det A,$$

nuevamente por el Corolario 2.2.40, lo cual concluye la prueba del teorema.

Usando el teorema anterior podemos completar la prueba del Corolario 2.2.32. De hecho, podemos encontrar una fórmula para la matriz inversa de una matriz invertible.

Corolario 2.2.45 *Sea* $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ *tal que* $\det A \neq 0$. *Entonces* A *es invertible y vale*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A.$$

Demostración 24 *Es inmediato del teorema anterior que si* $\det A \neq 0$, *entonces*

$$\left(\frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A\right) A = A \left(\frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A\right) = I.$$

Se dice que una matriz $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ tiene una *inversa a izquierda* (resp. *a derecha*) si existe $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ tal que $BA = I$ (resp. $AB = I$).

Corolario 2.2.46 *Si $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ tiene una inversa a izquierda (resp. a derecha) entonces A es invertible.*

Demostración 25 *Supongamos que existe $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ tal que $BA = I$. Sigue que*

$$1 = \det(BA) = (\det B)(\det A)$$

y en particular $\det A \neq 0$. Luego A es invertible por el corolario anterior. El caso en el que A admite una inversa a derecha es análogo.

Ejemplo 2.2.47 *Consideremos la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

La matriz de los cofactores de A es

$$\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\det A(1|1) & (-1)^{1+2}\det A(1|2) \\ (-1)^{2+1}\det A(2|1) & (-1)^{2+2}\det A(2|2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Luego, si $ad - bc \neq 0$, entonces A es invertible y su inversa viene dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.2.48 *Decidir si la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

es invertible y calcular su inversa en caso afirmativo. Calculamos primero la matriz de los cofactores de A, para esto, necesitamos calcular $\det A(i|j)$ para todos $i, j = 1, 2, 3$.

$$\det A(1|1) = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 13, \quad \det A(1|2) = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -10, \quad \det A(1|3) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4,$$
$$\det A(2|1) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 7, \quad \det A(2|2) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6, \quad \det A(2|3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5,$$
$$\det A(3|1) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 12, \quad \det A(3|2) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5, \quad \det A(3|3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Luego la matriz de los cofactores de A y la matriz adjunta están dadas por

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 10 & -4 \\ -7 & 6 & 5 \\ 12 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 13 & -7 & 12 \\ 10 & 6 & -5 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para chequear si A *es invertible deberíamos calcular* $\det A$*, pero observemos que con lo ya obtenido, esta cuenta puede hacerse como*

$$A(\operatorname{adj} A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & -7 & 12 \\ 10 & 6 & -5 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 0 & 0 \\ 0 & 37 & 0 \\ 0 & 0 & 37 \end{pmatrix}.$$

Luego $\det A = 37 \neq 0$ *y por lo tanto* A *es invertible con inversa*

$$A^{-1} = \frac{1}{37} \begin{pmatrix} 13 & -7 & 12 \\ 10 & 6 & -5 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

El método que desarrollamos para el cálculo de la inversa de una matriz resulta muy tedioso de aplicar y nada eficiente para matrices de tamaño grande. En la próxima unidad desarrollaremos un métodos más eficientes, tanto para el calculo del determinante como para encontrar la inversa de una matriz invertible.

Comentario 2 *El* permanente *de una matriz* $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ *se define de manera análoga al determinante, sumando todos los factores que se pueden armar eligiendo un elemento en cada fila recorriendo todas las columnas, pero sin tener en cuenta el signo de la permutación de las columnas, es decir,*

$$\operatorname{perm} A = \sum_{\sigma\in S_n} \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)}.$$

Por ejemplo,

$$\operatorname{perm} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad + bc,$$

$$\operatorname{perm} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + afh + bdi + bfh + cdh + ceg.$$

Con las mismas técnicas que aprendimos en esta unidad, uno puede probar que el permanente comparte algunas propiedades con el determinante, por ejemplo $\operatorname{perm} A = \operatorname{perm} A^t$*, o que si uno multiplica la columna* k *de* A *por el escalar* α *y llama* A' *a esta nueva matriz, entonces* $\operatorname{perm} A' = \alpha \operatorname{perm} A$*. Pero otras propiedades ya no son válidas, por ejemplo, si una matriz* A *tiene dos columnas iguales, no necesariamente vale* $\operatorname{perm} A = 0$*. Tampoco es cierto que* $\operatorname{perm}(AB) = (\operatorname{perm} A)(\operatorname{perm} B)$ *para todas* $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$*. En efecto,*

$$4 = \operatorname{perm} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \operatorname{perm} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \operatorname{perm} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \operatorname{perm} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 8.$$

Es la falta de estas propiedades la que hace que el permanente, si bien tiene una definición similar al determinante, sea mucho más difícil de calcular. En efecto, si uno *utiliza la definición, tanto para el permanente como para el determinante deben realizarse $n!n$ operaciones sobre los coeficientes de la matriz (porque tenemos $n!$ sumandos de productos de n elementos). Sin embargo, para calcular el determinante de una matriz uno puede realizar operaciones por fila y columna para transformarla en una matriz triangular superior. Puede verse (como lo probaremos en la próxima unidad y quizáz ya podamos intuirlo de los ejemplos en esta unidad) que la cantidad necesaria de operaciones para pasar de una matriz arbitraria a una matriz triangular superior es del orden de n^3. Es por esto que se dice que el cálculo del determinante de una matriz es un problema que puede resolverse en tiempo polinomial, o que tiene complejidad $O(n^3)$, pues n^3 es un polinomio de grado 3 en el número de operaciones necesarias para calcular el determinante. Estas consideraciones no son ciertas para el cálculo del permanente, de hecho se cree que el problema de calcular el permanente de una matriz no puede resolverse en tiempo polinomial.*

Observar que $n!n$ es mucho más grande que n^3 cuando n es suficientemente grande.

n	n^3	$n!n$
1	1	1
2	8	4
3	27	18
4	64	96
5	125	600
6	216	4320
7	343	35280
8	512	322560
9	729	3265920
10	1000	36288000
15	3375	19615115520000
20	8000	48658040163532800000

2.3 Ejercicios sugeridos

1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

indicar cuáles de las siguientes operaciones están bien definidas y realizarlas:

a) $C+D$	*b)* $B-C+3A$	*c)* $B+C$	*d)* $2A-\frac{1}{2}B$	*e)* $C-D+\frac{3}{2}(D+E)$
f) HJ	*g)* JH	*h)* FG	*i)* GF	*j)* $AB-BA$
k) AC	*l)* $CA-AC$	*m)* $B(2C-E)$	*n)* FGJ	*o)* $2BC-BE$

2. Calcular $AB-BA$, siendo $A=\begin{pmatrix} i & 2i & -i \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2-i & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & i \\ -4 & 2 & 0 \\ i & -2i & 1 \end{pmatrix}$.

3. Probar las propiedades de la suma y la multiplicación por un escalar de matrices.

4. (a) Comprobar que las identidades $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ y $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ no son ciertas para las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (b) ¿Cómo podríamos formular estas identidades de manera que sean válidas para todo par de matrices cuadradas?

   (c) Para qué conjunto de matrices cuadradas podemos asegurar que son válidas las identidades dadas en a)?

5. Completar la demostración de las propiedades del producto de matrices.

6. Hallar todas la matrices $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ que conmuten con $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Dada $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ hallar, en cada caso, todas las matrices $A\in\mathbb{F}^2$ que satisfacen la condición dada:

$$a)\ AB=0, \qquad b)\ BA=0, \qquad c)\ A^2=0.$$

8. Si A y $B\in\mathbb{F}^3$, analizar la validez o falsedad de las siguientes proposiciones, justificando la respuesta:

   (a) Si la 1° y 3° columnas de B son iguales, también lo son la 1° y 3° columnas de AB.

   (b) Si la 1° y 3° filas de B son iguales, también lo son la 1° y 3° filas de AB.

   (c) Si la 1° y 3° filas de A son iguales, también lo son la 1° y 3° filas de AB.

9. Hallar toddas mas matrices de orden 2 tales que $A^2=I$.

10. Con las matrices definidas en el ejercicio 1, realice los siguientes cálculos:

    (a) $L = C^tD$, $M = CE^t$. Hallar la descomposiciÓn en matrices simÉtricas y antisimÉtricas de las matrices L y M.

    (b) $N = (FG)^t$ y $P = (JF - I)^t$.

11. Demostrar la unicidad en la descomposición de matrices en su forma simétrica y antisimétrica.

12. Completar la demostración relativa a las propiedades de la traza de una matriz.

13. Para cada una de las siguientes permutaciones escribirla como composición de transposiciones y encontrar su inversa y su signo.

    a) $(6,4,5,1,2,3)$ b) $(6,5,4,3,2,1)$ c) $(7,6,5,4,3,2,1)$
    d) $(2,4,1,7,3,5,6)$ e) $(2,3,4,5,6,7,8,1)$ f) $(n,n-1,n-2,\cdots,3,2,1)$
    g) $(2,3,4,\ldots,n-2,n-1,n,1)$

14. Mostrar que si $\{i,j\} \cap \{k,\ell\} = \varnothing$ entonces $\tau_{i,j} \circ \tau_{k,\ell} = \tau_{k,\ell} \circ \tau_{i,j}$.

15. Encontrar el signo de la siguiente permutación de los días de la semana (suponemos que la semana empieza el domingo):

    `(vie, lun, dom, mie, mar, sab, jue)`

16. Dada $\sigma \in S_n^j$, encontrar $\sigma^j \in S_{n-1}$.

    a) $\sigma = (1,3,2,6,4,5) \in S_6^1$, b) $\sigma = (3,1,2,5,4,6) \in S_6^3$,
    c) $\sigma = \tau_{1,2} \circ \tau_{3,4} \circ \tau_{5,6} \circ \tau_{7,8} \in S_8^2$, d) $\sigma \in S_n^n$ (arbitraria).

17. Dada $\sigma^j \in S_{n-1}$ encontrar la correspondiente permutación $\sigma \in S_n^j$.

    a) $\sigma^1 = (6,5,4,3,2,1) \in S_6$, b) $\sigma^7 = (6,5,4,3,2,1) \in S_6$,
    c) $\sigma^3 = (6,5,4,3,2,1) \in S_6$, d) $\sigma^5 = (7,1,3,2,5,4,6) \in S_7$.

18. *(Ejercicio para alumnos de LCC y para quienes gusten de la programación)*

    Escribir un algoritmo que reciba $\sigma \in S_n$ y devuelva $\sigma^{\sigma(1)} \in S_{n-1}$.

19. (a) Dada $\sigma \in S_n$, mostrar que existe una matriz $P_\sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$, cuyas entradas son sólo ceros y unos, y tal que

    $$P_\sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma(1) \\ \sigma(2) \\ \vdots \\ \sigma(n) \end{pmatrix}$$

(b) Probar que $P_\sigma \circ P_\mu = P_{\mu\circ\sigma}$ para todas $\sigma, \mu \in S_n$.

(c) Probar que $\det P_\sigma = \operatorname{sg}(\sigma)$ para toda $\sigma \in S_n$.

20. La función *permanente* se aplica a matrices $n \times n$ y se define como

$$\operatorname{perm} A = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)}.$$

Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a) $\operatorname{perm} I = 1$.

(b) $\operatorname{perm} A = \operatorname{perm} A^t$ para toda $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

(c) Si $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ tiene dos columnas iguales, entonces $\operatorname{perm} A = 0$.

(d) $\operatorname{perm}(AB) = (\operatorname{perm} A)(\operatorname{perm} B)$ para todas $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

21. Calcular los determinantes de las siguientes matrices:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) $D = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 2+i & 1 & -i \\ 0 & i & 3+i \\ 1-i & 2i & 2-i \end{pmatrix}$.

(c) $F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2a^3 \\ 1 & b & b^2b^3 \\ 1 & c & c^2c^3 \\ 1 & d & d^2d^3 \end{pmatrix}$.

(d) $I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

22. Hallar los valores de λ de manera que la ecuación $\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ \lambda & -1 & 2x \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ tenga raíces reales iguales.

23. Analizar la relación existente entre los siguientes determinantes. Justificar la respuesta.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & \pi & 7 \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 7 & \pi & -1 \end{vmatrix}, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} -1 & \pi & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & \frac{1}{2} & 3 \end{vmatrix}.$$

24. ¿Cuándo una matriz diagonal es inversible? En ese caso, ¿cuál es su inversa?

25. Sin desarrollar el determinante, demostrar que $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0.$

26. Indicar si las siguientes proposiciones verdaderas o falsas justificando la respuesta:

    (a) Si $AB = 0$ entonces $A = 0$ o $B = 0$.

    (b) Si $AX = AY$, entonces $X = Y$.

    (c) Si A y B son onvertibles, entonces $A + B$ es invertible.

27. Calcular los siguientes determinantes, transformando en ceros la mayor cantidad posible de elementos de una fila o columna:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} \qquad b) \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-w \end{vmatrix}$$

28. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, encontrar una matriz P invertible tal que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

29. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

resolver las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $BXA^{-1} = C$ b) $AX + 2B^t = -3C$ c) $XB = C + X$

d) $AX = C + X$ e) $AX = C + BX$ f) $\frac{1}{2}XA + B = \frac{3}{2}X - C$

30. Sean $A = M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 \\ -8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = A - \alpha I$. Hallar los valores de α de modo que B no sea inversible.

31. Determinar, si es posible, la inversa de las siguientes matrices:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

32. Sean A, B, C matrices de orden 3 tales que $|A^t| = 2$, $|B-1| = -3$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ indicar cáles de los siguientes determinantes se pueden calcular y, cuando sea posible, realizar el cálculo:

$$P = AC + BC, \qquad S = C^t - BC^t, \qquad T = A + A + 3A.$$

33. Siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C^t = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, hallar:

    (a) Una matriz X que verifique que $X + BA = A^t B^t X$.

    (b) Condiciones necesarias y suficientes sobre a y b de manera que la matriz $AC - D$ sea inversible.

    (c) Una matriz E de orden 3 tal que $det(E) = det(AB)$ y $e_{21} = e_{22} = e_{23} = 5$.

2.4 Repaso

Verdadero o falso?

1. Si $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ entonces $((A^{-1}B)^{-1} + A)^t = A^t(I + (B^{-1})^t)$.

2. X, A, B matrices cuadradas de tamaño n, $X^t = (I - B)A \Rightarrow X_{ij} = A_{ji} - \sum_{k=1}^{n} B_{jk}A_{ki}$.

3. Una matriz cuadrada A se dice triangular inferior estricta si $a_{ij} = 0\ \forall i > j$.

Preguntas:

1. Si $\sigma = (4, 1, 2, 7, 3, 5, 6, 9, 8)$, ¿quién es σ^4?

2. ¿Es cierto que $A.adj(A) = adj(A).A = det(A)$?

3. ¿cuál es el dominio de la función determinante?
4. ¿cuál es el determinante de la traspuesta de una matriz triangular superior estricta?
5. Dada, $\sigma \in S_n^j$, ¿cuál es el signo de la permutación $\sigma^j \in S_{n-1}$?
6. Si A es una matriz tal que la suma de dos de sus columnas es el vector nulo, ¿tiene inversa?
7. ¿cuál es el signo de una trasposición?
8. A, B matrices $m \times n$ ¿La inversa de $A(B^t)$ es la inversa de B^t por la inversa de A?
9. ¿cómo se caracterizan las matrices inversibles?
10. Si $A, B \in \mathbb{F}^{2\times 2}, det(A) = 2, det(B) = 4$ entonces $det(4A^{-1}B^t) = \quad ?$
11. ¿El determinante de la suma de matrices es la suma de los determinantes de cada una de ellas?
12. ¿qué representa $\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{1+j}A_{1j}det\ A(1|j)$?

Respuestas:
Verdadero o falso:

1. Verdadero.
2. Verdadero.
3. Falso.

Preguntas:

1. $\sigma^4 = (1, 2, 6, 3, 4, 5, 8, 7)$.
2. NOOO!!!
3. Matrices cuadradas.
4. 0.
5. Si j es par, el signo es el opuesto. Si j es impar, tienen el mismo signo.
6. No.
7. -1.
8. No.

9. Aquellas cuyo determinante es distinto de 0.
10. 32.
11. No.
12. El desarrollo del determinante de A por la $j-$ésima columna.

Chapter 3

Sistemas de Ecuaciones Lineales

3.1 introducción

El gran área del álgebra lineal se desarrolló a partir de los sistemas de ecuaciones lineales. En la matemática moderna se considera al álgebra lineal como un área transversal a las demás: prácticamente no hay ningún área que no utilize álgebra lineal en su desarrollo.

En muchos problemas aplicados surgen sistemas de ecuaciones no lineales, y su solución se aproxima a partir la solución de sistemas lineales, es por eso que es de gran interés el cálculo numérico de soluciones, y por supuesto a tal respecto la ayuda computacional es invaluable.

Algunos ejemplos elementales de sistemas de ecuaciones ya han sido presentados en álgebra y Geometría I cuando estudiamos las posiciones relativas entre dos rectas en el plano, por ejemplo

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x-y=2 \end{cases} \quad (S_1) \qquad \begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=2 \end{cases} \quad (S_2) \qquad y \qquad \begin{cases} x+2y=1, \\ x+2y=2. \end{cases} \quad (S_3).$$

El sistema (S_1) representa dos rectas que se intersectan en un punto, cuyas coordenadas son la única solución del sistema. El sistema (S_2) representa una única recta y el sistema (S_3) no tiene solución, esto se traduce en que las rectas que lo conforman son paralelas no coincidentes.

Ejercicio 3.1.1 *Realizar la gráfica de cada sistema y chequear que efectivamente las soluciones de cada uno son las mencionadas.*

Definición 3.1.2 *Una **ecuación lineal en** n **variables** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una expresión de la forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = y,$$

*donde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ son los **coeficientes** de la ecuación e $y \in \mathbb{F}$ es el **término independiente** o **constante**.*

Observación 3.1.3 *Las ecuaciones lineales **no** involucran productos, raíces ni funciones trigonométricas de las variables.*

Definición 3.1.4 *Una **solución** de la ecuación es una $n-$upla de escalares que reemplazados en las incógnitas verifican la igualdad. El conjunto de todas las soluciones se llama **conjunto solución**.*

3.2 Sistemas de ecuaciones lineales

Estudiaremos un **sistema de m ecuaciones (lineales) con n incógnitas** $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\left\{\begin{array}{rl} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n & = y_1, \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n & = y_2, \\ & \vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n & = y_m. \end{array}\right. \qquad \text{(S)}$$

El sistema (S) se puede representar matricialmente de la siguiente forma

$$\text{(S)} \iff AX = Y$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{se llama } \textbf{matriz de coeficientes},$$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ es el **vector incógnita** y $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ es el vector de **términos independientes**.

Definición 3.2.1 *Diremos que una **solución del sistema** (S) es una n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tal que $AX = Y$. El conjunto de todas las soluciones de un sistema (S) se llama **conjunto solución**.*

El objetivo de esta sección será resolver completamente un sistema de ecuaciones $m \times n$, vale decir, hallar el conjunto solución del sistema.

Definición 3.2.2 *El sistema (S) se dice **homogéneo** si $y_1 = y_2 = \cdots = y_m = 0$.*

Un sistema homogéneo siempre admite la solución $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, llamada la **solución trivial**, aunque podráa tener soluciones no triviales.

La siguiente definición es un elemento clave en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales:

Definición 3.2.3 *Dos sistemas $AX = Y$ (S_1) y $A'X = Y'$ (S_2) con $A, A' \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $Y, Y' \in \mathbb{F}^{m\times 1}$ se dicen* ***equivalentes*** *si tienen las mismas soluciones. O sea, toda solución de (S_1) es solución de (S_2) y viceversa.*

Ejercicio 3.2.4 *Esto efectivamente define una relación de equivalencia en el conjunto de todos los sistemas de m ecuaciones con n incógnitas.*

De esta definición sigue la siguiente **idea de trabajo:** para resolver un sistema $AX = Y$ pasamos a un sistema equivalente que sea *más fácil* de resolver. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.5 *Encontrar las soluciones de*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \qquad (S_1)$$

- *Sumamos -2 veces la 2da ecuación a la primera*

$$\begin{cases} -7x_2 - 7x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \qquad (S_2)$$

- *Multiplicamos la 1ra ecuación por $-1/7$*

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \qquad (S_3)$$

- *Sumamos -3 veces la 1ra ecuación a la 2da*

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad (S_4)$$

Los sistemas (S_1), (S_2), (S_3), (S_4) son equivalentes (es un buen ejercicio tratar de justificar esta afirmación, aunque en breve daremos el resultado general). Luego el conjunto solución de cada sistema es exactamente el mismo, a saber: $x_1 = x_2 = -x_3$.

más precisamente, el ***conjunto de soluciones*** *del sistema (S_1) es*

$$\{(-x_3, -x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{F}\}.$$

En lo que sigue, trataremos de responder la siguiente pregunta: **¿cómo podemos formalizar este procedimiento para aplicarlo a otros sistemas lineales?**

3.3 Operaciones elementales

3.3.1 Operaciones elementales de ecuaciones

Operaciones de escalamiento

Se pasa de un sistema (S) a un sistema (S') multiplicando la i-ésima ecuación por un escalar $\alpha \neq 0$.

- Si la i-ésima ecuación de (S) es

$$A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + \cdots + A_{in}x_n = y_i,$$

- la i-ésima ecuación de (S') es

$$\alpha A_{i1}x_1 + \alpha A_{i2}x_2 + \cdots + \alpha A_{in}x_n = \alpha y_i,$$

- Luego (S) y (S') son equivalentes.

Operaciones de eliminación

Pasamos de un sistema (S) a un sistema (S') sumando a la i-ésima ecuación α veces la k-ésima ecuación (con $k \neq i$)

- Si la i-ésima y la k-ésima ecuación de (S) son

$$\begin{aligned} A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + \cdots + A_{in}x_n &= y_i \\ A_{k1}x_1 + A_{k2}x_2 + \cdots + A_{kn}x_n &= y_k, \end{aligned}$$

- entonces la i-ésima ecuación de (S') es

$$(A_{i1} + \alpha A_{k1})x_1 + (A_{i2} + \alpha A_{k2})x_2 + \cdots + (A_{in} + \alpha A_{kn})x_n = y_i + \alpha y_k.$$

- Luego, los sistemas (S) y (S') son equivalentes.

Se llaman **operaciones de eliminación** porque eligiendo α apropiado se pueden ir eliminando incógnitas.

Operaciones de intercambio

- Pasamos de un sistema (S) a un sistema (S') intercambiando dos ecuaciones.
- Estos dos sistemas son trivialmente equivalentes.
- Esta operación tiene importancia cuando trabajamos con la representación matricial.

En la próxima parte de esta sección trabajaremos sobre la siguiente pregunta: Si el sistema (S) se representa matricialmente por $AX = Y$, **¿cuál es la representación matricial del sistema (S')?** (En donde (S') se obtuvo aplicando alguna de las operaciones anteriores.)

3.3.2 Operaciones elementales por filas (OEF)

Sea A una matriz con m filas. Definimos tres tipos de operaciones elementales por filas **OEF** sobre A, en el espíritu de las operaciones sobre las ecuaciones que hemos hecho anteriormente (escalamiento, eliminación e intercambio):

Tipo I Se multiplica la fila r por un escalar $\alpha \neq 0$.

Tipo II Se suma a la fila r, α veces la fila s, con $r \neq s$.

Tipo III Se intercambia la fila r con la fila s.

más precisamente, una OEF e sobre A devuelve la matriz $e(A)$ dada por

Tipo I $e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij}, & i \neq r \\ \alpha A_{rj}, & i = r. \end{cases}$

Tipo II $e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij}, & i \neq r \\ A_{rj} + \alpha A_{sj}, & i = r. \end{cases}$

Tipo III $e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij}, & i \neq r, s \\ A_{sj}, & i = r \\ A_{rj}, & i = s. \end{cases}$

Observación 3.3.1 *Las OEF también se pueden aplicar a vectores columna de tamaño m (o sea, con m filas), de hecho las aplicaremos a los vectores de términos independientes.*

Teorema 3.3.2 *Sean $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $Y \in \mathbb{F}^{m \times 1}$. Si e es una OEF entonces los sistemas*

$$AX = Y, \qquad\qquad e(A)X = e(Y)$$

son equivalentes.

Demostración 26 *Ejercicio. (Ayuda: hacer cada tipo por separado, observar que hay que demostrar una equivalencia de sistemas, es decir, igualdad de los conjuntos solución.)*

En términos matriciales podemos formular la relación de equivalencia de sistemas como sigue:

Definición 3.3.3 *Sean $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$. Se dice que B es* ***equivalente por filas*** *a A si se puede pasar de A a B por una sucesión finita de OEF.*

Ejercicio 3.3.4 *Equivalencia por filas es una relación de equivalencia en $\mathbb{F}^{m \times n}$.*

Corolario 3.3.5 *Si B es equivalente por filas a A, entonces los sistemas homogéneos*

$$AX = 0, \qquad\qquad BX = 0$$

son equivalentes.

Demostración 27 *Como B es equivalente por filas a A, existen OEF $e_1, e_2, \dots, e_k$ tales que*

$$B = e_k(\cdots e_2(e_1(A))).$$

Veamos que toda solución de $AX = 0$ es solución de $BX = 0$.

En efecto, si $AX = 0$, sigue que $e_1(A)X = 0$. Luego también $e_2(e_1(A))X = 0$. Siguiendo este proceso de aplicación sucesiva de las OEF obtenemos el mismo resultado, esto es, $e_k(\cdots e_2(e_1(A)))X = BX = 0$.

Por otro lado, toda solución de $BX = 0$ es solución de $AX = 0$. En efecto, dado que la relación de equivalencia por filas es una relación de equivalencia, es evidente que B equivalente por filas a A implica que A equivalente por filas a B. Luego el argumento anterior también sirve para demostrar esto. ■

Ejemplo 3.3.6 *Resolver el sistema (homogéneo)*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 + 5x_4 &= 0 \end{cases} \qquad \text{(S)}$$

El sistema (S) se representa matricialmente como $AX = 0$ en donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aplicamos OEF sobre A para pasar a un sistema equivalente más fácil de resolver

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\textit{Tipo II}]{\mathtt{f}_1 \to \mathtt{f}_1 - 2\mathtt{f}_2} \begin{pmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\textit{Tipo II}]{\mathtt{f}_3 \to \mathtt{f}_3 - 2\mathtt{f}_2} \begin{pmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\textit{Tipo I}]{\mathtt{f}_3 \to -\frac{1}{2}\mathtt{f}_3} \begin{pmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\textit{Tipo II}]{\mathtt{f}_2 \to \mathtt{f}_2 - 4\mathtt{f}_3} \begin{pmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[\textit{Tipo II}]{\mathtt{f}_1 \to \mathtt{f}_1 + 9\mathtt{f}_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{15}{2} & -\frac{55}{2} \\ 1 & 0 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\textit{Tipo I}]{\mathtt{f}_1 \to \frac{2}{15}\mathtt{f}_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 0 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[\textit{Tipo II}]{\mathtt{f}_2 \to \mathtt{f}_2 + 2\mathtt{f}_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\textit{Tipo II}]{\mathtt{f}_3 \to \mathtt{f}_3 - \frac{1}{2}\mathtt{f}_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} =: R$$

El sistema $AX = 0$ es equivalente a $RX = 0$.
O sea, es equivalente a

$$\begin{cases} x_3 - \frac{11}{3}x_4 & = 0 \\ x_1 + \frac{17}{3}x_4 & = 0 \\ x_2 + \frac{5}{3}x_4 & = 0 \end{cases}$$

Podemos poner todo en función de x_4 como sigue:

$$x_1 = -\frac{17}{3}x_4 \qquad x_2 = -\frac{5}{3}x_4 \qquad x_3 = \frac{11}{3}x_4$$

Luego, el conjunto solución es

$$Sol = \left\{(-\frac{17}{3}c, -\frac{5}{3}c, \frac{11}{3}c, c) : c \in \mathbb{F}\right\} = \{(-17c, -5c, 11c, 3c) : c \in \mathbb{F}\}.$$

3.4 Matrices elementales

Sea e una OEF que aplica sobre matrices con m filas. La **matriz elemental asociada a** e es $E = e(I)$ en donde I es la matriz identidad $m \times m$.

Ejemplo 3.4.1 ($m = 4$)

$$e = \text{"}\mathtt{f}_2 \leftrightarrow \mathtt{f}_4\text{"} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e = \text{"}\mathtt{f}_3 \rightarrow \alpha\mathtt{f}_3\text{"} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e = \text{"}\mathtt{f}_1 \rightarrow \mathtt{f}_1 + \alpha\mathtt{f}_4\text{"} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 3.4.2 *Sea e una OEF y sea $E = e(I_m)$ su correspondiente matriz elemental. Entonces para toda $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ vale*

$$e(A) = EA.$$

Demostración 28 *Hay tres casos según el tipo de OEF. Haremos la prueba para operaciones Tipo I y II, dejando como ejercicio las del Tipo III.*

Tipo I Sea $e =$ "$\mathtt{f_r} \to \alpha\mathtt{f_r}$", $\alpha \neq 0$. Luego, $E_{ij} = e(I)_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & i \neq r, \\ \alpha\delta_{rj}, & i = r, \end{cases}$ de donde el coeficiente ij de la matriz EA es $(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{ik}A_{kj} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik}A_{kj} = A_{ij}, & i \neq r, \\ \sum_{k=1}^{m} \alpha\delta_{rk}A_{kj} = \alpha A_{rj}, & i = r. \end{cases}$

Esto significa que $EA = e(A)$.

Tipo II Sea $e =$ "$\mathtt{f_r} \to \mathtt{f_r} + \alpha\mathtt{f_s}$", $r \neq s$. Luego, $E_{ij} = e(I)_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & i \neq r, \\ \delta_{rj} + \alpha\delta_{sj}, & i = r, \end{cases}$ de donde el coeficiente ij de la matriz EA es:

$(EA)_{ij}$ *para* $i \neq r$

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{ik}A_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik}A_{kj} = A_{ij},$$

Y para $i = r$ *calculamos* $(EA)_{rj}$

$$\begin{aligned} (EA)_{rj} &= \sum_{k=1}^{m} E_{rk}A_{kj} = \sum_{k=1}^{m} (\delta_{rk} + \alpha\delta_{sk})A_{kj}, \\ &= \sum_{k=1}^{m} \delta_{rk}A_{kj} + \alpha \sum_{k=1}^{m} \delta_{sk}A_{kj} = A_{rj} + \alpha A_{sj}. \end{aligned}$$

Así, $(EA)_{ij} = \begin{cases} A_{ij}, & i \neq r, \\ A_{rj} + \alpha A_{sj}, & i = r. \end{cases}$

Finalmente $(EA) = e(A)$. ■

Observación 3.4.3 *Las matrices elementales son invertibles.*

Pensemos en los siguientes argumentos para justificar esto:

Argumento 1 *El determinante de una matriz elemental es siempre no nulo (¿por qué?), y por lo tanto la matriz resulta invertible.*

Argumento 2 *Las OEF son "invertibles"(¿cuál seráa el significado de esta palabra?). En efecto, es posible calcular explícitamente las inversas (ver siguiente párrafo).*

Veamos a continuación cuáles son las inversas:

- **Tipo I**

$$e = \text{"}\mathtt{f_r} \to \alpha\mathtt{f_r}\text{"},\ \alpha \neq 0, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

$$e^{-1} = \text{"}\mathtt{f_r} \to \frac{\mathtt{1}}{\alpha}\mathtt{f_r}\text{"}, \qquad E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\alpha} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Tipo II**

$$e = \text{"}\mathtt{f_r} \to \mathtt{f_r} + \alpha\mathtt{f_s}\text{"},\ r \neq s, \qquad e^{-1} = \text{"}\mathtt{f_r} \to \mathtt{f_r} - \alpha\mathtt{f_s}\text{"}.$$

Por ejemplo

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Tipo III**
  - $e = \text{"}\mathtt{f_r} \leftrightarrow \mathtt{f_s}\text{"} \implies e^{-1} = e.$
  - $E^{-1} = E.$

Por ejemplo

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E^{-1}.$$

Las matrices que son su propia inversa se llaman **involutivas**.

3.5 Matrices escalón reducidas por filas

Definición 3.5.1 *Una matriz $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ se dice **reducida por filas (RF)** si*

1. *El 1er. elemento no nulo de cada fila no nula es igual a 1. Tal elemento se denomina **1 principal**, y la posición del mismo se denomina **posición pivote**.*

2. *Toda columna que contenga el 1er elemento de una fila no nula tiene sus demás elementos iguales a 0.*

Ejemplo 3.5.2 *¿Son RF las siguientes matrices?*

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \textit{no,} \qquad \begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \textit{no,}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \textit{sí,} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \textit{sí.}$$

Definición 3.5.3 *Una matriz $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ se dice **escalón reducida por filas (ERF)** si*

1. *A es reducida por filas*

2. *Toda fila nula de A esté debajo de todas las filas no nulas*

3. *Si $1, 2, \ldots, r$ son las filas no nulas de A y el primer elemento no nula de la fila i esté en la columna k_i, entonces $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$.*

Estas matrices son muy importantes porque un sistema lineal representado por una matriz ERF *ya viene resuelto.*

Ejemplo 3.5.4

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \textit{RF pero no ERF.}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix} \qquad \textit{RF pero no ERF.}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \textit{ERF.}$$

Ejemplo 3.5.5

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \textit{ERF.}$$

El sistema lineal (homogéneo) asociado $AX = 0$ es

$$\begin{aligned} x_2 - 3x_3 + \frac{1}{2}x_5 &= 0, \\ x_4 + 2x_5 &= 0. \end{aligned}$$

- x_1, x_3, x_5 *son parámetros libres,*
- x_2, x_4 *se pueden poner en función de* x_1, x_3, x_5*,*
- *Sol* $= \big\{(x_1, 3x_3 - \frac{1}{2}x_5, x_3, -2x_5, x_5) : x_1, x_3, x_5 \in \mathbb{F}\big\}$.

Teorema 3.5.6 *Toda matriz $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ es equivalente por filas a una matriz ERF. En otras palabras, existes matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tales que*

$$E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A$$

es ERF.

Demostración 29 *Ejercicio.*

Observación 3.5.7 *Intentar hacer un programa de computadora que devuelva la forma ERF de una matriz dada A.*

Ejemplo 3.5.8 *Resolver el sistema*

$$\left\{ \begin{aligned} &x_1 + x_2 - x_4 &&= 0, \\ &2x_1 + x_3 - x_4 &&= 0, \\ &x_2 - 2x_3 - 3x_4 &&= 0. \end{aligned} \right. \qquad \textit{(S)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathtt{f_2 \to f_2 - 2f_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathtt{f_2 \leftrightarrow f_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathtt{f_1 \to f_1 - f_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathtt{f_3 \to f_3 + 2f_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathtt{f_3 \to -\frac{1}{3} f_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathtt{f_1 \to f_1 - 2f_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathtt{f_2 \to f_2 + 2f_3}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

Luego el sistema (S) es equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_1 - \frac{4}{3}x_4 &= 0, \\ x_2 + \frac{1}{3}x_4 &= 0, \\ x_3 + \frac{5}{3}x_4 &= 0, \end{cases} \qquad \textit{(S')}$$

cuyo conjunto de soluciones es

$$Sol = \left\{ \left(\frac{4}{3}c, -\frac{1}{3}c, -\frac{5}{3}c, c \right) : c \in \mathbb{F} \right\} = \{(4c, -c, -5c, 3c) : c \in \mathbb{F}\}.$$

Ejercicio 3.5.9 *En el ejemplo anterior, encontrar matrices elementales $E_1, \ldots, E_k$ tales que $E_k \cdots E_1 A$ es ERF.*

Teorema 3.5.10 *Si $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ con $m < n$ entonces el sistema homogéneo $AX = 0$ admite una solución no trivial. En otras palabras, un sistema homogéneo con más incógnitas que ecuaciones tiene una solución no trivial.*

Demostración 30 *Por el teorema anterior, A es equivalente por filas a una matriz R ERF. Sean $1, \ldots, r$ las filas no nulas de R, $r \leq m < n$ y sean $k_1, \ldots k_r$ las columnas de R en donde aparece el 1er elemento no nulo de las filas $1, \ldots, r$. Tenemos que $x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}$ se pueden escribir como combinación lineal de los otros parámetros. Luego para cada elección de x_i, con $i \neq k_1, \ldots, k_r$ se obtiene una solución de $AX = 0$.* ∎

3.6 Resolución de sistemas no homogéneos

Para resolver un sistema lineal (no homogéneo)

$$AX = Y$$

debemos aplicar al vector de los términos independientes cada una de las OEF que aplicamos a A para llevarla a su forma ERF.

Para ello es conveniente pasar a la **matriz ampliada** A' que se obtiene agregando a A la columna Y, y luego aplicar las OEF directamente sobre A'

Ejemplo 3.6.1 *Resolver el sistema*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1, \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 7. \end{cases} \qquad (S)$$

En forma matricial $AX = Y$ tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad\qquad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Llevamos a la forma ERF

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathtt{f_2 \to f_2 + 2f_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right).$$

Luego el sistema (S) es equivalente a

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1, \\ 0 &= 9. \end{cases} \qquad \text{¡No tiene solución!}$$

Recordemos la terminología que se usa para clasificar los sistemas de ecuaciones lineales de acuerdo a sus conjuntos de soluciones.

Sistema incompatible No existe solución

Sistema compatible Hay dos casos:

- **Determinado** Existe una única solución
- **Indeterminado** Existe más de una solución

Observación 3.6.2 *Si $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, un sistema compatible indeterminado tiene infinitas soluciones.*

Ejemplo 3.6.3 *Resolver el sistema*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1, \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= -2. \end{cases} \qquad (S)$$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathtt{f_2 \to f_2 + 2f_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Luego, el sistema (S) es equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1, \\ 0 &= 0, \end{cases} \qquad \textit{que es compatible indeterminado.}$$

El conjunto solución es entonces

$$Sol = \{(1 + 2x_2 - x_3, x_2, x_3) : x_2, x_3 \in \mathbb{F}\} = \{ \underbrace{(1,0,0)}_{Sol\ de\ AX=Y} + \underbrace{(2x_2 - x_3, x_2, x_3)}_{Sol\ de\ AX=0} : x_2, x_3 \in \mathbb{F}\}.$$

Teorema 3.6.4 *Consideremos el sistema*

$$AX = Y \tag{S}$$

con $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $Y \in \mathbb{F}^{m\times 1}$ y sea X_0 una solución de (S) (o sea, X_0 es tal que $AX_0 = Y$). Entonces el conjunto de soluciones de (S) es

$$\mathrm{Sol} = \{X_0 + X_h : X_h \text{ es solución de } AX = 0\}.$$

O sea, toda solución de (S) se escribe como una solución particular más una solución del sistema homogéneo.

Demostración 31 *Sea X_h una solución del sistema homogéneo asociado: $AX_h = 0$. Luego,*

$$A(X_0 + X_h) = AX_0 + AX_h = AX_0 + 0 = Y,$$

lo que significa que $X_0 + X_h$ es solución de (S).

recíprocamente, si $AX = Y$, escribimos $X = X_0 + (-X_0 + X)$. Notar que $A(-X_0 + X) = -AX_0 + AX = -Y + Y = 0$. Luego $X_h := -X_0 + X$ es solución del sistema homogéneo.

■

Es claro ahora que para resolver un sistema de ecuaciones lineales cualquiera, es de gran utilidad resolver el sistema de ecuaciones lineales homogéneo asociado.

Ejemplo 3.6.5 *Encontrar a, b tales que el sistema*

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1+2x_2-x_3 & = a, \\ 2x_1+4x_2-2x_3 & = b+1, \\ -3x_1-6x_2+3x_3 & = a+b+1. \end{array}\right. \qquad (S)$$

tenga solución.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 2 & 4 & -2 & b+1 \\ -3 & -6 & 3 & a+b+1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 & -2a+b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 4a+b+1 \end{array}\right).$$

Luego, obtenemos un sistema lineal en a, b que nos da las condiciones para que el sistema (S) sea compatible

$$\left\{\begin{array}{rl} -2a+b & = -1, \\ 4a+b & = -1. \end{array}\right. \qquad (S')$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Luego $a = 0$, $b = -1$ y el sistema (S) es equivalente a

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0,$$

cuyo conjunto de soluciones es

$$Sol = \{(-2x_2 + x_3, x_2, x_3) : x_2, x_3 \in \mathbb{F}\}.$$

3.7 Sistemas cuadrados

Estudiaremos en esta sección los sistemas cuadrados. Como hemos hallar el conjunto solución es de gran utilidad resolver primero los sistemas homogéneos. Luego derivamos un método para calcular inversas de matrices cuadradas invertibles.

Teorema 3.7.1 *Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Son equivalentes:*

1. *A es invertible;*
2. *el sistema homogéneo $AX = 0$ tiene solución única (la solución trivial $X = 0$);*

3. el sistema $AX = Y$ tiene solución única para cada $Y \in \mathbb{F}^{n\times 1}$.

Demostración 32 *Veamos que (**1**) $\Longrightarrow$ (**2**). En efecto, sea A invertible. Luego existe A^{-1} tal que $A^{-1}A = I$. Si consideramos el sistema homogéneo $AX = 0$ sigue que $X = IX = A^{-1}AX = A^{-1}0 = 0$, que claramente es la única solución.*

*Veamos que (**1**) $\Longrightarrow$ (**3**). Sea A invertible. Consideremos el sistema $AX = Y$. Luego la única solución del sistema viene dada por $X = A^{-1}Y$.*

*Veamos que (**3**) $\Longrightarrow$ (**2**). Esto sigue trivialmente tomando $Y = 0$.*

*Finalmente, veamos que (**2**) $\Longrightarrow$ (**1**). Supongamos que $AX = 0$ tiene sólo la solución trivial. Sea R la forma ERF de A. Tal matriz es triangular superior (porqué?). Como $AX = 0$ tiene solución única, tenemos que $RX = 0$ tiene solución única, de donde $R = I$ (puesto que si la última fila de R fuera nula, podemos poner una incógnita en función de las demás). Esto significa que A es equivalente por filas a $R = I$, de modo que existen matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tales que*

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I,$$

y por lo tanto A es invertible con $A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1$. ∎

Muy importante: La Demostración del teorema anterior nos da un método eficiente para calcular la inversa de una matriz A tal que $\det A \neq 0$. En efecto:

- $\det A \neq 0 \implies A$ es equivalente por filas a I.
- Si $e_1, e_2, \ldots, e_k$ son las OEF que aplicamos a A para llevarla a I, y E_i es la matriz identidad, entonces

$$A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1 = e_k(\cdots e_2(e_1(I))).$$

- En palabras: **si aplicamos a la matriz identidad las mismas OEF que le aplicamos a A para llegar a I, lo que se obtiene es la matriz inversa A^{-1}.**

Ejemplo 3.7.2 *Encontrar la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$. Se sugiere al lector* *describir al lado de las columnas cuál es la OEF que se realiza en cada paso.*

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\
0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \\
\hline
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{180} & \frac{1}{6} & -1 & 1 \\
\hline
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -6 & 12 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 30 & -180 & 180 \\
\hline
1 & \frac{1}{2} & 0 & -9 & 60 & -60 \\
0 & 1 & 0 & -36 & 192 & -180 \\
0 & 0 & 1 & 30 & -180 & 180 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 9 & -36 & 30 \\
0 & 1 & 0 & -36 & 192 & -180 \\
0 & 0 & 1 & 30 & -180 & 180
\end{array}
$$

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}
$$

Ejercicio 3.7.3 *Verdadero o Falso: la matriz*

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{2} & \cdots & \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} & \cdots & \dfrac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1}{n} & \dfrac{1}{n+1} & \cdots & \dfrac{1}{2n-1} \end{pmatrix}
$$

es invertible y A^{-1} tiene coeficientes enteros.

3.8 eliminación Gaussiana

Ahora estudiaremos el método clásico para llevar una matriz $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ a su forma ERF. El algoritmo que describiremos a continuación se conoce como **eliminación Gaussiana**.

1. Ir a la 1ra columna no nula de A. Si el 1er elemento es cero intercambiamos la 1ra fila con alguna fila que tenga un elemento no nulo en esa columna (si no, lo dejamos como esté).
2. Obtener ceros debajo de este elemento usando OEF de tipo II.
3. Aplicar el mismo procedimiento a la submatriz que se obtiene quitando la 1ra fila y la 1ra columna no nulas.
4. Hacer unos en los 1ros elementos no nulos de cada fila no nula usando OEF tipo I y ceros arriba de éstos usando OEF tipo II.

Comentario 3 *En cuanto a la complejidad computacional del algoritmo, podemos decir lo siguiente:*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} 2k(k-1) + \sum_{k=1}^{n} k = 2\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \\ \approx \frac{n^3}{3}, \qquad\qquad n \to \infty.\end{aligned}$$

- *El problema de calcular el determinante de una matriz $n \times n$ tiene una complejidad de $n^3/3$ si usamos eliminación gaussiana para pasar a una matriz triangular superior (hay que recordar qué OEF tipo I y III hicimos porque éstas cambian el determinante)*
- *Si lo hacemos por definición la complejidad es $n! \gg n^3/3$*

Ejemplo 3.8.1 *Resolver el sistema*

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x + y - z & = 8 \\ -3x - y + 2z & = -11 \\ -2x + y + 2z & = -3 \end{array}\right. \qquad (S)$$

Usamos eliminación gaussiana:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\textit{Tipo II}} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\textit{Tipo II}} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathtt{f_3 \to -f_3}]{\textit{Tipo I}} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\textit{Tipo II}} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathtt{f_2 \to 2f_2}]{\textit{Tipo I}} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\textit{Tipo II}} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathtt{f_1 \to \frac{1}{2}f_1}]{\textit{Tipo I}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Luego, el sistema tiene solución única $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$.

Además, las cuentas que hicimos nos permiten calcular fácilmente el determinante de la matriz A *de coeficientes del sistema (S) :*

- A *es equivalente por filas a la matriz identidad* I.
- *Para pasar de* A *a* I *usando OEF hicimos*
  - *OEF Tipo II (no cambian el determinante),*
  - *3 OEF Tipo I:* $e_1 =$ "$\mathtt{f_1} \to -\mathtt{f_1}$", $e_2 =$ "$\mathtt{f_2} \to 2\mathtt{f_2}$", $e_3 =$ "$\mathtt{f_3} \to \frac{1}{2}\mathtt{f_3}$",
  - *No hicimos OEF Tipo III.*

Luego

$$1 = \det I = \det(e_3(e_2(e_1(A)))) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-1) \det A$$

y por ende

$$\det A = -1.$$

3.9 aplicación a determinantes

Culminamos esta unidad probando, con las herramientas que brinda esta unidad, el teorema de la unidad anterior que quedó pendiente: el determinante del producto de matrices es el producto de los determinantes.

Definición 3.9.1 *Una matriz* $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ *se dice*

- ***no-singular*** *si el sistema homogéneo* $AX = 0$ *tiene solución única. O sea,* $AX = 0 \implies X = 0$

- ***singular*** *si no es no-singular. O sea, existe* $0 \neq X \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ *tal que* $AX = 0$

Observación 3.9.2 *Sigue de los resultados anteriores que*

- A *no-singular* $\iff \det A \neq 0$ *(pues ser no-singular es equivalente a ser invertible).*

- A *singular* $\iff \det A = 0$.

Apuntamos a probar el siguiente resultado:

Teorema 3.9.3 *Dadas* $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$*, se tiene*

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

Antes de dar la prueba necesitamos algunos lemas previos

Lema 1 *Sea* $E \in \mathbb{F}^{n\times n}$ *una matriz elemental asociada a una OEF* e*. Entonces*

1. $e = $ "$\mathtt{f_r} \to \alpha \mathtt{f_r}$" $\implies \det E = \alpha$, $\alpha \neq 0$,

2. $e = $ "$\mathtt{f_r} \to \mathtt{f_r} + \alpha \mathtt{f_s}$" $\implies \det E = 1$, $r \neq s$,

3. $e = $ "$\mathtt{f_r} \leftrightarrow \mathtt{f_s}$" $\implies \det E = -1$, $r \neq s$.

Demostración 33 *Sigue de las propiedades del determinante, pues* $E = e(I)$*.*

$\blacksquare$

Lema 2 *Sea* E *una matriz elemental. Entonces para toda* $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ *vale*

$$\det(EA) = (\det E)(\det A).$$

Demostración 34 *Por hipótesis* $E = e(I)$ *para alguna OEF* e*. Tenemos que analizar tres casos de acuerdo a si* e *es Tipo I, II o III.*

Tipo I

- $e = $ "$\mathtt{f_r} \to \alpha \mathtt{f_r}$", $\alpha \neq 0$,

- $\det(EA) = \det(e(A)) = \alpha \det A$ *(prop. del determinante),*

- $(\det E)(\det A) = \alpha \det A$ *(lema previo),*

- $\det(EA) = (\det E)(\det A)$.

Tipo II y III *Ejercicio.* ∎

Pasamos ahora a la prueba del teorema:

Demostración 35 *Distinguimos dos casos:*

A ***singular.***

Si B es singular entonces existe $X \neq 0$ tal que $BX = 0$. Luego $ABX = 0$ de donde AB es singular. Esto es, $0 = \det(AB) = \underbrace{(\det A)}_{=0}(\det B)$.

Si B es no singular, entonces B es invertible. Como A es singular, existe $X \neq 0$ tal que $AX = 0$, luego $AB(B^{-1}X) = 0$ con $B^{-1}X \neq 0$. Sigue que AB es singular y por ende $\det(AB) = 0$.

En cualquiera de los dos casos $0 = \det(AB) = (\det A)(\det B)$.

A ***no-singular****.*

Como A es no singular, de $AX = 0$ sigue que $X = 0$. Además A es equivalente por filas a la matriz identidad, de modo que existen matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tales que

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I$$

con $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$ y E_i^{-1} también es una matriz elemental. Por el Lema,

$$\det A = (\det E_1^{-1})(\det E_2^{-1}) \cdots (\det E_k^{-1}),$$

luego $AB = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} B$. Nuevamente por el Lema

$$\begin{aligned} \det(AB) &= (\det E_1^{-1})(\det E_2^{-1}) \cdots (\det E_k^{-1})(\det B) \\ &= (\det A)(\det B). \end{aligned}$$

3.10 Regla de Cramer

Teorema 3.10.1 ***Teorema de Cramer*** *Sea $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ una matriz invertible. Entonces la (única) solución del sistema $AX = Y$ esté dada por*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

donde A_i es la matriz que se obtiene de A reemplazando la i-ésima columna por el vector Y.

Demostración 36 *Como A es no-singular, resulta invertible y por ende, $X = A^{-1}Y$. La Demostración usa la expresión para A^{-1} en términos de la matriz adjunta, que recordamos a continuación:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A, \qquad (\operatorname{adj} A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(j|i).$$

$$
\begin{aligned}
x_i = (A^{-1}Y)_i &= \frac{1}{\det A}((\operatorname{adj} A)Y)_{i1} \\
&= \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n}(\operatorname{adj} A)_{ij} y_j \\
&= \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\underbrace{y_j}_{(A_i)_{ji}}\underbrace{\det A(j|i)}_{A_i(j|i)} \\
&= \frac{1}{\det A}\underbrace{\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}(A_i)_{ji}\det A_i(j|i)}_{\det A_i,\ \textit{desarrollo por la columna } i} \\
&= \frac{\det A_i}{\det A}.
\end{aligned}
$$

■

Ejemplo 3.10.2 *Resolver el sistema*

$$
\begin{cases} ax + by &= u, \\ cx + dy &= v, \end{cases}
$$

en donde $ad - bc = 0$.

Aplicamos la regla de Cramer

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} u & b \\ v & d \end{vmatrix} = \frac{ud - bv}{ad - bc}, \\
y &= \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} a & u \\ c & v \end{vmatrix} = \frac{av - uc}{ad - bc}.
\end{aligned}
$$

3.11 Ejercicios sugeridos

1. En cada item hallar una representación paramétrica del conjunto solución de cada ecuación:

   (a) $2x - 4y = 0$.

   (b) $x + y + z = 1$.

2. En cada item graficar el sistema de ecuaciones. Resuelva el sistema e interprete los resultados.

$$
a)\begin{cases} 2x + y &= 4 \\ x - y &= 2 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y &= 1 \\ -2x + \frac{4}{3}y &= -4 \end{cases}
$$

$$c)\begin{cases} \frac{1}{4}x+\frac{1}{6}y &= 1 \\ x-y &= 3 \end{cases} \qquad d)\begin{cases} \frac{2}{3}x+\frac{1}{6}y &= \frac{2}{3} \\ 4x+y &= 4 \end{cases}$$

3. En cada item resuelva el sistema de ecuaciones utilizando sustitución regresiva.

$$a)\begin{cases} -x+y-z &= 0 \\ 2y+z &= 3 \\ \frac{1}{2}z &= 0 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 5x+2y+z &= 0 \\ 5x+y &= 0 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} x+y+z &= 6 \\ 2x-y+z &= 3 \\ 3x-z &= 0 \end{cases}$$

$$d)\begin{cases} 5x-3y+2z &= 3 \\ 2x+4y-z &= 7 \\ x-11y+4z &= 3 \end{cases} \qquad e)\begin{cases} x_1+3x_4 &= 4 \\ 2x_2-x_3-x_4 &= 0 \\ 3x_2-2x_4 &= 1 \\ 2x_1-x_2+4x_3 &= 5 \end{cases}$$

4. En cada item resuelva el sistema de ecuaciones.

$$a)\begin{cases} x-y &= 0 \\ 3x-2y &= -1 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 2u+v &= 120 \\ u+2v &= 120 \end{cases}$$

5. En cada item justifique por qué el sistema de ecuaciones debe tener al menos una solución. Resuelva cada sistema y y determine si tiene una única solución o infinitas soluciones.

$$a)\begin{cases} 4x+3y+17z &= 0 \\ 5x+4y+22z &= 0 \\ 4x+2y+19z &= 0 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 5x+5y-z &= 0 \\ 10x+5y+2z &= 0 \\ 5x+15y-9z &= 0 \end{cases}$$

6. Hallar el/los valor/es de k para que el siguiente sistema tenga infinitas soluciones

$$\begin{cases} kx+y &= 4 \\ 2x-3y &= -12 \end{cases}$$

7. Hallar el/los valor/es de k para que el siguiente sistema tenga única solución

$$\begin{cases} x+ky &= 0 \\ kx+y &= 0 \end{cases}$$

8. Para el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} x+5y+z &= 0 \\ x+6y-z &= 0 \\ 2x+ay+bz &= c \end{cases}$$

hallar valores de a, b y c tales que el sistema

(a) tenga única solución

(b) infinitas soluciones

(c) no tenga solución

9. En cada item identifique las operaciones por filas elementales para obtener la nueva matriz

(a)
$$\begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & -8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 13 & 0 & -39 \\ 3 & -1 & -8 \end{bmatrix}$$

(b)
$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -4 & 3 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

10. En cada item encuentre el conjunto solución del sistema de ecuaciones representado por la matriz aumentada

$$a)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad b)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad c)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

11. En cada item resuelva el sistema usando eliminación Gaussiana con sustitución regresiva (a veces llamado eliminación Gauss-Jordan)

$$a)\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3z & = & 3 \\ 4x-3y+7z & = & 5 \\ 8x-9y+15z & = & 10 \end{array}\right. \quad b)\left\{\begin{array}{rcl} 4x+12y-7z-20w & = & 22 \\ 3x+9y-5z-28w & = & 30 \end{array}\right. \quad c)\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-z+2w & = & -6 \\ 3x+4y+w & = & 1 \\ x+5y+2z+6w & = & -3 \\ 5x+2y-z-w & = & 3 \end{array}\right.$$

12. En cada item resuelva el sistema homogéneo correspondiente a las siguientes matrices de coeficientes

$$a)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad b)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

13. El siguiente sistema tiene una solución dada por $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$:

$$\begin{cases} 4x - 2y + 5z &= 16 \qquad \text{(ec. 1)} \\ x + y &= 0 \qquad \text{(ec. 2)} \\ -x - 3y + 2z &= 6 \qquad \text{(ec. 3)} \end{cases}$$

Resuelva los sistemas compuestos por

(a) Ecuaciones 1 y 2
(b) Ecuaciones 1 y 3
(c) Ecuaciones 2 y 3

Cuántas soluciones hay en cada item?

14. (a) Es posible que un sistema de ecuaciones lineales con menos ecuaciones que incógnitas no tenga solución? En tal caso mostrar un ejemplo.
(b) Una matriz tiene una única forma escalonada? Ilustrar la respuesta con ejemplos. La forma escalonada reducida es única?

15. En cada item halle una función polinomial cuya gráfica pase por los puntos dados:

(a) $(2, 4)$, $(3, 4)$, $(4, 4)$.
(b) $(0, 42)$, $(1, 0)$, $(2, -40)$, $(3, -72)$.

16. Use $\log_2 1 = 0$, $\log_2 2 = 1$, $\log_2 4 = 2$ para estimar $\log_2 3$.

17. Utilizando un adecuado sistema de ecuaciones, probar que si un polinomio $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ tiene raíces en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$ entonces es el polinomio nulo.

18. Usar un sistema de ecuaciones para escribir la descomposición en fracciones parciales de la expresión racional. Luego resolver el sistema usando matrices.

$$\frac{3x^2 - 7x - 12}{(x+4)(x-4)^2} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{(x-4)^2}$$

3.12 Repaso

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= y_2, \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= y_m. \end{cases} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix}$$

1. **VERDADERO O FALSO** Matricialmente podemos escribir el sistema (S) como $AX = Y$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

2. **VERDADERO O FALSO** El sistema (S) es homogéneo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

3. **VERDADERO O FALSO** Si $y_1 = y_2 = \cdots = y_m = 0$ entonces el sistema (S) admite solución trivial.

4. **VERDADERO O FALSO** El sistema (S) es homogéneo si $y_1 = y_2 = \cdots = y_m$.

5. **VERDADERO O FALSO** Si $y_1 = y_2 = \cdots = y_m = 0$ entonces la única solución del sistema (S) es la trivial.

6. **VERDADERO O FALSO** B es la matriz asociada al sistema

$$(S') \begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1q}x_q & = z_1, \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2q}x_q & = z_2, \\ \vdots & \vdots \\ b_{p1}x_1 + b_{p2}x_2 + \cdots + b_{pq}x_q & = z_p. \end{cases}$$

7. **VERDADERO O FALSO** B es la matriz ampliada asociada al sistema

$$(S') \begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1(q-1)}x_{q-1} & = z_1, \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2(q-1)}x_{q-1} & = z_2, \\ \vdots & \vdots \\ b_{p1}x_1 + b_{p2}x_2 + \cdots + b_{p(q-1)}x_{q-1} & = z_p. \end{cases} \quad \text{si} \qquad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1q} \\ b_{2q} \\ \vdots \\ b_{pq} \end{pmatrix}$$

8. **VERDADERO O FALSO** El sistema (S) es equivalente al sistema (S”) dado por $A''X = Y$ donde

$$A'' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

9. **VERDADERO O FALSO** Dados

$$B' = \begin{pmatrix} b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pq} \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{(p-1)1} & b_{(p-1)2} & \cdots & b_{(p-1)q} \end{pmatrix} Y' = \begin{pmatrix} y_p \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{p-1} \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

Entonces el sistema (S') dado por $B'X = Y'$ es equivalente al sistema $BX = Y$,

10. **OPCIÓN MÚLTIPLE** Considere la operación elemental de filas dada por: $e =$ "$\mathtt{f_r} \to \mathtt{f_r} + \alpha \mathtt{f_s}$", $r \neq s$. Entonces su inversa es:

   $a)$"$\mathtt{f_r} \to \mathtt{f_r} - \alpha \mathtt{f_s}$" $b)$"$\mathtt{f_r} \to \frac{1}{\alpha}\mathtt{f_r}$" $c)$"$\mathtt{f_r} \leftrightarrow \mathtt{f_s}$"

11. **OPCIÓN MÚLTIPLE** Considere la operación elemental por filas dada por: $e(A)_{kj} = \begin{cases} a_{kj}, & k \neq r \\ a_{pj} + \alpha a_{qj}, & k = p. \end{cases}$ Indique a cuál o cuáles operaciones elementales se corresponde:

   $a)$ Sumar a la fila q α veces la fila p. $b)$ Sumar a la fila p un múltiplo de la fila q. $c)$ Sumar a la fila k α veces la fila q.

12. **OPCIÓN MÚLTIPLE** Sea $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$. Si e es una OEF entonces los sistemas homogéneos $AX = 0$ y $e(A)X = e(0)$...

   $a)$ ... tienen el mismo conjunto solución. $b)$ ... tienen la misma matriz ampliada. $c)$ ... tienen la misma matriz de coeficientes.

13. **OPCIÓN MÚLTIPLE** Sean $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$. Si e es una OEF entonces el sistema $e(A)X = e(0)$...

a) ... tiene solución trivial.

b) ... tiene el mismo conjunto solución que $AX = 0$.

c) ... es equivalente al sistema $e(A)X = 0$.

RESPUESTAS:

1. Verdadero.
2. Falso.
3. Verdadero.
4. Falso.
5. Falso.
6. Verdadero.
7. Verdadero.
8. Verdadero si $\alpha \neq 0$.
9. Verdadero.
10. b.
11. b.
12. a.
13. b.

Chapter 4

Los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$.

Repasemos un poco algunos conceptos que hasta ahora hemos estudiado en álgebra y Geometría I:

- Describimos analíticamente los conjuntos $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ como coordenadas de puntos en el plano y en el espacio respectivamente. Así es que $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de pares ordenados de números reales y $\mathbb{R}^3$ es el conjunto de ternas ordenadas de números reales. Hemos definido analíticamente dos operaciones en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$: un producto por escalar y una suma, y hemos estudiado sus propiedades.

- Hemos definido también los conjuntos V_2 y V_3 de vectores en el plano y espacio respectivamente en forma geométrica a partir de los conceptos de módulo, dirección y sentido. Hemos definido geométricamente dos operaciones en V_2 y V_3: un producto por escalar y una suma, y hemos estudiado sus propiedades.

- Hemos vinculado ambas formulaciones según las ideas de Descartes.

Como ya nos es usual, $\mathbb{F}$ denotará un cuerpo de números como $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Es nuestro objetivo extender un poco las nociones dadas. En primer lugar estudiaremos el conjunto $\mathbb{F}^n$, y luego comparándolo con otros entes matemáticos ya conocidos, a saber $\mathbb{F}_n[x]$ (polinomios de grado menor o igual a n en una variable con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{F}$) y $\mathbb{F}^{n\times m}$ (matrices de tamaño $m \times n$ con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{F}$) seremos capaces de hacer una abstracción de definiciones y propiedades, dando lugar a una formulación axiomática más general.

La construcción axiomática de lo que llamaremos *espacios vectoriales* se abordará más profundamente en las diferentes carreras cuando se estudie álgebra Lineal. Si bien parece algo muy lejano aún, podemos asegurar que tenemos gran parte del camino recorrido, pues la piedra fundamental del álgebra Lineal ya es para nosotros conocida: los sistemas de ecuaciones lineales.

4.1 Los espacios $\mathbb{F}^n$

4.1.1 Definiciones elementales

Definición 4.1.1 *Sea $n \in \mathbb{N}$ un número natural. Consideramos el conjunto de $n-$uplas ordenadas de escalares en el cuerpo $\mathbb{F}$, a saber*

$$\mathbb{F}^n = \{\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{F}\},$$

con las operaciones

- *producto por escalar definida según: $\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$ tal que si $\alpha \in \mathbb{F}$ y $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$, entonces*

$$\alpha \cdot \overline{x} = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) \in \mathbb{F}^n;$$

- *suma definida según: $+ : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$ tal que si $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ e $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{F}^n$, entonces*

$$\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbb{F}^n.$$

Cuando $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ decimos que $\mathbb{R}^n$ es el espacio vectorial eucl¿Deo $n-$dimensional, y cuando $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ decimos que $\mathbb{C}^n$ es el espacio vectorial complejo $n-$dimensional. Los elementos $\overline{x}$ de $\mathbb{F}$ son llamados vectores $n-$dimensionales, o simplemente vectores.

Observación 4.1.2 *Hemos utilizado en la definición la palabra dimensión. Volveremos a este vocablo hacia el fin de la unidad, dándole un sentido matemático estricto.*

Observación 4.1.3 *Las operaciones suma y producto por escalar recién definidas se conocen como usuales. En la práctica veremos un ejemplo de otras operaciones también llamadas suma y producto por escalar, pero definidas de otra manera.*

Al definir un ente matemático una de las primeras cosas que debe decirse al respecto es qué entendemos por noción de igualdad. Vale decir, cómo decidir si dos objetos de ese universo son iguales. En nuestro caso, podemos decir lo siguiente:

Definición 4.1.4 *Dos vectores $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{F}^n$ se dicen iguales si*

$$x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n.$$

En el próximo párrafo haremos un estudio exhaustivo de las propiedades de estas operaciones. La lista que se desprende será conocida como *los 10 axiomas de espacio vectorial.*

4.1.2 Los 10 axiomas de Espacio Vectorial

- *Clausura de la suma de vectores:* Al definir operaciones, como éstas son funciones, debemos ver que están *bien definidas*. Esto significa, en nuestro caso, verificar que efectivamente la definición que dimos para suma de vectores nos de como resultado otro vector. Tenemos que dados $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ e $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{F}^n$,

  $$\overline{x} + \overline{y} \in \mathbb{F}^n.$$

  Verificar esta afirmación implica probar pertenencia a un conjunto, en este caso seráa probar que $\overline{x}+\overline{y}$ es una $n-$upla de escalares en $\mathbb{F}$. Por definición de suma de vectores, tenemos que

  $$\overline{x} + \overline{y} = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

  y podemos afirmar que este es un elemento de $\mathbb{F}^n$ puesto que $x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n \in \mathbb{F}$. Esta última afirmación se debe a que la suma de escalares es *cerrada*.

  Observemos que la suma de vectores se define a partir de la suma de escalares. Y ésta es la clave. En este sentido seguiremos avanzando con las propiedades de las operaciones, la clave será siempre aprovechar las propiedades que conocemos del cuerpo $\mathbb{F}$.

  El sentido de la palabra *clausura* es el de *cierre*, es decir, al operar en el conjunto quedamos en él, no nos devuelve un elemento de otro conjunto sino de él mismo. Así, decimos por ejemplo que *la suma es cerrada*.

- *Asociatividad de la suma de vectores:* Tenemos perfectamente comprendido cómo realizar una suma de dos vectores. Pero si queremos sumar tres vectores, ¿cómo hacemos? Como sabemos sumar dos, podemos elegir dos y sumarlos, luego como la suma es cerrada el resultado es otro vector al cual le sumamos el tercero. Lo bueno es que no importa cuál par elijo sumar primero, el resultado final será siempre el mismo. Esto se expresa simbélicamente como sigue: sean $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{F}^n$, entonces

  $$\overline{x} + \overline{y} + \overline{z} = (\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} = \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z}).$$

  Hagamos la prueba: si $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ y $\overline{z} = (z_1, \ldots, z_n)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} =& ((x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)) + (z_1, \ldots, z_n) \overset{d}{=} (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) + (z_1, \ldots, z_n) \\
\overset{d}{=}& ((x_1 + y_1) + z_1, \ldots, (x_n + y_n) + z_n) \overset{a}{=} (x_1 + y_1 + z_1, \ldots, x_n + y_n + z_n), \\
\overline{x} + (\overline{y} + \overline{z}) =& (x_1, \ldots, x_n) + ((y_1, \ldots, y_n) + (z_1, \ldots, z_n)) \overset{d}{=} (x_1, \ldots, x_n) + (y_1 + z_1, \ldots, y_n + z_n) \\
\overset{d}{=}& (x_1 + (y_1 + z_1), \ldots, x_n + (y_n + z_n)) \overset{a}{=} (x_1 + y_1 + z_1, \ldots, x_n + y_n + z_n),
\end{aligned}$$

donde las igualdades d se verifican por definición de suma de vectores y las igualdades a se verifican por la asociatividad de la suma de escalares de $\mathbb{F}$; de modo que ambas expresiones resultan idénticas.

Observemos cómo el concepto de *igualdad* juega un rol importantísimo en esta propiedad.

Un conjunto dotado de una operación asociativa se dice que es un *semigrupo*.

- *Existencia de elemento neutro para la suma de vectores:* Esta propiedad es clave, se trata de que existe dentro del conjunto de vectores un vector destacado con la propiedad de *no hacer nada*. Definimos tal vector destacado, como es habitual, a partir de las propiedades del cuerpo: sabemos que $0 \in \mathbb{F}$ es el neutro para la suma en $\mathbb{F}$. Sea entonces el vector $\overline{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{F}^n$, luego dado $\overline{x} \in \mathbb{F}^n$ tenemos que

$$\overline{x} + \overline{0} = \overline{0} + \overline{x} = \overline{x}.$$

Para probar la igualdad sólo hacen falta la definición de suma, el concepto de igualdad y la existencia de elemento neutro en $\mathbb{F}$. Sea entonces $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$. Luego,

$$\begin{aligned}\overline{x} + \overline{0} =& (x_1, \ldots, x_n) + (0, \ldots, 0) \overset{d}{=} (x_1 + 0, \ldots, x_n + 0) \overset{ne}{=} (x_1, \ldots, x_n) = \overline{x},\\ \overline{0} + \overline{x} =& (0, \ldots, 0) + (x_1, \ldots, x_n) \overset{d}{=} (0 + x_1, \ldots, 0 + x_n) \overset{ne}{=} (x_1, \ldots, x_n) = \overline{x},\end{aligned}$$

donde las igualdades d se verifican por definición de la suma en $\mathbb{F}^n$ y las igualdades ne se verifican por ser $0 \in \mathbb{F}$ el neutro para la suma de escalares.

- *Existencia de opuestos para la suma de vectores:* Esta propiedad de existencia no destaca un elemento entre los demás, sino que indica que para cada elemento existe uno que lo *anula*. En efecto, la propiedad dice que dado un elemento $\overline{x} \in \mathbb{F}^n$ existe otro elemento $\overline{u} \in \mathbb{F}^n$ tales que

$$\overline{x} + \overline{u} = \overline{u} + \overline{x} = \overline{0}.$$

La prueba sigue de tomar $\overline{u} = (-x_1, \ldots, -x_n)$ donde $-x_1, \ldots, -x_n \in \mathbb{F}$ son los escalares opuestos de los escalares $x_1, \ldots, x_n$, respectivamente, con respecto a la suma en $\mathbb{F}$. En efecto,

$$\begin{aligned}\overline{x} + \overline{u} =& (x_1, \ldots, x_n) + (-x_1, \ldots, -x_n) \overset{d}{=} (x_1 + (-x_1), \ldots, x_n + (-x_n)) \overset{op}{=} (0, \ldots, 0) = \overline{0},\\ \overline{u} + \overline{x} =& (-x_1, \ldots, -x_n) + (x_1, \ldots, x_n) \overset{d}{=} (-x_1 + x_1, \ldots, -x_n + x_n) \overset{op}{=} (0, \ldots, 0) = \overline{0},\end{aligned}$$

donde las igualdades d se verifican por definición de suma de vectores y las igualdades op se verifican por la propiedad de existencia de opuestos en $\mathbb{F}$.

Observemos que no es posible dar la propiedad de existencia de opuestos sin haber mencionado antes la existencia de elemento neutro. Este error suele ser común y se evita siendo rigurosxs en las pruebas.

Observemos también que aún no hemos hablado de *unicidad* del opuesto, esta consecuencia vendrá luego. Con lo cual no podemos aún utilizar la notación $-\overline{x}$, aunque la prueba nos tiente a hacerlo. En breve podremos.

Finalmente, digamos que todo semigrupo que tiene elemento neutro y para el cual existen opuestos se denomina *grupo*.

- *Conmutatividad de la suma de vectores:* En las propiedades de existencia anteriores hemos tenido que probar dos igualdades muy similares, *una de cada lado*. Esto lo hubiéramos evitado si probábamos antes que la suma es conmutativa. Esta propiedad dice que dados $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n), \overline{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{F}^n$ se tiene que

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}.$$

Veamos cómo se prueba:

$$\begin{aligned}\overline{x} + \overline{y} =& (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) \stackrel{d}{=} (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ \stackrel{c}{=}& (y_1 + x_1, \ldots, y_n + x_n) \stackrel{d}{=} (y_1, \ldots, y_n) + (x_1, \ldots, x_n) = \overline{y} + \overline{x},\end{aligned}$$

donde las igualdades d se justifican por definición de suma de vectores y la desigualdad c se justifica por la conmutatividad de la suma de escalares.

Un semigrupo tal que la operación es conmutativa se dice *semigrupo conmutativo.* Un grupo tal que la operación es conmutativa de dice *grupo abeliano.*

Ahora enfocamos un poco la atención sobre el producto por escalar, dejamos la suma un ratito de lado.

- *Clausura del producto por escalar:* En este caso, en forma análoga a lo que suceda con la suma de vectores, lo primero que tenemos que ver es que el producto por escalar esté bien definido, o sea, que el producto de un escalar por un vector nos de como resultado otro vector. Sean entonces $\alpha \in \mathbb{F}$ y $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$. Como $\alpha, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{F}$ (o sea, son escalares del cuerpo), tenemos que $\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n \in \mathbb{F}$, de modo que $(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) \in \mathbb{F}^n$, vale decir, $\alpha \cdot \overline{x}$ es un vector de $\mathbb{F}^n$, con lo cual esta operación esté bien definida.

Nuevamente, la operación producto por escalar se define a partir de la operación producto en el cuerpo $\mathbb{F}$ y ésta es la clave de la Demostración.

- *Asociatividad del producto por escalar:* Veamos que el producto por escalar también es asociativo: sean $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$, entonces

$$(\alpha\beta) \cdot \overline{x} = \alpha \cdot (\beta \cdot \overline{x}).$$

En efecto,

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)\cdot\overline{x} &\stackrel{d}{=}((\alpha\beta)x_1,\ldots,(\alpha\beta)x_n)\stackrel{a}{=}(\alpha(\beta x_1),\ldots,\alpha(\beta x_n))\\ &\stackrel{d}{=}\alpha\cdot(\beta x_1,\ldots,\beta x_n)\stackrel{d}{=}\alpha\cdot(\beta\cdot(x_1,\ldots,x_n))=\alpha\cdot(\beta\cdot\overline{x}),\end{aligned}$$

donde las igualdades d se deducen de la definición de producto por escalar y la igualdad a de la asociatividad del producto de escalares.

Las siguientes dos propiedades vinculan ambas operaciones.

- *Distributiva del producto por escalar con respecto a la suma de escalares:* Como es de esperar, el producto por escalar se distribuye respecto a la suma de escalares. Esto significa que dados los escalares $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ y el vector $\overline{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{F}^n$,

$$(\alpha+\beta)\cdot\overline{x}=\alpha\cdot\overline{x}+\beta\cdot\overline{x}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\cdot\overline{x} &=(\alpha+\beta)\cdot(x_1,\ldots,x_n)\stackrel{dp}{=}((\alpha+\beta)x_1,\ldots,(\alpha+\beta)x_n)\\ &\stackrel{di}{=}(\alpha x_1+\beta x_1,\ldots,\alpha x_n+\beta x_n)\stackrel{ds}{=}(\alpha x_1,\ldots,\alpha x_n)+(\beta x_1,\ldots,\beta x_n)\\ &\stackrel{dp}{=}\alpha\cdot(x_1,\ldots,x_n)+\beta\cdot(x_1,\ldots,x_n)=\alpha\cdot\overline{x}+\beta\cdot\overline{x},\end{aligned}$$

donde las igualdades dp siguen de la definición del producto por escalar, la igualdad di sigue de la propiedad distributiva del producto de escalares respecto de la suma de escalares y la igualdad ds sigue de la definición de suma de vectores.

- *Distributiva del producto por escalar con respecto a la suma de vectores* Tenemos además que el producto por escalar se distribuye respecto a la suma de vectores. Esto significa que dado un escalar $\alpha\in\mathbb{F}$ y dos vectores $\overline{x}=(x_1,\ldots,x_n),\overline{y}=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{F}^n$,

$$\alpha\cdot(\overline{x}+\overline{y})=\alpha\cdot\overline{x}+\alpha\cdot\overline{y}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\alpha\cdot(\overline{x}+\overline{y}) &=\alpha\cdot((x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n))\stackrel{ds}{=}\alpha\cdot(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)\\ &\stackrel{dp}{=}(\alpha(x_1+y_1),\ldots,\alpha(x_n+y_n))\stackrel{di}{=}(\alpha x_1+\alpha y_1,\ldots,\alpha x_n+\alpha y_n)\\ &\stackrel{ds}{=}(\alpha x_1,\ldots,\alpha x_n)+(\alpha y_1,\ldots,\alpha y_n)\stackrel{dp}{=}\alpha\cdot(x_1,\ldots,x_n)+\alpha\cdot(y_1,\ldots,y_n)=\alpha\cdot\overline{x}+\alpha\cdot\overline{y},\end{aligned}$$

donde las igualdades ds sigue de la definición de suma de vectores, las igualdades dp siguen de la definición del producto por escalar y la igualdad di sigue de la propiedad distributiva del producto de escalares respecto de la suma de escalares.

La última propiedad involucra el elemento identidad del producto de escalares.

- *Unitariedad del producto por escalar:* Es de esperar que haya un elemento destacado también para el producto por escalar. Este elemento será la unidad del cuerpo, el elemento $1 \in \mathbb{F}$. Tenemos que dado $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$,

$$1 \cdot \overline{x} = \overline{x}.$$

La verificación es inmediata, por definición de producto por escalar y por ser 1 el neutro para el producto de escalares:

$$1 \cdot \overline{x} = 1 \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (1x_1, \ldots, 1x_n) = (x_1, \ldots, x_n) = \overline{x}.$$

Antes de continuar, hagamos un resumen y listemos lo que llamaremos *los 10 axiomas de espacio vectorial*. Consideramos un cuerpo $\mathbb{F}$ y un número natural $n \in \mathbb{N}$. Tenemos definidas en el conjunto de $n-$uplas $\mathbb{F}^n$ dos operaciones usuales, una llamada suma de vectores y la otra llamada producto por escalares de $\mathbb{F}$. Hemos probado que se verifican:

1. Clausura de la suma de vectores.
2. Asociatividad de la suma de vectores.
3. Existencia de elemento neutro para la suma de vectores.
4. Existencia de opuestos para la suma de vectores.
5. Conmutatividad de la suma de vectores.
6. Clausura del producto por escalar.
7. Asociatividad del producto por escalar.
8. Distributiva del producto por escalar con respecto a la suma de escalares.
9. Distributiva del producto por escalar con respecto a la suma de vectores.
10. Unitariedad del producto por escalar.

A modo de comentario, y sólo eso, dijimos que: un conjunto dotado de una operación que verifican (1) y (2) se dice semigrupo. Un semigrupo que verfica además (3) y (4) se dice grupo y un grupo que verifica (5) se dice grupo abeliano.

4.1.3 Propiedades y consecuencias inmediatas

A partir de estos 10 axiomas se pueden probar otras propiedades que se verifican utilizándolos. Observar que el orden en que probemos las propiedades es importante, pues las últimas se nutrirán de las primeras.

Proposición 4.1.5 *En $\mathbb{F}^n$ con las operaciones suma y producto por escalar usuales se verifican:*

(a) El elemento neutro para la suma es único.

(b) Dado un vector $\overline{x} \in \mathbb{F}^n$, existe un único opuesto, que denotaremos $-\overline{x}$.

(c) Dado un vector $\overline{x} \in \mathbb{F}^n$, se tiene que $0\overline{x} = \overline{0}$.

(d) Dado un escalar $\alpha \in \mathbb{F}$, se tiene que $\alpha\overline{0} = \overline{0}$.

(e) Dado un vector $\overline{x} \in \mathbb{F}^n$, se tiene que $(-1) \cdot \overline{x} = -\overline{x}$.

(f) Dados un escalar $\alpha \in \mathbb{F}$ y un vector $\overline{x} \in \mathbb{F}^n$ que verifican que $\alpha \cdot \overline{x} = \overline{0}$, se tiene que o bien $\alpha = 0$ o bien $\overline{x} = \overline{0}$ (sin excluír que ambas puedan ocurrir en simultáneo).

Demostración 37 *(a) Para probar unicidad la técnica clásica es tomar dos elementos que verifiquen la propiedad y ver que son iguales. Eso es lo que haremos: supongamos que existe otro vector $\overline{z} \in \mathbb{F}^n$ tal que para todo $\overline{x} \in \mathbb{F}^n$,*

$$\overline{x} + \overline{z} = \overline{z} + \overline{x} = \overline{z}. \qquad (*)$$

Entonces:

$$\overline{0} \overset{*}{=} \overline{0} + \overline{z} \overset{3}{=} \overline{x},$$

donde la igualdad $*$ es la antes nombrada, tomando $\overline{0}$ como el vector cualquiera $\overline{x}$ y la igualdad 3 se refiere al axioma correspondiente.

(b) Otra prueba del tipo unicidad: sea $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ y sean $\overline{z} = (z_1, \ldots, z_n), \overline{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{F}^n$ dos vectores opuestos a $\overline{x}$, es decir,

$$\overline{x} + \overline{z} = \overline{z} + \overline{x} = \overline{0}, \qquad (*)$$
$$\overline{x} + \overline{w} = \overline{w} + \overline{x} = \overline{0}. \qquad (\triangle)$$

Luego,

$$\overline{z} \overset{3}{=} \overline{z} + \overline{0} \overset{\triangle}{=} \overline{z} + (\overline{x} + \overline{w}) \overset{2}{=} (\overline{z} + \overline{x}) + \overline{w} \overset{*}{=} \overline{0} + \overline{w} \overset{3}{=} \overline{w}.$$

Además, como ya sabemos que el vector $\overline{y} = (-x_1, \ldots, -x_n)$ es opuesto, y acabamos de probar que éste es único, podemos de ahora en más utilizar esta notación:

$$-\overline{x} = (-x_1, \ldots, -x_n).$$

(c) Esta prueba la podemos hacer en particular para $\mathbb{F}^n$ utilizando sólo la definición de producto por escalar, el axioma 3 y la unicidad dada en a. En efecto, si $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$,

$$0 \cdot \overline{x} = 0 \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (0x_1, \ldots, 0x_n) = (0, \ldots, 0) = \overline{0}.$$

Sin embargo, con el fin de que esta prueba sea independiente de la definición específica que hemos dado de producto por escalar, trataremos de probarlo utilizando sólo los axiomas, y las propiedades ya enunciadas y demostradas. Tenemos que,

$$0 \cdot \overline{x} \overset{ne}{=} (0+0) \cdot \overline{x} \overset{8}{=} 0 \cdot \overline{x} + 0 \cdot \overline{x},$$

donde la igualdad ne se justifica al considerar al elemento 0 *como neutro para la suma de escalares y* 8 *indica el axioma 8 (distributiva del producto por escalar respecto de la suma de escalares). Si nos quedamos con el primer y el último miembro de esta igualdad, a saber* $0 \cdot \overline{x} = 0 \cdot \overline{x} + 0 \cdot \overline{x}$ *y le sumamos el opuesto de* $0 \cdot \overline{x}$ *resulta*

$$0 \cdot \overline{x} + (-0 \cdot \overline{x}) = (0 \cdot \overline{x} + 0 \cdot \overline{x}) + (-0 \cdot \overline{x}) \overset{2}{=} 0 \cdot \overline{x} + (0 \cdot \overline{x} + (-0 \cdot \overline{x})),$$

donde 2 indica la asociatividad de la suma, y utilizando ahora el axioma 4 sigue que

$$\overline{0} = 0 \cdot \overline{x} + \overline{0} \overset{3}{=} 0 \cdot \overline{x},$$

donde 3 indica el axioma 3.

(d) *La prueba es completamente análoga a la prueba de (c), y la dejamos como ejercicio alx lectorx. Aqué ambos caminos también son válidos, aunque recalcamos la necesidad de abstraernos de la definición particular de las operaciones y utilizar los axiomas y propiedades previos.*

(e) *Nuevamente, trataremos de dar una prueba aplicando sólo los axiomas y propiedades. En este caso la clave será el rol que cumple un elemento opuesto. Veamos: queremos ver que* $(-1) \cdot \overline{x}$ *sea el opuesto del vector* $\overline{x}$. *Por el axioma 4 y el axioma 5, bastará con probar que* $\overline{x} + (-1) \cdot \overline{x} = \overline{0}$. *En efecto,*

$$\overline{x} + (-1) \cdot \overline{x} \overset{10}{=} 1 \cdot \overline{x} + (-1) \cdot \overline{x} \overset{8}{=} (1 + (-1)) \cdot \overline{x} \overset{op}{=} 0 \cdot \overline{x} \overset{a}{=} \overline{0},$$

donde las igualdades indicadas con números refieren a los axiomas correspondientes, las letras a las propiedades correspondientes, y op significa que estamos considerando la existencia de opuestos para la suma de escalares.

(f) *Supongamos que para* $\alpha \in \mathbb{F}$ *y* $\overline{x} \in \mathbb{F}^n$ *tenemos que* $\alpha \cdot \overline{x} = \overline{0}$. *Si* $\alpha = 0$ *no hay nada que probar. Supongamos que* $\alpha \neq 0$ *y veamos que en tal caso debe ser* $\overline{x} = \overline{0}$. *Tenemos que*

$$\overline{x} = 1 \cdot \overline{x} = \left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right)\overline{x} = \frac{1}{\alpha}(\alpha \cdot \overline{x}) = \frac{1}{\alpha} \cdot \overline{0} = \overline{0}.$$

Queda como ejercicio marcar en cada igualdad qué axioma o propiedad se esté utilizando.

Todo lo definido y probado hasta ahora debería traer a la memoria algunas estructuras, algunos patrones en común.

4.2 Los espacios $\mathbb{F}_n[x]$ y $\mathbb{F}^{m\times n}$

En esta sección haremos un recuerdo rápido de algunas *estructuras algebraicas* conocidas.

Definición 4.2.1 *Sea $n \in \mathbb{N}$ un número natural. Consideramos el conjunto de polinomios en una variable x con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{F}$ de grado máximo igual a n, a saber*

$$\mathbb{F}_n[x] = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n : a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{F}\},$$

con las operaciones

- *producto por escalar definida según:* $\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F}_n[x] \longrightarrow \mathbb{F}_n[x]$ *tal que si* $\alpha \in \mathbb{F}$ *y* $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{F}_n[x]$, *entonces*

$$\alpha \cdot p(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1x + \alpha a_2x^2 + \cdots + \alpha a_nx^n \in \mathbb{F}_n[x];$$

- *suma definida según:* $+ : \mathbb{F}_n[x] \times \mathbb{F}_n[x] \longrightarrow \mathbb{F}_n[x]$ *tal que si* $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{F}_n[x]$ *y* $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n \in \mathbb{F}_n[x]$, *entonces*

$$p(x) + q(y) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n \in \mathbb{F}_n[x].$$

Ejercicio 4.2.2 *Probar que los 10 axiomas de espacio vectorial listados pueden enunciarse y verificarse para $\mathbb{F}_n[x]$.*

Ejercicio 4.2.3 *Probar que si se considera el conjunto de polinomios en una variable a coeficientes en un cuerpo $\mathbb{F}$ de grado exactamente n para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces al intentar enunciar y demostrar los 10 axiomas no podemos hacerlo. Ayuda: tomar $n = 1$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ y tratar de sumar los polinomios x y $-x$.*

Ejercicio 4.2.4 *Completar la siguiente definición:*

Definición 4.2.5 *Sean $m, n \in \mathbb{N}$ números naturales. Consideramos el conjunto de matrices de tamaño $m \times n$ con en el cuerpo $\mathbb{F}$, a saber $\mathbb{F}^{m\times n}$ con la suma de matrices y el producto por escalar definidos en la Unidad 2, a saber:*

- *producto por escalar definida según:*

- *suma definida según:*

Ejercicio 4.2.6 *Buscar y marcar en las notas de la Unidad 2 las pruebas de cada uno de los 10 axiomas de espacio vectorial para $\mathbb{F}^{m\times n}$. Si faltase alguna, hacerla.*

4.3 Espacios vectoriales

A esta altura deberíamos habernos dado cuenta ya de que estamos siempre haciendo *las mismas cuentas*. Veamos cómo todo se repite:

	$\mathbb{F}^n$	$\mathbb{F}_n[x]$	$\mathbb{F}^{m\times n}$	V
producto por escalar	$(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$	$\alpha a_0 + \alpha a_1 x + \cdots + \alpha a_n x^n$	$\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$	$\alpha \cdot v$
suma	$(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$	$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x \cdots + (a_n + b_n)x^n$	$\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$	$v + w$
Clausura +	✓	✓	✓	$v + w \in V$
Asociatividad +	✓	✓	✓	$(v + w) + u = v + (w + u)$
$\exists 0$	✓	✓	✓	$v + 0 = 0 + v = v$
$\exists - v$	✓	✓	✓	$v + (-v) = (-v) + v = 0$
Conmutatividad +	✓	✓	✓	$v + w = w + v$
Clausura $\cdot$	✓	✓	✓	$\alpha \cdot v \in V$
Asociatividad .	✓	✓	✓	$(\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$
Distributiva $\cdot$ cra $+_{\mathbb{F}}$	✓	✓	✓	$(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$
Distributiva $\cdot$ cra +	✓	✓	✓	$\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$
Unitariedad	✓	✓	✓	$1 \cdot v = v$

A modo de comentario, puesto que cuando estudiemos álgebra Lineal lo veremos con más detenimiento, damos la definición rigurosa de *espacio vectorial*.

Definición 4.3.1 *Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo de escalares. Sea un conjunto V dotado de dos operaciones, una llamada suma, denotada por el símbolo $+$, que a un par de elementos v y w de V les asigna un elemento que denotamos $v+w$, y otra llamada producto por escalar denotada por el símbolo $\cdot$ que a un escalar $\alpha \in \mathbb{F}$ y un elemento $v \in V$ le asigna un elemento que denotamos $\alpha \cdot v$. Diremos que la terna $(V,+,\cdot)$ es un $\mathbb{F}-$espacio vectorial si se verifican los siguientes axiomas:*

1. *Clausura de la suma de vectores: si $v, w \in V$ entonces $v+w \in V$.*
2. *Asociatividad de la suma de vectores: si $v, w, u \in V$ entonces $(v+w)+u = v+(w+u)$.*
3. *Existencia de elemento neutro para la suma de vectores: existe $e \in V$ tal que $v+e = e+v = v$.*
4. *Existencia de opuestos para la suma de vectores: dado $v \in V$ existe $w \in V$ tal que $v+w = w+v = e$.*
5. *Conmutatividad de la suma de vectores: si $v, w \in V$, entonces $v+w = w+v$.*
6. *Clausura del producto por escalar: si $\alpha \in \mathbb{F}$ y $v \in V$ entonces $\alpha \cdot v \in V$.*
7. *Asociatividad del producto por escalar: si $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y $v \in V$ entonces $(\alpha\beta)\cdot v = \alpha\cdot(\beta\cdot v)$.*
8. *Distributiva del producto por escalar con respecto a la suma de escalares: si $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y $v \in V$ entonces $(\alpha+\beta)\cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$.*
9. *Distributiva del producto por escalar con respecto a la suma de vectores: si $\alpha \in \mathbb{F}$ y $v, w \in V$ entonces $\alpha \cdot (v+w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$.*
10. *Unitariedad del producto por escalar: si $v \in V$, entonces $1 \cdot v = v$.*

A los elementos v de un espacio vectorial V se los denomina vectores.

Observación 4.3.2 *A riesgo de ser redundantes, es claro que $\mathbb{F}^n$, $\mathbb{F}_n[x]$ y $\mathbb{F}^{m\times n}$ son espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{F}$. Independientemente de la naturaleza de los elementos de un espacio vectorial V, éstos se llaman vectores, Así sean polinomios como es el caso cuando $V = \mathbb{F}_n[x]$ o matrices cuando $V = \mathbb{F}^{m\times n}$ o vectores $\overline{x}$ de $\mathbb{F}^n$. Siempre que el espacio esté claro, sabremos de qué naturaleza serán los vectores con los que trabajemos.*

Observación 4.3.3 *Así como nos hemos quedado con las operaciones de suma y de producto por escalar, en cada uno de los espacios $\mathbb{F}^n$, $\mathbb{F}_n[x]$ y $\mathbb{F}^{m\times n}$ podemos dar algún concepto de producto y deducir sus propiedades. Las estructuras algebraicas que Así surgen serán estudiadas más adelante en las respectivas carreras.*

En la sección final volvemos a estudiar $\mathbb{F}^n$.

4.4 Bases y dimensión en $\mathbb{F}^n$

Definición 4.4.1 *Dados los vectores* $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_s$ *de* $\mathbb{F}^n$ *y los escalares* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ *de* $\mathbb{F}$*, decimos que el vector* $\alpha_1 \cdot \overline{x_1} + \alpha_2 \cdot \overline{x}_2 + \cdots + \alpha_s \cdot \overline{x}_s$ *de* $\mathbb{F}^n$ *es una combinación lineal de* $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_s$*.*

En $\mathbb{R}^2$ existe un par de versores destacados: $\overline{i}$ y $\overline{j}$. Nos interesa particularmente la siguiente propiedad: cualquier vector $\overline{x}$ en $\mathbb{R}^2$ puede escribirse de manera única como *combinación lineal* de $\overline{i}$ y $\overline{j}$, esto significa que existen únicos escalares x_1 y x_2 tales que

$$\overline{x} = x_1\overline{i} + x_2\overline{j}.$$

Recordemos además que $\overline{i}$ y $\overline{j}$ son ortogonales. En tal caso decimos que $\{\overline{i}, \overline{j}\}$ es *la base canúnica de* $\mathbb{R}^2$. Si fijamos coordenadas, tenemos que $\overline{i} = (1, 0)$ y $\overline{j} = (0, 1)$, luego el vector $\overline{x}$ se escribe en coordenadas como $\overline{x} = x_1\overline{i} + x_2\overline{j} = (x_1, x_2)$.

En forma análoga, en $\mathbb{R}^3$ la base canúnica es $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$, tenemos que dado $\overline{x} \in \mathbb{R}^3$ existen únicos escalares x_1, x_2, x_3 tales que $\overline{x}$ se escribe como *combinación lineal* de $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$:

$$\overline{x} = x_1\overline{i} + x_2\overline{j} + x_3\overline{k}.$$

En coordenadas esto se traduce en $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ puesto que $\overline{i} = (1, 0, 0)$, $\overline{j} = (0, 1, 0)$ y $\overline{k} = (0, 0, 1)$.

Extender estos resultados a $\mathbb{F}^n$ no representa mayor complicación: consideramos los vectores $\overline{e_1} = (1, 0, \ldots), \overline{e_2} = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \overline{e_n} = (0, 0, \ldots, 1) \in \mathbb{F}^n$. Luego un vector $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se escribe (y de forma única, ¿porqué?) como la *combinación lineal*

$$\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + \cdots + x_n\overline{e_n}.$$

El conjunto $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}\}$ se denomina *base canúnica* de $\mathbb{F}^n$.

Las bases canúnicas son de gran utilidad, pero no siempre contamos con ellas. Veremos una definición de base un poco más general, y retomaremos el concepto de dimensión, ahora sí, de forma más rigurosa. Para esto, nos quedamos con dos propiedades que nos iteresan de las bases canúnicas: que todo vector se escriba como combinación lineal de los elementos de la base, y que esta combinación lineal sea única.

4.4.1 Independencia lineal

Independencia lineal en $\mathbb{F}^n$

Definición 4.4.2 *Sean los vectores* $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_r} \in \mathbb{F}^n$*. Decimos que estos vectores son linealmente independientes (LI) si la ecuación vectorial* $\alpha_1 \cdot \overline{x_1} + \cdots + \alpha_r \cdot \overline{x_r} = \overline{0}$ *tiene sólo la solución trivial, a saber,* $\alpha_1, \ldots, \alpha_r = 0$*. En caso contrario, decimos que son linealmente dependientes (LD).*

Ejemplo 4.4.3 *Tratemos de deducir si los vectores* $\overline{x} = (-1, 3)$ *y* $\overline{y} = (2, 1)$ *son linealmente independientes o linealmente dependientes. Para esto, planteamos una combinación lineal de* $\overline{x}$ *e* $\overline{y}$ *y la igualamos al vector nulo:*

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{y} &= \overline{0}, \\ (-\alpha, 3\alpha) + (2\beta, \beta) &= (0, 0), \\ (-\alpha + 2\beta, 3\alpha + \beta) &= (0, 0), \end{aligned}$$

de donde sigue el sistema homogéneo de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} -\alpha + 2\beta = 0, \\ 3\alpha + \beta = 0, \end{cases}$$

cuya matriz aumentada es

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y su forma de escalón reducida es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

vale decir, el sistema tiene sólo la solución trivial. Otra forma, dado que el sistema es homogéneo y cuadrado, podráa haber sido calcular el determinante de la matriz asociada, en este caso -7*, que es no nulo y arribaríamos a la misma conclusión. Pero como no siempre el sistema resultante es cuadrado, optamos por seguir el camino más general.*

Tres vectores $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ en $\mathbb{R}^2$ *siempre* serán linealmente dependientes. Esto quiere decir que la ecuación vectorial $\alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{y} + \gamma \cdot \overline{z} = \overline{0}$ tiene más soluciones que la trivial. En efecto, siguiendo el procedimiento anterior, arribamos a un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, y un tal sistema *siempre* tiene variables libres (¿porqué?). Veamos un ejemplo que podráa ilustrar un poco:

Ejemplo 4.4.4 *Tratemos de deducir si los vectores* $\overline{x} = (-1, 3)$*,* $\overline{y} = (2, 1)$ *y* $\overline{z} = (1, -1)$ *son linealmente independientes o linealmente dependientes. Para esto, planteamos una combinación lineal de* $\overline{x}$*,* $\overline{y}$ *y* $\overline{z}$ *y la igualamos al vector nulo:*

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{y} + \gamma \cdot \overline{z} &= \overline{0}, \\ (-\alpha, 3\alpha) + (2\beta, \beta) + (\gamma, -\gamma) &= (0, 0), \\ (-\alpha + 2\beta + \gamma, 3\alpha + \beta - \gamma) &= (0, 0), \end{aligned}$$

de donde sigue el sistema homogéneo de dos ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{cases} -\alpha + 2\beta + \gamma = 0, \\ 3\alpha + \beta - \gamma = 0, \end{cases}$$

cuya matriz aumentada es

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

y su forma de escalón reducida es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de donde concluimos que hay una variable libre y por lo tanto el sistema es compatible indeterminado.

Tres o más de tres vectores en $\mathbb{R}^2$ son *siempre* linealmente dependientes. El punto de quiebre esté en la cantidad 2, que no es casual: 2 es la *dimensión* del espacio $\mathbb{R}^2$, como veremos más adelante.

Ejemplo 4.4.5 *Sean los vectores* $\overline{x} = (1, 1, -2)$*,* $\overline{y} = (2, 5, -1)$ *y* $\overline{z} = (0, 1, 1)$ *de* $\mathbb{R}^3$*. Veamos si son LI o LD. Para esto planteamos la combinación lineal de ellos y la igualamos al vector nulo,*

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{y} + \gamma \cdot \overline{z} =& \overline{0}, \\ \alpha \cdot (1, 1, -2) + \beta \cdot (2, 5, -1) + \gamma \cdot (0, 1, 1) =& (0, 0, 0), \end{aligned}$$

de donde deducimos un sistema homogéneo de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 2\gamma = 0, \\ 2\alpha + 5\beta + \gamma = 0, \\ \beta + \gamma = 0, \end{cases}$$

cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

y del proceso de eliminación de Gauss obtenemos la siguiente matriz equivalente por filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De aqué sigue que el sistema tiene infintas soluciones, con lo cual existen infinitas combinaciones lineales de $\overline{x}$*,* $\overline{y}$ *y* $\overline{z}$ *que dan el vector nulo, o sea, los vectores son LD.*

Ejemplo 4.4.6 *Sean los vectores $\overline{x} = (1,2,3)$, $\overline{y} = (0,1,2)$ y $\overline{z} = (-2,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$. Veamos si son LI o LD. Para esto planteamos la combinación lineal de ellos y la igualamos al vector nulo,*

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{y} + \gamma \cdot \overline{z} =& \overline{0},\\ \alpha \cdot (1,2,3) + \beta \cdot (0,1,2) + \gamma \cdot (-2,1,0) =& (0,0,0),\end{aligned}$$

de donde deducimos un sistema homogéneo de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\left\{\begin{array}{c}\alpha - 3\gamma = 0,\\ 2\alpha + \beta = 0,\\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 0,\end{array}\right.$$

cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix},$$

y que resulta equivalente por filas a la matriz identidad I_3, de aqué sigue que el sistema tiene una única solución (la trivial), con lo cual la única combinación lineal de $\overline{x}$, $\overline{y}$ y $\overline{z}$ que da el vector nulo es la trivial, o sea, los vectores son LI.

Ejercicio 4.4.7 *Sean los vectores $\overline{x} = (2,2,3)$, $\overline{y} = (6,-1,2)$, $\overline{z} = (2,-1,0)$ y $\overline{w} = (0,0,3)$ de $\mathbb{R}^3$. Decidir si son LI o LD y justificar adecuadamente.*

Ejemplo 4.4.8 *Sean los vectores $\overline{x} = (2,1,0,1)$, $\overline{y} = (3,0,2,1)$ y $\overline{z} = (1,0,2,0)$ de $\mathbb{R}^4$. Veamos si son LI o LD. Para esto planteamos la combinación lineal de ellos y la igualamos al vector nulo,*

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{y} + \gamma \cdot \overline{z} =& \overline{0},\\ \alpha \cdot (2,1,0,1) + \beta \cdot (3,0,2,1) + \gamma \cdot (1,0,2,0) =& (0,0,0,0),\end{aligned}$$

de donde deducimos un sistema de cuatro ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\left\{\begin{array}{c}2\alpha + 3\beta + \gamma = 0,\\ \alpha = 0,\\ 2\beta + 2\gamma = 0,\\ \alpha + \beta = 0\end{array}\right.$$

cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

y que resulta equivalente por filas a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de aqué sigue que el sistema tiene una única solución (la trivial), con lo cual la única combinación lineal de $\overline{x}$, $\overline{y}$ y $\overline{z}$ que da el vector nulo es la trivial, o sea, los vectores son LI.

Ejemplo 4.4.9 *Sean los vectores $\overline{x} = (-1, 2, 1, 0)$, $\overline{y} = (4, 0, -2, 2)$ y $\overline{z} = (1, 2, 0, 1)$ de $\mathbb{C}^4$. Veamos si son LI o LD. Para esto planteamos la combinación lineal de ellos y la igualamos al vector nulo,*

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{y} + \gamma \cdot \overline{z} =& \overline{0}, \\ \alpha \cdot (-1, 2, 1, 0) + \beta \cdot (4, 0, -2, 2) + \gamma \cdot (1, 2, 0, 1) =& (0, 0, 0, 0), \end{aligned}$$

de donde deducimos un sistema de cuatro ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{cases} -\alpha + 4\beta + \gamma = 0, \\ 2\alpha + 2\gamma = 0, \\ \alpha - 2\beta = 0, \\ 2\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

y que resulta equivalente por filas a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de aqué sigue que el sistema tiene infinitas soluciones, con lo cual hay infinitas combinaciones lineales de $\overline{x}$, $\overline{y}$ y $\overline{z}$ que dan el vector nulo, o sea, los vectores son LD.

Ejemplo 4.4.10

1. *El conjunto $S = \{\overline{0}\}$ es un conjunto LD de $\mathbb{F}^n$.*
2. *El conjunto $\{\overline{i}, \overline{j}\}$ es un conjunto LI de $\mathbb{R}^2$.*

3. *El conjunto* $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ *es un conjunto LI de* $\mathbb{R}^3$.

4. *El conjunto* $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ *es un conjunto LI de* $\mathbb{F}^n$.

Ejercicio 4.4.11 *Pruebe que en* $\mathbb{F}^n$ *el vector nulo es siempre LD.*

Ejercicio 4.4.12 *Pruebe que todo conjunto de vectores de* $\mathbb{F}^n$ *que contenga al vector nulo es LD.*

Ejercicio 4.4.13 *Pruebe que* $n+1$ *vectores en* $\mathbb{F}^n$ *son LD.*

4.4.2 generación

Definición 4.4.14 *Decimos que un conjunto de vectores* $S = \{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_s\}$ *de* $\mathbb{F}^n$ *es un conjunto generador de* $\mathbb{F}^n$ *si todo vector* $\overline{x} \in \mathbb{F}^n$ *se puede escribir como combinación lineal de los vectores de* S. *Esto es, si existen escalares* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ *tales que* $\overline{x} = \alpha_1 \overline{x}_1 + \ldots \alpha_n \overline{x}_n$.

Ejemplo 4.4.15 1. *El conjunto* $S = \{\overline{0}\}$ *no es un conjunto generador de* $\mathbb{F}^n$.

2. *El conjunto* $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ *es un conjunto generador de* $\mathbb{R}^2$.

3. *El conjunto* $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ *es un conjunto generador de* $\mathbb{R}^3$.

4. *El conjunto* $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ *es un conjunto generador de* $\mathbb{F}^n$.

Ejemplo 4.4.16 1. *Sea* $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$ *un vector no nulo. El conjunto* $S = \{\overline{x}\}$ *no es un conjunto generador de* $\mathbb{R}^2$. *En efecto, si fuera generador, tendráamos que un vector* $\overline{y} = (y_1, y_2)$ *se puede escribir como combinación lineal de* $\overline{x}$: *existirá* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tal que* $\overline{y} = \alpha \cdot \overline{x}$. *Esto no es cierto si* $\overline{y}$ *no es paralelo a* $\overline{x}$.

2. *Sean los vectores* $\overline{x} = (2,1)$, $\overline{y} = (-1,0)$ *y* $\overline{z} = (1,1)$. *Veamos si estos vectores generan* $\mathbb{R}^2$. *Para esto, consideremos un vector cualquiera* $\overline{w} = (w_1, w_2)$. *Nos preguntamos si existen escalares* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *tales que la combinación lineal de* $\overline{x}$, $\overline{y}$ *y* $\overline{z}$ *de como resultado el vector* $\overline{w}$. *Hagamos este planteo:*

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{y} + \gamma \cdot \overline{z} &= \overline{w}, \\ \alpha \cdot (2,1) + \beta \cdot (-1,0) + \gamma \cdot (1,1) &= (w_1, w_2), \end{aligned}$$

y esta igualdad vectorial se traduce en el sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta + \gamma = w_1, \\ \alpha + \gamma = w_2, \end{cases}$$

luego nos interesa saber si el sistema tiene solución, cualquiera sean los valores de w_1 y w_2. Por esto es importante considerar la matriz ampliada del sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & w_1 \\ 1 & 0 & 1 & w_2 \end{pmatrix},$$

cuya forma de escalón reducida es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & w_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2w_2 - w_1 \end{pmatrix},$$

de donde deducimos que el sistema es compatible para todo par w_1, w_2, y concluimos Así que los vectores $\overline{x}$, $\overline{y}$ y $\overline{z}$ generan $\mathbb{R}^2$.

3. *Sean los vectores $\overline{x} = (2,1)$, $\overline{y} = (4,2)$ y $\overline{z} = (1, \frac{1}{2})$. Veamos si estos vectores generan $\mathbb{R}^2$. Para esto, consideremos un vector cualquiera $\overline{w} = (w_1, w_2)$. Nos preguntamos si existen escalares $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que la combinación lineal de $\overline{x}$, $\overline{y}$ y $\overline{z}$ de como resultado el vector $\overline{w}$. Hagamos este planteo:*

$$\alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{y} + \gamma \cdot \overline{z} = \overline{w},$$
$$\alpha \cdot (2,1) + \beta \cdot (4,2) + \gamma \cdot (1, \frac{1}{2}) = (w_1, w_2),$$

y esta igualdad vectorial se traduce en el sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{cases} 2\alpha + 4\beta + \gamma = w_1, \\ \alpha + 2\beta + \frac{1}{2}\gamma = w_2, \end{cases}$$

luego nos interesa saber si el sistema tiene solución, cualquiera sean los valores de w_1 y w_2. Por esto es importante considerar la matriz ampliada del sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & w_1 \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} & w_2 \end{pmatrix},$$

cuya forma de escalón reducida es

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & w_1 \\ 0 & 0 & 0 & w_2 - \frac{1}{2}w_1 \end{pmatrix},$$

de donde deducimos que el sistema es incompatible para todo par w_1, w_2 que verifique que $4w_2 - 2w_1 \neq 0$, y concluimos Así que los vectores $\overline{x}$, $\overline{y}$ y $\overline{z}$ no generan $\mathbb{R}^2$. Para ver esto, simplemente demos un ejemplo. El vector $\overline{w} = (3,1)$ no puede ser generado pues la matriz que obtendráamos seráa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que tiene un uno principal en la última columna, con lo cual el sistema es incompatible.

Observación 4.4.17 *Deducimos de los ejemplos que para que un conjunto genere $\mathbb{R}^2$ debe tener al menos dos vectores, pero no todo conjunto de dos o más vectores es generador. De vuelta, en $\mathbb{R}^2$ el número 2 es importante. ¿qué pasará en $\mathbb{R}^3$? ¿cuál será la cantidad mínima de vectores que necesitamos para generar $\mathbb{R}^3$?*

Ejemplo 4.4.18 *1. A esta altura estamos casi convencidos que un vector en $\mathbb{R}^3$ no alcanza para generar todo $\mathbb{R}^3$, y con dos tampoco (ejercicio!). Con tres podemos encontrar un conjunto generador (¿cuál?). Pero no todo conjunto de tres vectores es generador. En efecto, consideremos los vectores del ejemplo 5.7: $\overline{x} = (1, 1, -2)$, $\overline{y} = (2, 5, -1)$ y $\overline{z} = (0, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$. Veamos que no generan $\mathbb{R}^3$. Para esto debemos tomar una combinación lineal de ellos y ver si Así podemos formar cualquier vector de $\mathbb{R}^3$. Planteamos esto: supongamos que $\overline{w} = (w_1, w_2, w_3)$ es un vector cualquiera, luego*

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{y} + \gamma \cdot \overline{z} =&\overline{w}, \\ \alpha \cdot (1, 1, -2) + \beta \cdot (2, 5, -1) + \gamma \cdot (0, 1, 1) =&(w_1, w_2, w_3), \end{aligned}$$

de donde deducimos un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 2\gamma = w_1, \\ 2\alpha + 5\beta + \gamma = w_2, \\ \beta + \gamma = w_3, \end{cases}$$

cuya matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & w_1 \\ 1 & 5 & 1 & w_2 \\ -2 & -1 & 1 & w_3 \end{pmatrix},$$

y del proceso de eliminación de Gauss obtenemos la siguiente matriz equivalente por filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{w_2 - w_1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & w_3 - w_2 + 3w_1 \end{pmatrix}.$$

La última columna de este sistema tiene un uno principal si $w_3 - w_2 + 3w_1 \neq 0$, luego existe algún vector que no puede ser escrito como combinación lineal de $\overline{x}$, $\overline{y}$ y $\overline{z}$, por lo tanto estos tres vectores no pueden generar $\mathbb{R}^3$.

2. Si consideramos los vectores del ejemplo 5.8, $\overline{x} = (1, 2, 3)$, $\overline{y} = (0, 1, 2)$ y $\overline{z} = (-2, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$, podemos ver que forman un conjunto generador. Para esto planteamos la combinación lineal de ellos y la igualamos a un vector cualquiera $\overline{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

El objetivo es ver que el sistema de ecuaciones que se deduce es siempre compatible, sin importar la elección de $\overline{w}$*:*

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{y} + \gamma \cdot \overline{z} =& \overline{w},\\ \alpha \cdot (1,2,3) + \beta \cdot (0,1,2) + \gamma \cdot (-2,1,0) =& (w_1, w_2, w_3),\end{aligned}$$

de donde deducimos un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{cases} \alpha - 3\gamma = w_1,\\ 2\alpha + \beta = w_2,\\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = w_3,\end{cases}$$

cuya matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & w_1\\ 2 & 1 & 0 & w_2\\ 3 & 2 & 1 & w_3 \end{pmatrix},$$

que resulta equivalente por filas a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & w_1\\ 0 & 1 & 4 & w_2 - 2w_1\\ 0 & 0 & 1 & -w_3 + 2w_2 - w_1 \end{pmatrix},$$

que no tiene un uno principal en la última columna, con lo cual el sistema asociado es siempre compatible. Luego los vectores $\overline{x}$*,* $\overline{y}$*,* $\overline{z}$ *generan* $\mathbb{R}^3$*.*

3. *Sean los vectores* $\overline{x}_1 = (1,2,-1,3,4)$*,* $\overline{x}_2 = (0,1,3,-2,3)$*,* $\overline{x}_3 = (0,0,2,-1,5)$*,* $\overline{x}_4 = (0,0,0,2,3)$*. ¿Es posible generar* $\mathbb{R}^5$ *con estos vectores? La intuición nos dice que no, pero hagamos las cuentas. Queremos ver si la ecuación vectorial* $\alpha_1 \cdot \overline{x}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{x}_2 + \alpha_3 \cdot \overline{x}_3 + \alpha_4 \cdot \overline{x}_4 = \overline{w}$ *tiene solución para cualquier* $\overline{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) \in \mathbb{R}^5$*. Esta ecuación vectorial se traduce en el siguiente sistema de* 5 *ecuaciones con* 4 *incógnitas:*

$$\begin{cases} \alpha_1 = w_1,\\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = w_2,\\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = w_3,\\ 3\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3 + 2\alpha_4 = w_4,\\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 - 3\alpha_4 = w_5,\end{cases}$$

cuya matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & w_1\\ 2 & 1 & 0 & 0 & w_2\\ -1 & 3 & 2 & 0 & w_3\\ 3 & -2 & -1 & 2 & w_4\\ 4 & 3 & 5 & -3 & w_5 \end{pmatrix},$$

que es equivalente por filas a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & w_2 - 2w_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(w_3 - 3w_2 + 7w_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4}(2w_4 + w_3 + w_2 - 7w_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}(w_5 + 10w_4 - 5w_3 + 23w_2 - 97w_1) \end{pmatrix},$$

que tiene un uno principal en la última columna si w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 *verifican que* $w_5 + 10w_4 - 5w_3 + 23w_2 - 97w_1 \neq 0$. *Por lo tanto el sistema no es compatible para todo* $\overline{w} \in \mathbb{R}^5$. *Es decir, no nos alcanza con 4 vectores para generar* $\mathbb{R}^5$.

4. *Esto ocurre en general: en* $\mathbb{F}^n$ *que podemos encontrar un conjunto generador de* n *vectores, e intuímos que con menos no alcanza. La prueba sigue de tomar el sistema correspondiente y ver que el sistema resultante no siempre es compatible. Ejercicio: plantear esto y resolverlo.*

4.4.3 Bases y dimensión

Estamos en condiciones de dar la definición de base:

Definición 4.4.19 *Un conjunto de vectores de* $\mathbb{F}^n$ *se dice que es una base del mismo, si es linealmente independiente y es un conjunto generador.*

Ejercicio 4.4.20 *Probar que las bases canúnicas en* $\mathbb{R}^2$, *en* $\mathbb{R}^3$ *y en* $\mathbb{F}^n$ *mencionadas al principio de la sección son efectivamente bases.*

Ejemplo 4.4.21

1. *Sea el conjunto* $\beta = \{\overline{x} = (1,2,3), \overline{y} = (0,1,2), \overline{z} = (-2,0,1)\}$ *de vectores de* $\mathbb{R}^3$. *Afirmamos que* β *es una base. En efecto, es LI pues en el ejemplo 5.7 lo hemos probado. Y es un conjunto generador de* $\mathbb{R}^3$, *pues Así lo hemos probado en el ejemplo 5.20.2.*

2. *Sea el conjunto* $\sigma = \{\overline{x} = (-1,3), \overline{y} = (2,1), \overline{z} = (1,-1)\}$ *de vectores de* $\mathbb{R}^2$. *Este conjunto NO es base, pues hemos visto en el ejemplo 5.4 que es LD.*

3. *Sea el conjunto* $\sigma = \{\overline{x}_1 = (1,2,-1,3,4), \overline{x}_2 = (0,1,3,-2,3), \overline{x}_3 = (0,0,2,-1,5), \overline{x}_4 = (0,0,0,2,3)\}$ *de* $\mathbb{R}^5$. *Este conjunto NO es base, pues hemos visto en el ejemplo 5.20.3 que NO es un conjunto generador.*

Observación 4.4.22 *Sea un conjunto* $\beta = \{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_s\}$ *de vectores de* $\mathbb{F}^n$ *que es una base. Como los vectores* $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_s$ *deben ser LI, y el máximo de vectores LI que hay en* $\mathbb{F}^n$ *es* n, *debe ser* $s \leq n$. *Como además los vectores deben generar* $\mathbb{F}^n$, *el mínimo de vectores necesarios es* n, *luego* $s \geq n$. *Deducimos que* $s = n$, *luego toda base de* $\mathbb{F}^n$ *debe tener exactamente* n *vectores.*

Definición 4.4.23 *La dimensión del espacio vectorial* $\mathbb{F}^n$ *es el cardinal de sus bases, es decir,* n*.*

4.5 Ejercicios sugeridos

1. Pruebe que $\mathbb{F}_n[x]$ es un espacio vectorial.

2. Pruebe que $\mathbb{F}^{m\times n}$ es un espacio vectorial.

3. Consideremos en $V = \mathbb{F}^3$ las operaciones definidas según:

   - Producto por escalar: $\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}^3$ tal que $\alpha \cdot (x_1, x_2, x_3)) = (\alpha x_1, x_2, x_3)$,
   - Suma usual: $+ : \mathbb{F}^3 \times \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}^3$ tal que $(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$.

   Indique si $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial, justificando adecuadamente.

4. Consideremos en $V = \mathbb{R}^3$ las operaciones definidas según:

   - Producto por escalar usual: $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha \cdot (x_1, x_2, x_3)) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$,
   - Suma: $+ : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, x_3) \wedge (y_1, y_2, y_3) = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$, o sea, estamos considerando una operación que le llamamos suma, y que es la conocida como producto vectorial. Probar que $(V, +, \cdot)$ NO es un espacio vectorial. Chequear los 10 axiomas y marcar cuáles no son válidos.

5. Sea $\beta = \{\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_s\}$ un subconjunto de vectores de $\mathbb{F}^n$. Probar que:

   (a) Si $s > n$ entonces β debe ser LD.
   (b) Si $s < n$ entonces β no puede generar $\mathbb{F}^n$.
   (c) Si $s = n$ y β es LI, entonces β genera $\mathbb{F}^n$ y resulta ser base de $\mathbb{F}^n$.
   (d) Si $s = n$ y β genera $\mathbb{F}^n$, entonces β es LI y resulta ser base de $\mathbb{F}^n$.

6. Cuáles de las siguientes son combinaciones lineales de $u = (1, -1, 3)$ *y* $v = (2, 4, 0)$?

   a) $(3, 3, 3)$ *b*) $(4, 2, 6)$ *c*) $(1, 5, 6)$ *d*) $(0, 0, 0)$.

7. En cada caso exprese los polinomios como combinaciones lineales de

   $$p_1 = 2 + x + 4x^4, \quad p_2 = 1 - x + 3x^2 \;\; y \;\; p_3 = 3 + 2x + 5x^2$$

   a) $5 + 9x + 5x^2$ *b*) $2 + 6x^2$ *c*) 0 *d*) $2 + 2x + 3x^2$

8. Determinar si los vectores dados generan $\mathbb{R}^3$

   (a) $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (2, 2, 0)$ $v_3 = (3, 0, 0)$.

(b) $v_1 = (2, -1, 3)$, $v_2 = (4, 1, 2)$ $v_3 = (8, -1, 8)$.

9. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes:

   (a) en $\mathbb{R}^3$:

      i) $(2, -1, 4)$, $(3, 6, 2)$, $(2, 10, -4)$.

      ii) $(1, 3, 3)$, $(0, 1, 4)$, $(5, 16, 3)$, $(7, 2, -1)$.

   (b) en $\mathbb{R}^4$:

      i) $(1, 2, 1, -2)$, $(0, -2, -2, 0)$, $(0, 2, 3, 1)$, $(3, 0, -3, 6)$.

      ii) $(4, 4, 0, 0)$, $(0, 0, 6, 6)$, $(-5, 0, 5, 5)$.

10. Para qué valores de λ los vectores que siguen forman un conjunto linealmente dependiente en $\mathbb{R}^3$?

$$v_1 = \left(\lambda, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad v_2 = \left(-\frac{1}{2}, \lambda, -\frac{1}{2}\right), \quad v_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \lambda\right).$$

11. Si $S = \{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n}\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores, demuestre que todo subconjunto no vacío de vectores de S es linealmente independiente.

12. Si $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n}\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores en un espacio vectorial $\mathbb{F}^n$, demuestre que $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n}, \overline{v_{n+1}}\}$ es linealmente dependiente, en donde $\overline{v_{n+1}} \in \mathbb{F}^n$.

13. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases para:

   (a) en $\mathbb{R}^3$:

      i) $(1, 0, 0)$, $(2, 2, 0)$, $(3, 3, 3)$.

      ii) $(2, -3, 1)$, $(4, 1, 1)$, $(0, -7, 1)$, $(7, 2, -1)$.

   (b) en $\mathbb{R}^4$:

      i) $(1, 2, 1, -2)$, $(0, -2, -2, 0)$, $(0, 2, 3, 1)$, $(3, 0, -3, 6)$.

      ii) $(4, 4, 0, 0)$, $(0, 0, 6, 6)$, $(-5, 0, 5, 5)$.

14. Sea $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}\}$ una base para un espacio vectorial $\mathbb{F}^n$. Demuestre que $\{\overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{u_3}\}$ también es una base, en donde $\overline{u_1} = \overline{v_1}$, : $\overline{u_2} = \overline{v_1} + \overline{v_2}$ *y* $\overline{u_3} = \overline{v_1} + \overline{v_2} + \overline{v_3}$.

15. Estudiar para qué valores de a y b los vectores $(3, 0, a, 1)$, $(1, 1, 0, b)$ y $(2, 5, b, 4)$ de $\mathbb{R}^4$ son linealmente dependientes.

16. Sea $\mathbb{F}^4$ con base $B = \{\overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{u_3}, \overline{u_4}\}$. Se definen los vectores

$$\begin{aligned}\overline{v_1} &= 2\overline{u_1} + \overline{u_2} - \overline{u_3},\\ \overline{v_2} &= 2\overline{u_1} + \overline{u_3} + 2\overline{u_4},\\ \overline{v_3} &= \overline{u_1} + \overline{u_2} - \overline{u_3},\\ \overline{v_4} &= \overline{u_1} + 2\overline{u_3} + 3\overline{u_4}\end{aligned}$$

Probar que $C = \{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}, \overline{v_4}\}$ es una base de $\mathbb{F}^4$.

17. De manera similar al ejercicio 1) se puede demostrar que el conjunto de los polinomios $\mathbb{F}[x]$ es un espacio vectorial. Demostrar que $\mathbb{F}[x]$ no puede tener dimensión finita.

18. Sean $\overline{v}_1 = (1, 1, -2), \overline{v}_2 = (2, 5, -1), \overline{v}_3 = (0, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$.

    i) Pruebe que $S = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ es linealmente dependiente.
    ii) Escriba cada uno de los vectores como combinación lineal de los otros dos.

19. Consideremos $\mathbb{F}^n$.

    i) Bajo qué condiciones un conjunto de un solo vector $S = \{\overline{v}\}$ es linealmente independiente?
    ii) Pruebe que si el conjunto de dos vectores $S = \{\overline{u}, \overline{v}\}$ es linealmente dependiente, entonces o bien $\overline{u} = \lambda\overline{v}$ o bien $\overline{u} = \lambda\overline{v}$ para algún $\lambda \in \mathbb{F}$.
    iii) Pruebe que si el conjunto de tres vectores $S = \{\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}\}$ es linealmente dependiente, entonces alguno de ellos puede escribirse como combinación lineal de los otros dos.
    iv) [$*$] Pruebe la siguiente afirmación: Un conjunto $S = \{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_k\}$ con $k \geq 2$ es linealmente dependiente si y sólo si al menos uno de los vectores $\overline{v}_j$ puede expresarse como una combinación lineal de los demás vectores de S.

20. Sean $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3), \overline{v}_1 = (1, 2, 3), \overline{v}_2 = (0, 1, 2), \overline{v}_3 = (-2, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$. Pruebe que

    i) $S = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.
    ii) La ecuación $\overline{u} = c_1\overline{v}_1 + c_2\overline{v}_2 + c_3\overline{v}_3$ tiene una única solución.

21. [$*$] En base al ejercicio anterior, enuncie un teorema acerca de la unicidad de escritura respecto a una base dada en $\mathbb{F}^n$. Se anima a demostrarlo?

22. [$*$] Sea $AX = b$ un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Sean $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n$ las columnas de A. Si b es una combinación lineal de estos n vectores columna, explique porqué esto implica que el sistema lineal es consistente. Ilustre su respuesta con ejemplos apropiados. Qué puede concluir acerca del sistema lineal si b no es una combinación lineal de las columnas de A?

Los ejercicios marcados con [$*$] requieren de madurez de los conceptos. No se desespere por resolverlos, si no salen, ya saldrán.

Chapter 5

Geometría analítica del Plano

5.1 introducción y repaso.

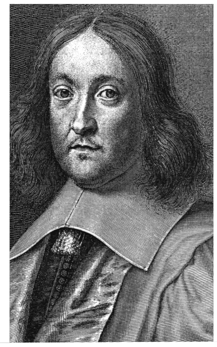
Hoy es muy común hablar de *coordenadas*. Los GPS nos dicen de manera precisa en qué punto de la tierra nos encontramos en un momento determinado, repecto de un sistema de coordenadas fijo, que todo el mundo conoce y entiende. De modo que si queremos trasmitir nuestra posición a cualquier persona del mundo, bastará dar estos números y ellos sabrán donde encontrarnos. Observemos que las coordenadas no son más que eso: números. Números que aislados carecerían de sentido, pero una vez que fijamos un marco de referencia que todos sabemos interpretar, se vuelven una manera de describir entes geométricos: en nuestro ejemplo, un punto.

Así, para determinar el punto de intersección de dos rectas en el plano, bastará fijar un sistema de coordenadas común a todos nosotros e indicar cuales son las coordenadas del punto en ese sistema. De esta manera cualquiera puede localizar el punto de forma exacta.

Esta idea tan simple de vincular objetos geométricos con números constituye una de las ideas más brillantes de la historia de la matemática y abre las puertas a una maquinaria de trabajo potente que ha permitido resolver problemas que son impensables desde el punto de vista sintético que hemos desarrollado hasta ahora (por ejemplo, demostrar la imposibilidad de resolver los tres problemas clásicos de construcción).

A partir de esta unidad nos dedicaremos al estudio de la denominada *geometría analítica*, cuya base fundamental es utilizar ideas del álgebra para describir objetos geométricos. La geometría analítica se basa en la introducción de *coordenadas cartesianas*.

René Descartes



Pierre de Fermat

Las coordenadas cartesianas deben su nombre al célebre filósofo y matemático francés René Descartes (1596-1650) pero fueron introducidas simultáneamente por el no menos célebre Pierre de Fermat. Este método revolucionó el estudio de la geometría dado que, como ya hemos mencionado, permitió la utilización de todos los conocimientos del álgebra para resolver de manera mucho más precisa y sencilla muchos problemas de geometría.

En álgebra y Geometría I hemos visto cómo se vinculan los puntos de una recta, del plano o del espacio con los números reales. En la próxima sección repasaremos un poco estas ideas (no es necesario el estudio exahustivo de la misma si los conceptos le son familiares al lector), y en las sección siguiente veremos otros *lugares geométricos del plano*, las llamadas *secciones cúnicas*, que sí son parte del programa de álgebra y Geometría II.

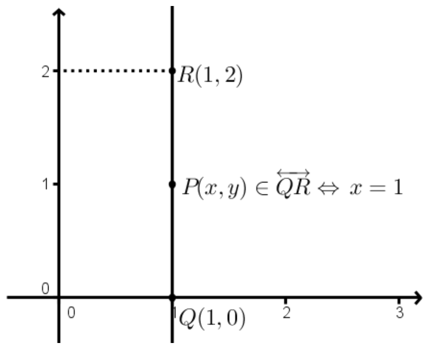
5.1.1 Lugares geométricos

Se denomina **lugar geométrico del plano** a todo subconjunto del plano formado por todos los puntos que satisfacen una o más condiciones geométricas determinadas.

Así por ejemplo, dado un punto Q fijo del plano decimos que la *circunferencia de centro Q y radio r* es el lugar geométrico de los puntos del plano que están a distancia r de Q.

Dados dos puntos Q y R, la *recta* $\overleftrightarrow{QR}$ puede definirse como el lugar geométrico de los puntos que están alineados con Q y R.

El hecho de introducir coordenadas, nos plantea la siguiente pregunta: así como los puntos del espacio que pertenecen a un lugar geométrico cumplen una determinada condición geométrica, las coordenadas de estos puntos (que son números reales) ¿cumplirán alguna condición algebraica? Este es el objetivo principal de la geometría analítica: determinar qué condiciones algebraicas verifican las coordenadas de los puntos que pertenecen a un deteminado lugar geométrico.



Consideremos algunos ejemplos. Tomemos los puntos $Q(1,0)$ y $R(1,2)$ del plano. Si $P(x,y)$ es un punto de la recta $\overleftrightarrow{QR}$ es evidente que $x=1$. Recíprocamente, cualquier punto del plano cuya abscisa es 1, está alineado con Q y R. Luego

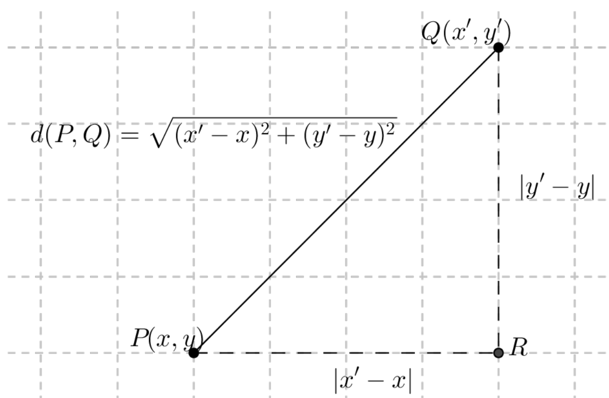
$$\overleftrightarrow{QR} = \{P(x,y) \,:\, x=1\}$$

Por lo tanto, esta recta está caracterizada por la ecuación $x=1$, que de hecho se denomina ecuación de la recta $\overleftrightarrow{QR}$.

Sean ahora $P(x,y)$ y $Q(x',y')$ dos puntos cualesquiera del plano, determinaremos en función de $x,\ y,\ x'$ e y' la distancia entre ellos.

Definición 5.1.1 *Se denomina* ***distancia*** *entre dos puntos P y Q y se denota $d(P,Q)$ a la longitud PQ del segmento $\overline{PQ}$.*

Sea R el punto de intersección entre la perpendicular al eje x por Q y la perpendicular al eje y por P.



Entonces $\overset{\triangle}{PRQ}$ es un triángulo rectángulo, y aplicando el Teorema de Pitágoras resulta

$$d(P,Q) = PQ = \sqrt{PR^2 + RQ^2}.$$

Observemos que $PR = |x'-x|$ y $RQ = |y'-y|$. Reemplazando en la ecuación anterior, resulta

$$\boxed{d(P,Q) = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}.}$$

Son consecuencias inmediatas de la definición de distancia:

1. $d(P,Q) \geq 0$ (pues es la longitud de un segmento) y $d(P,Q) = 0$ si y sólo si $P=Q$.

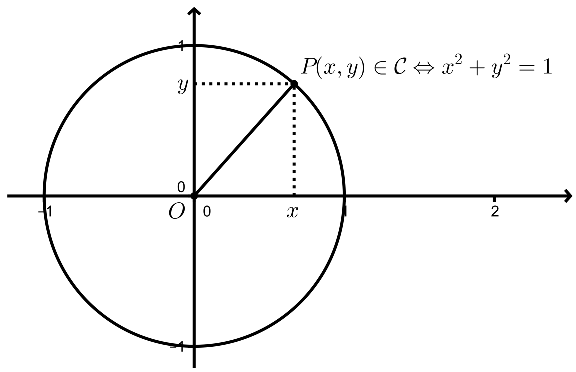
2. $d(P,Q) = d(Q,P)$ sii $P = Q$.

3. Dados tres puntos P, Q, R vale la *desigualdad triangular* $d(P,Q)+d(Q,R) \geq d(P,R)$.

Consideremos la circunferencia centrada en el origen O y radio 1, esto es, $\mathcal{C} = \{P : d(P,O) = 1\}$. Entonces

$$P(x,y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow d(P,O) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Luego $\mathcal{C} = \{P(x,y) \,/\, x^2 + y^2 = 1\}$.

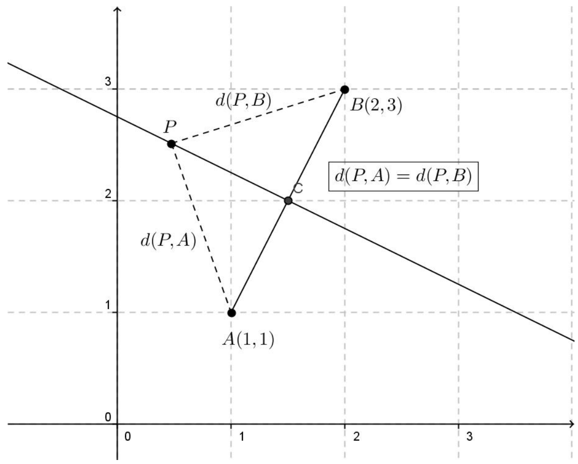


Por lo tanto $x^2 + y^2 = 1$ es la ecuación que caracteriza el lugar geométrico $\mathcal{C}$: las coordenadas de todo punto de $\mathcal{C}$ la satisfacen, y recíprocamente si (x,y) es un par ordenado de números reales que la satisfacen, el punto $P(x,y)$ pertenece a $\mathcal{C}$.

Sea ahora r la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, siendo $A(1,1)$ y $B(2,3)$.

Dado un punto P de coordenadas (x,y), tenemos:

$$\begin{aligned}
P \in r \quad &\Leftrightarrow \quad d(P,A) = d(P,B) \;\Leftrightarrow\; \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} \\
&\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x + 4y - 11 = 0
\end{aligned}$$



Luego $r = \{P(x,y) : \; 2x + 4y - 11 = 0\}$.

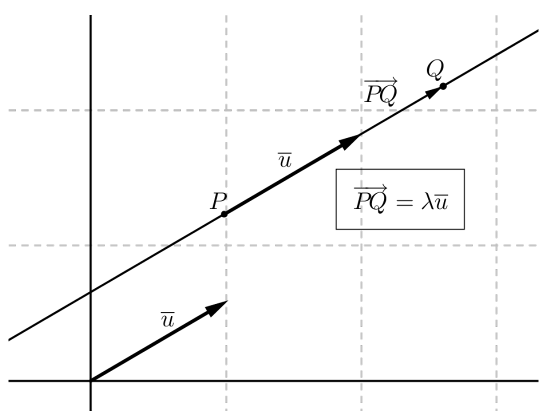
5.1.2 Recta en el Plano

Recordemos que una recta en el plano que pasa por dos puntos P y Q es el lugar geométrico de los puntos del plano que están alineados con P y Q. Si utilizamos el lenguaje de los vectores, tenemos que un punto R del plano pertenece a la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ si y sólo si los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son paralelos.

Esto nos permite definir qué entendemos por una recta que pasa por un punto del plano dado en la dirección de un vector dado.

Definición 5.1.2 *Dado un punto P y un vector no nulo $\overline{u}$, la* ***recta*** *r* ***<u>que</u> pasa por*** *P* ***en la dirección de*** *$\overline{u}$ es el lugar geométrico de los puntos Q tales que $\overrightarrow{PQ} // \overline{u}$. Esto es,*

$$Q \in r \Leftrightarrow \; \exists \, \lambda \in \mathbb{R} \; : \; \overrightarrow{PQ} = \lambda \overline{u} \tag{5.1}$$



Observemos que $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$. Luego la recta r está compuesta por todos los puntos Q que verifican

$$\boxed{\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \lambda \overline{u},\ \lambda \in \mathbb{R}.} \tag{5.2}$$

La ecuación (5.2) se denomina **ecuación vectorial** de la recta r.

De esta ecuación derivaremos las denominadas **ecuaciones paramétricas** de r, esto es, ecuaciones que dependen de un parámetro:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x_0 + \lambda\, u_1 \\ y & = & y_0 + \lambda\, u_2 \end{array} \right. , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

o sea r pasa por $P(x_0, y_0)$ y tiene la dirección de $\overline{u} = (u_1, u_2)$. Como $\overline{u} \neq \overline{0}$, debe ser $u_1 \neq 0$ o $u_2 \neq 0$.

Recordemos que hemos estudiado también la **ecuación cartesiana de la recta**, esto es, una ecuación que involucra sólo las variables x e y y sea satisfecha únicamente por las coordenadas de los puntos que pertenecen a la recta

$$ax + by + c = 0.$$

Hemos visto además que ecuación de este tipo es siempre la ecuación cartesiana de una recta.

Teorema 5.1.3 *Un lugar geométrico en el plano es una recta si y sólo si su ecuación cartesiana es de la forma*

$$ax + by + c = 0 \tag{5.3}$$

con a, b, $c \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq \overline{0}$.

Demostración 38 *Hecha en álgebra y Geometría I.*

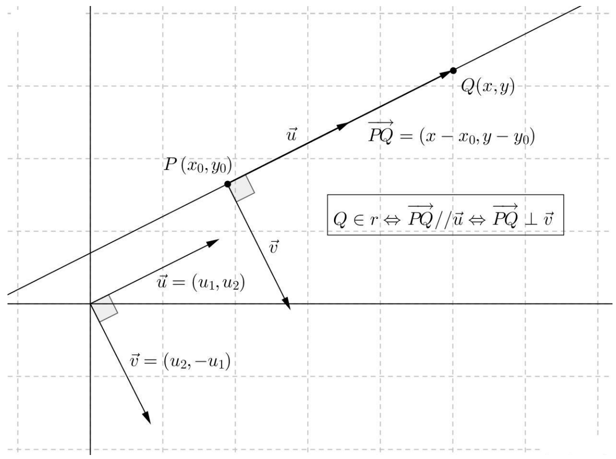
Nota 5.1.4 *más precisamente, hemos visto que si r es una recta de ecuaciones paramétricas*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x_0 + \lambda\, u_1 \\ y & = & y_0 + \lambda\, u_2 \end{array} \right. , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

su ecuación general es $u_2 x - u_1 y - u_2 x_0 + u_1 y_0 = 0$, que puede reescribirse como

$$u_2(x - x_0) + (-u_1)(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow (u_2, -u_1) \times (x - x_0, y - y_0) = 0.$$

Esta última expresión no es más que afirmar que el vector $\overrightarrow{PQ} = (x - x_0, y - y_0)$ es perpendicular a $\overline{v} = (u_2, -u_1)$. Esto es inmediato del hecho de que $Q \in r$ si y sólo si $\overrightarrow{PQ}$ es paralelo a $\overline{u} = (u_1, u_2)$, que es equivalente a que $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular a $\overline{v} = (u_2, -u_1) \perp \overline{u}$.



Nota 5.1.5 *Sea r una recta de ecuación general $ax + by + x = 0$. Entonces el vector $\overline{v} = (a, b)$ es un vector perpendicular a r y $\overline{u} = (b, -a)$ o $\overline{u'} = (-b, a)$ son direcciones de r.*

Nota 5.1.6 *Si $\alpha \neq 0$ y ponemos $a' = \alpha a$, $b' = \alpha b$, $c' = \alpha c$, entonces $ax + by + c = 0$ y $a'x + b'y + c' = 0$ son ecuaciones cartesianas de la misma recta r.*

Nota 5.1.7 *Sea $ax + by + c = 0$ la ecuación general de una recta r en el plano. Si alguno de los coeficientes a, b o c se anulan, la recta tiene características particulares:*

- *si $c = 0$, el punto $O(0,0)$ verifica la ecuación de r,o sea que r es una recta que pasa por el origen.*
- *si $a = 0$, $b \neq 0$, la ecuación cartesiana puede escribirse como $y = -\frac{c}{b}$, o sea los puntos que satisfacen la ecuación de la recta son de la forma $Q(x, -\frac{c}{b})$, y por lo tanto r es una recta horizontal, paralela al eje x, que corta al eje y en el punto de ordenada $-\frac{c}{b}$.*
- *si $b = 0$, $a \neq 0$, la ecuación cartesiana puede escribirse como $x = -\frac{c}{a}$, o sea los puntos que satisfacen la ecuación de la recta son de la forma $Q(-\frac{c}{a}, y)$, y por lo tanto r es una recta vertical, paralela al eje y, que corta al eje x en el punto de abscisa $-\frac{c}{a}$.*

En cuanto a posiciones relativas entre dos rectas, nos hemos adelantado pues hemos reducido las tres opciones a los tres posibles casos para un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

Consideremos el sistema de ecuaciones

$$S) \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c = 0 \end{cases}$$

con $(a, b) \neq \overline{0}$, $(a', b') \neq \overline{0}$.

Cada una de las ecuaciones del sistema es la ecuación de una recta. Luego tenemos tres opciones:

1. Las dos rectas no son paralelas, en cuyo caso se cortan en un único punto y el sistema tiene solución única, dada por las coordenadas del punto de intersección.

   El sistema S es compatible determinado si y sólo si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0.$

2. Las dos rectas son paralelas y no coincidentes. En este caso, las rectas no se cortan en ningún punto, y por lo tanto el sistema S es incompatilble.

3. Las dos rectas son coincidentes, en cuyo caso las coordenadas de todos los puntos de cualquiera de las rectas es solución del sistema. En este caso S es compatible indeterminado.

   El sistema S es compatible indeterminado o incompatible si y sólo si
   $$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b = 0.$$

Finalizamos esta sección recordando la noción de distancia de un punto a una recta:

Definición 5.1.8 *Dado un punto P del plano y una recta r, si trazamos una perpendicular a r que pase por P, ésta corta a r en un único punto P'. Se denomina **distancia** de P a r, y se denota $d(P,r)$ a la distancia $d(P,P')$ entre P y P'.*

Nota 5.1.9 *Si $P \in r$ es inmediato de la definición que $d(P,r) = d(P,P) = 0$.*

Teorema 5.1.10 *Sea r una recta de ecuación general $ax + by + c = 0$ y sea $P\ (x_0, y_0)$ un punto del plano. Entonces*

$$\boxed{d(P,r) = \frac{\mid ax_0 + by_0 + c \mid}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Demostración 39 *Sea $\overline{v} = (a,b)$ un vector normal a r. Si Q es un punto cualquiera de r, entonces*

$$d(P,r) = \left| proy_{\,\overline{v}}\ \overrightarrow{QP} \right|$$

Supongamos que Q tiene coordenadas (x', y'). Entonces, como $Q \in r$ debe verificarse

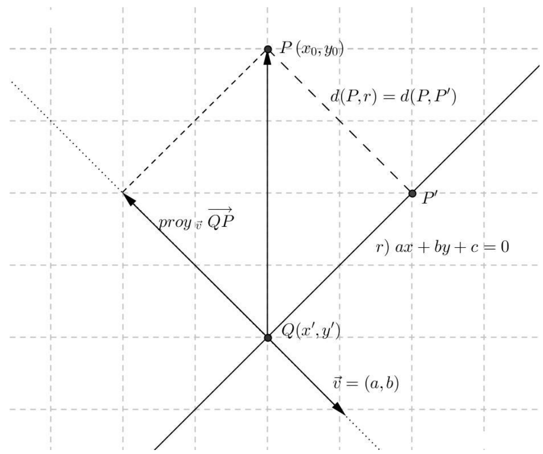
$$ax' + by' + c = 0 \Rightarrow c = -ax' - by' \tag{5.4}$$

Por otra parte, $\overrightarrow{QP} = (x_0 - x', y_0 - y')$ y $\overline{v}_0 = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$ es el versor asociado a $\overline{v}$. Luego

$$|proy_{\,\overline{v}}\ \overrightarrow{QP}| = |(\overrightarrow{QP} \times \overline{v}_0) \cdot \overline{v}_0| = \left| \frac{a(x_0 - x') + b(y_0 - y')}{\sqrt{a^2+b^2}} \right|$$

Ahora $a(x_0 - x') + b(y_0 - y') = ax_0 + by_0 - ax' - by' = ax_0 + by_0 + c$, donde la útilma igualdad surge de (5.4). Luego

$$d(P, r) = \left| proy_{\,\overline{v}}\ \overrightarrow{QP} \right| = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|.$$



5.2 Secciones cónicas

Estudiaremos en esta sección las denominadas *secciones cónicas*. Las secciones cónicas constituyen, después de las rectas, las curvas planas más simples de describir a través de una ecuación cartesiana.

El primero en introducirlas fue Apolonio de Perga, en el siglo III a.C., con el objetivo de construir curvas que permitiecen resolver los problemas de construcción de la antigua Grecia (ya no con la sóla utilización de regla y compás). Durante mucho tiempo las cónicas jugaron un papel relativamente secundario en la matemática, hasta que Kepler y posteriormente Newton con sus leyes mostraron que las órbitas de los planetas son elipses que tienen al sol como uno de sus focos. Galileo demostró que la trayectoria de un proyectil es parabólica. Actualmente se utilizan para construir espejos que reflejan la luz de forma particular, entre muchas otras aplicaciones. Desde el punto de vista de la matemática pura, las cónicas están en la base de la geometría proyectiva y la geometría algebraica moderna.

Su nombre se debe a que pueden obtenerse como intersecciones entre planos y un doble cono.

Un **doble cono recto** es una figura que se engendra al hacer girar una recta g alrededor de una recta h que la corta. La recta h se denomina *eje* del cono y las distintas posiciones de la recta g *generatrices* del cono. El punto de intersección del eje con cualquiera de las generatrices se denomina *vértice* del cono.

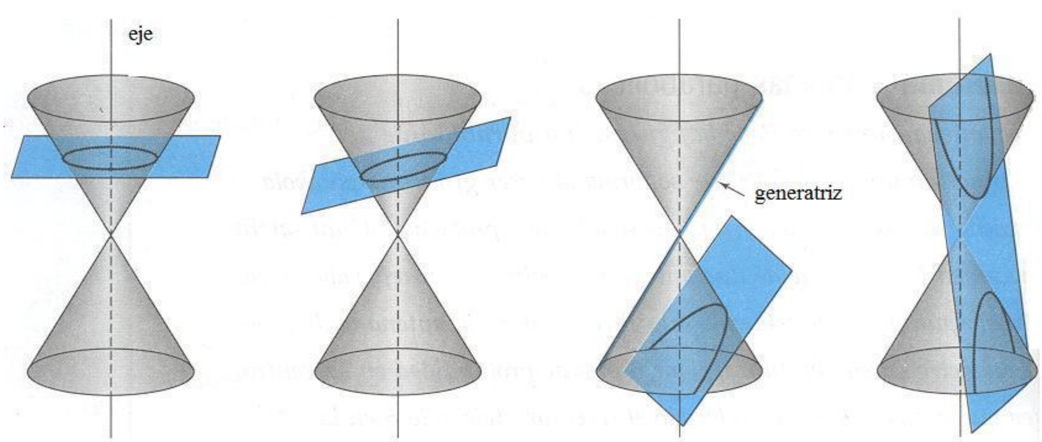
Una *sección cónica* es toda sección que se obtiene de intersecar un doble cono recto con un plano que lo corta. Según las distintas posiciones del plano de corte las secciones cónicas (o simplemente *cónicas*) reciben nombres diferentes, que damos a continuación:

(a) Si el plano es perpendicular al eje del cono y no pasa por el vértice, la cónica se denomina una *circunferencia*. En el caso especial de que el plano pase por el vértice se obtiene un punto.

(b) Si el plano no es perpendicular al eje del cono y forma con él un ángulo superior al ángulo que forman el eje del cono y cualquier generatriz, la cónica resultante se denomina una *elipse*, salvo en el caso especial que el plano pase por el vértice donde se obtiene un punto.

(c) Si el plano es paralelo a cualquiera de las generatrices del cono, la cónica resultante se denomina *parábola*, excepto si el plano pasa por el vértice, en cuyo caso se obtiene una recta.

(d) Si el ángulo que forman el plano y el eje es inferior al ángulo que forman el eje y una generatriz cualquiera, la cónica que se denomina *hipérbola*, salvo en el caso especial en que el plano pase por el vértice, en cuyo caso se obtienen dos rectas que se cortan.



(a) Circunferencia (b) Elipse (c) Parábola (d) Hipérbola

Los casos especiales que aparecen en los casos que enumeramos anteriormente (un punto, una recta o un par de rectas concurrentes) se denominan *cónicas degeneradas*.

Nos dedicaremos a caracterizar las cónicas como lugares geométricos en términos de distancia, encontraremos sus elementos distinguidos y sus ecuaciones cartesianas en un sistema dado.

5.2.1 Circunferencia

Comenzaremos recordando la definición de la circunferencia:

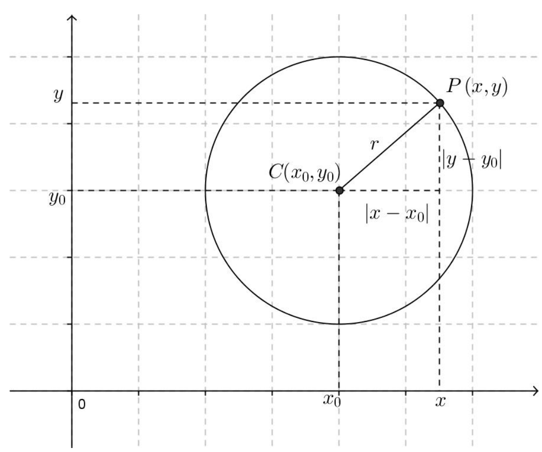
Definición 5.2.1 *Se denomina* ***circunferencia*** *al conjunto de los puntos del plano que equidistan (a una distancia $r > 0$ denominada* ***radio****) de un punto fijo del plano, denominado* ***centro*** *de la circunferencia.*

Ya hemos visto en unidades anteriores que la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ representa una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio r. Nos disponemos ahora a determinar las ecuaciones de una circunferencia centrada en un punto cualquiera del plano. Sea $C(x_0, y_0)$ un punto del plano y sea $r > 0$ un número real positivo. Sea $\mathcal{C}(C, r)$ la circunferencia de centro C y radio r. Entonces resulta:

$$Q(x, y) \in \mathcal{C}(C, r) \Leftrightarrow d(P, C) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \Leftrightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$$

Obtenemos así que la ecuación de la circunferencia de centro $C(x_0, y_0)$ y radio r es

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2} \tag{5.5}$$



Ejemplos 5.2.2 *1. La circunferencia de centro $C(1, 2)$ y radio 3 tiene ecuación*

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9.$$

2. Consideremos el lugar geométrico

$$\mathcal{C} = \{Q(x,y) : \ x^2 + 2x + y^2 + 4y + 5 = 4\}.$$

Si completamos cuadrados en la ecuación $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5 = 4$ *obtenemos:*

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + 2x = (x^2 + 2x + 1) - 1 = (x+1)^2 - 1 \\ y^2 - 4y = (y^2 - 4y + 4) - 4 = (y-2)^2 - 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5 = (x+1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + 5 = (x+1)^2 + (y-2)^2.$$

Luego $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5 = 4 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ *y por lo tanto* $\mathcal{C}$ *es la circunferencia con centro en* $C(-1,2)$ *y radio* 2.

3. Consideremos el lugar geométrico $\circ$ *dado por la ecuación* $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$. *Si completamos cuadrados, vemos que esta ecuación es equivalente a*

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 0$$

con lo cual $\circ$ *está constituido por el único punto* $P(1,1)$.

4. Consideremos ahora el lugar geométrico $\mathcal{C}$ *definido por la ecuación* $x^2+y^2-2x-2y+3 = 0$. *En este caso, si completamos cuadrados vemos que la ecuación es equivalente a*

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = -1$$

y por lo tanto $\mathcal{C}$ *es el conjunto vacío.*

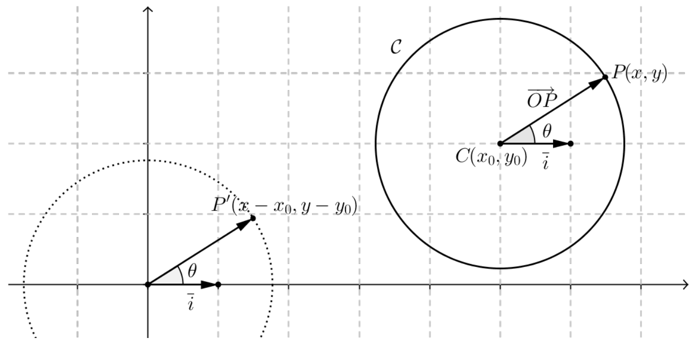
Así como hemos establecido en la primer sección las ecuaciones paramétricas de una recta en el plano, podemos encontrar ecuaciones paramétricas de las distintas secciones cónicas.

Las ecuaciones paramétricas de una curva son aquellas que describen las coordenadas de los puntos de una curva, y sólo de ellos, a través de un parámetro. Supongamos que $\mathcal{C}$ es una circunferencia centrada en el punto $C(x_0, y_0)$ y de radio r. Supongamos que un punto $P(x,y)$ es un punto genérico de la circunferencia. Entonces sabemos que sus coordenadas verifican la ecuación

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2.$$

Nos interesa ahora determinar las coordenadas (x,y) de P en función de un parámetro. Para ello consideremos el ángulo θ que el vector $\overrightarrow{CP} = (x-x_0, y-y_0)$ determina con el versor $\bar{i} = (1,0)$. Sea P' el punto tal que $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{CP}$. Entonces las coordenadas de P' son $(x-x_0, y-y_0)$ y por lo tanto

$$\cos\theta = \frac{x-x_0}{r}, \quad \sin\theta = \frac{y-y_0}{r}$$



Obtenemos que cualquier punto P sobre $\mathcal{C}$ puede obtenerse como

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = x_0 + r\cos\theta \\ y = y_0 + r\sin\theta \end{array}\right. , \quad \theta \in [0, 2\pi]} \tag{5.6}$$

Las ecuaciones (5.6) se denominan **ecuaciones paramétricas** de $\mathcal{C}$. Es claro que podríamos hacer variar el parámetro en todo $\mathbb{R}$ en cuyo caso estaríamos representando cada punto con una cantidad infinita de parámetros. Observemos que en (5.6) los parámetros $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$ describen el punto P_0 de coordenadas $(x_0 + r, y_0)$. Cualquier otro punto puede describirse con un único parámetro. Así, el parámetro $\theta = \frac{\pi}{2}$ describe el punto $P_1(x_0, y_0 + r)$, el parámetro $\theta = \pi$ describe el punto $P_2(x_0 - r, y_0)$ y el parámetro $\theta = \frac{3}{2}\pi$ describe el punto $P_3(x_0, y_0 - r)$.

Si hacemos variar θ en algún subintervalo de $[0, 2\pi]$, podemos describir un arco de circunferencia. Por ejemplo la ecuación (5.6) con $\theta \in [0, \pi/2]$ describe el arco entre P_0 y P_1. Si hacemos variar $\theta \in [\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$, describimos la semicircunferencia de P_1 a P_3.

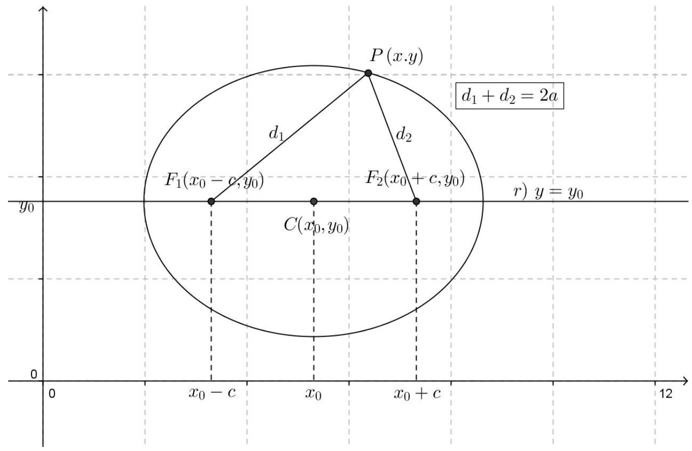
5.2.2 Elipse

Definición 5.2.3 *Dados dos puntos distintos F_1 y F_2 del plano y un número real positivo a tal que $2a > d(F_1, F_2)$, se denomina **elipse** de **focos** F_1 y F_2 al lugar geométrico de los puntos P del plano tales que*

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

*El punto medio del segmento que determinan los focos se denomina **centro** de la elipse. La recta determinada por los focos de la elipse se denomina **eje focal**. Denotaremos por $\mathcal{E}(F_1, F_2, a)$ la elipse de focos F_1 y F_2 y distancia $2a$.*

Así como podemos graficar una circunferencia tomando una cuerda de longitud r y haciéndola girar alrededor de un punto, es fácil contruir mecánicamente una elipse para darnos una idea de cómo es su gráfica. Podemos por ejemplos fijar dos clavos a una superficie (que representarán los focos) y tomar un hilo de longitud $2a$. Fijamos uno de los extremos del hilo a uno de los clavos y el otro extremo al otro clavo. Si tomamos un lapiz y realizamos un dibujo de modo que el hilo siempre quede tenso, obtendremos una figura como la siguiente. Esta es la elipse con los focos en los lugares en que fijamos los clavos.



Comenzaremos encontrando las ecuaciones cartesianas de una elipse que tenga su eje focal paralelo al eje x o al eje y.

Comencemos analizando el primer caso. Supongamos que F_1 y F_2 se encuentran sobre la recta de ecuación $y = y_0$ paralela al eje x. Sea $C(x_0, y_0)$ el centro de la elipse, esto es, el punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$. Luego, si

$$c = d(C, F_1) = d(C, F_2) > 0,$$

las coordenadas de los focos resultan

$$F_1(x_0 - c, y_0), \quad F_2(x_0 + c, y_0).$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned}
P(x,y) \in \mathcal{E}(F_1, F_2, a) \quad &\Leftrightarrow \quad d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-(x_0-c))^2 + (y-y_0)^2} + \sqrt{(x-(x_0+c))^2 + (y-y_0)^2} = 2a \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{((x-x_0)-c)^2 + (y-y_0)^2} = 2a - \sqrt{((x-x_0)+c)^2 + (y-y_0)^2} \\
&\Leftrightarrow \quad ((x-x_0)-c)^2 + (y-y_0)^2 = \left(2a - \sqrt{((x-x_0)+c)^2 + (y-y_0)^2}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad ((x-x_0)-c)^2 + (y-y_0)^2 = \\
&\qquad\quad 4a^2 - 4a\sqrt{((x-x_0)+c)^2 + (y-y_0)^2} + ((x-x_0)+c)^2 + (y-y_0)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad (x-x_0)^2 - 2c(x-x_0) + c^2 = \\
&\qquad\quad 4a^2 - 4a\sqrt{((x-x_0)+c)^2 + (y-y_0)^2} + (x-x_0)^2 + 2c(x-x_0) + c^2.
\end{aligned}$$

Reordenando y simplificando, obtenemos

$$
\begin{aligned}
P(x,y) \in \mathcal{E}(F_1,F_2,a) \quad &\Leftrightarrow \quad 4a\sqrt{((x-x_0)+c)^2+(y-y_0)^2} = 4a^2+4c(x-x_0) \\
&\Leftrightarrow \quad a\sqrt{((x-x_0)+c)^2+(y-y_0)^2} = a^2+c(x-x_0) \\
&\Leftrightarrow \quad a^2\left[((x-x_0)+c)^2+(y-y_0)^2\right] = \left[a^2+c(x-x_0)\right]^2 \\
&\Leftrightarrow \quad a^2(x-x_0)^2+2a^2c(x-x_0)+a^2c^2+a^2(y-y_0)^2 = a^4+2a^2c(x-x_0)+c^2(x-x_0)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad (a^2-c^2)(x-x_0)^2+a^2(y-y_0)^2 = a^2(a^2-c^2)
\end{aligned}
$$

Definamos $b=\sqrt{a^2-c^2}$, (observemos que $a^2-c^2>0$, justificar por qué), tenemos

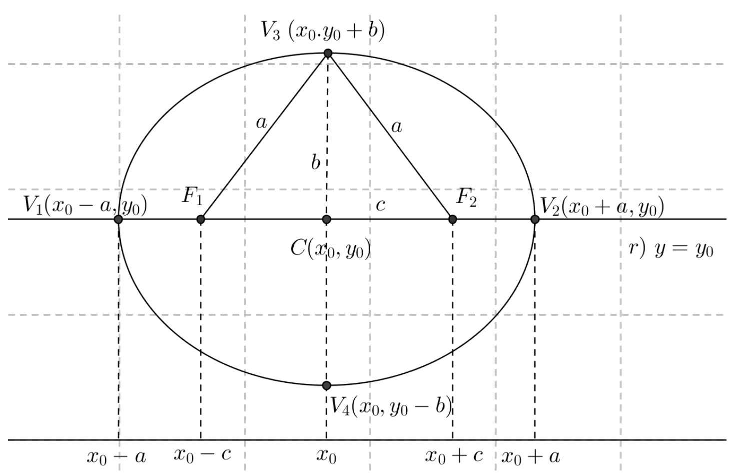
$$P(x,y) \in \mathcal{E}(F_1,F_2,a) \Leftrightarrow b^2(x-x_0)^2+a^2(y-y_0)^2 = a^2b^2$$

dividiendo ambos miembros por a^2b^2 obtenemos finalmente

$$\boxed{P(x,y) \in \mathcal{E}(F_1,F_2,a) \Leftrightarrow \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1}$$

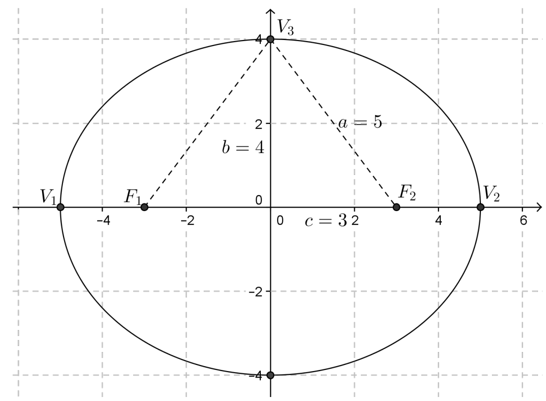
Analicemos los significados geométricos de a, b y c.

- c es la distancia del centro de la elipse a cada uno de los focos. Esto es, $2c=d(F_1,F_2)$.
- a es tal que cada punto de la elipse verifica $d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$ y recíprocamente. Esto implica que si $C(x_0,y_0)$ es el centro de la elipse, los puntos $V_1(x_0-a,y_0)$ y $V_2(x_0+a,y_0)$ son puntos de la elipse, que se denominan **vértices** de la elipse. Son los puntos donde la distancia al centro es máxima.
- $b^2=a^2-c^2$, lo que implica que los puntos $V_3(x_0,y_0+b)$ y $V_4(x_0,y_0-b)$ son puntos de la elipse también denominados **vértices**, y son los puntos donde la distancia al centro es mínima.
- Observemos que siempre se verifica $a>b$ y $a>c$.



Ejemplos 5.2.4 *1. Consideremos la elipse de ecuación* $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$*. Entonces la elipse está centrada en el origen* $O(0,0)$*,* $a^2=25$ *y* $b^2=16$*, con lo cual* $a=5$*,* $b=4$ *y* $c=\sqrt{a^2-b^2}=3$*.*

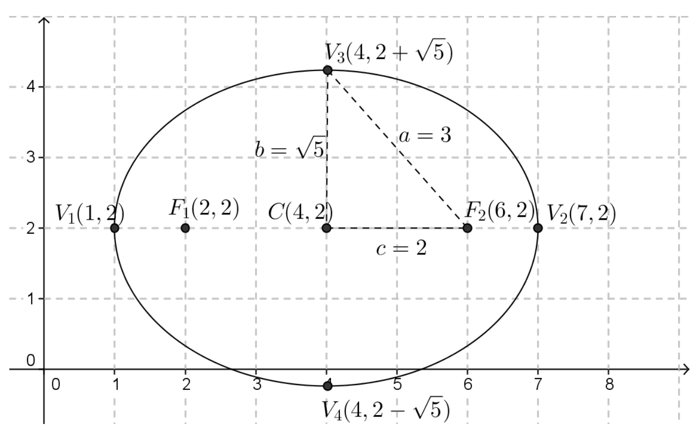
Luego los focos de la elipse son $F_1(-3,0)$ *y* $F_2(3,0)$ *y los vértices son* $V_1(-5,0)$*,* $V_2(5,0)$*,* $V_3(0,4)$ *y* $V_4(0,-4)$*. Con esta información estamos en condiciones de realizar la gráfica de la elipse:*



2. *Queremos encontrar la elipse de focos* $F_1(2,2)$*,* $F_2(6,2)$ *y* $a=3$*. El punto medio de* $\overline{F_1F_2}$ *es* $C(4,2)$*. Luego* $c=d(C,F_1)=d(C,F_2)=2$ *y en consecuencia* $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{5}$*. Luego la ecuación de la elipse es*

$$\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{5}=1$$

y los vértices son $V_1(1,2)$*,* $V_2(7,2)$*,* $V_3(4,2+\sqrt{5})$ *y* $V_4(4,2-\sqrt{5})$*.*



Nota 5.2.5 *Si la elipse $\mathcal{E}(F_1, F_2, a)$ tiene sus focos sobre una recta paralela al eje y y centro en el punto $C(x_0, y_0)$, entonces de manera análoga a lo hecho anteriormente, concluimos que la ecuación de la elipse es*

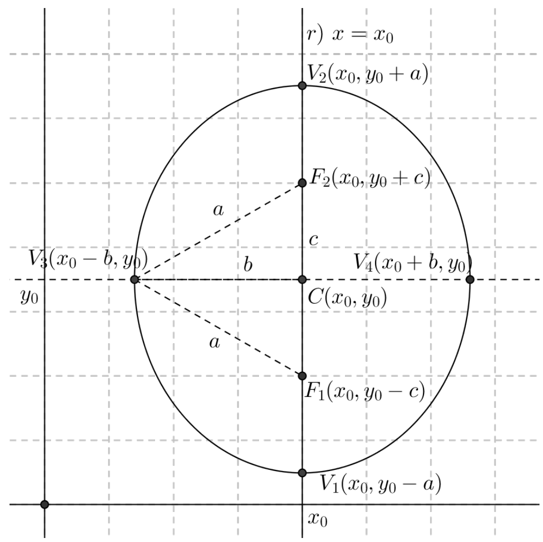
$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1}$$

donde si $c = d(C, F_1)$,

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} < a.$$

Tenemos además:

- *Los focos son $F_1(x_0, y_0 - c)$ y $F_2(x_0, y_0 + c)$.*
- *Los vértices son $V_1(x_0, y_0 - a)$, $V_2(x_0, y_0 + a)$, $V_3(x_0 - b, y_0)$ y $V_4(x_0 + b, y_0)$.*



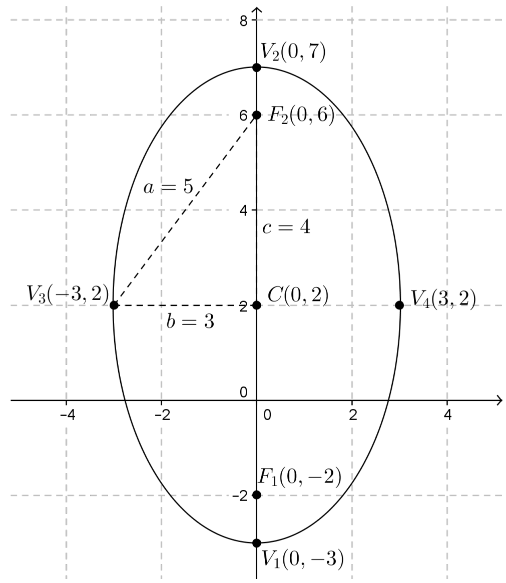
Ejemplos 5.2.6 *1. Consideremos el lugar geométrico*

$$\mathcal{E} = \{Q(x, y) : 25x^2 + 9y^2 - 36y - 189 = 0\}.$$

Comenzamos completando cuadrados en el término $9y^2 - 36y$. Tenemos: $9y^2 - 36y = 9(y^2 - 4y) = 9(y^2 - 4y + 4 - 4) = 9((y - 2)^2 - 4) = 9(y - 2)^2 - 36$. Luego

$$\begin{aligned} 25x^2 + 9y^2 - 36y - 189 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 25x^2 + 9(y - 2)^2 - 36 - 189 = 0 \Leftrightarrow 25x^2 + 9(y - 2)^2 = 225 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{9} + \frac{(y - 2)^2}{25} = 1 \end{aligned}$$

Concluimos que $\mathcal{E}$ es una elipse de centro $C(0, 2)$, con $a = 5$ y $b = 3$, con lo cual $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$. Luego $\mathcal{E}$ es una elipse vertical con focos $F_1(0, -2)$ y $F_2(0, 6)$ y vértices $V_1(0, -3)$, $V_2(0, 7)$, $V_3(-3, 2)$ y $V_4(2, 3)$.



Encontraremos ahora las ecuaciones paramétricas de la elipse $\mathcal{E}(F_1, F_2, a)$. Supongamos que $\mathcal{E}$ está centrada en el punto $C(x_0, y_0)$, su eje focal es paralelo al eje x y sus ecuaciones son

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1. \tag{5.7}$$

Consideremos ahora el punto $P'(x', y')$, donde

$$x' = \frac{x-x_0}{a}, \quad y' = \frac{y-y_0}{b}$$

Entonces las coordenadas de P' verifican $x'^2 + y'^2 = 1$, o sea, P' está en una circunferencia centrada en el origen y de radio 1.

Luego $x' = \cos\theta,\ y' = \sin\theta$, y por lo tanto tenemos

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = x_0 + a\cos\theta \\ y = y_0 + b\sin\theta \end{array}\right. , \quad \theta \in [0, 2\pi].} \tag{5.8}$$

Recíprocamente, si (x, y) son las coordenadas de un punto que pueden escribirse como en (5.8), el punto $P(x, y)$ que describe verifica $x - x_0 = a\cos\theta$, $y - y_0 = b\sin\theta$ y por lo tanto

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \frac{a^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{b^2\sin^2\theta}{b^2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

de donde $P \in \mathcal{E}$. De manera análoga, puede verse que las ecuaciones paramétricas de una elipse con eje focal paralelo al eje y son

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = x_0 + b\cos\theta \\ y = y_0 + a\sin\theta \end{array}\right. , \quad \theta \in [0, 2\pi]}$$

5.2.3 Hipérbola

Definición 5.2.7 *Dados dos puntos distintos del plano F_1 y F_2 y un número real positivo a tal que $2a < d(F_1, F2)$, se denomina **hipérbola** de focos F_1 y F_2 al lugar geométrico de los puntos P del plano que verifican*

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

*El punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$ se denomina **centro** de la hipérbola y la recta que contiene a los focos se denomina **eje focal**.*

Hallaremos las ecuaciones de las hipérbolas con eje focal paralelo al eje x o al eje y.

Si $C(x_0, y_0)$ es el centro de la hipérbola y $c = d(C, F_1) = d(C, F_2)$, resulta en este caso $c > a$. Si denotamos $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, realizando los mismos pasos que para obtener la ecuación de la elipse, obtenemos que la ecuación de una hipérbola $\mathcal{H}$ de focos F_1, F_2 y distancia a es:

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1} \tag{5.9}$$

si el eje focal es la recta $r)\ y = y_0$ (o sea es horizontal), y

$$\boxed{\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1} \tag{5.10}$$

si el eje focal es vertical, o sea, es la recta $r)\ x = x_0$.

Interpretación geométrica de a, b y c:

Sea $\mathcal{H}(F_1, F_2, a)$ la hipérbola de focos F_1 y F_2 y distancia $2a$. Supondremos que el eje focal es la recta $r)\ y = y_0$ paralela al eje x (si el eje focal es paralelo al eje y el desarrollo que haremos a continuación es análogo).

Si $C(x_0, y_0)$ es el centro de la hipérbola, entonces

$$\boxed{c = d(C, F_1) = d(C, F_2)},$$

con lo cual los focos son $F_1(x_0 - c, y_0)$ y $F_2(x_0 + c, y_0)$.

Sean V_1 y V_2 los puntos de intersección de la hipérbola con el eje focal más cercanos a F_1 y F_2 respectivamente. V_1 y V_2 se denominan **vértices** de la hipérbola. Como V_1 es un punto de $\mathcal{H}$, se debe verificar $d(V_1, F_2) - d(V_1, F_1) = 2a$.

Pero $d(V_1, F_2) = d(V_1, C) + d(C, F_2) = d(V_1, C) + c$ y $d(V_1, F_1) = d(C, F_1) - d(C, V_1) = c - d(V_1, C)$. Luego

$$2a = d(V_1, F_2) - d(V_1, F_1) = d(V_1, C) + c - (c - d(V_1, C)) = 2d(V_1, C) \Rightarrow \boxed{d(V_1, C) = a}$$

De manera análoga se concluye que $d(V_2, C) = a$ con lo cual los vértices son $V_1(x_0 - a, y_0)$ y $V_2(x_0 + a, y_0)$.

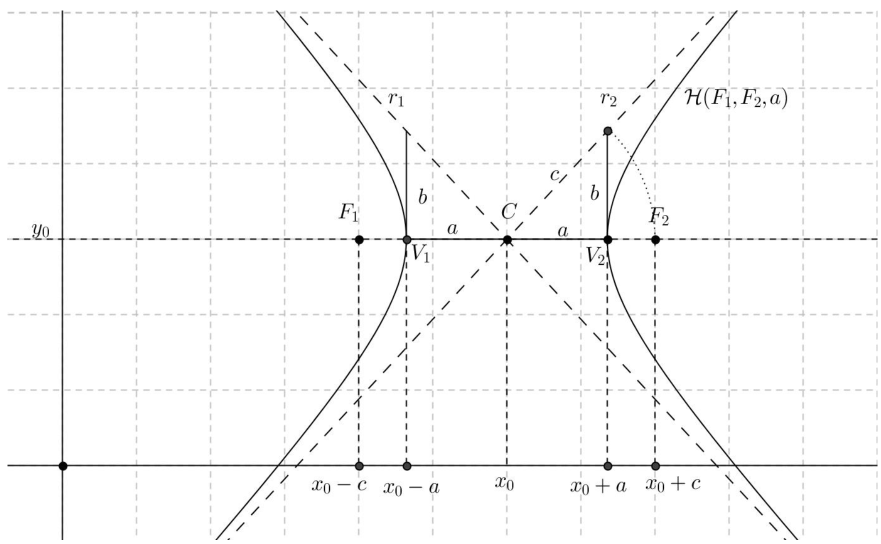
Pongamos ahora

$$\boxed{b = \sqrt{c^2 - a^2}}.$$

Tracemos por V_1 y por V_2 segmentos perpendiculares al eje focal de longitud b. Si trazamos las rectas r_1 y r_2 que pasan por C y por los extremos de estos segmentos, obtenemos que tienen pendientes $-\frac{b}{a}$ y $\frac{b}{a}$ respectivamente y por lo tanto sus ecuaciones son

$$\boxed{r_1)\ y = -\frac{b}{a}(x - x_0) + y_0, \quad r_2)\ y = \frac{b}{a}(x - x_0) + y_0}$$

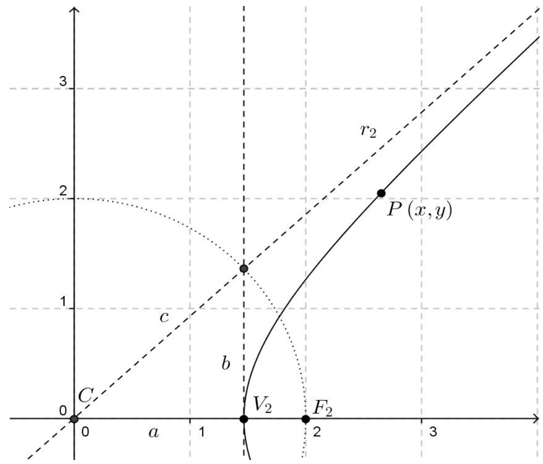
Entonces estas rectas son las **asíntotas** de la hipérbola. O sea que a medida que los puntos de la hipérbola se alejan del centro en cualquiera de las cuatro direcciones, éstos se acercan tanto como queramos a estas rectas, sin nunca tocarlas.



Probaremos este hecho para el caso particular que la hipérbola esté centrada en el origen, a los efectos de simplificar los cálculos (puede intentarse la prueba general!).

Sea $P(x, y)$ un punto de la hipérbola con $x > 0$, $y > 0$ como se muestra en la figura. Entonces

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$



Observemos que la ecuación general de r_2 cuando C es el origen es $-bx + ay = 0$. Entonces

$$d(P, r_2) = \frac{|-bx+ay|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\left|-bx + ab\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\left|-bx + b\sqrt{x^2-a^2}\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\left|\sqrt{x^2-a^2}-x\right|.$$

Ahora bien, P se aleja de C a medida que su abscisa x crece. Como tenemos

$$\lim_{x\to\infty}\left|\sqrt{x^2-a^2}-x\right| = \lim_{x\to\infty}\left|\frac{(\sqrt{x^2-a^2}-x)(\sqrt{x^2-a^2}+x)}{\sqrt{x^2-a^2}+x}\right| = \lim_{x\to\infty}\left|\frac{x^2-a^2-x^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}\right| = 0$$

resulta que la distancia $d(P, r_2)$ tiende a 0 cuando P se aleja de C, como queríamos ver.

En el caso de que la hipérbola tenga eje focal paralelo al eje y, el análisis es análogo, pero las asíntotas tienen pendientes $-\frac{a}{b}$ y $\frac{a}{b}$. Analizaremos esto más adelante con un ejemplo.

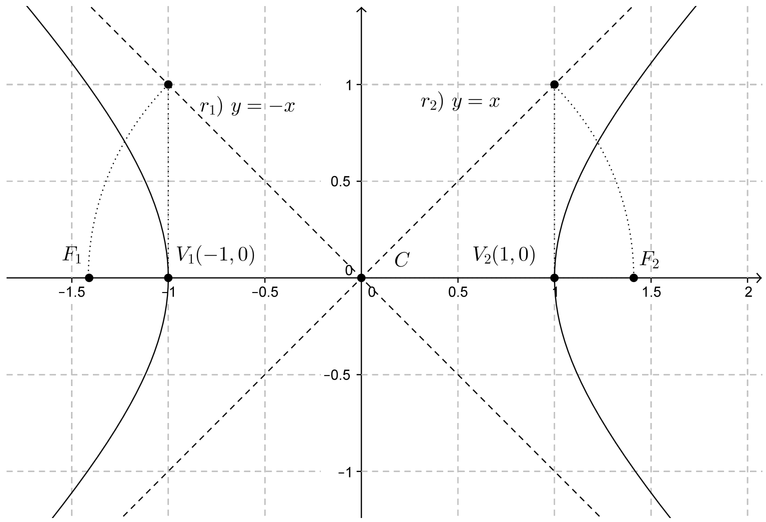
Ejemplos 5.2.8 *1. Sea $\mathcal{H}$ la hipérbola de focos $F_1(\sqrt{2}, 0)$ y $F_2(-\sqrt{2}, 0)$ y $a = 1$.*

El centro de $\mathcal{H}$ es $C(0,0)$, el punto medio de $\overline{F_1F_2}$, y por lo tanto $c = d(C, F_1) = \sqrt{2}$. Luego $b = \sqrt{c^2-a^2} = 1$ y como el eje focal de $\mathcal{H}$ es el eje x, la ecuación de $\mathcal{H}$ es

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Los vértices son $V_1(-1,0)$ y $V_2(1,0)$ y las asíntotas son las rectas

$$r_1)\ y = -x, \quad r_2)\ y = x.$$



2. *Consideremos el lugar geométrico*

$$\mathcal{H} = \{Q(x,y) : 16x^2 + 32x - 9y^2 + 18y - 137 = 0\}.$$

Completando cuadrados tenemos

$$16x^2+32x = 16(x^2+2x+1-1) = 16(x+1)^2-16;\;\; -9y^2+18y = -9(y^2-2y+1-1) = -9(y-1)^2+9.$$

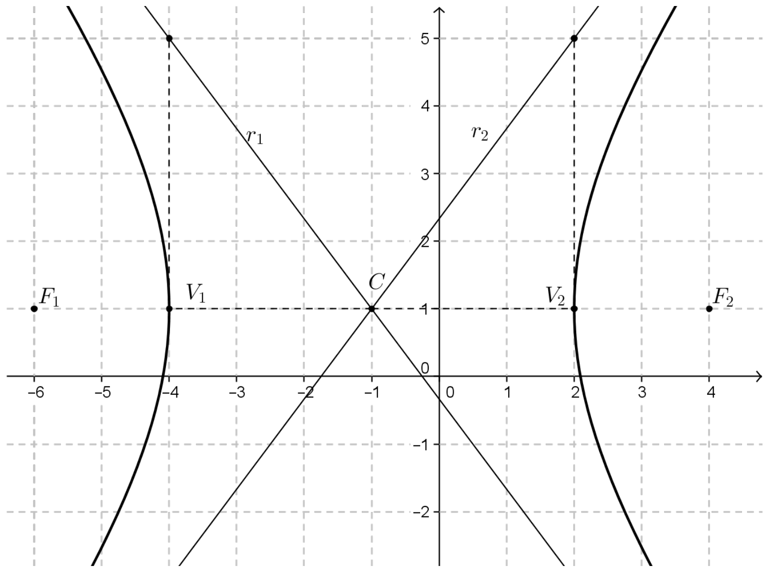
Luego

$$\begin{aligned} 16x^2 + 32x - 9y^2 + 18y - 137 = 0 &\Leftrightarrow 16(x+1)^2 - 16 - 9(y-1)^2 + 9 - 137 = 0 \\ &\Leftrightarrow 16(x+1)^2 - 9(y-1)^2 = 144 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1 \end{aligned}$$

Luego $\mathcal{H}$ *es una hipérbola con centro en* $C(-1,1)$ *y eje focal paralelo al eje* x, $r)\ y = 1$. *Además* $a^2 = 9$ *y* $b^2 = 16$ *con lo cual* $a = 3$, $b = 4$ *y* $c = \sqrt{a^2+b^2} = 5$.

Concluimos entonces que los focos de $\mathcal{H}$ *son* $F_1(4,1)$ *y* $F_2(-6,1)$ *y los vértices son* $V_1(-4,1)$ *y* $V_2(2,1)$. *Las asíntotas son* r_1 *de ecuación* $y = -\frac{4}{3}(x+1) - 1$ *y* r_2 *de ecuación* $y = \frac{4}{3}(x+1) - 1$.

La gráfica de $\mathcal{H}$ *es:*

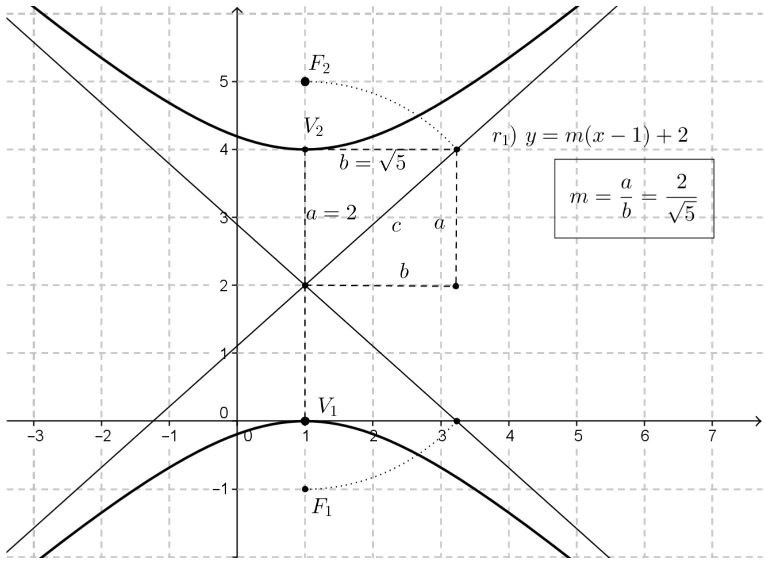


3. *Consideremos la hipérbola $\mathcal{H}$ de ecuación*

$$\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{5} = 1.$$

En este caso se trata de una hipérbola de centro $C(1,2)$ y eje focal $r)\ x = 1$ paralelo al eje y. Tenemos además $a^2 = 4$, $b^2 = 5$ con lo cual $a = 2$, $b = \sqrt{5}$ y $c = \sqrt{4+5} = 3$. Luego los focos de $\mathcal{H}$ son $F_1(1,-1)$ y $F_2(1,5)$ y los vértices son $V_1(1,0)$ y $V_2(1,4)$. La asíntotas son r_1 de ecuación $y = -\frac{2}{\sqrt{5}}(x-1)+2$ y r_2 de ecuación $y = \frac{2}{\sqrt{5}}(x-1)+2$.

La gráfica de $\mathcal{H}$ es



4. *Consideremos el lugar geométrico $\mathcal{H}$ representado por la ecuación $2x^2 - y^2 - 4x + 4y - 2 = 0$. Si completamos cuadrados, vemos que la ecuación puede ser escrita como*

$$2(x-1)^2 - (y-2)^2 = 0.$$

Los puntos que la satisfacen son aquellos cuyas coordenadas verifican $2(x-1)^2 = (y-2)^2$, o sea

$$x - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(y-2) \quad o \quad x - 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(y-2).$$

Por lo tanto $\mathcal{H}$ es la unión de estas dos rectas, que se intersecan en el punto $P(1,2)$.

Determinaremos ahora las ecuaciones paramétricas de la hipérbola. Para ello necesitaremos de las funciones hiperbólicas. Para cada $t \in \mathbb{R}$, el **coseno hiperbólico** de t y el **seno hiperbólico** se definen como

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Es fácil verificar que el coseno hiperbólico es una función par y que $Im(\cosh) = [1, +\infty)$. Por otra parte, el seno hiperbólico es una función impar y $Im(\sinh) = \mathbb{R}$.

Además vale la relación

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$$

Consideremos entonces la hipérbola $\mathcal{H}$ de ecuación

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Luego $\mathcal{H}$ es una hipérbola con eje focal paralelo al eje x. Descompondremos a $\mathcal{H}$ como

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \cup \mathcal{H}^-$$

donde $\mathcal{H}^+ = \mathcal{H} \cap \{P(x,y) : x > x_0\}$ y $\mathcal{H}^- = \mathcal{H} \cap \{P(x,y) : x < x_0\}$.

Sea $P(x,y) \in \mathcal{H}^+$. Como $Im(\sinh) = \mathbb{R}$, existirá un número real t tal que $\dfrac{y-y_0}{b} = \sinh t$. Observemos que entonces

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1 + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 + \sinh^2 t = \cosh^2 t$$

y como $(x-x_0) > 0$, resulta

$$\frac{x-x_0}{a} = \cosh\, t \tag{5.11}$$

Concluimos que los puntos de $\mathcal{H}^+$ pueden parametrizarse como

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + a\cosh\, t \\ y = y_0 + b\sinh\, t \end{cases} , t \in \mathbb{R}}$$

y recíprocamente, dado un $t \in \mathbb{R}$ cualquiera estas ecuaciones siempre desciben un punto de $\mathcal{H}^+$.

Si hubiesemos tomado $P(x,y) \in \mathcal{H}^-$, tendríamos comparando con (5.11)

$$\frac{x-x_0}{a} = -\cosh\, t$$

y por lo tanto las ecuaciones paramétricas de $\mathcal{H}^-$ son

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 - a\cosh\, t \\ y = y_0 + b\sinh\, t \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}}.$$

Si ahora la ecuación de $\mathcal{H}$ fuese

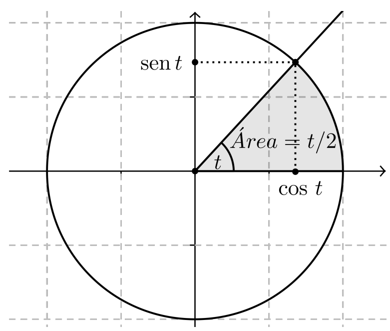
$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$$

definimos $\mathcal{H}^+ = \mathcal{H} \cap \{P(x,y) : y > y_0\}$ y $\mathcal{H}^- = \mathcal{H} \cap \{P(x,y) : y < y_0\}$ y parametrizamos

$$\boxed{\mathcal{H}^+ \ \begin{cases} x = x_0 + b\sinh\, t \\ y = y_0 + a\cosh\, t \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}, \qquad \mathcal{H}^- \ \begin{cases} x = x_0 + b\sinh\, t \\ y = y_0 - a\cosh\, t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.}$$

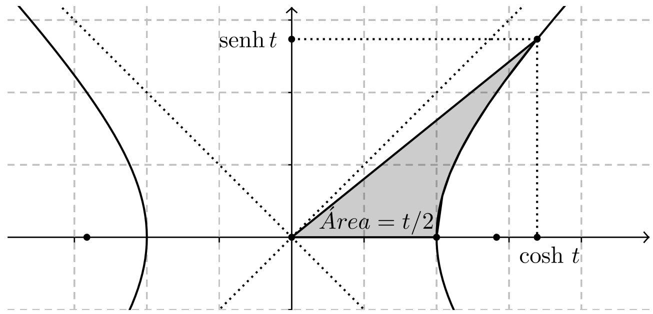
La interpretación geométrica del parámetro t es más compleja y simplemente indicaremos cómo se obtiene. No intentaremos una prueba dado que requiere de herramientas que escapan a los contenidos de este curso. Las **funciones hiperbólicas** pueden definirse de manera similar que como se definen las funciones trigonométricas. Recordemos que para definir las funciones trigonométricas se utiliza la denominada **circunferencia trigonométrica**, es decir, la circunferencia centrada en el origen y de radio 1, y cuya ecuación por lo tanto es $x^2 + y^2 = 1$. Si θ es un ángulo y $P(x, y)$ es un punto de la circunferencia tal que el ángulo orientado en el sentido contrario a las agujas del reloj que forma el vector $\overrightarrow{OP}$ con el versor $\bar{i}$, entonces $\cos\theta = x$ y $\sin\theta = y$ (observemos que utilizamos estas fórmulas para parametrizar la circunferencia).

Otra forma de describir las funciones trigonométricas es a través del área. Supongamos que tenemos un número real t y queremos determinar cos t y sin t. No pensemos por el momento en t como un ángulo. Tomemos la circunferencia trigonométrica y marquemos un punto $P(x, y)$ sobre ella de modo que el área que queda determinada en el sector circular delimitado por el eje positivo de las x con la semirrecta $\overrightarrow{OP}$ sea $t/2$. Supongamos ahora que definimos cos $t = x$ y sin $t = y$.



Como el área de un sector circular de radio r correpondiente a un ángulo t (en radianes) es $\frac{t}{2}r^2$, en nuestro caso particular vemos que el seno y el coseno como los acabamos de definir coinciden con las definiciones que ya conocíamos.

Sin embargo, esto debiera motivarnos de alguna manera a definir como sigue las funciones hiperbólicas. Consideremos ahora la hipérbola de ecuación $x^2 - y^2 = 1$. Consideremos un número real t cualquiera y marquemos un punto $P(x, y)$ con $x > 0$ sobre la hipérbola de modo que el área de la región comprendida entre la gráfica de la hipérbola y la asíntota sea $|t/2|$. Si $t \geq 0$ elegimos un punto con $y \geq 0$ y si $t < 0$ elegimos un punto con $y < 0$. Entonces definimos cosh $t = x$ y sinh $t = y$.



Es bastante difícil demostrar que en efecto

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

pero puede hacerse utilizando elementos de cálculo elemental (una prueba completa puede verse en "Shankar, K. *Deriving the definition of the hyperbolic trigonometric functions and their identities*", 2011, www.kaushikshankar.com). Sin embargo, de como hemos definido las funciones hiperbólicas, resulta evidente que la función coseno hiperbólico es par y que la función seno hiperbólico es impar, que $\cosh 0 = 1$ y $\sinh 0 = 0$. También, como $P(x, y)$ es un punto de la hipérbola, debe verificarse

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

y es inmediato que esta hipérbola puede parametrizarse como

$$\begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sinh t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si ahora consideramos la hipérbola de ecuación

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

y definimos $x' = \dfrac{x - x_0}{a}$, $y' = \dfrac{y - y_0}{b}$, resulta claro que $P'(x', y')$ pertenece a la hipérbola de ecuación $x^2 - y^2 = 1$ y por lo tanto existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $x' = \cosh t$, $y' = \sinh t$. Despejando x e y obtenemos las ecuaciones paramétricas que ya habíamos encontrado.

5.2.4 Parábola

Definición 5.2.9 *Dados una recta r y un punto F del plano tal que $F \notin r$ se denomina* ***parábola*** *de* ***directriz*** *r y* ***foco*** *F al lugar geométrico de los puntos P del plano que equidistan de F y r, esto es, tales que*

$$d(P, F) = d(P, r).$$

Denotaremos por $\mathcal{P}(F,r)$ la parábola de directriz r y foco F.

Encontraremos las ecuaciones de $\mathcal{P}$ en el caso que la directriz sea paralela al eje x o al eje y.

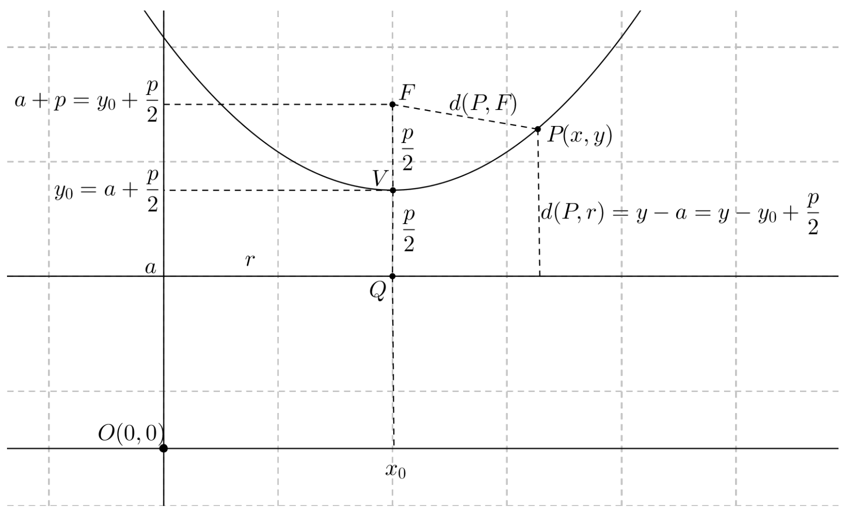
Comencemos analizando el caso que la directriz sea paralela al eje x, o sea, tiene ecuación $r)$ $y=a$. Supongamos que el foco tiene coordenadas $F(x_0,y')$. Analizaremos dos casos, que $y'>a$ y que $y'<a$ (es decir, que F esté *sobre* o *debajo* de la directriz). Fijemos

$$p=d(F,r)$$

y sea $Q(x_0,a)\in r$ el pie de la perpendicular a r por F. O sea que $d(F,Q)=p$.

<u>Caso I:</u> $y'>a$.

En este caso $y'=a+p$. Sea $V(x_0,y_0)$ con $y_0=a+\frac{p}{2}$ el punto medio de $\overline{FQ}$.



Entonces $d(V,F)=d(V,r)=\frac{p}{2}$. Luego $V\in\mathcal{P}(F,r)$ y se denomina el **vértice** de la parábola.

Observemos que además $a=y_0-\frac{p}{2}$ y las coordenadas del foco F son $(x_0,y_0+\frac{p}{2})$. Por otra parte dado $P(x,y)$, resulta claro que $y>a$ (en caso que $y\le a$ es evidente que $d(P,F)>d(P,r)$). Por lo tanto $d(P,r)=y-a=y-y_0+\frac{p}{2}$ y entonces

$$\begin{aligned}
P\in\mathcal{P}(d,r) &\Leftrightarrow\; d(P,r)=d(P,F)\Leftrightarrow y-y_0+\frac{p}{2}=\sqrt{(x-x_0)^2+\Big(y-y_0-\frac{p}{2}\Big)^2}\\
&\Leftrightarrow\; (y-y_0)^2+p(y-y_0)+\frac{p^2}{4}=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-p(y-y_0)+\frac{p^2}{4}\\
&\Leftrightarrow\; 2p(y-y_0)=(x-x_0)^2
\end{aligned}$$

Concluimos que la ecuación de la parábola $\mathcal{P}(F,r)$ es

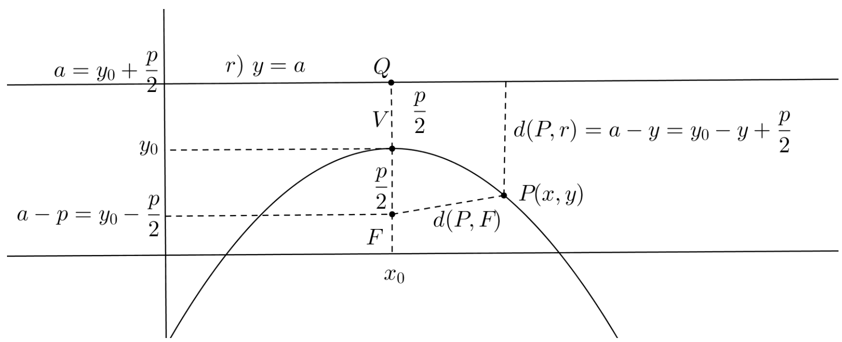
$$\boxed{(x-x_0)^2=2p(y-y_0)} \tag{5.12}$$

Caso II: $y' < a$.

En este caso el foco se encuentre debajo de la directriz, como se muestra en la figura e $y' = a - p$. Pongamos ahora $V(x_0, y_0)$ con $y_0 = a - \frac{p}{2}$. Entonces nuevamente $V \in \mathcal{P}(F, r)$ y $a = y_0 + \frac{p}{2}$ con lo cual $y' = y_0 - \frac{p}{2}$. En este caso, dado un punto $P(x, y)$ en $\mathcal{P}$ resulta $d(P, r) = a - y = y_0 - y + \frac{p}{2}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{P}(d, r) \quad &\Leftrightarrow \quad d(P, r) = d(P, F) \Leftrightarrow y_0 - y + \frac{p}{2} = \sqrt{(x - x_0)^2 + \left(y - y_0 + \frac{p}{2}\right)^2} \\ &\Leftrightarrow \quad (y_0 - y)^2 + p(y_0 - y) + \frac{p^2}{4} = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + p(y - y_0) + \frac{p^2}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad -2p(y - y_0) = (x - x_0)^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)} \tag{5.13}$$



Ejemplos 5.2.10 *1. En el curso de Cálculo I, se ha visto que la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola. De hecho veremos que la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ es siempre la ecuación de una parábola. Basta completar cuadrados para distinguir quiénes son x_0, y_0 y p en este caso. Trabajaremos con un ejemplo concreto.*

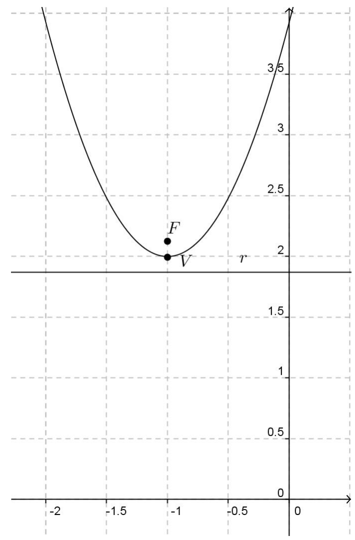
Consideremos el lugar geométrico

$$\mathcal{P}\{R(x, y) : y = 2x^2 + 4x + 4\}$$

Comenzamos completando cuadrados y tenemos $2x^2 + 4x = 2(x^2 + 2x) = 2(x^2 + 2x + 1 - 1) = 2(x + 1)^2 - 2$. Luego

$$\begin{aligned} y = 2x^2 + 4x + 4 \quad &\Leftrightarrow \quad y = 2(x + 1)^2 - 2 + 4 \Leftrightarrow y - 2 = 2(x + 1)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(y - 2) = (x + 1)^2 \end{aligned}$$

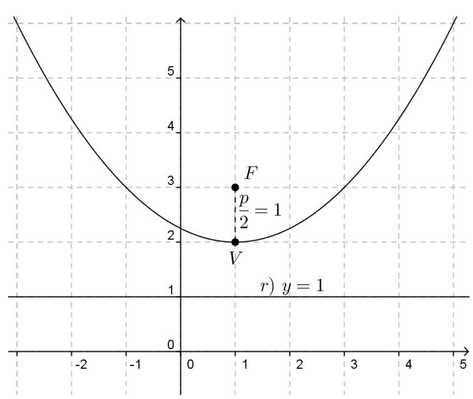
Concluimos que $\mathcal{P}$ es una parábola con $2p = \frac{1}{2}$, o sea $p = \frac{1}{4}$, de vértice $V(-1, 2)$ y con directriz r paralela al eje x. Recordando que la ecuación de r es $y = a = y_0 - \frac{p}{2}$ concluimos que la directriz es $r)\ y = \frac{15}{8}$, y el foco es $F(-1, 2 + \frac{1}{8})$, o sea $F(-1, \frac{17}{8})$. La gráfica de $\mathcal{P}$ es la que se muestra a continuación:



2. *Queremos encontrar las ecuaciones de la parábola $\mathcal{P}$ de foco $F(1, 3)$ y directriz $r)\ y = 1$. Entonces $p = d(F, r) = 2$ y por lo tanto el vértice de la parábola es $V(1, 2)$ y su ecuación es*

$$(x-1)^2 = 4(y-2).$$

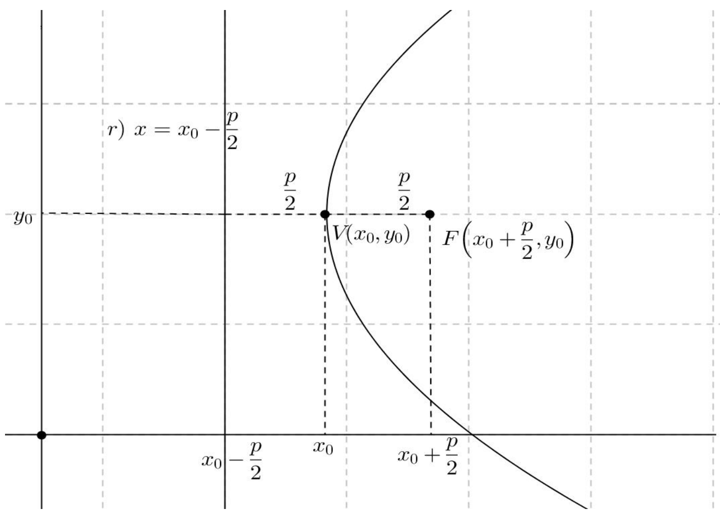
Su gráfica es

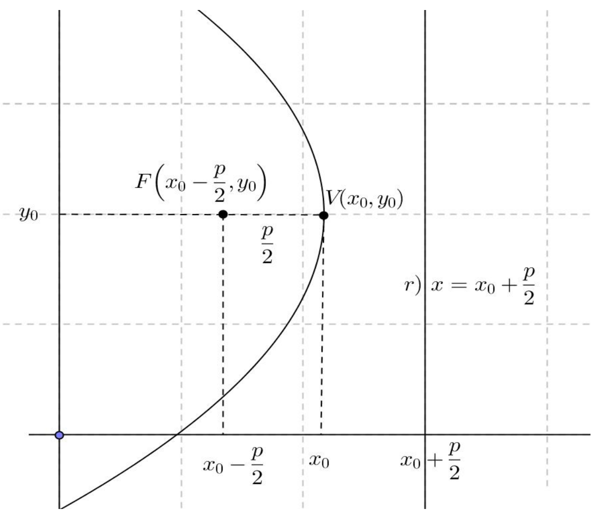


Nota 5.2.11 *Si la parábola tiene directriz r paralela al eje y, foco F, vértice $V(x_0, y_0)$ y $p = d(F, r)$, entonces con un razonamiento análogo al hecho anteriormente se concluye que:*

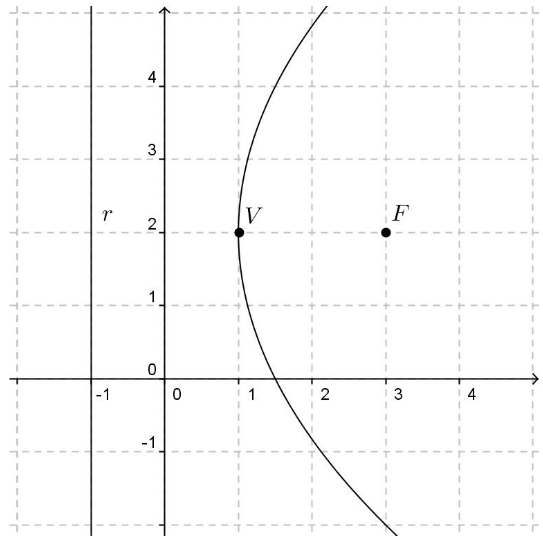
- *Si el foco está a la derecha de la directriz, las ramas de la parábola van hacia la derecha y la ecuación es*
$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$
- *Si el foco está a la izquierda de la directriz, las ramas de la parábola van hacia la izquierda, y la ecuación es*
$$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$$

Sus gráficas son como se muestra en la figura:





Ejemplo 5.2.12 *Sea $\mathcal{P}$ la parábola de ecuación $4(x - 1) = (y - 2)^2$. Entonces $\mathcal{P}$ es una parábola con vértice $V(1, 2)$, $p = 2$ y por lo tanto directriz r paralela al eje y de ecuación $x = -1$ y con foco $F(3, 2)$. Su gráfica es*



Determinaremos finalmente las ecuaciones paramétricas de una parábola. En este caso es muy sencillo. Dado que la ecuación de la parábola es *explícita*, es decir una de las coordenadas se expresa en función de la otra, podemos utilizar esta coordenada directamente como parámetro. A continuación mostramos las distintas ecuaciones de una parábola con las ecuaciones paramétricas asociadas:

$(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$	$(x-x_0)^2 = -2p(y-y_0)$	$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$	$(y-y_0)^2 = -2p(x-x_0)$
$\left\{\begin{array}{l} x = x_0 + t \\ y = y_0 + \frac{1}{2p}t^2 \end{array}\right. \;,\; t \in \mathbb{R}$	$\left\{\begin{array}{l} x = x_0 + t \\ y = y_0 - \frac{1}{2p}t^2 \end{array}\right. \;,\; t \in \mathbb{R}$	$\left\{\begin{array}{l} x = x_0 + \frac{1}{2p}t^2 \\ y = y_0 + t \end{array}\right. \;,\; t \in \mathbb{R}$	$\left\{\begin{array}{l} x = x_0 - \frac{1}{2p}t^2 \\ y = y_0 + t \end{array}\right. \;,\; t \in \mathbb{R}$

5.3 Ejercicios sugeridos

1. Marcar en un sistema de coordenadas cartesianas los siguientes puntos:

$$A(2,3);\ B(0,4);\ C(-2,3);\ D(3,-3);\ E\left(-\frac{1}{2},1\right);\ F(-1,1);\ G(3,-2);\ H\left(-\frac{3}{2},0\right).$$

2. A partir del gráfico anterior, hallar las coordenadas de los puntos:

   (a) simétricos de A, B C y D respecto al eje y.

   (b) simétricos de B, D, E y H respecto al eje x.

   (c) simétricos de A, B C y D respecto al origen.

3. En cada uno de los siguientes items, realizar un gráfico de la situación y razonar geométricamente sobre el mismo para encontrar las coordenadas de todos los puntos que verifican:

   (a) están en el segundo o tercer cuadrante, a distancia 3 del eje x y distancia 2 del eje y.

   (b) están a distancia 7 del eje x y 4 del eje y.

   (c) están en el tercer cuadrante, a distancia 5 del origen y a distancia 3 del eje x.

   (d) están a distancia 13 del punto $(1, 0)$ y a distancia 5 del eje x.

4. En este ejercicio se describen distintos lugares geométricos del plano. Hallar en cada caso una o más condiciones algebraicas que solo cumplen las coordenadas (x, y) de sus puntos.

   (a) Recta paralela al eje x que contiene al punto $(3, 6)$.

   (b) Recta paralela al eje y que contiene al punto $(10, -3)$.

   (c) El eje y.

   (d) El semiplano que determina la unión del primero y el cuarto cuadrante.

   (e) El semiplano que determina la unión del primero y el segundo cuadrante.

   (f) La recta r que determinan los puntos $P(2, 1)$ y $Q(2, 1000)$.

   (g) El semiplano que tiene como frontera la recta r del item anterior y contiene al punto $R(3, 200)$.

   (h) Un cuadrado de lado 6 con centro en el origen.

   (i) Circunferencia con centro en $P(7, -1)$ y radio 5.

   (j) Círculo con centro en el origen y radio 1.

   (k) Puntos que distan del origen más que 5.

5. Determinar la ecuación de la circunferencia $\mathcal{C}$ que se pide en cada caso y representarla gráficamente.

   (a) El centro de $\mathcal{C}$ es el punto $C(0,0)$ y el radio es $a = \sqrt{3}$.
   (b) El centro de $\mathcal{C}$ es el punto $C(-2,3)$ y el radio es $a = 2$.
   (c) El centro de $\mathcal{C}$ es el punto $C(1,1)$ y $P(4,5) \in \mathcal{C}$.
   (d) $\mathcal{C}$ pasa por $P(1,1)$ y por $Q(3,3)$ y el centro C de $\mathcal{C}$ pertenece al segmento $\overline{PQ}$.
   (e) $\mathcal{C}$ pasa por los puntos $P(5,2)$, $Q(-3,4)$ y $R(1,2)$.
   (f) $\mathcal{C}$ es la circunferencia circunscripta a $\overset{\triangle}{ABC}$, con $A(1,-1)$, $B(0,1)$ y $C(-3,-3)$.
   (g) $\mathcal{C}$ tiene su centro sobre la recta de ecuación $3x - 3y - 8 = 0$ y para por $P(5,-2)$ y $Q(2,3)$.

6. (a) Dada la circunferencia $\mathcal{C}$ de ecuación $x^2 + y^2 = 4$, determinar la ecuación de la recta tangente a $\mathcal{C}$ por el punto P dado en cada caso:

      i. $P(0,-2)$, ii. $P(2,0)$, iii. $P(\sqrt{2},\sqrt{2})$

   (b) Hallar la ecuación de la circunferencia $\mathcal{C}$ con centro en $C(1,1)$ tangente a los ejes coordenados.
   (c) Hallar la ecuación de las circunferencias de radio 2 que la recta $t)$ $x + y - 2 = 0$ es tangente a cada una de ellas en el punto $P(1,1)$.

7. Hallar la intersección de la circunferencia de ecuación $(x-6)^2 + (y-4)^2 = 25$ con la recta r de ecuación indicada en cada caso.

   (a) $y = -x + 3$; (b) $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$; (c) $x - y + 7 = 0$.

8. Hallar en cada caso la intersección de las circunferencias dadas.

   (a) $\mathcal{C}_1)(x+1)^2 + (y-2)^2 = 3$, $\mathcal{C}_2)$ $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$;
   (b) $\mathcal{C}_1)x^2 + y^2 - 6x - 2y - 8 = 0$, $\mathcal{C}_2)$ $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$;

9. Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes indicadas en cada caso:

   (a) a la circunferencia de ecuación $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$ que pasa(n) por el punto $P(-5,4)$;
   (b) a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0$, paralelas a la recta de ecuación $2x + y - 7 = 0$.

10. Determinar la ecuación de la elipse $\mathcal{E}$ que se pide en cada caso y representarla gráficamente.

(a) Los focos de $\mathcal{E}$ son $F_1(0,3)$ y $F_2(0,-3)$ y $2a = 10$.

(b) Los focos de $\mathcal{E}$ son $F_1(1,4)$ y $F_2(1,-3)$ y $b = 4$.

(c) Los vértices de $\mathcal{E}$ son $V_1(-5,1)$, $V_2(5,2)$, $V_3(0,4)$ y $V_4(0,-2)$.

(d) El centro es $C(1,2)$, uno de sus vértices es $V(1+\sqrt{5},2)$ y uno de sus focos es $F(1,-1)$.

11. Determinar los lugares geométricos que representan las siguientes ecuaciones y graficarlos. Determinar sus ecuaciones paramétricas y en caso que sean elipses, determinar los puntos que describen los parámetros $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi/4$ y $\theta = \frac{5}{3}\pi$.

    (a) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$

    (b) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{25} = 1$

    (c) $3x^2 - 6x = -4y^2 - 9$

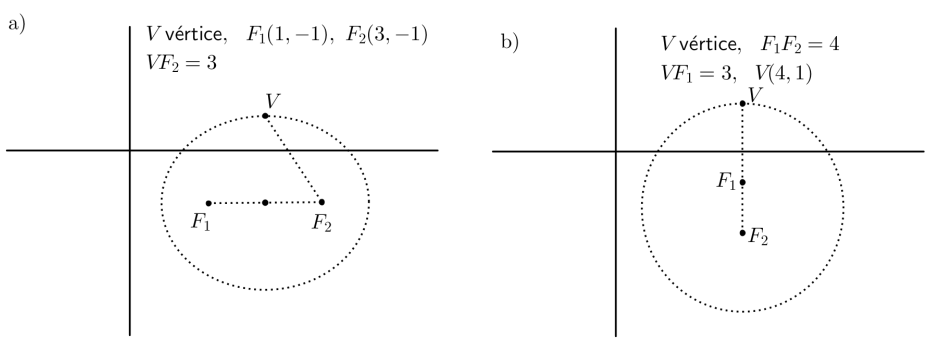
    (d) $2x^2-4x+y^2-2y+3 = 0$

    (e) $4x^2 + y^2 + 8x - 2y - 11 = 0$.

    (f) $x^2 + 2x + 52 = 20y - 2y^2 - 1$

12. Determinar el área del cuadrilátero que tiene dos vértices en los focos de la elipse $x^2 + 5y^2 = 20$ y los otros dos coinciden con los vértices sobre su eje menor.

13. Determinar las ecuaciones cartesianas y paramétricas de las elipses de las siguientes figuras. Determinar las coordenadas de los focos y vértices.



14. Determinar todos los ejes de simetría de una elipse. Determinar si una elipse tiene centro de simetría y en ese caso decir cuál es.

15. Determinar la ecuación de la hipérbola $\mathcal{H}$ que se pide en cada caso y representarla gráficamente.

    (a) Sus focos son $F_1(8,0)$, $F_2(-6,0)$ y $2a = 10$.

    (b) El eje focal es la recta $x = 2$, el centro es $C(2,1)$, $c = 5$ y $a = 4$.

(c) Las asíntotas de la hipérbola son $r_1)$ $y = x + 1$, $r_2)$ $y = -x + 1$ y uno de sus vértices es $V(\frac{1}{2}, 1)$.

(d) Sus vértices son $V_1(1, 0)$ y $V_2(1, 2)$ y una de sus asíntotas es $r)$ $y = 2x - 1$.

16. Determinar los siguientes lugares geométricos y graficarlos. Si se trata de una hipérbola, determinar los vértices y las asíntotas y dar las ecuaciones paramétricas de las dos ramas.

(a) $\dfrac{x^2}{144} - \dfrac{y^2}{24} = 1$

(b) $\dfrac{(y-1)^2}{48} - \dfrac{(x-2)^2}{27} = 3$

(c) $16x^2 - 32x - 9y^2 = 560$

(d) $x^2 + 4x - 24y = 4y^2 - 40$

(e) $y^2 - 9x^2 + 2y + 54x - 89 = 0$

(f) $2y^2 - x^2 - 2x + 8y + 8y + 7 = 0$

17. Calcular la distancia de un foco de la hipérbola de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ a sus asíntotas.

18. Encontrar las intersecciones de la recta de ecuación $5x - 6y - 3\sqrt{5} = 0$ con la hipérbola de ecuación $\dfrac{1}{9}x^2 - \dfrac{1}{5}y^2 = 1$.

19. Determinar todos los ejes de simetría de una hipérbola. Determinar si una hipérbola tiene centro de simetría y en ese caso decir cuál es.

20. Determinar la ecuación de la parábola $\mathcal{P}$ que se pide en cada caso y representarla gráficamente.

(a) La directriz es el eje x y el foco es $F(3, 3)$.

(b) La directriz es el eje y y el foco es $F(-1, -1)$.

(c) El vértice es $P(1, 1)$ y el foco es $F(3, 1)$.

21. Determinar qué lugar geométrico representan las siguientes ecuaciones y graficarlos. En caso de ser una parábola, determinar el foco, la directriz y el vértice.

(a) $x^2 + 4y + 4 = 0$

(b) $5y^2 - 20y - 3x + 20 = 0$

(c) $2y^2 - 2y + x + 2 = x + 2$

(d) $x^2 - 8x - 8y + 24 = 0$

(e) $3y^2 + 6y + x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 - 8$

(f) $4y^2 + 100 = 40y$.

22. Hallar la intersección de la parábola $y^2 = 16x$ con cada una de las siguientes rectas:

(a) $r_1)$ $x - y + 1 = 0$; (b) $r_2)$ $x - y + 4 = 0$; (c) $r_3)$ $x - y + 6 = 0$.

23. Hallar la intersección entre los lugares geométricos de ecuaciones $x^2 + y^2 = 4$ y $\sqrt{2}y = \sqrt{3}x^2$. Interpretar geométricamente.

24. Determinar todos los ejes de simetría de una parábola. Determinar si una parábola tiene centro de simetría y en ese caso decir cuál es.

25. Determinar qué lugar geométrico representan las siguientes ecuaciones. En caso de ser una cónica determinar sus elementos característicos (centro, radio, focos, vértices, asíntotas o directiz, según corresponda), representarlas gráficamente y dar sus ecuaciones paramétricas. Dar los ejes y centro de simetría en caso de tenerlos.

    (a) $2x^2+3y^2+4x-30y+71=0$
    (b) $2x^2+10y^2+4x-20y+12=0$
    (c) $4y^2+3x-8y+4=0$
    (d) $x^2+4x-1=0$
    (e) $2x^2-8y^2+4x+16y+2=0$
    (f) $x^2+2y^2-2x-12y+20=0$
    (g) $2x^2+2y^2-20x+4y+44=0$
    (h) $y^2-4y+6=0$
    (i) $2x^2-y^2-4x-10y-23=0$
    (j) $y^2+2y+1=0$.

26. Determinar qué curvas determinan las siguientes ecuaciones paramétricas y en cada caso dar sus elementos característicos.

    (a) $\begin{cases} x = -1 + \cos t \\ y = 2 + 3\sin t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
    (b) $\begin{cases} x = \sinh t \\ y = 1 - 2\cosh t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
    (c) $\begin{cases} x = 1 + t^3 \\ y = 2 - \frac{1}{2}t^6 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

27. Sea f una transformación rígida del plano. Demostrar que f transforma:

    (a) la elipse $\mathcal{E}(F_1, F_2, a)$ en la elipse $\mathcal{E}(f(F_1), f(F_2), a)$;
    (b) la hipérbola $\mathcal{H}(F_1, F_2, a)$ en la hipérbola $\mathcal{H}(f(F_1), f(F_2), a)$
    (c) la parábola $\mathcal{P}(F, r)$ en la parábola $\mathcal{P}(f(F), f(r))$.

—

Chapter 6

Geometría analítica del Espacio

En esta unidad estudiaremos la geometría analítica del espacio. Recorreremos los lugares geométricos dados por curvas y superficies en el espacio. En un principio comenzaremos estudiando rectas y planos, luego las superficies cuádricas y finalmente exploraremos un poco algunas curvas más generales.

6.1 Ecuaciones vectorial y paramétrica de una recta y un plano

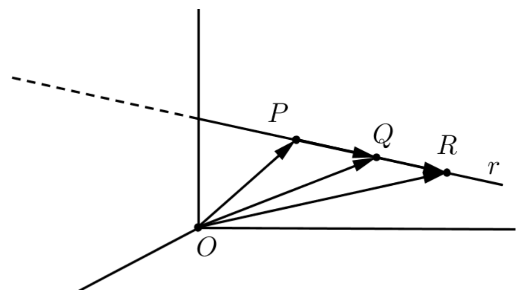
Comenzaremos estudiando la recta en el espacio que tiene ciertas analogías con el estudio que ya hemos hecho en el plano, pero presenta algunas particularidades que hacen que su abordaje sea un poco más complejo.

Consideremos dos puntos P y Q cualesquiera del espacio y sea $r = \overleftrightarrow{PQ}$ la recta que definen. Entonces, al igual que como ocurre en el plano, un punto R pertenece a la recta r si y sólo si R, P y Q están alineados. En términos del álgebra vectorial, R, P y Q están alineados si y sólo si $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son vectores paralelos. De esta manera, resulta:

$$r = \{R : \overrightarrow{PR} = \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} \quad \text{p.a. } \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Fijemos ahora un sistema de coordenadas en el espacio con origen en O. Observemos primero que

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}.$$



Por lo tanto

$$\boxed{R \in r \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R}\ :\ \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ}} \tag{6.1}$$

La ecuación (6.1) se denomina **ecuación vectorial** de la recta r. Es evidente que esta ecuación es igual a la de la recta en el plano.

Una vez fijado el sistema de coordenadas, podemos obtener en la base canónica las componentes de cada uno de estos vectores. Supongamos que los puntos P, Q y R tienen coordenadas $P(x_0, y_0, z_0)$, $Q(x_1, y_1, z_1)$ y $R(x, y, z)$.

Luego tendremos

$$\overrightarrow{OP} = (x_0, y_0, z_0),\ \overrightarrow{OR} = (x, y, z) \ \text{ y } \ \overrightarrow{PQ} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) = (u_1, u_2, u_3)$$

poniendo $u_1 = x_1 - x_0$, $u_2 = y_1 - y_0$, $u_3 = z_1 - z_0$. Luego

$$\boxed{R(x, y, z) \in r \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 \end{cases},\ \lambda \in \mathbb{R}.} \tag{6.2}$$

Las ecuaciones en (6.2) se denominan **ecuaciones paramétricas** de la recta r.

Recíprocamente, ecuaciones del tipo (6.1) y (6.2) representan siempre ecuaciones paramétricas de una recta, en el sentido que el conjunto de puntos cuyas coordenadas la verifican están todos sobre una recta y la describen completamente.

Como en el caso de una recta en el plano, definimos qué entendemos por un vector que es la dirección de una recta:

Definición: Decimos que un vector $\overline{u}$ es un **vector dirección** de una recta r si r es la dirección de $\overline{u}$, o sea, $\overline{u}$ es paralelo a r.

Así, si P y Q son puntos de r, $\overline{u} = \overrightarrow{PQ}$ es un vector dirección de r.

Por otra parte, si $\overline{u}$ es un vector dirección de r y $P \in r$, tendremos que

$$Q \in r \ \Leftrightarrow \ \overrightarrow{PQ} = \lambda \cdot \overline{u} \ \Leftrightarrow \ \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overline{u}.$$

Luego si $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $P(x_0, y_0, z_0)$, resulta

$$Q(x,y,z) \in r \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Observemos que estas son las mismas ecuaciones paramétricas que ya habíamos obtenido.

Problema 1: *Sea r la recta que pasa por el punto $P(1,1,-1)$ en la dirección del vector* $\overline{u} = (1,2,1)$.

1. *Determinar las ecuaciones paramétricas de r y dar dos puntos que la determinan.*
2. *Determinar la intersección de r con los planos coordenados. Esbozar su gráfica.*
3. *Determinar si r interseca los ejes coordenados. En ese caso determinar los puntos de intersección.*

Solución:

1. Tenemos que $P(1,1,-1)$ es un punto de paso de r y $\overline{u} = (1,2,1)$ es la dirección, por lo tanto las ecuaciones paramétricas de r son

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

   Para encontrar un segundo punto de r basta dar un valor cualquiera a λ. Por ejemplo, tomando $\lambda = 1$, tenemos que $Q(2,3,0) \in r$ y por lo tanto P y Q son dos puntos que determinan r.

   Observemos que como $Q \in r$, podríamos haber dado las ecuaciones paramétricas de r tomando Q como punto de paso. En este caso, las ecuaciones paramétricas de r son

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

   Sabemos que P es un punto de r. Observemos que con las segundas ecuaciones debemos tomar el parámetro $t = -1$ para obtenerlo.

2. La intersección de r con el plano xy será un punto de coordenadas $P_1(x_1, y_1, 0)$, con el plano yz será $P_2(0, y_2, z_2)$ y con el plano xz será $P_3(x_3, 0, z_3)$.

   Como una recta corta a un plano en un único punto y $Q(2,3,0)$ pertenece tanto a r como al plano xy, resulta que $P_1 = Q$.

Para encontrar P_2, observemos que debe ser un punto de r cuya primer coordenada es 0. Reemplazando en la ecuación correspondiente en las ecuaciones paramétricas de r, resulta

$$0 = 1 + \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1.$$

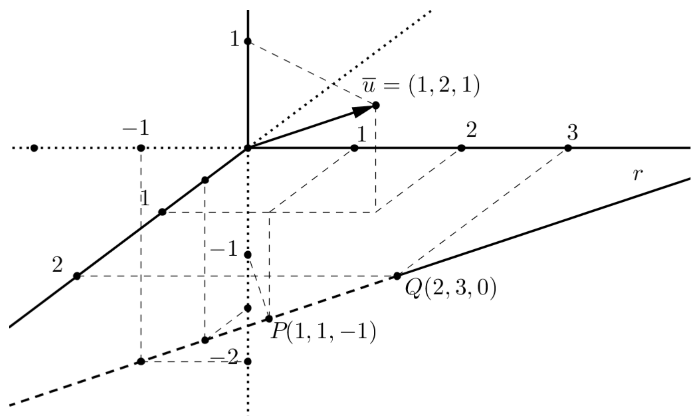
Reemplazando con este valor de λ obtenemos $y_2 = 1+2\cdot(-1) = -1$ y $z_2 = -1+(-1) = -2$. Por lo tanto $P_2(0,-1,-2)$.

Para hallar P_3, la segunda coordenada debe anularse, y por lo tanto

$$0 = 1 + 2\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{2}.$$

Luego $x_3 = \frac{1}{2}$ e $z_3 = -\frac{3}{2}$.

La siguiente es la gráfica de r.



3. Observemos que si r interseca alguno de los ejes coordenados, estos puntos deben coincidir con alguno de los puntos en que r interseca los planos coordenados. En efecto, el eje x está contenido en el plano xy y en el plano xz. Como r corta cada plano en un punto, si corta al eje x, este punto debe ser el punto en que r corte tanto al plano xy como al xz. Pero r corta a los planos coordenados en puntos que no están sobre los ejes. Por lo tanto r es alabeada con los tres ejes coordenados. $\square$

Problema 2: *Sea r la recta de ecuaciones paramétricas*

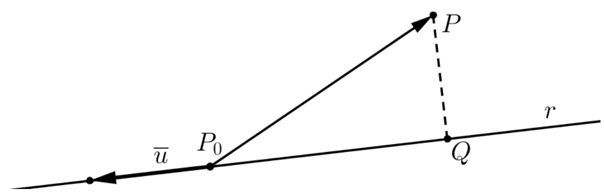
$$r) \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Determinar la distancia del punto $P(1,0,1)$ a r.

Solución:

Observemos que la dirección de r está dada por el vector $\overline{u} = (3, 2, 1)$. Consideremos un punto P_0 de r. Por ejemplo, tomando el parámetro $t = 0$, obtenemos el punto de paso $P_0(2, 2, -1)$.

Consideremos ahora un punto Q sobre r tal que $\overrightarrow{P_0Q} = proy_{\overline{u}}\, \overrightarrow{P_0P}$. O sea, Q es el pie de la perpendicular a r por P.



Entonces es claro que

$$d(P, r) = |\overrightarrow{QP}| = \sqrt{|\overrightarrow{P_0P}|^2 - |\overrightarrow{P_0Q}|^2} = \sqrt{|\overrightarrow{P_0P}|^2 - |proy_{\overline{u}}\, \overrightarrow{P_0P}|^2}.$$

Ahora bien, $\overrightarrow{P_0P} = (-1, -2, 2)$ y $|\overrightarrow{P_0P}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$. Por otra parte,

$$|proy_{\overline{u}}\, \overrightarrow{P_0P}| = |(\overrightarrow{P_0P} \times \overline{u}_0) \cdot \overline{u_0}| = |\overrightarrow{P_0P} \times \overline{u}_0|.$$

Calculamos $|\overline{u}| = \sqrt{14}$ y por lo tanto $\overline{u}_0 = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, 2, 1)$. Luego

$$|proy_{\overline{u}}\, \overrightarrow{P_0P}| = \frac{1}{\sqrt{14}}|-3-4+2| = \frac{5}{\sqrt{14}}.$$

Finalmente resulta

$$d(P, r) = \sqrt{9 - \frac{25}{14}} = \sqrt{\frac{101}{14}}.$$

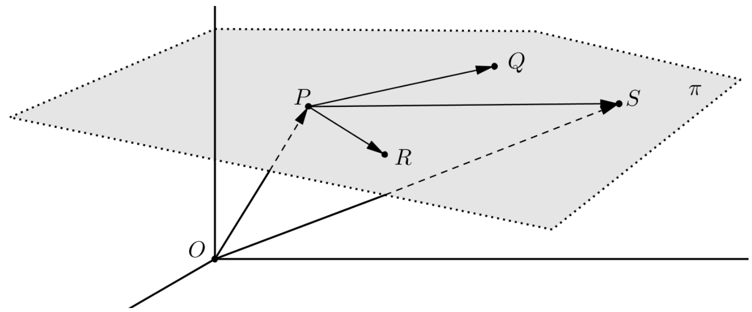
Determinaremos ahora las ecuaciones paramétricas de un plano en el espacio.

Sea π un plano y sean P, Q y R tres puntos no alineados de π. Entonces un punto cualquiera S del espacio será un punto de π si y sólo si los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PS}$ y $\overrightarrow{PR}$ son coplanares. Esto a su vez ocurre si y sólo si existen números reales α y β tales que

$$\overrightarrow{PS} = \alpha \cdot \overrightarrow{PQ} + \beta \cdot \overrightarrow{PR} \tag{6.3}$$

Si ahora fijamos un sistema de coordenadas en el espacio con origen en O y observamos que $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OP}$, reemplazando en (6.3) obtenemos que $S \in \pi$ si y sólo si existen números reales α y β tales que

$$\boxed{\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + \alpha \cdot \overrightarrow{PQ} + \beta \cdot \overrightarrow{PR}} \tag{6.4}$$



La ecuación (6.4) se conoce como **ecuación vectorial** del plano. A partir de la introducción de coordenadas, podemos determinar de manera inmediata las **ecuaciones paramétricas** del plano.

En efecto, supongamos que $P(x_0, y_0, z_0)$, $Q(x_1, y_1, z_1)$, $R(x_2, y_2, z_2)$ y $S(x, y, z)$. Entonces

$$\overrightarrow{OS} = (x, y, z), \quad \overrightarrow{OP} = (x_0, y_0, z_0),$$

$$\overrightarrow{PQ} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) = (u_1, u_2, u_3), \quad \overrightarrow{PR} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0) = (v_1, v_2, v_3)$$

y reemplazando en (6.4) obtenemos

$$\boxed{S(x,y,z) \in \pi \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + \alpha u_1 + \beta v_1 \\ y = y_0 + \alpha u_2 + \beta v_2 \quad \alpha,\, \beta \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + \alpha u_3 + \beta v_3 \end{cases}} \tag{6.5}$$

Al igual que con las rectas, podemos definir qué entendemos con que dos vectores sean los vectores dirección de un plano:

Definición: Decimos que dos vectores no nulos ni paralelos $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son **vectores dirección** de un plano π si son ambos paralelos a π.

Nuevamente, si $P(x_0, y_0, y_0)$ es un punto de π y $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ definen las direcciones de π, las ecuaciones paramétricas de π son las dadas por (6.5).

Problema 3: *Considerar los puntos $P(-1, 2, \frac{3}{2})$, $Q(-\frac{3}{2}, 1, 3)$ y $R(4, -2, -3)$.*

1. *Dar las ecuaciones paramétricas del plano π que determinan.*

2. *Determinar los puntos de intersección del plano π con los ejes coordenados. Esbozar la gráfica de π.*

3. *Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta perpendicular a π por el punto $T(1, 2, 3)$.*

Solución:

1. Observemos que $\overrightarrow{PQ} = (-\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{2})$ y $\overrightarrow{PR} = (5, -4, -\frac{9}{2})$. Luego las ecuaciones paramétricas de π son
$$\pi) \begin{cases} x = -1 - \frac{1}{2}\alpha + 5\beta \\ y = 2 - \alpha - 4\beta \\ z = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\alpha - \frac{9}{2}\beta \end{cases}$$

2. Encontraremos las coordenadas de los puntos de intersección de π con los ejes coordenados. Observemos que el punto de intersección con el eje x tendrá coordenadas $y = 0$ y $z = 0$. Reemplazando en las ecuaciones de π, obtenemos el sistema de ecuaciones en las incógnitas α y β
$$\begin{cases} 0 = 2 - \alpha - 4\beta \\ 0 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\alpha - \frac{9}{2}\beta \end{cases}$$
Despejando α de la primer ecuación obetenemos
$$\alpha = 2 - 4\beta$$
y reemplazando en la segunda resulta
$$\frac{3}{2} + 3 - 6\beta - \frac{9}{2}\beta = 0 \;\Rightarrow\; \frac{9}{2} - \frac{21}{2}\beta = 0 \;\Rightarrow\; \beta = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$
y por lo tanto $\alpha = \frac{2}{7}$.

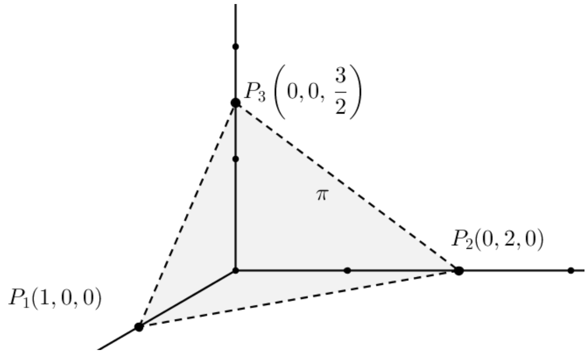
   Reemplazando con los valores obtenidos en la ecuación de π, obtenemos el punto $P_1(1, 0, 0)$.

   Obtendremos ahora la intersección con el eje y. Para ello necesitamos hacer 0 la primera y la tercer coordenada. Tenemos entonces el sistema
$$\begin{cases} 0 = -1 - \frac{1}{2}\alpha + 5\beta \\ 0 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\alpha - \frac{9}{2}\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -1 - \frac{1}{2}\alpha + 5\beta \\ 0 = -\frac{3}{2} + \frac{21}{2}\beta \end{cases}$$
donde el sistema equivalente se obtiene de multiplicar por 3 ambos miembros de la primer ecuacione y sumar ambas ecuaciones.

   Obtenemos entonces $\beta = \frac{1}{7}$ y reemplazando en la primer ecuación resulta $\alpha = -\frac{4}{7}$. Reemplazando en las ecuaciones de π obtenemos el punto $P_2(0, 2, 0)$.

   Con un procedimiento análogo, obtenemos que el punto de intersección con el eje z es $P_3(0, 0, \frac{3}{2})$.

   Realizar la gráfica de un plano en el espacio suele ser difícil. Siempre que el plano tenga intersección con los tres ejes coordenados, lo representamos como un triángulo en alguno de los ocho octantes, cuyos vértices son estos puntos de intersección. En este caso, graficamos el plano π de la siguiente manera:



3. Debemos encontrar ahora las ecuaciones paramétricas de la recta r, única perpendicular a π por el punto $T(1,2,3)$. Observemos que ya tenemos un punto de paso, y por lo tanto sólo debemos encontrar la dirección de r. Para ello necesitamos determinar un vector perpendicular a las direcciones de π. Podemos determinar este vector, llamemoslo $\overline{n}$, realizando el producto vectorial entre $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$. Tenemos entonces

$$\overline{n} = \overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -\frac{1}{2} & -1, & \frac{3}{2} \\ 5 & -4 & -\frac{9}{2} \end{vmatrix} = \frac{21}{2}\overline{i} + \frac{29}{4}\overline{j} + 7\overline{k}.$$

Por lo tanto las ecuaciones paramétricas de la recta r son

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{21}{2}t \\ y = 2 + \frac{29}{4}t \\ z = 3 + 7t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

6.2 Ecuación general del plano y ecuaciones de la recta en el espacio

Comenzaremos encontrando la ecuación general de un plano en el espacio. Esto es, una ecuación que dependa de las variables x, y y z y sea verificada sólo por las coordenadas de los puntos del plano.

Sea π un plano, $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$ y sean $\overline{u}$ y $\overline{v}$ dos vectores paralelos a π. Entonces $\overline{n} = \overline{u} \wedge \overline{v} = (a, b, c)$ es un vector normal a π y resulta

$$\begin{aligned} P(x,y,z) \in \pi \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P_0P} \perp \overline{n} \Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \times (a, b, c) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad ax + by + cz + d = 0 \end{aligned}$$

donde $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

Dejamos como ejercicio la prueba del siguiente resultado:

Teorema 6.2.1 *Un lugar geométrico en el espacio es un plano si y sólo si su ecuación cartesiana es de la forma*

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0} \tag{6.6}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(a, b, c) \neq \overline{0}$.

Problema 4:

1. *Encontrar una ecuación cartesiana del plano* π *de ecuaciones paramétricas*

$$\begin{cases} x = 2 + 3s - \frac{1}{2}t \\ y = -2 + 2s + t \\ z = s - 2t \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

2. *Determinar la intersección de* π *con la recta* r *de ecuaciones paramétricas*

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 4 + 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. *Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que se obtiene de intersecar* π *con el plano* π' *de ecuación cartesiana* $2x - 3y + z - 1 = 0$.

Solución:

1. Para encontrar una ecuación cartesiana de π observemos que un punto de paso es $P_0(2, -2, 0)$ y dos vectores paralelos a π son $\overline{u} = (3, 2, 1)$ y $\overline{v} = (-\frac{1}{2}, 1, -2)$. Luego un vector normal a π es

$$\overline{n} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-5, 11/2, 4)$$

luego una ecuación general de π será de la forma $-5x + \frac{11}{2}y + 4z + d = 0$. Como $P_0 \in \pi$, reemplazamos con sus coordenadas en la última ecuación para determinar el valor de d. Resulta así $-5 \cdot 2 + \frac{11}{2} \cdot (-2) + 4 \cdot 0 + d = 0$, de donde $d = 21$ y la ecuación de π es

$$-5x + \frac{11}{2}y + 4z + 21 = 0.$$

2. Debemos encontrar un punto que esté simultáneamente en π y en la recta r. Como cada punto de r puede describirse con un único parámetro λ, estamos buscando $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que las coordenadas del punto de r que describe verifiquen también la ecuación cartesiana de π. O sea,

$$-5(1 + \lambda) + \frac{11}{2}(4 + 2\lambda) + 4(3 - \lambda) + 21 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -25.$$

Por lo tanto el punto de intersección entre r y π es el punto $Q(-24, -46, 28)$.

3. Para encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta que se obtiene de intersecar π con π' necesitamos encontrar un punto de paso y un vector dirección.

   Un punto de paso $A(x, y, z)$ deberá verificar tanto la ecuación cartesiana de π como la de π'. Es decir, deberá verificar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -5x + \frac{11}{2}y + 4z + 21 = 0 \\ 2x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

   Este sistema tendrá infinitas soluciones (en este caso en que los planos se cortan en una recta), o no tendrá ninguna si los planos fuesen paralelos. De la segunda ecuación obtenemos que $z = 1 - 2x + 3y$. Reemplazando en la primera, tenemos

$$-5x + \frac{11}{2}y + 4(1 - 2x + 3y) + 21 = 0 \Leftrightarrow -13x + \frac{35}{2}y + 25 = 0$$

   Poniendo por ejemplo $y = 0$, tenemos $x = \frac{25}{13}$ y $z = 1 - \frac{50}{13} = -\frac{37}{13}$. Por lo tanto el punto $A(\frac{25}{13}, 0, -\frac{37}{13}) \in \pi \cap \pi'$.

   Sea ahora $\overline{u}$ la dirección de la recta $s = \pi \cap \pi'$. Sean $\overline{n} = (-5, 11/2, 4)$ y $\overline{n}' = (2, -3, -1)$ vectores normales a π y π' respectivamente. Entonces como $s \subset \pi$, deberá ser $\overline{u} \perp \overline{n}$, y como $s \subset \pi'$ deberá ser $\overline{u} \perp \overline{n}'$. Por lo tanto podemos elegir $\overline{u} = \overline{n} \wedge \overline{n}' = (\frac{13}{2}, 3, 4)$. Luego las ecuaciones paramétricas de s son

$$\begin{cases} x = \frac{25}{13} + \frac{13}{2}\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -\frac{37}{13} + 4\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

De la misma manera que para el caso de una recta en el plano, podemos, conocidas las ecuaciones cartesianas del plano, determinar la distancia de un punto cualquiera del espacio al plano. Dejamos la prueba del siguiente Teorema como ejercicio:

Teorema 6.2.2 *Sea π un plano de ecuación cartesiana $ax + by + cz + d = 0$ y $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto del espacio. Entonces*

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Con lo que hemos estudiado hasta el momento, vimos que la **ecuación general de primer grado** en dos variables, es decir una ecuación del tipo

$$ax + by + c = 0$$

representa una recta en el plano siempre que $(a,b) \neq \overline{0}$. Es evidente que si $(a,b) = \overline{0}$, tal ecuación representa el conjunto vacío si $c \neq 0$ y todo el plano si $c = 0$.

Por otra parte, la ecuación lineal general de primer grado en tres variables, es decir

$$ax + by + cz + d = 0$$

representa un plano en el espacio, siempre que $(a,b,c) \neq \overline{0}$. Nuevamente, tal ecuación representa el conjunto vacío si $(a,b,c) = \overline{0}$ y $d \neq 0$ y todo el espacio si $(a,b,c) = \overline{0}$ y $d = 0$.

Hubiese sido esperable que una recta en el espacio tuviese una ecuación cartesiana de la forma anterior. Trataremos de obtener la o las ecuaciones cartesianas que deberán verificar las coordenadas de los puntos de una recta en el espacio a partir de sus ecuaciones paramétricas.

Consideremos por lo tanto la recta r de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \\ z = z_0 + tu_3 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Alguna de las componentes del vector dirección $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ deberá ser no nula. Supondremos por el momento que las tres son no nulas y veremos después qué ocurre cuando alguna de ellas se anula.

En este caso, podemos despejar t de las tres ecuaciones y obtenemos:

$$t = \frac{x - x_0}{u_1}, \quad t = \frac{y - y_0}{u_2}, \quad t = \frac{z - z_0}{u_3}$$

Como (x, y, z) describen las coordenadas de un punto fijo de la recta, el parámetro t en las tres ecuaciones debe ser el mismo, y por lo tanto obtenemos

$$\boxed{\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}} \tag{6.7}$$

Las ecuaciones (6.7) se conocen como **forma simétrica** de la ecuación de la recta r. En realidad no se trata de una ecuación, sino de un sistema de ecuaciones que puede escribirse como cualquiera de las siguientes tres formas equivalentes:

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} \\ \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} \\ \frac{x - x_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x - x_0}{u_1} = \frac{z - z_0}{u_2} \\ \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3} \end{cases} \tag{6.8}$$

Observemos que cualquier ecuación individual de cualquiera de los tres sistemas es la ecuación de un plano. Por ejemplo, la ecuación

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2}$$

puede reescribirse como

$$\frac{1}{u_1}x - \frac{1}{u_2}y + \left(\frac{y_0}{u_2} - \frac{x_0}{u_1}\right) = 0. \tag{6.9}$$

Es importante observar que, como estamos trabajando en el espacio, la ausencia de la variable z **NO** indica que la ecuación (6.9) es la ecuación de una recta, sino que es la ecuación de un plano paralelo al eje z, o equivalentemente, perpendicular al plano xy.

De esta manera, al decir que los puntos de la recta r son aquellos cuyas coordenadas son solución de alguno de los tres sistemas equivalentes dados en (6.8), no estamos diciendo más que la recta r es la intersección de los dos planos que cada una de las ecuaciones de cada sistema representan.

Por lo tanto, para describir una recta en el espacio, debemos pensarla como intersección de dos planos y por lo tanto el lugar geométrico del espacio que representa será descrito como un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, que muchas veces resumimos escribiendolo como en (6.7).

Como las coordenadas de los puntos de r verifican los sistemas dados en (6.8), en particular verifican cada una de las ecuaciones. Esto implica que la recta r está contenida en cada uno de los planos que estas ecuaciones describen. Por ejemplo la ecuación (6.9) es la ecuación de un plano que contiene a r y es perpendicular al plano xy. Este plano se denomina **plano proyectante** de r al plano xy, ya que la recta que se obtiene de intersecarlo con el plano xy es la proyeccción ortogonal de r sobre el plano xy.

Las ecuaciones del plano proyectante de r sobre el plano yz se obtiene de la ecuación

$$\frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}$$

que puede reescribirse como

$$\frac{1}{u_2}y - \frac{1}{u_3}z + \left(\frac{z_0}{u_3} - \frac{y_0}{u_2}\right) = 0$$

y un razonamiento análogo puede hacerse para obtener la ecuación del plano proyectante sobre el plano xz.

De manera más general, podremos siempre representar a una recta en el espacio como un sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x, y, z. Cada una de esas ecuaciones representa un plano en el espacio, y la recta en cuestión será la intersección de esos dos planos. Existen de esta manera infinitas formas distintas de representar una misma recta a través de ecuaciones.

6.3 Superficies cuádricas

A lo largo de la presente materia y de álgebra y Geometría I nos hemos dedicado al estudio de la geometría analítica. Vimos cómo a partir de la introducción de coordenadas hemos podido utilizar herramientas algebraicas para resolver problemas geométricos. Nuestro principal objetivo fue obtener las ecuaciones cartesianas y paramétricas de algunas curvas elementales y estudiar sus propiedades. Estas curvas son las rectas y las secciones cónicas. De esta manera, el álgebra acude en auxilio de la geometría permitiendo resolver de manera precisa y sencilla muchos problemas.

Este problema geométrico tiene sin embargo una importante contrapartida algebraica: permite clasificar qué lugar geométrico describen las raíces de un polinomio lineal o cuadrático en dos variables. Es decir, dado cualquier polinomio de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

sabemos que si interpretamos todas sus posibles raices como coordenadas de puntos, estos puntos constituiran una recta, una sección cónica o alguna de sus degeneraciones. De esta manera, resolver sistemas de ecuaciones lineales o cuadráticas en dos variables puede interpretarse geométricamente como la intersección de dos o más curvas. Así la geometría permite aportar intuición a problemas algebraicos abstractos.

Hemos visto además que las soluciones de la ecuación

$$ax + by + cz + d = 0$$

pueden interpretarse como las coordenadas de puntos que yacen sobre un plano perpendicular al vector $\overline{n} = (a, b, c)$.

De esta manera en este estudio interrelacionado de la geometría y el álgebra surgen dos problemas fundamentales:

1. dada una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$ o $F(x, y, z) = 0$ interpretar qué lugar geométrico del plano o del espacio describen sus soluciones, y qué propiedades geométricas tienen estos lugares geométricos;

2. dado un lugar geométrico del plano o del espacio, encontrar una o más condiciones algebraicas (ecuaciones o inecuaciones) que lo describen, es decir, que satisfacen únicamente las coordenadas de los puntos que a él pertenecen.

En esta última unidad trataremos de resolver ambos problemas para algunos casos particulares importantes de superficies en el espacio.

El próximo paso es determinar qué lugar geométrico del espacio representa una ecuación cuadrática en tres variables, es decir, una ecuación de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0. \tag{6.10}$$

Una ecuación de este tipo representará generalmente una superficie en el espacio denominada *superficie cuádrica*.

El ejemplo más simple de una superficie cuádrica es la superficie esférica.

Recordemos que dado un punto P_0 y un número real positivo r, una **superficie esférica** (muchas veces llamada directamente esfera) de centro P_0 y radio r es el lugar geométrico de los puntos P del espacio tales que $d(P, P_0) = r$.

Si $P_0(x_0, y_0, z_0)$, y denotamos $\mathcal{E}(P_0, r)$ a la esfera de centro P_0 y radio r, tenemos

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{E}(P_0, r) \quad &\Leftrightarrow \quad d(P, P_0) = r \;\;\Leftrightarrow\;\; \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = r \\ &\Leftrightarrow \quad (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2 \end{aligned}$$

Distribuyendo, vemos que una superficie esférica tiene siempre una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

donde $A = 1$, $G = -2x_0$, $H = -2y_0$, $I = -2z_0$, $J = (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) - r^2$.

Nos dedicaremos a estudiar los casos de la ecuación (6.10) en que $D = E = F = 0$. Es decir, estudiaremos lugares geométricos descritos por ecuaciones del tipo

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0. \tag{6.11}$$

Hacemos notar sin embargo que *siempre* es posible elegir un sistema de coordenadas en el espacio de modo que esto ocurra.

Notemos además que si $A = B = C = 0$, estamos en presencia de la ecuación de un plano, y por lo tanto supondremos que alguno de estos tres coeficientes es no nulo.

Si los tres son no nulos, completando cuadrados será siempre posible transformar la ecuación (6.11) en una ecuación del tipo

$$\pm\frac{(x-x_0)^2}{a^2} \pm \frac{(y-y_0)^2}{b^2} \pm \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \tag{6.12}$$

(donde obviamente todos los términos del miembro izquierdo no pueden tener signo negativo simultáneamente) o bien del tipo

$$\pm\frac{(x-x_0)^2}{a^2} \pm \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \pm\frac{(z-z_0)^2}{c^2}. \tag{6.13}$$

En caso que sólo uno de los coeficientes A, B o C sean nulos, obtendremos una ecuación del tipo

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} \pm \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \frac{z-z_0}{c} \tag{6.14}$$

(con posible intercambio de roles en las variables x, y y z).

Finalmente, si dos de los tres coeficientes son nulos, obtendremos una ecuación del tipo:

$$\pm\frac{(x-x_0)^2}{a^2} = Hy + Iz + J \tag{6.15}$$

(donde nuevamente las variables x, y o z pueden estar intercambiadas).

Las ecuaciones del tipo (6.12) representan **elipsoides, hiperboloides** y las del tipo (6.13) **conos**.

Las ecuaciones del tipo (6.14) representan **paraboloides** y las ecuaciones del tipo (6.15) representan un **cilindro generalizado** y no suele incluirse en el tratamiento de las cuádricas.

Finalizaremos esta sección estudiando superficies en el espacio descritas por ecuaciones de la forma $F(x, y) = 0$, $F(x, z) = 0$ o $F(y, z) = 0$. Estas superficies son los denominados **cilindros generalizados**.

6.3.1 Elipsoides y esferas

Supongamos que tenemos un lugar geométrico $\mathcal{E}$ dado en un sistema de coordenadas $Oxyz$ por la ecuación

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1} \tag{6.16}$$

Observemos primero que si $a = b = c$, el lugar geométrico descripto por esta ecuación es una esfera de centro $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y radio a.

Supongamos entonces que algún par de entre los números a, b y c son distintos entre sí. El lugar geométrico $\mathcal{E}$ recibe el nombre de **elipsoide**. En lo que sigue haremos un análisis que se repetirá de manera análoga en el estudio de todas las superficies cuádricas y nos permitirá graficar de manera aproximada estas superficies.

El punto $C(x_0, y_0, z_0)$ se denomina **centro del elipsoide** y es en efecto su centro de simetría.

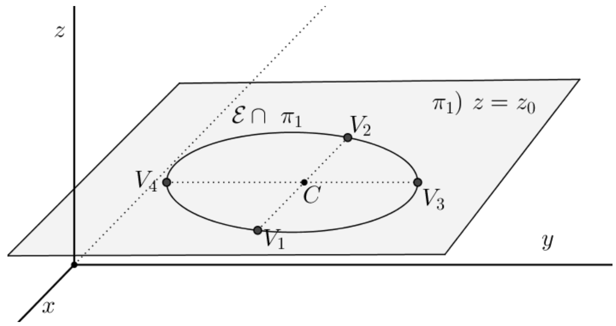
Para darnos una idea de la gráfica de $\mathcal{E}$, intersecamos a $\mathcal{E}$ con planos paralelos a los planos coordenados. Comencemos intersecando $\mathcal{E}$ con planos que pasen por C.

Consideremos el plano π_1 de ecuación $z = z_0$. π_1 es el plano paralelo al plano xy por C y $\mathcal{E} \cap \pi_1$ será un lugar geométrico descripto por el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} + \dfrac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \\ z = z_0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \\ z = z_0 \end{array} \right.$$

Es decir, $\mathcal{E} \cap \pi_1$ es una elipse (o una circunferencia si $a = b$) en el plano π_1. Es importante notar que aquí los valores a, b y c no tienen relación con los valores que definimos para estudiar las secciones cónicas, pudiendo ser $a \geq b$ o $a < b$. Esto implica que el eje focal de esta elipse puese ser el eje x o el eje y. De cualquier manera, sus vértices son los puntos de coordenadas

$$V_1(x_0 + a, y_0, z_0), \; V_2(x_0 - a, y_0, z_0), \; V_3(x_0, y_0 + b, z_0), \; V_4(x_0, y_0 - b, z_0).$$



Consideremos ahora el plano π_2 paralelo al plano yz por C. Es decir, el plano de ecuación $x = x_0$. Si intersecamos $\mathcal{E}$ con el plano π_2, obtendremos la curva de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} + \dfrac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \\ x = x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} + \dfrac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \\ x = x_0 \end{cases}$$

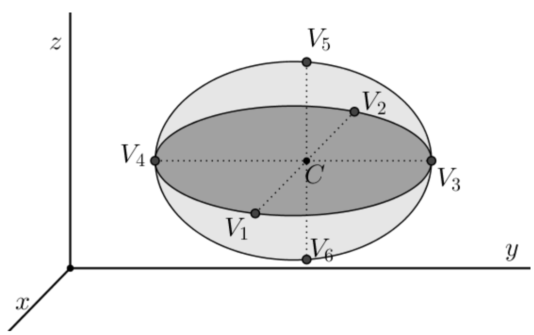
que representa una elipse en el plano yz de vértices

$$V_3,\ V_4,\ V_5(x_0, y_0, z_0 + c),\ V_6(x_0, y_0, z_0 - c).$$

Finalmente, la intersección de $\mathcal{E}$ con el plano π_3 paralelo al plano xz por C, es la curva de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} + \dfrac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \\ y = y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \\ y = y_0 \end{cases}$$

que es una elipse de vértices $V_1,\ V_2,\ V_5$ y V_6.



Para completar el análisis de la gráfica de $\mathcal{E}$, lo intersecaremos con planos paralelos a los planos coordenados. Las curvas que se obtienen de intersecar una superficie con un plano de estas características se denominan **trazas** de la superficie.

Tomaremos un plano paralelo al plano yz, o sea, de ecuación $x = k$. El análisis de las intersecciones con los otros planos es análogo y lo dejamos como ejercicio.

Sean entonces α_k el plano de ecuación $x = k$. Observemos que $\alpha_{x_0} = \pi_1$ y, como ya hemos visto, su interesección con $\mathcal{E}$ es una elipse.

En general, $\mathcal{E} \cap \alpha_k$ es el lugar geométrico del espacio tal que las coordenadas de sus puntos verifican el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} + \dfrac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \\ x = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} + \dfrac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 - \dfrac{(k-x_0)^2}{a^2} \\ x = k \end{cases}$$

Tenemos entonces:

- Si $\frac{(k-x_0)^2}{a^2} < 1$, o sea, si $x_0 - a < k < x_0 + a$, entonces $\mathcal{E} \cap \alpha_k$ es una elipse en α_k.
- Si $|k - x_0| = a$, o sea entonces $\mathcal{E} \cap \alpha_{x_0+a} = \{V_1\}$ y $\mathcal{E} \cap \alpha_{x_0-a} = \{V_2\}$.
- Si $|k - x_0| > a$, entonces $\mathcal{E} \cap \pi_k = \emptyset$.

Observemos que si si $x_0 - a < k < x_0 + a$, entonces la elipse en el plano α_k tiene centro en $P_k(k, y_0, z_0)$ y está dada por las ecuaciones

$$\frac{(y-y_0)^2}{B_k^2} + \frac{(z-z_0)^2}{C_k^2} = 1, \quad x = k$$

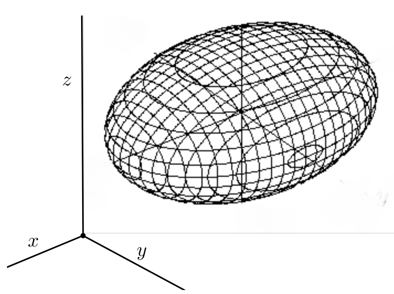
donde $B_k = b / \sqrt{1 - \dfrac{(k-x_0)^2}{a^2}} \leq b$. De la misma manera, $C_k \leq c$.

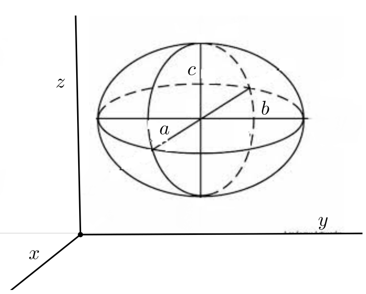
$B_k = b / \sqrt{1 - \dfrac{(k-x_0)^2}{a^2}}$ toma el valor b cuando $k = x_0$ y disminye acercandose cada vez más a 0 a medida que k se aleja de x_0 y se acerca a $x_0 - a$ o $x_0 + a$. Es decir que los planos α_k cortan a $\mathcal{E}$ en elipses cada vez más pequeñas centradas en puntos sobre la recta paralela al eje x por C, que degeneran en los puntos V_1 y V_2.

De manera completamente análoga, vemos que un plano de ecuación $y = k$ intersecará a $\mathcal{E}$ en una elipse si $|k - y_0| < b$, en el punto V_3 o V_4 si $|k - y_0| = b$ y vacío si $|k - y_0| > b$. Y un plano de ecuación $z = k$ intersecará a $\mathcal{E}$ en una elipse si $|k - z_0| < c$, en el punto V_5 o V_6 si $|k - z_0| = c$ y en el vacío si $|k - z_0| > c$.

Los puntos $V_1, V_2, \cdots, V_6$ se denominan **vértices** del elipsoide.

Con el análisis anterior estamos en condiciones de reconstruir la gráfica de $\mathcal{E}$ como mostramos en las siguientes figuras.





Ejemplos:

1. Sea $\mathcal{E}$ el lugar geométrico del espacio descrito por la ecuación

$$4x^2 + 9y^2 + 18z^2 - 8x - 36y + 36z + 22 = 0.$$

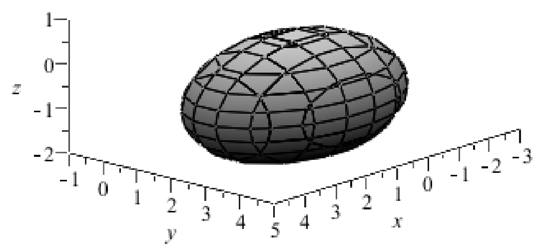
Completando cuadrados tenemos

$$\begin{aligned} P(x,y,z) \in \mathcal{E} \quad &\Leftrightarrow \quad 4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 4y) + 18(z^2 + 2z) + 22 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 4(x-1)^2 - 4 + 9(y-2)^2 - 36 + 18(z+1)^2 - 18 + 22 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} + \frac{(z+1)^2}{2} = 1 \end{aligned}$$

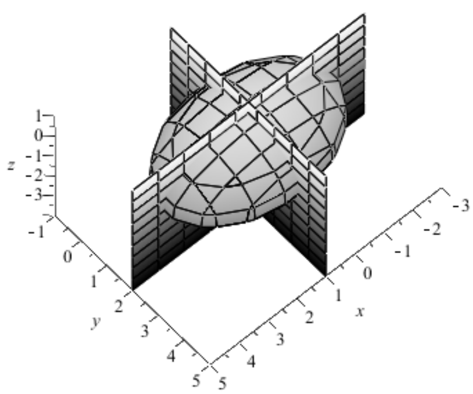
$\mathcal{E}$ es un elipsoide con centro en $C(1,2,-1)$ y $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{2}$.

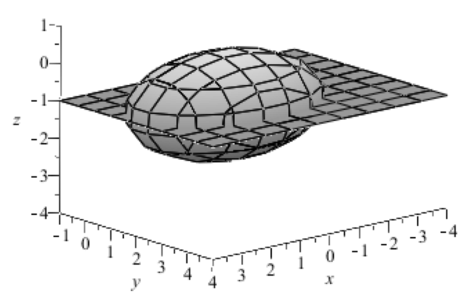
Sus vértices son los puntos $V_1(4,2,-1)$, $V_2(-2,2,-1)$, $V_3(1,4,-1)$, $V_4(1,0,-1)$, $V_5(1,2,\sqrt{2}-1)$ y $V_6(1,2,-\sqrt{2}-1)$.

En la siguiente figura mostramos dos vistas del elipsoide.



En las siguientes figuras mostramos la intersección del elipsoide con los planos paralelos a los ejes coordenados que pasan por el centro.

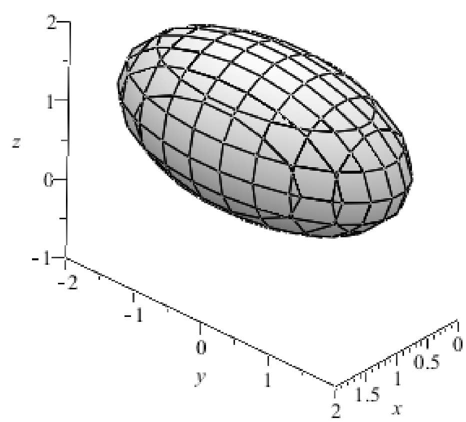




2. Sea $\mathcal{E}$ el elipsoide de vértices $V_1(2,0,1)$, $V_2(0,0,1)$, $V_3(1,2,1)$, $V_4(1,-2,1)$, $V_5(1,0,2)$, $V_6(1,0,0)$.

   Observemos que cada uno de los planos paralelos a los planos coordenados y que pasan por el centro del elipsoide, son aquellos determinados cuatro vértices coplanares. Así el centro del elipsoide coincide con el centro de las tres elipses que se obtienen de intersecarlo con cada uno de estos tres planos. En particular, el centro C de $\mathcal{E}$ es el punto medio de $\overline{V_1V_2}$, o sea, $C(1,0,1)$. Por lo tanto, $\mathcal{E}$ tendrá una ecuación de la forma
$$\frac{(x-1)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{(z-1)^2}{c^2}=1$$
   donde $a=d(C,V_1)=1$, $b=d(C,V_3)=2$ y $c=d(C,V_5)=1$. Concluimos que la ecuación de $\mathcal{E}$ es $(x-1)^2+\dfrac{y^2}{4}+(z-1)^2=1$.

   Esbozamos en la siguiente figura la gráfica de $\mathcal{E}$.



6.3.2 Hiperboloides y conos

Analizaremos ahora qué superficies del espacio describe una ecuación del tipo (6.12) cuando uno de los sumandos del lado izquierdo es negativo.

Consideremos el lugar geométrico $\mathcal{H}$ del espacio dado por la ecuación
$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1} \tag{6.17}$$
$\mathcal{H}$ se denomina **hiperboloide de una hoja** y el punto $C(x_0,y_0,z_0)$ se denomina **centro** del hiperboloide. Para estudiar qué propiedades tiene esta superficie, procederemos de manera similar a como lo hicimos con el estudio de los elipsoides.

Analizaremos primero las trazas de $\mathcal{H}$ sobre los planos paralelos a los planos coordenados que pasan por C.

Si cortamos $\mathcal{H}$ con el plano π_1 paralelo al plano yz por C, obtenemos una hipérbola dada en el espacio por el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} - \dfrac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \\ x = x_0 \end{cases}$$

o sea, es una hipérbola en el plano π_1 con eje focal paralelo el eje y. De manera análoga, la traza de $\mathcal{H}$ sobre el plano π_2 paralelo al plano xz por C es una hipérbola con eje focal el eje paralelo al eje x dada por el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \\ y = y_0 \end{cases}$$

y la traza sobre el plano π_3 paralelo al plano xy por C es la elipse en π_3 dada por

$$\begin{cases} \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \\ z = z_0 \end{cases}$$

No aporta mayores datos estudiar la intersección de $\mathcal{H}$ con planos paralelos a los planos xz e yz, que en la mayoría de los casos serán hipérbolas. Si nos intersa en cambio estudiar las trazas de $\mathcal{H}$ sobre los planos α_k de ecuación $z = k$.

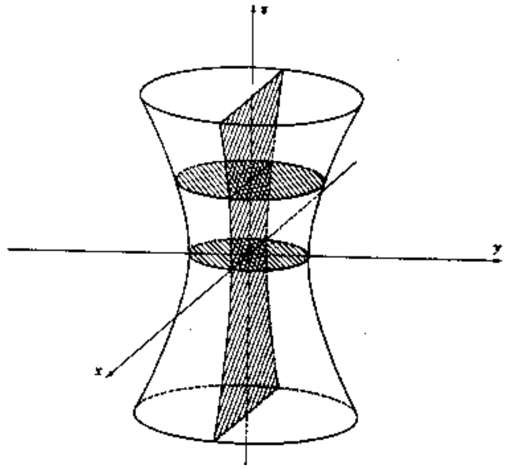
En este caso, tendremos curvas dadas por

$$\begin{cases} \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 + \dfrac{(k-z_0)^2}{c^2} \\ z = k \end{cases}$$

que son siempre elipses, dado que $1 + \frac{(k-z_0)^2}{c^2} > 0$.

La elipse $\mathcal{H} \cap \alpha_k$ está centrada en el punto $P_k(x_0, y_0, k)$. Es decir, todos sus centros están sobre la recta paralela al eje z que pasa por el centro del hiperboloide. Dejamos como ejercicio verificar que los cuatro vértices de todas estas elipses están sobre las hipérbolas $\mathcal{H} \cap \pi_1$ o $\mathcal{H} \cap \pi_2$.

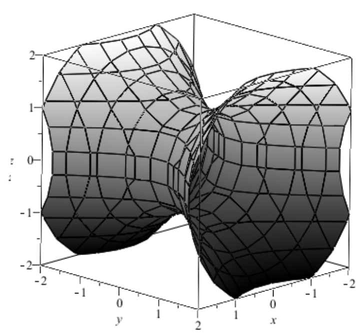
Mostramos en la siguiente figura un esbozo de la gráfica de $\mathcal{H}$ con las distintas trazas. El centro en este caso es el origen de coordenadas, pero la gráfica es análoga cuando el centro es un punto C cualquiera.

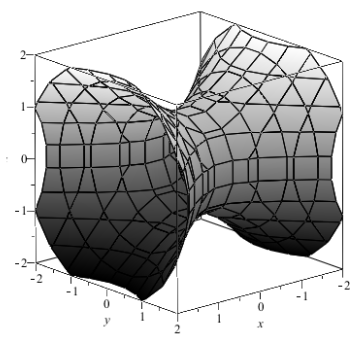


Observemos que si la ecuación de $\mathcal{H}$ fuese de la forma

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \quad \text{o} \quad -\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$

su grafica sería respectivamente de la siguiente forma:





Analizaremos ahora el caso en que dos de los sumandos del lado izquierdo en la ecuación (6.12) son negativos. Sea entonces $\mathcal{H}$ el lugar geométrico del espacio dado por la ecución

$$\boxed{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1.} \tag{6.18}$$

$\mathcal{H}$ se denomina **hiperboloide de dos hojas** y el punto $C(x_0, y_0, z_0)$ es su centro.

Nuevamente comenzamos determinando las trazas sobre los planos paralelos a los planos coordenados por C. Cuando intersecamos $\mathcal{H}$ con el plano π_1 de ecuación $z = z_0$, obtenemos que las coordenadas de los puntos $P(x, y, z)$ que estén en esta intersección deben verificar

$$\begin{cases} -\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{c^2} = 1 \\ z = z_0 \end{cases}$$

Con lo cual

$$\mathcal{H} \cap \pi_1 = \emptyset.$$

Cuando intersecamos $\mathcal{H}$ con el plano π_2 de ecuación $y = y_0$, obtendremos una curva cuyos puntos deberán verificar

$$\begin{cases} -\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \\ y = y_0 \end{cases}$$

que es una hipérbola en el plano π_2 con eje focal paralelo el eje z y vértices $V_1(x_0, y_0, z_0+c)$, $V_2(x_0, y_0, z_0 - c)$.

Finalmente cuando intersecamos $\mathcal{H}$ con el plano π_3 de ecuación $x = x_0$ obtendremos una curva cuyos puntos deberán verificar

$$\begin{cases} -\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} + \dfrac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \\ x = x_0 \end{cases}$$

que es nuevamente una hipérbola, ahora en el plano π_3, con eje focal paralelo al eje z y los mismos vértices $V_1(x_0, y_0, z_0 + c)$, $V_2(x_0, y_0, z_0 - c)$.

Observemos que si bien $\mathcal{H}$ tiene intersección vacía con el plano π_1, cuando consideramos la intersección con planos α_k paralelos a éste, es decir, de ecuación $z = k$, obtenemos que los puntos $P(x, y, z)$ de la intersección verifican

$$\begin{cases} \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = \dfrac{(k-z_0)^2}{c^2} - 1 \\ z = k \end{cases}$$

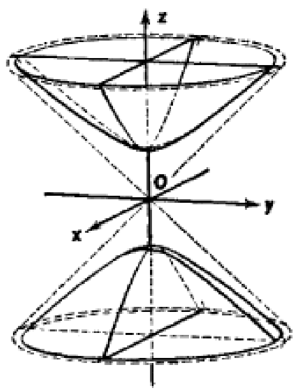
Luego la intersección $\mathcal{H} \cap \alpha_k$ es uno de los vértices V_1 o V_2 en caso que $|k - z_0| = c$, la intersección es vacía si $|k - z_0| < c$, o sea, si $z_0 - c < k < z_0 + c$, y es una elipse en el plano $z = k$ si $|k - z_0| > c$.

Observemos además que en este último caso, la elipse $\mathcal{H} \cap \alpha_k$ está dada por

$$\begin{cases} \dfrac{(x-x_0)^2}{A_k^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{B_k^2} = 1 \\ z = k \end{cases}$$

con $A_k^2 = a^2 \cdot \left(\dfrac{(k-z_0)^2}{c^2} - 1 \right)$ y por lo tanto $A_k \to \infty$ a medida que $|k - z_0| \to \infty$. Lo mismo ocurre con B_k. Es decir, las elipses se hacen cada vez más grandes a medida que nos alejamos del centro del hiperboloide.

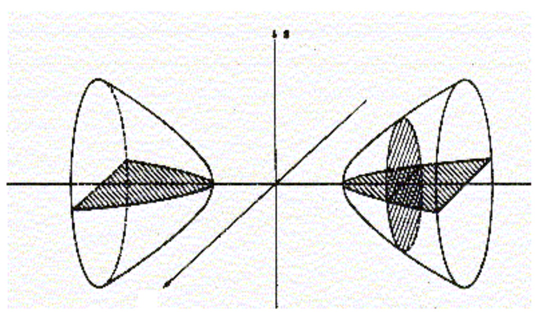
Esbozamos la gráfica de $\mathcal{H}$ en la siguiente figura, cuando C es el origen de coordenadas. La gráfica es análoga cuando C es un punto cualquiera del espacio.



Si la ecuación de $\mathcal{H}$ fuese de la forma

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$

un análisis análogo muestra que la gráfica deberá ser de la forma



Dejamos como ejercicio esbozar la gráfica del lugar geométrico que se obtiene cuando el coeficiente que acompaña a $(x - x_0)^2$ es positivo.

Finalizamos esta sección estudiando las ecuaciones del tipo (6.13). Observemos que los únicos lugares geométricos no vacíos son los descriptos por alguna de las siguientes tres versiones:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\frac{(z-z_0)^2}{c^2}, \tag{6.19}$$

$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=\frac{(x-x_0)^2}{a^2} \quad o \tag{6.20}$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=\frac{(y-y_0)^2}{b^2}. \tag{6.21}$$

Cualquiera de estos lugares geométricos se denominan **conos elípticos** de vértice $V(x_0, y_0, z_0)$.

Analizaremos el caso del cono $\mathcal{C}$ dado por la ecuación

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\frac{(z-z_0)^2}{c^2}.} \tag{6.22}$$

Si intesecamos $\mathcal{C}$ con el plano π_1 de ecuación $z = z_0$ obtenemos el vértice V del cono.

Si intersecamos $\mathcal{C}$ con el plano π_2 de ecuación $y = y_0$ obtenemos que un punto $P(x, y, z)$ pertenece a esta intersección si y sólo si sus coordenadas verifican

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}=\dfrac{(z-z_0)^2}{c^2}\\ y=y_0\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}|x-x_0|=\dfrac{a}{c}|z-z_0|\\ y=y_0\end{array}\right.$$

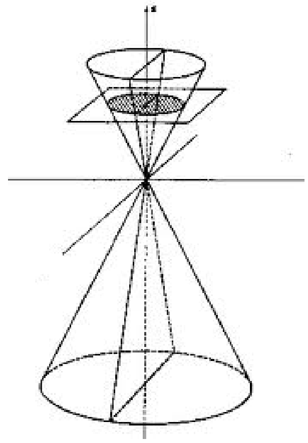
O sea que $\mathcal{C}\cap\pi_2$ es un par de rectas que se intersecan en V. Lo mismo ocurre si intersecamos $\mathcal{C}$ con el plano π_3 de ecuación $x = x_0$.

Si ahora consideramos las intersecciones de $\mathcal{C}$ con planos α_k de ecuación $z = k$, obtenemos que los puntos de la intersección verifican

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=\dfrac{(k-z_0)^2}{c^2}\\ z=k\end{array}\right.$$

que es una elipse en el plano α_k siempre que $k \neq z_0$. Más aún, con el mismo análisis al que hicimos para el hiperboloide de dos hojas, vemos que estas elipses aumentan su tamaño a medida que nos alejamos del vértice.

Esbozamos la gráfica de $\mathcal{C}$ en la siguiente figura:



<u>**Ejemplos:**</u>

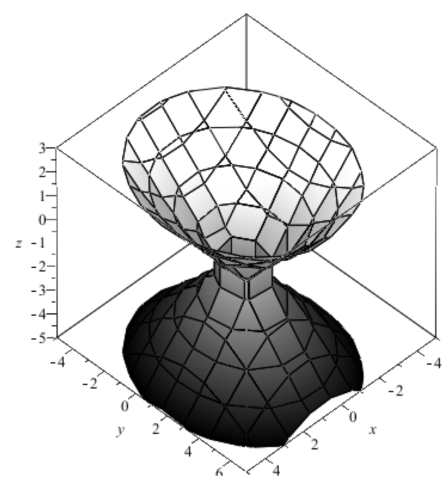
1. Consideremos el lugar geométrico $\mathcal{L}$ del espacio definido por la ecuación

$$x^2 + \frac{1}{2}y^2 - z^2 - 2x - 2y - 2z + 1 = 0.$$

Completando cuadrados, vemos que esta ecuación es equivalente a

$$(x-1)^2 + \frac{(y-2)^2}{2} - (z+1)^2 = 1.$$

Luego $\mathcal{L}$ es un hiperboloide de una hoja centrado en $P_0(1, 2, -1)$ cuya gráfica se esboza en la siguiente figura.



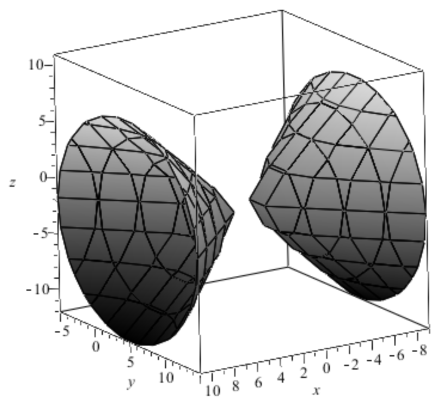
2. Consideremos el lugar geométrico $\mathcal{L}$ de ecuación

$$x^2 - y^2 - z^2 - 2x + 10y - 4z - 29 = 0$$

Completando cuadrados, obtenemos que esta ecuación es equivalente a

$$(x-1)^2 - (y-5)^2 - (z+2)^2 = 1.$$

Por lo tanto $\mathcal{L}$ es un hiperboloide de dos hojas centrado en $(1, 5, -2)$ cuya gráfica se esboza a continuación:



6.3.3 Superficies parabólicas y cilindros

Comenzaremos esta sección estudiando los lugares geométricos descriptos por las ecuaciones del tipo (6.14)

Supongamos primero que ambos sumandos del lado izquierdo de la ecuación son positivos. Tendremos entonces una ecuación del tipo

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \frac{z-z_0}{c}} \tag{6.23}$$

Sea $\mathcal{P}$ el lugar geométrico que describe esta ecuación. $\mathcal{P}$ se denomina **paraboloide elíptico** y el punto $V(x_0, y_0, z_0)$ es su **vértice**.

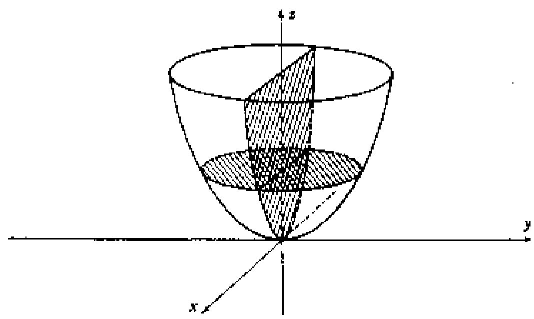
Si intersecamos $\mathcal{P}$ con el plano π_1 de ecuación $z = z_0$, obtenemos su vértice V.

Si intersecamos $\mathcal{P}$ con el plano π_2 de ecuación $y = y_0$, obtendremos una parábola con vértice en V contenida en el plano π_2, cuya directriz es paralela al eje x (su eje es paralelo al eje z) y contenida en el semiplano $y = y_0,\ z \geq z_0$ si $c > 0$ o en el semiplano $y = y_0,\ z \leq z_0$ si $c < 0$.

Obtenemos un resultado análogo si intersecamos $\mathcal{P}$ con el plano π_3 de ecuación $x = x_0$.

Si ahora intersecamos $\mathcal{P}$ con planos α_k de ecuación $z = k$, obtendremos elipses para los valores $k > z_0$ y vacío para $k < z_0$ si $c > 0$, o elipses para los valores $k < z_0$ y vacío para $k > z_0$ en el caso que $c < 0$.

En el caso $c > 0$ y $V = (0, 0, 0)$ la gráfica de $\mathcal{P}$ es la siguiente:



Si $c < 0$ y $V(0, 0, 0)$, la gráfica de $\mathcal{P}$ es simétrica de la anterior respecto del plano $z = z_0$, o sea, está contenida en el semiespacio $z \leq z_0$.

En caso que el vértice V sea un punto arbitrario o que en la ecuación (6.23) los roles entre x, y y z estén intercambiados, las gráficas son análogas.

Consideremos ahora el lugar geométrico $\mathcal{P}'$ descripto por la ecuación

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \frac{z-z_0}{c}} \tag{6.24}$$

$\mathcal{P}'$ se denomina **paraboloide hiperbólico**.

Si intersecamos $\mathcal{P}'$ con el plano π_1 de ecuación $y = y_0$, obtenemos una parábola p_1 de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} = \dfrac{z-z_0}{c} \\ y = y_0 \end{cases}$$

es decir, una parábola en el plano π_1 con vértice en $V(x_0, y_0, z_0)$, directriz paralela al eje x (el eje de la parábola es paralelo al eje z) y contenida en el semiplano $y = y_0,\ z \geq z_0$ si $c > 0$ y contenida en el semiplano $y = y_0,\ z \leq z_0$ si $c < 0$.

Si intersecamos $\mathcal{P}'$ con el plano π_2 dado por $x = x_0$, obtenemos una parábola p_2 de ecuaciones

$$\begin{cases} -\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = \dfrac{z-z_0}{c} \\ x = x_0 \end{cases}$$

es decir, una parábola en el plano π_2 con vértice en $V(x_0, y_0, z_0)$, directriz paralela al eje x (el eje de la parábola es paralelo al eje z) y contenida en el semiplano $y = y_0,\ z \leq z_0$ si $c > 0$ o en el semiplano $y = y_0,\ z \geq z_0$ si $c < 0$.

Finalmente, si intersecamos $\mathcal{P}'$ con el plano π_3 de ecuación $z = z_0$ obtenemos una curva de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} = \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} \\ z = z_0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |x - x_0| = \dfrac{a}{b}|y - y_0| \\ z = z_0 \end{cases}$$

que representa dos rectas que se intersecan en V.

Si ahora consideramos la intersección de $\mathcal{P}'$ con planos de ecuación $x = k$, obtenemos una curva de ecuaciones

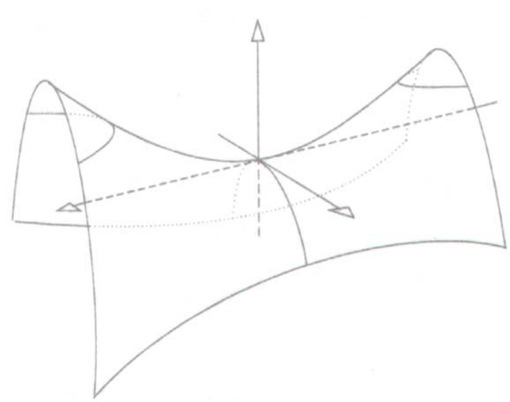
$$\begin{cases} \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} - \dfrac{(k-x_0)^2}{a^2} = -\dfrac{z-z_0}{c} \\ x = k \end{cases}$$

que representa una parábola en el plano $x = k$ cuya directriz es paralela al eje y y su eje de simetría es paralelo al eje z. Luego su vértice se obtiene de intersecarla con el plano $y = y_0$.

Por otra parte, como $\mathcal{P}'$ intersecado con el plano $y = y_0$ es la parábola p_1, obtenemos que estas nuevas parábolas en los planos de ecuación $x = k$ tienen sus vértices sobre la parábola p_2.

Si ahora intersecamos $\mathcal{P}'$ con planos de la forma $z = k$ obtendremos hipérbolas. Dejamos como ejercicio verificar que si $c > 0$, entonces estas hipérbolas tienen eje focal paralelo al eje y y sus vértices sobre la parábola p_1 si $k > z_0$ y eje focal paralelo al eje z y sus vértices sobre la parábola p_2 si $k < z_0$.

Esbozamos la gráfica de $\mathcal{P}'$ cuando $V(0, 0, 0)$ a continuación:



Analicemos finalmente qué ocurre si en la ecuación (6.11) tenemos los dos coeficientes que acompañan a una misma variable iguales a cero.

O sea, tenemos una ecuación de alguna de las

$$\boxed{Ax^2 + By^2 + Gx + Hy + J = 0, \quad By^2 + Cz^2 + Hy + Iz + J = 0, \quad Ax^2 + Cz^2 + Gx + Iz + J = 0} \tag{6.25}$$

No debemos confundir la ausencia de una variable en (6.25) con el hecho de que estas ecuaciones representan, en general, una superficie en el espacio y NO una curva.

De hecho sea $\mathcal{C}$ el lugar geométrico que define, por ejemplo, la ecuación

$$Ax^2 + By^2 + Gx + Hy + J = 0.$$

Si intersecamos $\mathcal{C}$ con el plano xy, obtendremos una curva de ecuaciones

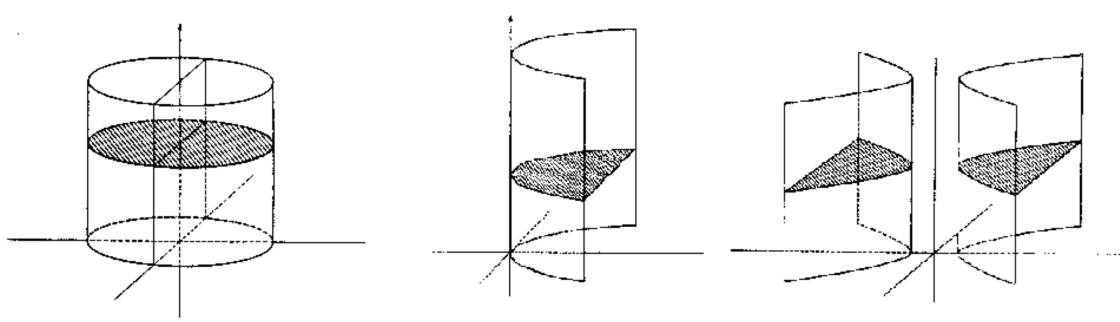
$$\begin{cases} Ax^2 + By^2 + Gx + Hy + J = 0 \\ z = 0 \end{cases} \tag{6.26}$$

que representa una cónica en el plano xy (o una cónica degenerada). Si tomamos un punto $(x_0, y_0, 0)$ de esta curva, podemos verificar fácilmente que la recta de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

está completamente contenida en $\mathcal{C}$. Por lo tanto, para esbozar la gráfica de $\mathcal{C}$ debemos graficar sobre el plano xy la cónica correspondiente, y todas las rectas perpendiculares al plano xy por puntos de la cónica.

Obtenemos así un **cilindro generalizado** como mostramos en la siguiente figura:



La cónica descripta por 6.26 se denomina **directriz** del cilindro y cada una de las rectas paralelas al eje z (es este caso) por puntos de la cónica se denominan **generatrices** del cilindro.

En el caso que (6.26) sea una cónica degenerada, (6.25) representará:

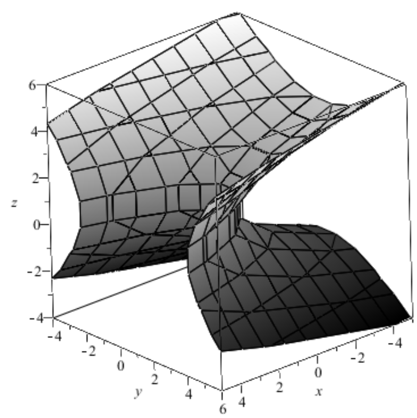
- dos planos secantes, en caso que (6.26) represente dos rectas secantes;
- dos planos paralelos en caso que (6.26) represente dos rectas paralelas;
- una recta perpendicular a algún plano coordenado en caso que (6.26) represente un punto;
- o el vacío en caso que (6.26) sea el conjunto vacío.

Ejemplos:

1. El lugar geométrico de ecuación

$$\frac{(y-1)^2}{4} - \frac{(z-1)^2}{3} = \frac{x}{2}$$

representa un paraboloide hiperbólico centrado en $P_0(0,1,1)$ y su gráfica se esboza en la siguiente figura:



2. Consideremos el lugar geométrico $\mathcal{L}$ en el espacio de ecuación

$$x^2 - y^2 - 2x + 4y - 3 = 0.$$

La ausencia de la variable z nos indica que $\mathcal{L}$ será un cilindro. Completando cuadrados obtenemos que la ecuación de $\mathcal{L}$ es

$$(x-1)^2 - (y-2)^2 = 0.$$

Luego $\mathcal{L}$ es un cono con generatrices paralelas al eje z y directriz la unión de las dos rectas $x - 1 = y - 2$, $x - 1 = 2 - y$. En particular, $\mathcal{L}$ es la unión de dos planos.

3. Si ahora $\mathcal{L}$ es el lugar geométrico de ecuación

$$x^2 - y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

completando cuadrados obtenemos que esta ecuación es equivalente a

$$(x-1)^2 - (y-2)^2 = 1$$

que representa un cilindro cuya generatriz es una hipérbola.

6.4 Curvas en el espacio

Como hemos ya visto en la sección anterior y cuando estudiamos la recta en el espacio, prácticamente nunca podremos describir una curva en el espacio a través de una ecuación en tres variables, pues la mayoría de estas ecuaciones, salvo algunos casos degenerados, representan superficies.

Es cierto, por ejemplo, que las ecuaciones

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 0, \quad (y-7)^{10} + (z-2)^{10} = 0, \quad (x+1)^4 + (z+2)^4 = 0$$

representan rectas en el espacio. La primera es la recta paralela al eje z por el punto de coordenadas $(1,1,0)$, la segunda es la recta paralela al eje x por el punto de coordenadas $(0,7,2)$ y la tercera representa una recta paralela al eje y por el punto de coordenadas $(-1,0,-2)$.

Sin embargo estas son excepciones.

En general, para describir una recta en el espacio necesitamos definirla como intersección de dos planos y por lo tanto sus ecuaciones cartesianas están dadas por un sistema de dos ecuaciones en las variables x, y y z.

De manera análoga, si pretendemos por ejemplo describir la circunferencia de radio 1, centrada en el origen y contenida en el plano xy, no podemos representarla mediante la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1$$

pues esta ecuación, en el espacio, es la ecuación de un cilindro circular recto. Sin embargo, la circunferencia es la intersección de este cilindro con el plano xy y por lo tanto las coordenadas de sus puntos verificaran el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases} .$$

Otra forma de obtenerla, es intersecando una esfera de radio 1 centrada en el origen con el plano xy, y por lo tanto también podemos describirla mediante las ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases} .$$

En general, para dar las ecuaciones cartesianas de una curva en el espacio, debemos considerarla como intersección de dos superficies, y por lo tanto una curva está descrita por un sistema de ecuaciones y no por una única ecuación.

Si $\mathcal{S}$ es una superficie en el espacio, su ecuación viene dada por

$$F(x, y, z) = 0$$

donde F es una función en tres variables (por supuesto no todas las superficies en el espacio admiten una descripción de este tipo, pero no las estudiaremos aquí).

Por ejemplo, en el caso de un elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

la función F que lo define es

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1.$$

En el caso de una esfera de radio r centrada en (x_0, y_0, z_0), la función asociada es

$$F(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - r^2.$$

De esta manera, si $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son dos superficies de ecuaciones $F_1(x, y, z) = 0$ y $F_2(x, y, z) = 0$ respectivamente, y $S_1 \cap S_2$ es una curva γ, las ecuaciones cartesianas de γ vendrán dadas por el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{array} \right. .$$

No existe una teoría general sobre cómo son las ecuaciones de determinadas curvas en función de las superficies que las definen al intersecarse. De hecho existen muchas formas distintas de definir una misma curva como intersección de dos superficies. Trabajaremos por lo tanto con algunos ejemplos particulares.

Ejemplos:

1. Supongamos que queremos encontrar las ecuaciones de una circunferencia de radio 3 con centro en $P_0(1, 2, 3)$ contenida en el plano de ecuación

   $$2x - y + z - 3 = 0.$$

   Observemos primero que P_0 pertenece efectivamente al plano. Esta circunferencia puede obtenerse intersecando el plano con una esfera de centro en P_0 y radio 3. Por lo tanto sus ecuaciones serán

   $$\left\{ \begin{array}{l} (x - 1)^2 + (y - 2)^3 + (z - 3)^2 = 9 \\ 2x - y + z - 3 = 0 \end{array} \right.$$

2. Consideremos la curva γ dada por las ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(z-3)^2}{8} = 1 \\ z = 5 \end{cases}$$

La ecuación

$$\frac{x^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(z-3)^2}{8} = 1 \tag{6.27}$$

representa un elipsoide con centro en el punto $O'(0,1,3)$ y la ecuación $z = 5$ es un plano π (paralelo al plano xy). Por lo tanto si γ realmente es una curva (o sea no es vacío ni un vértice del elipsoide) será una elipse en el plano π. Reemplazando con $z = 5$ en la ecuación (6.27) obtenemos que las coordenadas de los puntos de γ verifican

$$\begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{2} = \frac{1}{2} \\ z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{4} + (y-1)^2 = 1 \\ z = 5 \end{cases}$$

Por lo tanto γ es una elipse en el plano π con centro en el punto $C(0,1,5)$ y con $a = 2$, $b = 1$. Por lo tanto sus vértices son los puntos $V_1(2,1,5)$, $V_2(-2,1,5)$, $V_3(0,0,5)$ y $V_4(0,2,5)$.

Observemos que existen infinitas formas de representar a γ. Por ejemplo

$$\begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(z-5)^2}{c^2} = 1 \\ z = 5 \end{cases}$$

para cualquier valor de c que representa la intersección de un elipsoide con un plano.

Otra forma de describir γ es directamente mediante el sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + (y-1)^2 = 1 \\ z = 5 \end{cases}$$

que representa la intersección de un cilindro elíptico con un plano.

Finalmente proponemos el sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + (y-1)^2 + \frac{(z-5)^2}{12} = 1 \\ \frac{x^2}{4} + (y-1)^2 - \frac{(z-5)^2}{3} = 1 \end{cases}$$

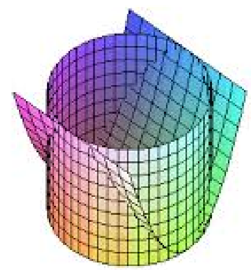
que representa la intersección en γ de un elipsoide con un hiperboloide de una hoja.

3. Analicemos la curva dada por el siguiente sistema de ecuaciones:

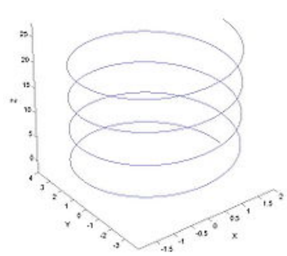
$$\gamma) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = x^2 \end{cases}$$

Entonces γ se obtiene como la intersección de un cilindro circular con eje el eje z, y un cilindro parabólico cuyas generatrices son paralelas al eje y.

Este es el primer ejemplo de una curva no plana (o sea, que no está contenida en un plano) de los que hemos visto. Esbozamos su gráfica en la siguiente figura:



No todas las curvas en el espacio pueden describirse como intersección de dos superficies. Es el caso de la **hélice cilíndrica** que mostramos en la siguinte figura:



Para describir la hélice y muchas otras curvas en el espacio, necesitamos de las **ecuaciones paramétricas**.

Como ya hemos visto en el caso de la recta y de las secciones cónicas, dar las ecuaciones paramétricas de una curva consiste en describir las coordenadas (x, y, z) de los puntos de la curva (o (x, y) en el caso de curvas planas) en función de un parámetro. Es decir, dada una curva γ, sus ecuaciones paramétricas serán de la forma

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array}\right. \ , \ t \in I} \tag{6.28}$$

donde I es algún subintervalo de $\mathbb{R}$ o todo $\mathbb{R}$.

En el caso de una curva en el plano, tendremos por supuesto ecuaciones del tipo

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right. \ , \ t \in I.} \tag{6.29}$$

En el caso de una recta en el espacio que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ en la dirección del vector $\overline{u} = (u_1, u_2, u_2)$, vimos que $I = \mathbb{R}$ y en (6.28) debemos definir

$$x(t) = x_0 + tu_1, \quad y(t) = y_0 + tu_2, \quad z(t) = z_0 + tu_3.$$

O en el caso de una elipse en el plano con centro en $P_0(x_0, y_0)$, $I = [0, 2\pi)$ y debemos definir en (6.29)

$$x(t) = x_0 + a \cos t, \quad y(t) = y_0 + b \sin t.$$

No existe una teoría general para encontrar las ecuaciones paramétricas de una curva, o para determinar que curva representan determinadas ecuaciones paramétricas.

Observemos que $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ pueden pensarse como funciones reales, cuyo dominio es un intervalo de $\mathbb{R}$, es decir, tenemos

$$x : I \to \mathbb{R}, \quad y : I \to \mathbb{R}, \quad z : I \to \mathbb{R}.$$

y es común pedir como condición mínima para la definición de curva que las funciones x, y y z sean funciones **continuas**. Esto se interpreta como que es posible realizar el gráfico de la curva sin levantar el lápiz.

De esta manera puede definirse una **curva en el espacio** como cualquier lugar geométrico tal que las coordenadas de sus puntos pueden definirse a través de ecuaciones del tipo (6.28) donde x, y y z son funciones continuas de t.

Una definición análoga puede hacerse para curvas en el plano.

Observemos que con esta definición, la hipérbola no es técnicamente una curva sino la unión de dos curvas, y es por ello que cuando quisimos encontrar sus ecuaciones paramétricas debimos parametrizar por separado cada una de sus ramas.

Finalizaremos esta sección analizando varios ejemplos.

Ejemplos:

En los primeros ejemplos encontraremos las ecuaciones paramétricas de las curvas que definimos como intersección de dos superficies en los ejemplos anteriores. Dejaremos la circunferencia del ejemplo 1 para el final.

4. Analicemos la elipse dada en el ejemplo 2 de esta sección. Observemos primero que el sistema original es equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + (y-1)^2 = 1 \\ z = 5 \end{cases}$$

y por lo tanto el centro es $P_0(0, 1, 5)$, el eje focal es paralelo al eje x, la distancia entre el centro y cada uno de los vértices sobre el eje focal es 2 y la distancia entre el centro y cada uno de los otros vértices es 1. Luego podemos usar lo que sabemos sobre elipses en el plano para determinar que sus ecuaciones paramétricas son

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2\cos\theta \\ y = 1 + \sin\theta \\ z = 5 \end{array}\right. , \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

5. Consideremos ahora la curva dada en el ejemplo 3, llamémosla γ. En este caso, veremos como a partir de las ecuaciones cartesianas podemos derivar las ecuaciones paramétricas. Sea $P(x, y, z)$ un punto de γ. Observemos primero que sus coordenadas x e y verifican la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1.$$

   Por lo tanto deberá existir un número real θ tal que

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta.$$

   Como además debe verificarse que $z = x^2$, resulta inmediato que las ecuaciones paramétricas de γ son

$$\left\{\begin{array}{l} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \\ z = \cos^2\theta \end{array}\right. , \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

6. Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia dada en el ejemplo 1 de esta sección. Su centro es el punto $P_0(1, 2, 3)$, su radio es 3, y está contenida en el plano π de ecuación $2x - y + z - 3 = 0$.

   Observemos primero que los vectores $\overline{v}_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, -1)$ y $\overline{v_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(0, 1, 1)$ constituyen una base ortonormal de los vectores paralelos a π. En efecto, es fácil verificar que $\overline{v_1} \times \overline{v_2} = 0$, lo que implica que $\overline{v_1}$ y $\overline{v_2}$ son perpendiculares, que $|\overline{v_1}| = |\overline{v_2}| = 1$, y si $\overline{n} = (2, -1, 1)$ es el vector normal a $\overline{n}$, entonces $\overline{v_1} \times \overline{n} = \overline{v_2} \times \overline{n} = 0$, lo que implica que $\overline{v_1}$ y $\overline{v_2}$ son paralelos a π.

   Consideremos ahora un punto P en $\mathcal{C}$. Entonces como $\overrightarrow{P_0P}$ es un vector paralelo a π, existirán constantes a y b tales que

$$\overrightarrow{P_0P} = a\overline{v_1} + b\overline{v_2}.$$

   Haciendo el producto interno con $\overline{v_1}$ y $\overline{v_2}$, como $|\overrightarrow{P_0P}| = 3$, resulta inmediato que

$$a = \overrightarrow{P_0P} \times \overline{v_1} = 3\cos(\widehat{\overrightarrow{P_0P}, \overline{v_1}}); \quad b = \overrightarrow{P_0P} \times \overline{v_2} = 3\cos(\widehat{\overrightarrow{P_0P}, \overline{v_2}}).$$

   Sea θ el ángulo que forman $\overrightarrow{P_0P}$ y $\overline{v_1}$, con $\theta \in [0, 2\pi]$, orientado en el sentido de recorrido que va de $\overline{v_1}$ a $\overline{v_2}$. Entonces $(\widehat{\overrightarrow{P_0P}, \overline{v_2}}) = \frac{\pi}{2} - \theta$ y por lo tanto

$$a = 3\cos\theta, \quad b = 3\sin\theta.$$

Concluimos que $\overrightarrow{P_0P} = 3\cos\theta\,\overline{v_1} + 3\sin\theta\,\overline{v_2}$.

Por otra parte, si $P(x, y, z)$, $\overrightarrow{P_0P} = (x-1, y-2, z-3)$, e igualando componentes en la ecuación anterior resulta

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{3}\cos\theta \\ y = 2 + \sqrt{3}\cos\theta + \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin\theta \\ z = 3 - \sqrt{3}\cos\theta + \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin\theta \end{array}\right. ,\ \theta \in [0, 2\pi).$$

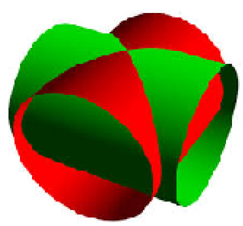
7. Consideremos la curva γ cuyas ecuaciones paramétricas son

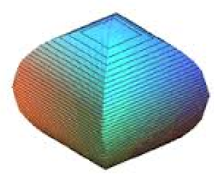
$$\left\{\begin{array}{l} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \\ z = \sin\theta \end{array}\right. ,\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Observemos que entonces las coordenadas de un punto $P(x, y, z)$ de γ verifican las ecuaciones

$$x^2 + y^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \quad x^2 + z^2 = \cos^2 + \sin^2\theta = 1$$

y por lo tanto γ una de las dos curvas que se obtienen de intersecar dos cilindros.





De hecho, el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + z^2 = 1 \end{array}\right.$$

define dos curvas. Una es la curva γ, y la otra es la curva dada por las ecuaciones paramétricas

$$\left\{\begin{array}{l} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \\ z = -\sin\theta \end{array}\right. ,\ \theta \in \mathbb{R}.$$

8. Una hélice cilíndrica es una curva sobre un cilindro circular recto de modo que la coordenada z de sus puntos es proporcional al ángulo que forma la proyección del vector posición del punto sobre el plano xy con el versor $\overline{i}$.

   Supongamos que $P(x, y, z)$ es un punto de la hélice sobre un cilindro cuya base es un círculo de radio a. Entonces la proyección del vector posición $\overrightarrow{OP}$ sobre el plano xy es el vector $\overline{v} = (x, y, 0)$. Sea θ el ángulo (orientado) que forma $\overline{v}$ con el versor $\overline{i}$. Entonces es claro que

   $$x = a\cos\theta, \quad y = b\cos\theta$$

   y por definición, debe existir un número real k de modo que $z = k\theta$. Luego sus ecuaciones paramétricas son

   $$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = k\theta \end{cases}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

   Observemos que si r es una generatriz del cilindro que pasa por un punto $(x_0, y_0, 0)$ de la base, sus ecuaciones cartesianas son

   $$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}.$$

   Sea θ_0 tal que $x_0 = a\cos\theta_0$, $y_0 = a\sin\theta_0$ y sea P_n el punto de la hélice que describen los parámetros $\theta_0 + 2\pi n$, con $n \in \mathbb{Z}$.

   Entonces P_n tiene coordenadas $(a\cos(\theta_0 + 2\pi n), a\sin(\theta_0 + 2\pi n), k(\theta_0 + 2\pi n)) = (x_0, y_0, k(\theta_0 + 2\pi n))$.

   Es decir, todos los puntos P_n están sobre la recta r y la distancia entre dos puntos consecutivos es $2\pi k$.

   El número $2\pi k$ se denomina **paso** de la hélice.

6.5 Superficies parametrizadas y superficies de revolución

Al igual que hemos encontrado ecuaciones paramétricas de las curvas, podemos encontrar ecuaciones paramétricas de una superficie. No todas las superficies admiten ecuaciones paramétricas, nos dedicaremos en esta sección a estudiar algunos casos importantes.

Recordemos que un plano que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y tiene come vectores dirección los vectores $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$, admite ecuaciones paramétricas de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x = x_0 + s\,u_1 + t\,v_1 \\ y = y_0 + s\,u_2 + t\,v_2 \\ z = z_0 + s\,u_3 + t\,v_3 \end{cases}, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Esto nos indica que así como las curvas (en el plano o en el espacio) pueden ser descritas utilizando un parámetro, para parametrizar los puntos de una superficie necesitaremos dos parámetros.

De esta manera, decimos que una superficie admite **ecuaciones paramétricas** si las coordenadas de sus puntos pueden obtenerse en función de dos parámetros. En ese caso, genéricamente expresamos las ecuaciones paramétricas de una superficie como

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = x(s,t) \\ y = y(s,t) \\ z = z(s,t) \end{array}\right. \quad , \quad s \in I, \ t \in J} \tag{6.30}$$

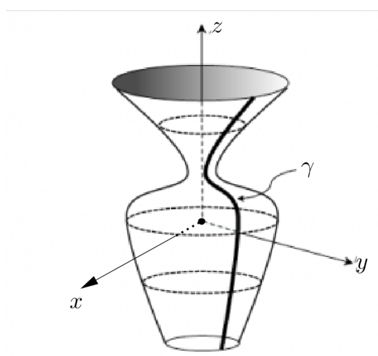
Comenzaremos introduciendo un nuevo tipo de superficies, denominadas **superficies de revolución**.

Supongamos que tenemos una curva γ contenida en el semiplano del plano yz definido por aquellos puntos con $y \geq 0$. Entonces las coordenadas de los puntos de γ pueden ser parametrizadas como

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \alpha(t) \qquad t \in I \\ z = \beta(t) \end{array}\right.$$

(decidimos cambiar el nombre de las funciones que parametrizan la curva para evitar confusiones con las funciones que parametrizan las respectivas coordenadas en la superficie).

Sea S la superficie que se genera al rotar γ alrededor del eje z.



Sea $P(x,y,z)$ un punto de S. Observemos que si intersecamos S con el plano paralelo π al plano xy que pasa por P (o sea, el perpendicular al eje z por P), obtenemos una circunferencia $\mathcal{C}$ con centro en el punto de coordenadas $(0,0,z)$.

Por otra parte, $\mathcal{C}$ intersecará a γ en un punto. Por lo tanto, existirá un parámetro t tal que este punto de intersección puede representarse como

$$(0, \alpha(t), \beta(t)).$$

Es claro entonces que el radio de $\mathcal{C}$ es $y(t)$ y que todos los puntos del plano π (y por lo tanto de $\mathcal{C}$) tienen componente $z = \beta(t)$.

$\mathcal{C}$ tiene por lo tanto ecuaciones paramétricas de la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \alpha(t)\cos\theta \\ y = \alpha(t)\sin\theta \\ z = \beta(t) \end{array} \right. , \; \theta \in [0, 2\pi)$$

Observemos que el parámetro t en las ecuaciones anteriores está fijo. Hemos probado entonces que las coordenadas de cualquier punto de S pueden ser descritas como

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} x = \alpha(t)\cos\theta \\ y = \alpha(t)\sin\theta \\ z = \beta(t) \end{array} \right. , \; t \in I, \; \theta \in [0, 2\pi)} \tag{6.31}$$

y por lo tanto éstas son las ecuaciones paramétricas de S.

Si ahora suponemos que la curva está contenida en el semiplano del plano yz pero con $z \geq 0$ y giramos alrededor del eje z, obtendremos que las ecuaciones paramétricas de la superficie de revolución S generada son

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} x = \beta(t)\cos\theta \\ y = \alpha(t) \\ z = \beta(t)\sin\theta\beta(t) \end{array} \right. , \; t \in I, \; \theta \in [0, 2\pi)} \tag{6.32}$$

Si ahora tenemos una curva contenida en el plano xy que admite una parametrización de la forma $(\alpha(t), \beta(t), 0)$ con $\alpha(t) \geq 0$, la superficie de revolución que se obtiene de girar esta curva alrededor del eje y admite ecuaciones paramétricas de la forma

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} x = \alpha(t)\cos\theta \\ y = \beta(t) \\ z = \alpha(t)\sin\theta \end{array} \right. , \; t \in I, \; \theta \in [0, 2\pi)} \tag{6.33}$$

y si suponemos que $\beta(t) \geq 0$ y rotamos alrededor del eje x, sus ecuaciones serán de la forma

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} x = \alpha(t) \\ y = \beta(t)\cos\theta \\ z = \beta(t)\sin\theta \end{array} \right. , \; t \in I, \; \theta \in [0, 2\pi)} \tag{6.34}$$

Ecuaciones análogas pueden obtenerse cuando la curva está contenida en algún semiplano del plano xz (las analizaremos en la práctia).

Ejemplos:

1. Sea C un cilindro circular recto cuya base es una circunferencia de radio a. Entonces La intersección de C con el plano yz es la unión de las dos rectas de ecuaciones

$$y = a \quad \text{o} \quad y = -a.$$

Es claro que el cilindro es la superficie de revolución que se obtiene de rotar la recta de ecuación $y = a$ alrededor del eje z. Los puntos de esta recta admiten una parametrización de la forma $(0, a, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto para encontrar sus ecuaciones paramétricas debemos reemplazar en (6.31) con

$$\alpha(t) = a, \quad \beta(t) = t.$$

Luego las ecuaciones paramétricas del cilindro son

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},\ \theta \in [0, 2\pi).$$

2. Sea $\mathcal{S}$ una esfera centrada en el origan de radio a. Observemos que S es la superficie de revolución que se obtiene de girar una semicircunferencia de radio a contenida en el plano yz con $y \geq 0$. Esta semicircunferencia admite una parametrización de la forma

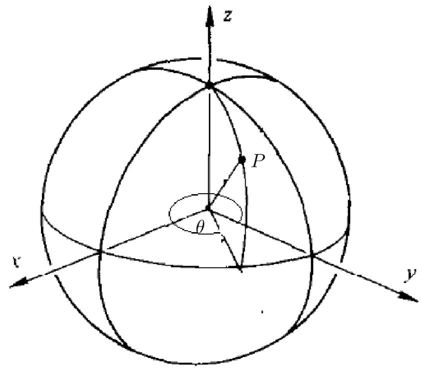
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = a\cos t \\ z = a\sin t \end{cases}, \quad t \in \left[\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right]$$

En este caso debemos reemplazar con

$$\alpha(t) = a\cos t, \quad \beta(t) = a\sin t$$

en (6.31) y obtenemos que la esfera de radio a admite las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = a\cos t\cos\theta \\ y = a\cos t\sin\theta \\ z = a\sin t \end{cases}, \quad t \in \left[\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right],\ \theta \in [0, 2\pi). \tag{6.35}$$



3. Supongamos ahora que S es una esfera con centro en $P_0(x_0, y_0, z_0)$ de radio a. Entonces sus ecuaciones cartesinas son

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2.$$

Sea $P(x, y, z) \in S$ y pongamos $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$, $z' = z - z_0$. Entonces el punto $P'(x', y', z')$ pertenece a la esfera centrada en el origen de radio a pues sus coordenadas verifican $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$. Luego existen parámetros t y θ de modo que (x', y', z') pueden ser parametrizados según las ecuaciones (6.35). Es decir, $x' = a \cos t \cos\theta$, etc. Luego las ecuaciones paramétricas de la esfera S son

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cos t \cos\theta \\ y = y_0 + a \cos t \sin\theta \\ z = z_0 + a \sin t \end{cases}, \quad t \in \left[\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right], \ \theta \in [0, 2\pi).$$

4. Sea $\mathcal{E}$ el elipsoide de ecuación cartesiana

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1.$$

Sea $P(x, y, z) \in \mathcal{E}$ y pongamos

$$x' = \frac{(x - x_0)^2}{a^2}, \quad y' = \frac{(y - y_0)^2}{b^2}, \quad z' = \frac{(z - z_0)^2}{c^2}.$$

Entonces $P'(x', y', z')$ trivialmente pertenece a la esfera centrada en el origen de radio 1. Por lo tanto sus coordenadas pueden expresarse como

$$\begin{cases} x' = \cos t \cos\theta \\ y' = \cos t \sin\theta \\ z' = \sin t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{x - x_0}{a} = \cos t \cos\theta \\ \frac{y - y_0}{b} = \cos t \sin\theta \\ \frac{z - z_0}{c} = \sin t \end{cases}.$$

Despejando obtenemos que las ecuaciones paramétricas de $\mathcal{E}$ son

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cos\, t\cos\theta \\ y = y_0 + b\cos\, t\sin\theta \\ z = z_0 + c\sin\, t \end{cases}, \quad t \in \left[\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right], \ \theta \in [0, 2\pi).$$

5. Consideremos ahora el hiperboloide de una hoja $\mathcal{H}$ dado por la ecuación

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

Observemos que al intersecar $\mathcal{H}$ con planos paralelos al plano xy obtenemos circunferencias de ecuación

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 + z_0^2 \\ z = z_0 \end{cases}.$$

Esto nos indica que el hiperboliode de una hoja es la superficie de revolución que se obtiene de hacer girar alrededor del eje z la rama de la hipérbola $\mathcal{H} \cap$ plano yz con $y \geq 0$.

Esta curva admite las siguientes ecuaciones cartesianas y paramétricas:

$$\begin{cases} y^2 - z^2 = 1 \\ x = 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \cosh\, t \\ z = \sinh\, t \end{cases}.$$

Por lo tanto debemos reemplazar con $\alpha(t) = \cosh\, t$ y $\beta(t) = \sinh\, t$ en (6.31) para obtener que las ecuaciones paramétricas de $\mathcal{H}$ son

$$\begin{cases} x = \cosh\, t\cos\theta \\ y = \cosh\, t\sin\theta \\ z = \sinh\, t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \ \theta \in [0, 2\pi) \tag{6.36}$$

Consideremos ahora el hiperboloide de una hoja $\mathcal{H}'$ de ecuación

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

centrado en $C(x_0, y_0, z_0)$.

Sea $P(x, y, z)$ un punto de $\mathcal{H}'$ y sea $P'(x', y', z')$ donde

$$x' = \frac{x - x_0}{a}, \quad y' = \frac{y - y_0}{b}, \quad z' = \frac{z - z_0}{c}.$$

Entonces $P' \in \mathcal{H}$ y (x', y', z') pueden expresarse utilizando (6.36). Despejando x, y y z obtenemos que las ecuaciones paramétricas de $\mathcal{H}'$ son

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cosh\, t\cos\theta \\ y = y_0 + b\cosh\, t\sin\theta \\ z = z_0 + c\sinh\, t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \ \theta \in [0, 2\pi)$$

6. Si consideramos el hiperboloide de dos hojas $\mathcal{H}$ de ecuación

$$-x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

Nuevamente, es fácil verificar que $\mathcal{H}$ es la superficie de revolución que se obtiene de girar la mitad de la hipérbola de ecuaciones

$$\begin{cases} y^2 - z^2 = 1 \\ x = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

alrededor del eje z. Si analizamos la gráfica de esta superficie, vemos que tiene dos *partes*, una contenida en el semiespacio $z \geq 0$ y otra en $z \leq 0$. Cada una de estas partes se denomina una **componente conexa** de la superficie. Esto se debe a que dos puntos que estén en una misma componente se pueden unir siempre por una curva contenida en ella, mientras que dos puntos que no lo estén no.

Una superficie no conexa nunca puede ser parametrizada totalmente con una única paramerización (lo mismo ocurrió cuando encontramos las ecuaciones paramétricas de la hipérbola).

Por lo tanto debemos hacer girar la curva

$$\begin{cases} y^2 - z^2 = 1 \\ x = 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \sinh t \\ z = \cosh t \end{cases} \quad , \quad t \in [0, \infty)$$

o bien la curva de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \sinh t \\ z = -\cosh t \end{cases} \quad , \quad t \in [0, \infty)$$

alrededor del eje z para obtener la parametrización de cada una de las componentes de $\mathcal{H}$.

Posteriormente, transformando las coordenadas como en los ejemplos anteriores obtenemos la parametrización de las componentes de cualquier hiperboloide de dos hojas.

7. Finalizamos esta serie de ejemplos encontrando la parametrización del hiperboloide hiperbólico $\mathcal{P}$ de ecuación

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Esta no es una superficie de revolución, y su parametrización no puede obtenerse a partir de una superficie de revolución como en los ejemplos anteriores.

Sin embargo, es uno de los casos más sencillos, ya que una de las coordenadas (en este caso la z), puede expresarse en función de las otras dos. En efecto, en este caso tenemos

$$z = z_0 + c\left(\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2}\right)$$

Por lo tanto podemos parametrizarla poniendo

$$\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = z_0 + c\left(\frac{(s-x_0)^2}{a^2} - \frac{(t-y_0)^2}{b^2}\right) \end{cases} , \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Observemos que podríamos haber puesto

$$\frac{x-x_0}{a} = s, \;\; \frac{y-y_0}{b} = t \;\Rightarrow\; x = x_0 + as, \; y = y_0 + bt \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = x_0 + as \\ y = y_0 + bs \\ z = z_0 + c(s^2 + t^2) \end{cases} , \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

6.6 Ejercicios sugeridos

1. Sea r la recta que pasa por los puntos $P_0(1,1,1)$ y $P_1(-3,-1,-2)$
   (a) Determinar las ecuaciones paramétricas de r.
   (b) Calcular la distancia del origen de coordenadas a r.
   (c) Determinar si r interseca a los planos coordenados, y en caso que lo haga, en qué puntos.

2. Sea π el plano determinado por los puntos $P(1,-1,0)$, $Q(4,0,1)$ y $R(0,1,0)$.
   (a) Determinar las ecuaciones paramétricas de π.
   (b) Determinar z_1 sabiendo que $S(10,-5,z_1) \in \pi$.
   (c) Determinar las ecuaciones de una recta perpendicular a π por el origen de coordenadas y determinar el punto en que esta recta interseca a π.

3. Supongamos que las ecuaciones (6.5) son las ecuaciones paramétricas de un plano π y sea $P_0(x_0,y_0,z_0)$. Supongamos que S es el punto de π que se obtiene a partir de los parámetros α_1, β_1. Demostrar que el punto T simétrico de S en π respecto de P_0 es el punto que se obtiene a partir de los parámetros $-\alpha_1$, $-\beta_1$.

4. Dada la familia de planos de ecuación $\alpha x + 2\alpha y + 10z - 2 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, encontrar en cada caso cuál de ellos verifica:
   (a) es paralelo al plano de ecuación $x + 2y + 8z - 7 = 0$;
   (b) es paralelo al plano de ecuación $-x + y - 3z + 1 = 0$;
   (c) es perpendicular al plano $-5x + y - 3z + 2 = 0$;
   (d) forma con el plano $4y + 3z - 9 = 0$ un ángulo cuyo coseno vale $14/15$.

5. (a) Hallar la ecuación del plano que contiene a los puntos $P_1(1,-2,2)$ y $P_2(-3,1,-2)$ y es perpendicular al plano de ecuación $2x + y - z + 6 = 0$.
   (b) Hallar un punto P_3 tal que el problema análogo al planteado en el item anterior con P_1 y P_3 tenga infinitas soluciones.

6. Hallar la intersección de los siguientes tres planos:

$$\pi_1)\ 2x + 4y + 2z = 3, \quad \pi_2)\ 3x + 3y - z = 0 \quad \pi_3)\ 3x - 6y - 5z = 8.$$

7. Demostrar que la ecuación del plano que determinan los tres puntos no alineados $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ y $P_3(x_3,y_3,z_3)$ resulta de plantear:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Determinar utilizando este método el plano que contiene a los puntos $P_1(3,2,-5)$, $P_2(0,1,-1)$ y $P_3(2,5,-1)$.

8. Hallar en cada caso la la ecuación de un plano que verifique las condiciones pedidas:
   (a) su punto más cercano al origen es $P(1,-2,1)$;
   (b) determina con los ejes coordenados segmentos de longitudes 2, 3 y 1 respectivamente;
   (c) es paralelo al de ecuación $2x+3y-6z-14=0$ y que dista 5 unidades del origen.

9. Si dos planos son paralelos, la distancia entre ellos es la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro plano. Demostrar que los planos de ecuaciones $\pi_1)\ 6x+2y-3z-63=0$ y $\pi_2)\ -3x-y+\frac{3}{2}z+25=0$ son paralelos y encontrar la distancia entre ellos.

10. Determinar la distancia del punto $P_0(-1,1,-2)$ al plano determinado por los puntos $A(1,-1,1)$, $B(4,-5,-2)$ y $C(-2,1,3)$.

11. Hallar las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta r determinada por los puntos $A(3,8,-4)$ y $B(-2,5,1)$. Determinar la ecuación de dos planos que se intersequen en r.

12. Hallar las ecuaciones paramétricas de cada una de las siguientes rectas:

$$i)\ \begin{cases} 6x+2y-z=8 \\ 14x+y=24 \end{cases} \qquad ii)\ \begin{cases} 3x-5y+2z=4 \\ 4x+2y-3z=2 \end{cases}$$

13. En cada caso hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(2,-1,3)$ y verifica la condición pedida:
   (a) es paralela al eje y;
   (b) es perpendicular al plano de ecuación $3x-6y-5z=8$;
   (c) es paralela a la recta de ecuación $\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}$;
   (d) es perpendicular al plano de ecuación $y=0$;
   (e) es perpendicular a los vectores $\overline{u}=(3,-1,-2)$ y $\overline{v}=(4,2,-4)$;
   (f) es paralela a la recta de ecuación $\begin{cases} 3x-5y+2z=4 \\ 4x+2y-3z=2 \end{cases}$.

14. Determinar α y β para que la recta

$$r)\ \begin{cases} 2x+y-z-6=0 \\ \alpha x+y+3z+\beta=0 \end{cases}$$

esté contendia en el plano xz.

15. Dados los vértices de un triángulo $A(1,-2,4)$, $B(3,1,-3)$ y $C(5,1,-7)$ hallar las ecuaciones de la recta que contiene a la altura trazada desde el vértice B.

16. Sean r_1 y r_2 dos rectas en el espacio con direcciones $\overline{u}_1$ y $\overline{u}_2$ y sean $P_0 \in r_1$ y $P_1 \in r_2$.

    (a) Demostrar que si r_1 y r_2 son paralelas, entonces
    $$d(r_1, r_2) = \frac{|\overline{u}_1 \wedge \overrightarrow{P_0P_1}|}{|\overline{u}_1|}$$
    .

    (b) Si r_1 y r_2 son alabeadas, la distancia entre r_1 y r_2 es la distancia entre los puntos de intersección de r_1 y r_2 con una recta perpendicular a ambas. Demostrar que
    $$d(r_1, r_2) = \frac{|[\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overrightarrow{P_0P_1}]|}{|\overline{u}_1 \wedge \overline{u}_2|}.$$

17. Determinar si las rectas
$$r_1)\ \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 3 + 3t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}, \qquad r_2)\ \begin{cases} x = 1 - 3r \\ y = 2r \\ z = 2 + 4r \end{cases},\ r \in \mathbb{R}$$
son coplanares. Calcular la distancia entre r_1 y r_2.

18. Demostrar que las rectas r_1 y r_2 de ecuaciones
$$r_1)\ \frac{x+4}{3} = y - 1 = \frac{z}{2}, \quad r_2)\ \begin{cases} 2x - z - 8 = 0 \\ 2y - z - 9 = 0 \end{cases}$$
son alabeadas y determinar la ecuación de un plano r_1 que contenga a r_2.

19. Determinar en cada item las ecuaciones de una recta perpendicular a r_1 y r_2 que interseque a ambas y calcular $d(r_1, r_2)$.

    (a) r_1 está determinada por $M(2,1,3)$ y $N(1,2,1)$;

    (b) $r_1)\ \dfrac{x+3}{-4} = \dfrac{y-6}{3} = \dfrac{z}{2}$, $r_2)\ \begin{cases} x + 5y - z + 9 = 0 \\ x + 3y + z - 5 = 0 \end{cases}$

20. Hallar la ecuación de la recta que contiene al punto $A(1,2,3)$ y que además se interseca con las rectas
$$r_1)\ \frac{x}{2} = y - 6 = \frac{z+3}{-4} \ \text{ y } \ r_2)\ \frac{x-12}{13} = y - 3 = \frac{z+3}{-4}.$$

21. Determinar la distancia del punto $P(3,2,1)$ a la recta

$$r)\ \begin{cases} 3x-4y+9=0 \\ 7x-y-12z+16=0 \end{cases}$$

22. Determinar los puntos de la recta $\begin{cases} x+y-z=2 \\ -x-y+3z=0 \end{cases}$ que se encuentran a 5 unidades del plano $2x-2y+3z=0$.

23. Hallar las ecuaciones de la recta r_1 que contiene al punto $M(3,-2,-4)$, es paralela al plano $\pi)\ 3x-2y-3z=7$ y se interseca con la recta $r_2)\ \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$. Determinar el ángulo entre r_1 y r_2.

24. Determinar las ecuaciones de la superficie esférica indicada en cada caso:

    (a) Tiene centro $P(1,2,-4)$ y radio 3.
    (b) Tiene centro en $P(1,1,1)$ y pasa contiene al punto $Q(1,3,-5)$.
    (c) Tiene centro en $P(3,6,-4)$ y es tangente al plano de ecuación $2x-2y-z-10=0$.
    (d) La circunferencia de ecuación $\begin{cases} (x-1)^2+(y+3)^2=2 \\ z=3 \end{cases}$ es un círculo máximo de la esfera.
    (e) $\overline{PQ}$ es un diámetro, con $P(-1,2,-3)$, $Q(2,3,-1)$.
    (f) Está inscripta en el cilindro de ecuación $(x-4)^2+(y-5)^2=9$ y su centro está en el plano $3x+8y-8z=4$.
    (g) Pasa por los puntos de coordenadas $(7,9,1)$, $(-2,-3,2)$, $(1,5,5)$, $(-6,2,5)$.

25. Dada la esfera $\mathcal{E}$ de ecuación $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=4$:

    (a) determinar las ecuciones del plano tangente a $\mathcal{E}$ en en punto $Q(1,0,2)$;
    (b) determinar las ecuaciones de la circunferencia que se obtiene de intersecar $\mathcal{E}$ con el plano $z=1$.

26. Hallar el vértice y el foco de la parábola que resulta al intersectar el paraboloide hiperbólico de ecuación $\dfrac{z^2}{4}-\dfrac{x^2}{9}=\dfrac{y}{3}$ con el plano de ecuación $x=1$.

27. En cada uno de los siguientes items, identificar qué superficie en el espacio está determinada por las ecuaciones dadas y esbozar su gráfica.

    (a) $x^2+y^2=1$;
    (b) $3z^2=0$
    (c) $4x^2+9z^2=36$.

28. Determinar qué superficie determina cada una de las ecuaciones siguientes y esbozar su gráfica:

(a) $x^2 + 2y^2 - 6z = 0$;

(b) $4x^2 + 12y^2 + 36z^2 = 36$;

(c) $9x^2 - 4z^2 = 36$

(d) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{9} = 1$;

(e) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{z^2}{4} = 1$;

(f) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{9} = 0$;

(g) $y^2 + z^2 = 4$

(h) $x^2 - 4y^2 = 8z$.

(i) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 3z = 15$.

(j) $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 0$.

(k) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{9} = 0$.

(l) $3x^2 + 8y^2 - 4z^2 - 24 = 0$.

(m) $y^2 + z = 2$

(n) $9x^2+4y^2+36z^2-18x+16y-11 = 0$.

(o) $x^2-4y^2+2z^2-6x-8y+8z+9 = 0$.

(p) $x^2-4y^2+2z^2-6x-8y+8z+9 = 0$.

(q) $\dfrac{(x-2)^2}{36} + \dfrac{(z-1)^2}{25} = 4y$.

(r) $\dfrac{(z-2)^2}{36} - \dfrac{(y-2)^2}{25} - x = 0$.

29. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del espacio cuya diferencia a los puntos fijos de coordenadas $(-4, 3, 1)$ $(4, 3, 1)$ es igual a 6. Determinar qué tipo de superficie es.

30. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia al punto de coordenadas $(2, -1, 3)$ es igual al doble de su distancia al eje x. Determinar qué tipo de superficie es.

31. Identificar y esbozar las gráficas de las curvas en $\mathbb{R}^3$ dadas por los sistemas de ecuaciones siguientes:

(a) $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + 2z = -1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ z = 2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y^2 = 4z \\ x = 3 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 9x^2 + 4y^2 = 36 \\ z = 5 \end{cases}$

32. Hallar las ecuaciones cartesianas de las siguientes curvas:

(a) Una circunferencia de centro $P_0(1, 1, 1)$ y radio 5 en el plano de ecuación $x + 2y - 3z = 0$.

(b) Una elipse de vértices V_1, V_2, V_3 y V_4, donde V_1 y V_2 están sobre el eje focal, con $d(V_1, V_2) = 3$, $d(V_3, V_4) = 2$, centro $C = (1, 2, 3)$, eje focal paralelo al eje z y contenida en un plano paralelo al plano yz.

(c) La intersección de una esfera centrada en el origen de radio 2 y el paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$. Mostrar que se trata de una circunferencia y hallar su centro y su radio.

33. Encontrar las ecuaciones paramétricas de las curvas del ejercicio 1 y del ejercicio 2.

34. En cada caso, hallar las coordenadas de los puntos de intersección de la curva γ dada con la superficie S dada.

(a) $\gamma)\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \\ z = 2\sin\theta \end{cases}, \theta \in \mathbb{R},\ S) x^2 - y^2 + z^2 = 4.$

(b) $\gamma)\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}, t \in \mathbb{R},\ S) x^2 + 2y - z = 2.$

35. Esbozar las gráficas de las curvas del espacio dadas por las siguientes ecuaciones paramétricas. Cuando sea posible describirlas como intersección de dos superficies.

(a) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = 8 + 2t \end{cases} \quad t \in [0, 25]$

(b) $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4\sin t \\ z = 5 \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$

(c) $\begin{cases} x = 2 + \sin t \\ y = 3 \\ z = \cos t \end{cases} \quad t \in [0, \pi]$

(d) $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 5t \\ z = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$

(e) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + \sinh t \\ z = 2\cosh t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

(f) $\begin{cases} x = \cos 3t \\ y = \sin 3t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Chapter 7

Apéndices

7.1 Material extra

- LABORATORIOS DE CLASE:

  Los laboratorios que vimos en clases quedan en el repositorio de Github.

- VIDEOS DE DIVULGACIÓN SOBRE ALGUNOS TEMAS QUE ESTUDIAMOS:

  - Les dejamos aquí una serie de videos del canal de divulgación Derivando donde trabaja algunos temas de conteo:
    * Conteo.
    * Combinatoria.
    * Principio del Palomar.
  - Y aquí otro video en el que se cuenta un problema de optimización combinatoria en el que participa una investigadora de nuestra facultad:
    * Problema del viajante de comercio
  - Hay miles de recursos online sobre sistemas de ecuaciones y temas relacionados, les dejamos algunos.
    * Preguntas de repaso. Algunas son de sistemas y otras tienen nomeclatura que no hemos usado en la cátedra, pero pueden intentarlo.
    * Juego de repaso. Hay que ser rápido con los nombres. Algunas son de la unidad próxima, pero la mayoría deberían ser conocidas.
    * Calculadora matricial online. Por si quieren chequear que hicieron bien las cuentas. Tiene muchísimas cosas que más adelante aprenderán a hacer con matrices.

* Un video de Eduardo Sáenz de Cabezón, que en su canal de YouTube "Derivando" tiene muchísimas cosas interesantísimas. En este cuenta un poco sobre aplicaciones del concepto de matriz. El Dr. Saenz de Cabezón estuvo en la Reunión Anual de la UMA 2018, en Bs. As. y dio una conferencia muy linda, si pueden escuchenla!
* Matrices vampiro. Video de divulgación muy interesante, quizás alguna cosita se escape a este curso, pero van a seguirlo igual.
* Más aplicaciones. Esta sobre manipulación de datos 3d. Capaz por ahora es demasiado, pero creanme que más adelante no sólo lo van a entender perfectamente sino que más de unx lo va a aplicar a su futuro trabajo.
* Javier Santaolalla nos habla desde la física sobre el concepto de matrices. Imperdible. El Dr. Santaolalla tiene su canal propio de divulgación de la física, "Date un voltio", amigo del Dr. Saenz de Cabezón, y de un grupo de divulgadores de la ciencia españoles.
* De interés! Charla Matemática e Ingeniería Estructural: Superficies. La siguiente charla que si bien está destinada a estudiantes de ingeniería, les puede servir para entusiarmarse a estudiar esta unidad donde veremos las superficies que utiliza: de revolución, cilíndricas, cónicas, cuádricas, etc. No se la pierdan!

– SALA DE ESCAPE

ACTIVIDAD ONLINE: ESCAPE DEL CASTILLO DEL CONDE KARRU SEL

... Te despiertas en una sombría habitación. Tratas de recordar cómo y porqué estés allá. De a poco vas adecuándote a la luz y tus pensamientos se acomodan. No sabes porqué estés allá pero hay alguien que sabe que eres un expertx en Sistemas de Ecuaciones Lineales...

Esta sala de escape fue armada durante el dictado virtual del año 2021, y retocada para el año 2022. Queda disponible aquí.

7.2 Observaciones al material

El presente material se podría ampliar en algunas secciones puntuales, reconocemos que hay temas que han quedado truncos y temas que directamente no hemos tocado. Como dijimos al comienzo, se trató de compatibilizar e intersecar sintéticos y necesidades en común de 5 carreras distintas y en este proceso se perdieron posibles caminos a recorrer. Enunciaremos algunos temas que han quedado en el tintero para que, si alguien toma la posta, pueda completar el curso.

En la Unidad 4, no hemos hablado de *subespacio* generado por un conjunto. Quizás por no abarcar demasiados temas que se ven en asignaturas posteriores lo hemos dejado de lado, pero la realidad es que intuitivamente la idea no sería complicada de introducir: ya conocen el concepto geométrico de recta (por el origen) en el plano. Luego en la Unidad 6 también se podría volver a la idea de recta por el origen y plano por el origen. Estas ideas aparecen mucho, sobre todo en la interacción con lxs estudiantes, y a veces no haberlo formalizado juega en contra, pues no terminan de relacionar los conceptos. Creemos que sería bueno agregarlo. Por otro lado, el ejercicio 5 de la práctica tiene mucha importancia y probablemente sea más conveniente trabajarlo en el teórico de modo tal que lxs estudiantes lo tomen con más atención, pues trabajarlo sólo en el práctico resulta muchas veces insuficiente y debemos durante las consultas volver una y otra vez.

En la Unidad 5 no hemos trabajado con rototraslación de ejes. Contamos con unas notas de Francisco que se las hemos dado siempre de manera optativa. Pero no debería llevar mucho tiempo poder darlas y seguramente apliaría un poco la noción que se llevan de la relación entre entes geométricos y algebraicos, y la necesidad de fijar un sistema de coordenadas. Además esto permitiría completar el estudio de las ecuaciones de segundo grado en dos variables, y comparar con lo que sucede con las ecuaciones de primer grado en dos variables. Si bien esto en el práctico se trabaja bastante, incluso intersecando cónicas (o sea, considerando sistemas de ecuaciones de segundo grado en dos variables), todo quedaría más equilibrado. Por otro lado, faltaría formalizar con Teoremas todos los resultados que relacionan los conceptos geométricos con los analíticos, como está hecho para recta en el plano, para las cónicas. Si bien los desarrollos están completos, probablemente para lxs estudiantes les sea más sencillo tenerlo escrito de esa forma. Esto se nota mucho al tomar los finales, que no saben bien qué desarrollar.

En la Unidad 6 pasa algo parecido, podríamos explicar cómo se traslada y cómo se rota en el espacio. Es la pregunta del millón, no hay dictado en el cual no nos lo pregunten. Y tenemos todo a mano para poder hacerlo: por ejemplo para el caso de rotar, ya saben multiplicar por matrices, en este caso, de determinante igual a 1. Sería muy bueno poder agregar algo al respecto. Y la segunda cuestión también es similar a la Unidad 5 en cuanto a la formalización de las ecuaciones de las cuádricas, sólo que en este caso la formulación no parte de un concepto geométrico sino de una interpretación de la ecuación general de segundo grado en tres variables, siguiendo con la comparación con el caso lineal (como se propone para dos variables).

Bibliography

[1] Notas de clases de los profesores Silvio Reggiani y Francisco Vittone.

[2] R.Grimaldi, *Matemáticas Discreta y Combinatoria - Una introducción con aplicaciones*, 3^{ra} ED, Addison Wesley Longman, Argentina. *NOTA DE LA REDACCIÓN: ALGUNOS PROBLEMAS DEL LIBRO DE GRIMALDI TIENEN UNA FORMULACIÓN NO ACORDE A LA ÉPOCA ACTUAL. LA CÁTEDRA ADHIERE Y APOYA LA LUCHA DEL COLECTIVO FEMINISTA Y DISIDENCIAS, Y SE PRONUNCIA EN CONTRA DE CUALQUIER TIPO DE DISCRIMINACIÓN.*

[3] R. Johnsonbaugh, *Matemáticas Discretas*, 4^{ta} ED, Pearson, México.