Բովանդակություն

Ներածություն 5

ԳԼՈՒԽ 1. ԱՆՀՐԱԺԵՇՏ ՏԵՂԵԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ 7

1.1 Գրաֆների վերաբերյալ հիմական տեղեկություններ 7

1.2 Աստիճաններ, ենթագրաֆներ և ճանապարհներ 10

1.3 Կապակցվածության բաղադրիչներ և կապակցված գրաֆներ 14

1.4. Գրաֆների իզոմորֆիզմ 16

Գլուխ 2. Երկկողմանի գրաֆներ 17

2.1. Երկկողմանի գրաֆների սահմանում, Քյոնիգի թեորեմ 17

2.2. Ռեսուրսների բաշխման խնդրի մաթեմատիկական ձևակերպումը 20

2.3. Կշռված երկկողմանի գրաֆներ և նշանակման խնդրի մաթեմատիկական ձևակերպումը 22

2.4 Զուգակցումներ երկկողմանի գրաֆներում և min-max թեորեմներ 23

ԳԼՈՒԽ 3. ՌԵՍՈՒՐՍՆԵՐԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ԲԱՇԽՄԱՆ ԱԼԳՈՐԻԹՄԱԿԱՆ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԸ 27

3.1 Հունգարական ալգորիթմի էությունը և քայլերը 27

3.2. Ռազմական նշանակման խնդրի օրինակի լուծումը 29

3.3. Ռեսուրսների օպտիմալ բաշխման ծրագրային համակարգի կառուցվածքը 32

3.4 Խնդրի լուծման այլընտրանքային մեթոդների համեմատական վերլուծություն 38

ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ 40

ԳԼՈՒԽ 4. Ռեսուրսների բաշխման խնդիրներում երկկողմանի գրաֆների կիրառման աշխատանքների ինքնարժեքի և գնի հաշվարկը: 44

4.1Համալրող առարկաների ծախսի հաշվարկ 45

4.2 Էլեկտրաէներգիայի ծախսի հաշվարկ 46

4.3 Աշխատողների հիմական աշխատավարձի հաշվարկը 46

4.4 Աշխատողների լրացուցիչ աշխատավարձի հաշվարկը 47

4.5 Սարքավորումների պահպանման և շահագործման ծախսերի հաշվարկը 48

4.6 Տարածքի վարձակալության ծախսի հաշվարկը 50

4.7 Ընդհանուր տնտեսական ծախսերի հաշվարկը 50

4.8. Համակարգի/փաթեթի ինքնարժքի կալկուլացիան 51

4.9. Շահույթի և միավորի գնի հաշվարկը 52

Գլուխ 5. Բնապահպանություն 54

Գրաֆների տեսությունը բնապահպանական խնդիրներում՝ բնապահպանական խնդիրների արդիականությունը և մաթեմատիկական օպտիմալացման դերը 54

5.1 Երկկողմանի գրաֆների տեսական մոդելավորումը բնապահպանական համակարգերում 55

5.2 Տվյալների կենտրոնների էկոլոգիական օպտիմալացման հեռանկարները գրաֆային մոդելների միջոցով 57

Գլուխ 6. Կենսագործունեության անվտանգություն 60

Ներածություն 60

6.1. ԱԻ ԿԵՆՍԱՊԱՀՈՎՄԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԸ ՈՐՊԵՍ ԵՐԿԿՈՂՄԱՆԻ ԳՐԱՖ 61

6.2. ՀՈՒՆԳԱՐԱԿԱՆ ԱԼԳՈՐԻԹՄԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ՌԵՍՈՒՐՍՆԵՐԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ԲԱՇԽՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ 62

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ 65

Ներածություն

Ժամանակակից կառավարման համակարգերում և որոշումների կայացման գործընթացների ավտոմատացման մեջ կարևորագույն խնդիրներից է սահմանափակ ռեսուրսների օպտիմալ բաշխումը։ Բարդ կառուցվածքային համակարգերում, որտեղ առկա են բազմաթիվ կատարողական միավորներ և բազմաբնույթ առաջադրանքներ, ռեսուրսների ոչ արդյունավետ կառավարումը հանգեցնում է ժամանակային, նյութական և ռազմավարական զգալի կորուստների։

Տեխնոլոգիական արագ զարգացման պայմաններում ավանդական, ոչ ֆորմալ մեթոդները հաճախ չեն ապահովում անհրաժեշտ արագագործություն և ճշգրտություն։ Սա հատկապես նկատելի է դինամիկ փոփոխվող միջավայրերում, ինչպիսիք են բարձր տեխնոլոգիական արտադրությունները և ժամանակակից ռազմական համակարգերը։

Ռազմական ոլորտում կրակային միջոցների և թիրախների նպատակային բաշխումը պահանջում է այնպիսի ալգորիթմների կիրառում, որոնք թույլ կտան շատ կարճ ժամանակում նվազագույնի հասցնել ռեսուրսների ծախսը՝ միաժամանակ առավելագույնի հասցնելով խոցման հավանականությունը։ Այս հանգամանքը սույն հետազոտությունը դարձնում է խիստ արդիական՝ հաշվի առնելով կառավարման համակարգերի թվայնացման գլոբալ միտումները։

Սույն աշխատանքի նպատակն է ուսումնասիրել երկկողմանի կշռված գրաֆների կիրառությունը ռեսուրսների բաշխման խնդիրներում և իրականացնել Հունգարական ալգորիթմի (Kuhn–Munkres algorithm) ծրագրային մոդելավորումը։

Նպատակին հասնելու համար առաջադրվել են հետևյալ խնդիրները.

- վերլուծել գրաֆների տեսության հիմնարար դրույթները և դրանց կապը նշանակման խնդիրների հետ,
- ուսումնասիրել Հունգարական մեթոդի մաթեմատիկական հիմքերը և օպտիմալության պայմանները (Բերժի և Քյոնիգի թեորեմներ),
- մշակել և իրականացնել ալգորիթմի ծրագրային տարբերակը Python լեզվով՝ ապահովելով բազմանդամային ժամանակային բարդություն ($O(n^3)$),

- փորձարկել մոդելը կիրառական օպտիմալացման սցենարներում և կատարել արդյունքների վերլուծություն։

Հետազոտության օբյեկտը ռեսուրսների բաշխման կառավարման համակարգերն են, իսկ առարկան՝ երկկողմանի գրաֆներում օպտիմալ զուգակցումների գտման ալգորիթմական մեթոդները։

Աշխատանքի համար հիմք են հանդիսացել դիսկրետ մաթեմատիկայի, գրաֆների տեսության և գործողությունների հետազոտության դասական և ժամանակակից մեթոդները։ Մասնավորապես, կիրառվել են մատրիցային ռեդուկցիայի և շղթայական ճանապարհների կառուցման սկզբունքները։

Աշխատանքում ներկայացված մոդելը կարող է հիմք հանդիսանալ ավտոմատացված կառավարման համակարգերի մշակման համար, որոնք պահանջում են արագ և արդյունավետ որոշումների կայացում։ Այն կիրառելի է ինչպես ռազմական ոլորտում՝ կրակային միջոցների և թիրախների օպտիմալ բաշխման, այնպես էլ տնտեսական խնդիրներում՝ աշխատուժի և տեխնիկական ռեսուրսների արդյունավետ կառավարման նպատակով։

Դիպլոմային աշխատանքը բաղկացած է ներածությունից, երեք գլուխներից, եզրակացությունից և օգտագործված գրականության ցանկից։ Առաջին գլխում ներկայացվում են տեսական հիմքերը, երկրորդում՝ ալգորիթմական մոտեցումները, իսկ երրորդում՝ ծրագրային իրականացումը և գործնական արդյունքները։

ԳԼՈՒԽ 1. ԱՆՀՐԱԺԵՇՏ ՏԵՂԵԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

1.1 Գրաֆների վերաբերյալ հիմական տեղեկություններ

Դիցուք $V = \{ v_1, \ldots, v_n \}$-ը ցանկացած ոչ դատարկ վերջավոր բազմություն է, և դիցուք $V^{(2)}$-ը V բազմության տարրերի բոլոր ոչ կարգավոր զույգերի բազմությունն է: Նշենք, որ $|V^{(2)}| = \binom{n}{2}$: Ենթադրենք, որ $E \subseteq V^{(2)}$:

Սահմանում 1.1.1: (V, E) կարգավոր զույգին կանվանենք գրաֆ, և այն կնշանակենք G-ով:

$G = (V, E)$ գրաֆի V բազմության տարրերին կանվանենք գրաֆի գագաթներ, իսկ E բազմության տարրերին՝ կողեր: Եթե անհրաժեշտ է շեշտել, որ V -ն հանդիսանում է G գրաֆի գագաթների բազմություն, ապա այդ դեպքում մենք կգրենք $V(G)$, ($E(G)$): Եթե $e \in E$ կողը $u, v \in V$ գագաթներից բաղկացած զույգն է, ապա այդ փաստը կգրենք $e = uv$ -ով:

Դիցուկ $G = (V, E)$ և $G' = (V', E')$ երկու գրաֆներ են:

Սահմանում 1. 1.2: G և G' գրաֆները կանվանենք հավասար և կգրենք $G = G'$ այն և միայն այն. դեպքում,երբ $V = V'$, և $E = E'$:

Նշենք, որ գրաֆները կարելի է դիտարկել որպես հատուկ տիպի համասեռ բինար հարաբերություն, որի հենքային բազմությունը V -ն է: Հիշենք, որ $\alpha \subseteq V \times V$ բինար հարաբերությունը կոչվում է

ռեֆլեքսիվ, եթե ցանկացած $v \in V$ համար $v\alpha v$,

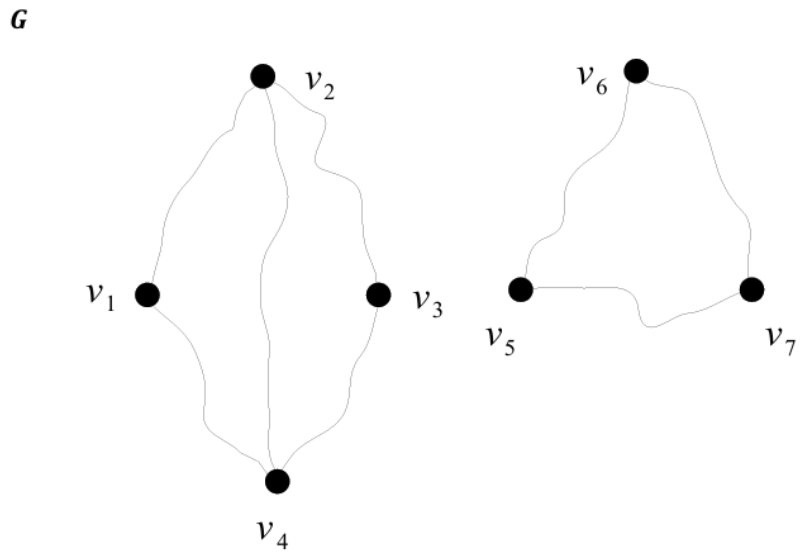
անտիռեֆլեքսիվ, եթե ցանկացած $v \in V$ համար $v\alpha v$,

սիմետրիկ, եթե ցանկացած $u, v \in V$ համար բավարարվում է պայմանը. եթե $u\alpha v$, ապա $v\alpha u$:

Նկատենք, որ $G = (V, E)$ գրաֆը կարող ենք դիտարկել որպես $\alpha \subseteq V \times V$ անտիռեֆլեքսիվ, սիմետրիկ բինար հարաբերություն, որտեղ ցանկացած $u,v \in V$ համար բավարարվում է հետևյալ պայմանը. $u\alpha v$ այն միայն այն դեպքում, երբ $uv \in E$:

Ստորև կդիտարկենք գրաֆների տրման մի քանի եղանակներ: Նախ նշենք, որ գրաֆը կարելի է տալ, նշելով նրա գագաթների և կողերի բազմությունները: Օրինակ, դիտարկենք G = (V, E) գրաֆը, որտեղ $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ և $E = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_1v_4, v_2v_4, v_5v_6, v_6v_7, v_5\,v_7\}$:

Մեկ այլ եղանակ է գրաֆների տրման երկրաչափական եղանակը, որի էությունը կայանում է հետևյալում. գրաֆի գագաթներին համապատասխանեցնում ենք հարթության կետեր (տարբեր գագաթներին համապատասխանում են տարբեր կետեր), և երկու կետեր միացվում են անընդհատ կորով, որը չի անցնում մեկ այլ գագաթին համապատասխանող կետով՝ այն և միայն այն դեպքում, երբ նրանց համապատասխանող գագաթները կող են կազմում գրաֆում: Օրինակ, վերը նշված գրաֆը կարելի է պատկերել հետևյալ կերպ.



Նկ. 1.1.1

Սահմանում 1.1.3: G գրաֆը կանվանենք նշված (կամ համարակալված), եթե այդ գրաֆի գագաթներին վերագրված են զույգ առ զույգ տարբեր նիշեր:

Գրաֆների տրման հաջորդ եղանակները նկարագրելու համար տանք մի քանի սահմանում:

Դիցուք G=(V,E)-ն գրաֆ է, u, $v \in V$ և e, $e' \in E$:

Սահմանում 1.1.4: u և v գագաթները կանվանենք հարևան, եթե $uv \in E$:

Սահմանում 1.1.5: u գագաթին և e կողին կանվանենք կից, եթե $u \in e$:

Սահմանում 1.1.6: e և e' տարբեր կողերը կանվանենք հարևան, եթե գոյություն ունի $v \in V$ այնպես, որ v -ն կից է e -ին և e' -ին:

Եթե $G = (V, E)$ գրաֆում $V = \{ v_1,..., v_n\}$ և $E = \{e_1,..., e_m\}$, ապա այդ գրաֆին համապատասխանեցնենք $n \times n$ կարգի $A(G) = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ մատրիցը հետևյալ կերպ.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{եթե } v_i \text{ և } v_j \text{ հարևան են} \\ 0, \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$$

$A(G)$ մատրիցը կանվանենք G գրաֆի հարևանության մատրից: Նկատենք, որ ցանկացած i-ի համար ($1 \le i \le n$) a_{ii}=0,և ցանկացած i, j -ի համար ($1 \le i, j \le n$) a_{ij}=a_{ji}: Նկ. 1.1.1-ում բերված G գրաֆի հարևանության մատրիցը կլինի՝

$$A\,(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Եթե $G = (V, E)$ գրաֆում $V = \{ v_1,..., v_n\}$ և $E = \{e_1,..., e_m\}$, ապա այդ գրաֆին համապատասխանեցնենք $n \times m$ կարգի $B(G) = \left(b_{ij}\right)_{n\times m}$ մատրիցը հետևյալ կերպ.

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{եթե } v_i \text{ և } e_j \text{ կից են} \\ 0, \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$$

$B(G)$ մատրիցը կանվանենք G գրաֆի կցության մատրից: Նկատենք, որ կցության մատրիցի սյուները զույգ առ զույգ տարբեր են և յուրաքանչյուր սյուն պարունակում է ճիշտ երկու 1:

G գրաֆի կցության մատրիցը կլինի՝

$$B\,(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

որտեղ ենթադրված է, որ $e_1 = v_1v_2, e_2 = v_2v_3, e_3 = v_3v_4, e_4 = v_1v_4, e_5 = v_2v_4, e_6 = v_5v_6$, $e_7 = v_6v_7, e_8 = v_5v_7$

Նշենք, որ զրոներից և մեկերից կազմված $n \times m$ կարգի յուրաքանչյուր B մատրից, որի սյուները զույգ առ զույգ տարբեր են և յուրաքանչյուր սյուն պարունակում է ճիշտ երկու 1, հանդիսանում է համարակալված գագաթներով և կողերով որևէ գրաֆի կցության մատրից:

1.2 Աստիճաններ, ենթագրաֆներ և ճանապարհներ

Վերցնենք $G = (V, E)$ գրաֆը: G գրաֆը կանվանենք $(n\,, m)$ – գրաֆ, եթե $|\,V\,| = n$ և $|\,E\,| = m$: Եթե $S \subseteq V(G)$: ապա կատարենք հետևյալ նշանակումները.

$$N_G(s) = \{u \in V \backslash S\text{: գոյություն ունի } v \in S \text{որ}, uv \in E\},$$

$$\partial_G(S) = \{uv \in E\text{:} u \in S, v \in V \backslash S\}\text{:}$$

G գրաֆում $v \in V$ գագաթի շրջակայք ասելով կհասկանանք $N_G(\{v\})$ բազմությունը: Այն կրճատ կնշանակենք $N_G(v)$- ով : Ավելին, v գագաթին կից կողերի բազմությունն՝ $\partial_G(\{v\})$-ն կնշանակենք $\partial_G(v)$-ով :

Սահմանում 1.2.1: G գրաֆում v գագաթի աստիճան, որը կնշանակենք $d_G(v)$-ով կամ $d(v)$- ով կանվանենք այդ գագաթին կից կողերի քանակը: Պարզ է դառնում որ $d_G(v)$=$|d_G(v)|$:

Օրինակ, նկ. 1.1.1-ում պատկերված G գրաֆում v_2 գագաթի աստիճանը հավասար է երեքի:

G գրաֆում v գագաթը կանվանենք մեկուսացված, եթե $d_G(v) = 0$ և կանվանենք կախված, եթե $d_G(v) = 1$: G գրաֆի համար սահմանենք $\delta(G)$ և $\Delta(G)$ թվերը հետեվյալ կերպ.

$$\delta(G) = min_{v\in V} d_G(v), \Delta(G) = max_{v\in V} d_G(v)$$

$\delta(G)$ – կանվանենք G գրաֆի նվազագույն աստիճան, իսկ $\Delta(G)$- ն՝ առավելագույն աստիճան:

Թեորեմ 1.2.1 (Լ. Էյլեր) Կամայական $G = (V, E)$ գրաֆում տեղի ունի

$$\sum_{v\in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|$$

հավասարությունը:

Իրոք, քանի որ ցանկացած կող կից է երկու գագաթի, ապա $\sum_{v\in V} d_G(v)$ գումարում այդ կողը հաշվվում է երկու անգամ, հետևաբար՝

$$\sum\nolimits_{v\in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|$$

Հետևանք 1.2.1: Կամայական $G = (V, E)$ գրաֆում կենտ աստիճան ունեցող գագաթների քանակը զույգ է:

Ապացույց: Իրոք, համաձայն թեորեմ 1.2.1-ի

$$2|E(G)| = \sum\nolimits_{v\in V(G)} d_G(v) = \sum\nolimits_{d_G(v)-\text{ն զույգ է}} d_G(v) + \sum\nolimits_{d_G(v)-\text{ն կենտ է}} d_G(v):$$

Դիտողություն 1.2.1: Նշենք, որ թեորեմ 1.2.1-ը և հետևանք 1.2.1-ը մնում են ճիշտ նաև մուլտիգրաֆների և պսևդոգրաֆների դեպքում, միայն թե պայմանավորվում ենք, որ օղակները պսևդոգրաֆի գագաթի աստիճանն ավելացնում են երկուսով:

Սահմանում 1.2.2: G գրաֆը կանվանենք համասեռ կամ ռեգուլյար, եթե $\delta(G) = \Delta(G)$ կամ որ նույնն է, որ եթե նրանում բոլոր գագաթների աստիճանները միևնույն թիվն է: G գրաֆը կանվանենք r -համասեռ կամ r -ռեգուլյար, եթե $\delta(G) = \Delta(G) = r (r \in \mathbb{Z}_+)$

Թեորեմ 1.2.1-ից անմիջապես հետևում է, որ

Հետևանք 1.2.2: Եթե G -ն r -համասեռ (n, m)-գրաֆ է, ապա

$$m = \frac{n \cdot r}{2}$$

Սահմանում 1.2.3: 3-համասեռ գրաֆներին կանվանենք խորանարդ գրաֆներ:

Հետևանք 1.2.1-ից բխում է՝

Հետևանք 1.2.3: Խորանարդ գրաֆում գագաթների քանակը զույգ թիվ է:

Սահմանում 1.2.4: G գրաֆը կոչվում է լրիվ, եթե նրանում ցանկացած երկու գագաթ հարևան են:

n գագաթ ունեցող լրիվ գրաֆը կնշանակենք K_n -ով: K_3 - ը կանվանենք եռանկյուն:

Դժվար չէ տեսնել, որ K_n – ը $(n-1)$ – համասեռ գրաֆ է և

$$|E(K_n)| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Սահմանում 1.2.5: $G = (V, E)$ գրաֆը կանվանենք r -կողմանի ($r \in \mathrm{N}$), եթե V բազմությունը հնարավոր է տրոհել r ենթաբազմությունների այնպես, որ միևնույն ենթաբազմության գագաթները զույգ առ զույգ հարևան չեն: Եթե $r = 2$, ապա r -կողմանի գրաֆը կանվանենք երկկողմանի:

Նկատենք, որ եթե $G = (V, E)$ գրաֆը երկկողմանի է, ապա V բազմությունը հնարավոր է տրոհել երկու ենթաբազմությունների V_1և V_2-ի այնպես, որ G գրաֆի ցանկացած կող կից լինի մեկ գագաթի V_1-ից և մեկ գագաթի V_2-ից:

Սահմանում 1.2.6: Եթե $G = (V, E)$ երկկողմանի գրաֆում V_1 բազմությանը պատկանող յուրաքանչյուր գագաթ միացված է V_2 բազմությանը պատկանող յուրաքանչյուր գագաթի, ապա G գրաֆը կանվանենք լրիվ երկկողմանի գրաֆ: Եթե այդ դեպքում $|V_1| = m$ և $|V_2| = n$, ապա կգրենք $G = K_{m,n}$:

Թեորեմ 1.2.2: Այն գրաֆների քանակը, որոնց գագաթների բազմությունը $V = \{ v_1,..., v_n\}$ -ն է, հավասար է $2^{\binom{n}{2}}$:

Թեորեմ 1.2.3: Այն գրաֆների քանակը, որոնց գագաթների բազմությունը $V = \{ v_1,..., v_n\}$ –ն է և որոնցում բոլոր գագաթների աստիճանները զույգ թվեր են, հավասար է $2^{\binom{n-1}{2}}$

Դիցուք G-ն և H -ը գրաֆներ են:

Սահմանում 1.2.7: H գրաֆը կոչվում է G գրաֆի ենթագրաֆ և կգրենք $H \subseteq G$, եթե $V(H) \subseteq V\ (G)$ և $E\ (H) \subseteq E\ (G)$:

Սահմանում 1.2.8: H գրաֆը կոչվում է G գրաֆի կմախքային ենթագրաֆ, եթե $H \subseteq G$ և $V\ (H) = V$ (G):

Դիցուք $G = (V, E)$-ն գրաֆ է և $S \subseteq V(G)$:

Սահմանում 1.2.9: G գրաֆի $G\ [S]$ ենթագրաֆը կոչվում է S բազմությամբ ծնված ենթագրաֆ կամ ծնված ենթագրաֆ, եթ $V(G[S]) = S$ և $E(G[S])$={ $uv; u, v \in S$ և $uv \in E(G)$}:

Դիցուք $G = (V, E)$-ն գրաֆ է :

Սահմանում 1.2.10 : G գրաֆի $u_0, u_1, \dots, u_{k-1}, u_k$ գագաթներից և $e_1, \dots e_k$ կողերից կազմված $u_0, e_1\ u_1, \dots\ u_{k-1}, e_k, u_k$ հաջորդականության կանվանենք k երկարությամբ u_0-ից u_k շրջանցում կամ k (u_0, u_k)-շրջանցում , եթե $e_j = u_{i-1}u_i$, երբ $1 \le i \le k$: Սահմանված (u_0, u_k)-շրջանցումը կրճատ կնշանակենք նրա գագաթների $u_0, u_1, \dots, u_{k-1}, u_k$ հաջորդականությամբ, ենթադրելով, որ յուրաքանչյուր հաջորդ գագաթ հարևան է նախորդին:

Սահմանում 1.2.11: (u_0, u_k)-շրջանցումը կանվանենք փակ, եթե $u_0 = u_k$:

Սահմանում 1.2.12: G գրաֆի (u_0, u_k)-շրջանցումը կանվանենք u_0-ից u_k ճանապարհ կամ (u_0, u_k)-ճանապարհ, եթե $u_0\ u_1$-ը,..., $u_{k-1}u_k$-ն G գրաֆի զույգ առ զույգ տարբեր կողեր են: Եթե P -ն G գրաֆի ճանապարհ է, ապա $\backslash P\backslash$-ով կնշանակենք այդ ճանապարհի երկարությունը, այսինքն՝ այդ ճանապարհի մեջ առկա կողերի քանակը:

Սահմանում 1.2.13: G գրաֆի ((u_0, u_k)-ճանապարհը կանվանենք պարզ (u_0, u_k)-ճանապարհ, եթե նրա մեջ մտնող բոլոր գագաթները զույգ առ զույգ տարբեր են:

Սահմանում 1.2.14: G գրաֆի (u_0, u_k)-ճանապարհը կանվանենք փակ ճանապարհ կամ ցիկլ, եթե այն փակ շրջանցում է, այսինքն՝ եթե $u_0 = u_k$:

Սահմանում 1.2.15: G գրաֆի ցիկլը կանվանենք պարզ, եթե նրանում կրկնվում են միայն առաջին և վերջին գագաթները:

Սահմանում 1.2.16: G գրաֆում u և v գագաթների միջև հեռավորությունը

կսահմանենք որպես կարճագույն (u, v)-ճանապարհի երկարություն, եթե G գրաֆում գոյություն ունի առնվազն մեկ (u, v)-ճանապարհ, և $+\infty$՝ հակառակ դեպքում: G գրաֆում u և v գագաթների միջև հեռավորությունը կնշանակենք $d_G(u, v)$-ով կամ $d(u, v)$-ով:

1. G գրաֆի ցանկացած u և v գագաթների համար $d_G(u, v) \geq 0$, և $d_G(u, v) = 0$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $u = v$;

2. G գրաֆի ցանկացած u և v գագաթների համար $d_G(u, v) = d_G(u, v)$;

3. G գրաֆի ցանկացած u, v և w գագաթների համար և $d_G(u, v) \leq d_G(u, w) + d_G(w, v)$

Լեմմա1.2.1: Ենթադրենք, որ G գրաֆում u-ն և v-ն իրարից տարբեր երկու գագաթներ են: Այդ դեպքում ցանկացած (u, v)- շրջանցումից կարելի է առանձնացնել պարզ (u, v) – ճանապարհ:

Լեմմա 1.2.2: G գրաֆի ցանկացած կենտ երկարություն ունեցող փակ շրջանցումից կարելի է առանձնացնել կենտ երկարություն ունեցող պարզ ցիկլ:

1.3 Կապակցվածության բաղադրիչներ և կապակցված գրաֆներ

Դիցուք $G = (V, E)$-ն գրաֆ է:

Սահմանում 1.3.1: G գրաֆը կանվանենք կապակցված, եթե նրա ցանկացած երկու u և v գագաթների համար G գրաֆում գոյություն ունի (u, v)-ճանապարհ:

Նշենք, որ կապակցված գրաֆի օրինակներ են հանդիսանում լրիվ և լրիվ երկկողմանի գրաֆները:

Եթե $G = (V, E)$-ն ցանկացած կրաֆ է, ապա դիտարկենք V բազմության վրա սահմանված α բինար հարաբերությունը, որտեղ ցանկացած $u, v \in V$ համար $u\alpha v$ այն և միայն այն դեպքում, երբ G գրաֆում գոյություն ունի (u, v)- ճանապարհ:

Նկատենք, որ α բինար հարաբերությունը բավարարում է հետևյալ երեք պայմաններին.

1. ռեֆլեքսիվություն, այսինքն ցանկացած $v \in V$ համար $u\alpha v$,
2. սիմետրիկություն, այսինքն ցանկացած $u, v \in V$ համար, եթե $u\alpha v$, ապա $v\alpha u$,
3. տրանզիտիվություն, այսինքն ցանկացած $u, v, w \in V$ համար, եթե $u\alpha v$ և $v\alpha w$ ապա $u\alpha w$:

Դիտարկենք G գրաֆի $G_j = G[V_j]$ ենթագրաֆները, $1 \leq j \leq p$: G գրաֆի $G_1, \dots, G_p$ ենթագրաֆներն ընդունված է անվանել G գրաֆի կապակցվածություն կամ կապակցված բաղադրիչներ

Դիտողություն1.3.1: G գրաֆը կապակցված է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն

ունի կապակցվածության մեկ բաղադրիչ:

Դիտողություն 1.3.2: Կամայական G գրաֆում գոյություն ունի ամենաերկար

ճանապարհ:

Եթե $G = (V, E)$-ն կապակցված (n, m)-գրաֆ է, ապա $cyc(G) = m - n + 1$ թիվը կանվանենք G գրաֆի ցիկլոմատիկ թիվ: Ստորև կապացուցենք կապակցված գրաֆների ցիկլոմատիկ թվին առնչվող մեկ թեորեմ:

Թեորեմ 1.3.1: Կապակցված $G = (V, E)$ գրաֆի համար $cyc(G) \geq 0$: Ավելին,

1. $cyc(G) = 0$ այն և միայն այն դեպքում, երբ G գրաֆում ցիկլ չկա,
2. $cyc(G) = 1$ այն և միայն այն դեպքում, երբ G գրաֆում կա ճիշտ մեկ ցիկլ:

$G = (V, E)$ գրաֆն անվանեցինք երկկողմանի, եթե V բազմությունը հնարավոր է տրոհել երկու ենթաբազմությունների V_1 և V_2-ի այնպես, որ G գրաֆի ցանկացած կող կից է մեկ գագաթի V_1 -ից և մեկ գագաթիV_2-ից:

1.4. Գրաֆների իզոմորֆիզմ

Սահմանենք գրաֆների իզոմորֆիզմի գաղափարը:

Սահմանում 1.4.1: G և H գրաֆները կոչվում են իզոմորֆ, եթե գոյություն ունի $f: V(G) \to V(H)$ փոխմիարժեք համապատասխանություն, որ $uv \in E(G)$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $f(u)f(v) \in E(H)$: Եթե G և H գրաֆները իզոմորֆ են կգրենք $G \cong H$:

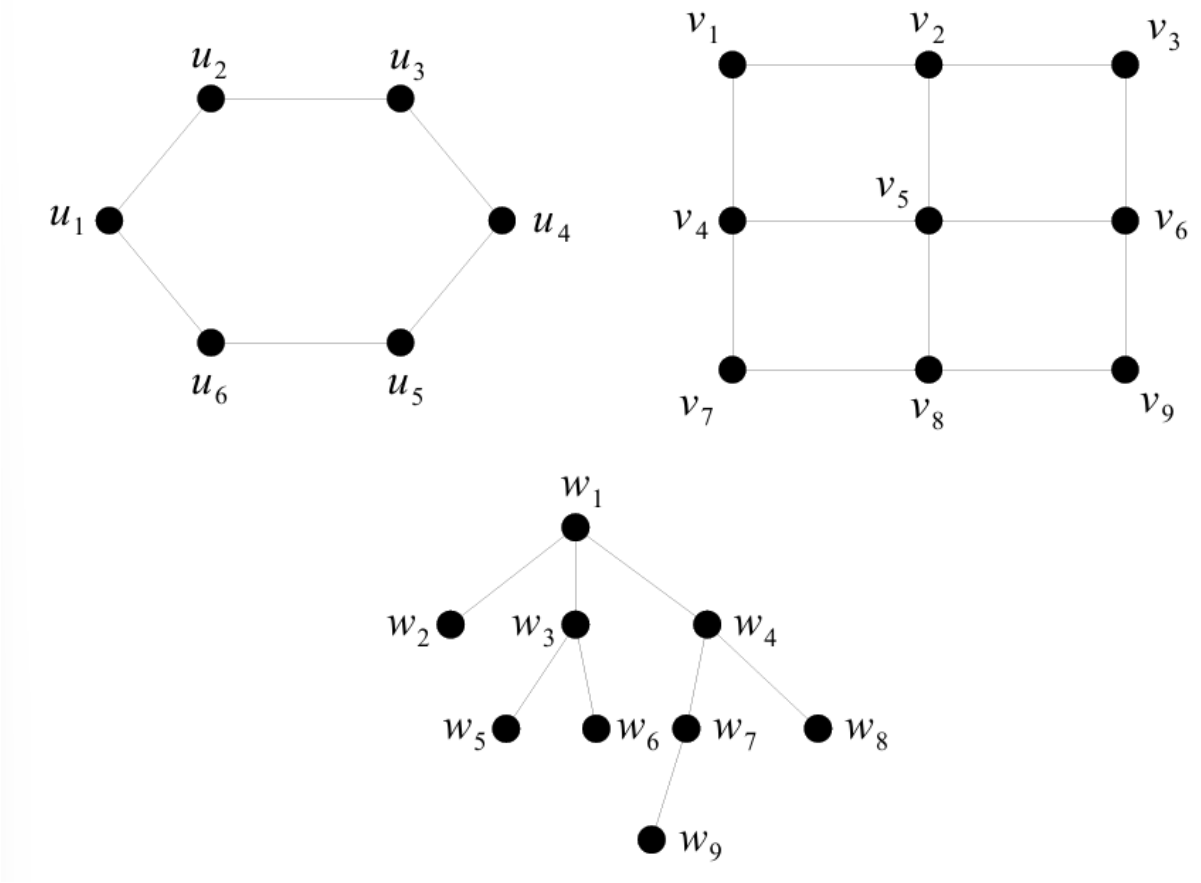
Հիպոթեզ 1.4.1: Դիցուք ունենք G և H գրաֆները, որտեղ $V(G) = \{u_1, \dots, u_n\}, V(H) = \{v_1, \dots, v_n\}$ և $n \geq 3$; : Եթե ցանկացած i-ի ($1 \leq i \leq n$) համար տեղի ունի $G - u_i \cong H - v_i$ պայմանը, ապա $G \cong H$:

Հիպոթեզ 1.4.2: Դիցուք ունենք G և H գրաֆները, որտեղ $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}, E(H) = \{f_1, \dots, f_m\}$ և $m \geq 4$. Եթե ցանկացած i-ի ($1 \leq i \leq n$) համար տեղի ունի $G - e_i \cong H - f_i$ պայմանը, ապա $G \cong H$:

Գլուխ 2. Երկկողմանի գրաֆներ

2.1. Երկկողմանի գրաֆների սահմանում, Քյոնիգի թեորեմ

Հիշենք, որ § 1.2-ում $G = (V, E)$ գրաֆն անվանեցինք երկկողմանի, եթե V բազմությունը հնարավոր է տրոհել երկու ենթաբազմությունների V_1 և V_2-ի այնպես, որ G գրաֆի ցանկացած կող կից է մեկ գագաթի V_1-ից և մեկ գագաթի V_2-ից:



Նկ. 2.1.1

Նշենք, որ նկ. 2.1.1-ում պատկերված երեք գրաֆներն էլ երկկողմանի են: Իրոք, դիտարկենք նրանցից առաջինի գագաթների բազմության հետևյալ տրոհումը. $U_1 = \{u_1, u_3, u_5\}$ և $U_2 = \{u_2, u_4, u_6\}$, և նկատենք, որ այդ գրաֆի ցանկացած կող միացնում է մեկական գագաթ U_1-ից և U_2-ից: Երկրորդ գրաֆի երկկողմանիության մեջ համոզվելու համար դիտարկենք նրա գագաթների հետևյալ տրոհումը. $V_1 = \{v_1, v_3, v_5, v_7, v_9\}$ և $V_1 = \{v_2, v_4, v_6, v_8\}$, և նկատենք, որ այդ գրաֆի ցանկացած կող միացնում է մեկական գագաթ V_1-ից և V_2-ից: Եվ, վերջապես, երրորդ գրաֆի երկկողմանիության մեջ համոզվելու համար դիտարկենք նրա գագաթների հետևյալ տրոհումը. $W_1 = \{w_1, w_5, w_6, w_7, w_8\}$ և $W_2 = \{w_2,$

w_3, w_4, w_9}, և նկատենք, որ այդ գրաֆի ցանկացած կող միացնում է մեկական գագաթ W_1-ից և W_2-ից:

Ստորև կապացուցենք Քյոնիգի թեորեմը, որը նկարագրում է երկկողմանի գրաֆները:

Թեորեմ 2.1.1 (Դ. Քյոնիգ): Որպեսզի $G = (V, E)$ գրաֆը լինի երկկողմանի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն չպարունակի կենտ երկարություն ունեցող պարզ ցիկլ:

Դիտարկենք ցանկացած G գրաֆը, և դիցուք G_1, …, G_p,-ն նրա կապակցվածության բաղադրիչներն են: Նկատենք, որ քանի որ G գրաֆը չի պարունակում կենտ երկարություն ունեցող պարզ ցիկլ, ապա նրա կապակցվածության բաղադրիչները ևս չեն պարունակի այդպիսի ցիկլ: Համաձայն վերը ապացուցվածի, G_1,…,G_p կապակցվածության բաղադրիչները հանդիսանում են երկկողմանի գրաֆներ, և հետևաբար j = 1, … ,p -ի համար $V(G_j)$ բազմությունը կարելի է տրոհել $V^{(1)}$ և $V^{(2)}$ բազմությունների այնպես, որ G_j գրաֆի ցանկացած կող միացնում է մեկական գագաթ $V_1^{(j)}$-ից և $V_2^{(j)}$-ից: Նշանակենք՝

$$V^{(1)} = V_1^{(1)} \cup \ldots \cup V_1^{(p)} \text{ և } V^{(2)} = V_2^{(1)} \cup \ldots \cup V_2^{(p)}:$$

Նկատենք, որ G գրաֆի ցանկացած կող միացնում է մեկական գագաթ $V^{(1)}$-ից և $V^{(2)}$-ից, և, հետևաբար, G գրաֆը նույնպես երկկողմանի է:

Դիցուք G -ն գրաֆ է: G գրաֆի կցության B(G) մատրիցը կանվանենք տոտալ ունիմոդուլյար մատրից, եթե այդ մատրիցի յուրաքանչյուր քառակուսային ենթամատրիցի որոշիչը հավասար է 0,1 կամ –1-ի: Այժմ տանք երկկողմանի գրաֆների մեկ այլ նկարագրում:

Թեորեմ 2.1.2: Որպեսզի $G = (V, E)$ գրաֆը լինի երկկողմանի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա կցության B(G) մատրիցը լինի տոտալ ունիմոդուլյար:

Ապացույց: Նախ ցույց տանք, որ եթե G գրաֆի կցության B(G) մատրիցը տոտալ ունիմոդուլյար է, ապա G -ն երկկողմանի գրաֆ է: Ենթադրենք հակառակը՝ G գրաֆի կցության B(G) մատրիցը տոտալ ունիմոդուլյար է, բայց G-ն երկկողմանի գրաֆ չէ: Ըստ թեորեմ 2.1.1-ի G-ն պարունակում է կենտ երկարություն ունեցող պարզ ցիկլ: Դիցուք այդ պարզ ցիկլի երկարությունը $2l+1$ է: Դիտարկենք այդ ցիկլի գագաթներին և կողերին

համապատասխանող B(G) մատրիցի ենթամատրիցը: Դիցուք այդ մատրիցը B'-ն է: Պարզ է, որ B'-ը $(2l+1)\times(2l+1)$ կարգի քառակուսային մատրից է: Այժմ դիտարկենք B'' մատրիցը, որը ստացվում է B'-ից որոշ տողեր և սյուներ տեղափոխելով այնպես, որ B'' մատրիցը ընդունի հետևյալ տեսքը.

$$\boldsymbol{B''} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}:$$

Հեշտ է տեսնել, որ $\det(B'') = 1 + (-1)^{2l} = 2$: Մյուս կողմից պարզ է, որ B' մատրիցի որոշիչը կարող է տարբերվելdet(B'')-ից միայն նշանով, իսկ դա հակասում է $B(G)$ մատրիցի տոտալ ունիմոդուլյար լինելուն:

Այժմ ցույց տանք, որ եթե G-ն երկկողմանի գրաֆ է, ապա G գրաֆի կցության $B(G)$ մատրիցը տոտալ ունիմոդուլյար է: Դիտարկենք $B(G)$ մատրիցի ցանկացած Q k × k կարգի քառակուսային ենթամատրիցը: Ապացույցը կատարենք մակածման եղանակով ըստ k-ի: Եթե k = 1-ի, ապա ակնհայտ է, որ det(Q)կամ det(Q) = 1 : Ենթադրենք, որ պնդումը ճիշտ է $B(G)$ մատրիցի Q' $k'\times k'$ կարգի ցանկացած քառակուսային ենթամատրիցի համար, որտեղ $k'< k$: Դիտարկենք Q $k\times k$ կարգի քառակուսային ենթամատրիցը: Եթե Q-ն պարունակում է սյուն, որի բոլոր տարրերը զրոներ են, ապա պարզ է որ det(Q) = 0: Եթե Q -ն պարունակում է սյուն, որի ճիշտ մեկ տարրն է 1, ապա վերլուծելով det(Q)-ն ըստ այդ սյանը մենք ըստ մակածման ենթադրության կստանանք, որ det(Q) = 0,1 կամ –1 -ի: Այստեղից հետևում է, որ մենք կարող ենք ենթադրել, որ Q մատրիցի յուրաքանչյուր սյուն պարունակում է ճիշտ երկու հատ 1: Քանի որ G-ն երկկողմանի գրաֆ է, ուստի այդ մեկերից մեկը կպատկանի G-ի մի կողմին, իսկ մյուսը՝ մյուս կողմին: Պարզ է, որ մենք կարող ենք ենթադրել, որ Q մատրիցի առաջին r տողերին համապատասխանում է G երկկողմանի գրաֆի մի կողմը, իսկ մյուս $k-r$ տողերին՝ այդ գրաֆի մյուս կողմը: Քանի որ G-ն երկկողմանի գրաֆ է, ուստի Q մատրիցի յուրաքանչյուր սյուն կպարունակի մեկ հատ 1 առաջին r տողերից և ճիշտ մեկ հատ 1 մյուս $k-r$ տողերից: Այստեղից հետևում է, որ Q մատրիցի առաջին r տողերի գումարը հավասար է այդ մատրիցի մյուս $k-r$ տողերի գումարին, ուստի Q մատրիցի տողերը գծորեն կախված են և det(Q) = 0:

2.2. Ռեսուրսների բաշխման խնդրի մաթեմատիկական ձևակերպումը

Ռեսուրսների օպտիմալ բաշխման խնդիրը հանդիսանում է ժամանակակից կառավարման և օպերացիոն հետազոտությունների առանցքային ուղղություններից մեկը: Այս խնդրի էությունը կայանում է սահմանափակ թվով ռեսուրսների և որոշակի առաջադրանքների (կամ սպառողների) միջև այնպիսի փոխմիարժեք համապատասխանության հաստատման մեջ, որն ապահովում է համակարգի առավելագույն արդյունավետությունը: Գրաֆների տեսության շրջանակներում նմանատիպ խնդիրները մոդելավորվում են երկկողմանի գրաֆների և դրանցում զուգակցումների որոնման միջոցով:

2.2.1. Խնդրի ֆորմալ ձևակերպումը

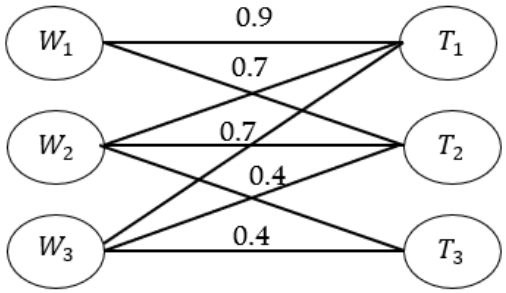
Դիցուք $G = (V, E)$ երկկողմանի գրաֆ է, որտեղ գագաթների V բազմությունը տրոհված է երկու անհատ ենթաբազմությունների՝ $V_1 = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ (ռեսուրսների բազմություն) և $V_2 = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ (առաջադրանքների բազմություն): E կողերի բազմությունը ներկայացնում է հնարավոր նշանակումները. $e = (r_i, t_j) \in E$ կողը առաջադրանքը:

Այս համատեքստում ռեսուրսների բաշխման խնդիրը հանգում է G գրաֆում այնպիսի $M \subseteq E$ զուգակցման որոնմանը, որը բավարարում է նախապես սահմանված օպտիմալության չափանիշներին:

2.2.2. Կիրառական ոլորտի մոդելավորումը

Ռազմական ոլորտ (Թիրախների խոցման խնդիր).

Ռազմական պլանավորման մեջ դիտարկվում է «զինատեսակ-թիրախ» մոդելը: Այստեղ V_1 բազմությունը ներկայացնում է առկա խոցման միջոցները (օրինակ՝ ՀՕՊ համակարգեր), իսկ V_2 –ը՝ հակառակորդի թիրախները:



Նկ. 2.2.1

Խնդրի նպատակն է գտնել այնպիսի զուգակցում, որն ապահովում է թիրախների առավելագույն քանակի չեզոքացումը՝ ռեսուրսների նվազագույն ծախսով: Այս դեպքում կարևորվում է Հոլի թեորեմի կիրառումը՝ պարզելու համար, թե արդյոք առկա միջոցները բավարար են բոլոր թիրախների խոցման համար:

2.2.3. Լուծումների բազմակիությունը և ընտրության չափանիշները

Գործնականում հաճախ հանդիպում են դեպքեր, երբ խնդիրն ունի ոչ թե մեկ, այլ մի քանի լավագույն (մաքսիմալ) լուծումներ: Այսինքն՝ գոյություն ունեն մի քանի տարբերակներ, որոնք հավասարապես բավարարում են բոլոր պահանջները: Նման դեպքերում լավագույն տարբերակի ընտրությունը կատարվում է հետևյալ լրացուցիչ չափանիշներով.

Ընդհանուր ծախսերի կրճատում. Ընտրվում է այն տարբերակը, որն ապահովում է ռեսուրսների ամենամեծ տնտեսումը (օրինակ՝ ամենաքիչ վառելիքի կամ զինամթերքի ծախսը):

Ժամանակի խնայողություն. Եթե բոլոր գործողությունները կատարվում են զուգահեռ, ապա առաջնահատկությունը տրվում է այն լուծմանը, որն ավելի արագ կավարտվի (նվազագույնի հասցնելով ամենաերկար տևող առաջադրանքի ժամանակը):

Անվտանգություն և հուսալիություն. Ռազմական կամ բժշկական բնույթի խնդիրներում ընտրվում է այն լուծումը, որն ունի հաջողության ամենաբարձր հավանականությունը և նվազագույն ռիսկերը:

2.3. Կշռված երկկողմանի գրաֆներ և նշանակման խնդրի մաթեմատիկական ձևակերպումը

Երկկողմանի գրաֆների տեսական հետազոտություններում առանցքային նշանակություն ունի կշռված գրաֆների հասկացությունը, որը թույլ է տալիս մոդելավորել իրական համակարգերի արդյունավետության և օպտիմալության չափանիշները: Ի տարբերություն պարզ գրաֆների, որտեղ կողերի բազմությունը սահմանում է միայն գագաթների միջև կապի առկայությունը, կշռված գրաֆներում յուրաքանչյուր կապի տրվում է քանակական բնութագիր:

Սահմանում 2.3.1: Կշռված երկկողմանի գրաֆ կոչվում է $G = (V_1 \cup V_2, E)$ գրաֆը, որի յուրաքանչյուր $e \in E$ կողին համապատասխանեցված է $\omega(e)$ իրական թիվը, որն անվանում ենք e կողի կշիռ:

Ռեսուրսների բաշխման խնդիրներում այս կշիռները մեկնաբանվում են որպես արդյունավետության գործակիցներ: Եթե դիտարկենք $V_1 = \{v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{1,n}\}$ ռեսուրսների և $V_2 = \{v_{2,1}, v_{2,2}, \dots, v_{2,n}\}$ առաջադրանքների բազմությունները, ապա գրաֆը կարելի է ներկայացնել $C = [c_{ij}]_{n \times n}$ կշռային մատրիցի տեսքով, որտեղ $c_{ij} = \omega(v_{1,i}, v_{2,j})$ տարրը բնութագրում է i-րդ ռեսուրսի օգտագործման օգտակարությունը j-րդ առաջադրանքի կատարման համար:

Նշանակման խնդիրը (Assignment Problem) ձևակերպվում է որպես կշռված երկկողմանի գրաֆում առավելագույն կամ նվազագույն կշռով կատարյալ զուգակցման որոնում: Խնդիրը հանգում է այնպիսի M կատարյալ զուգակցման ընտրությանը ($M \subseteq E$), որի համար տեղի ունի հետևյալ օպտիմալացման պայմանը.

$$W(M) = \sum_{e \in E} \omega(e) \to max$$

Այս մոդելը հանդիսանում է հիմնարար ռազմական և բժշկական ոլորտների խնդիրների համար, որտեղ $\omega(e)$ կշիռը կարող է արտահայտել թիրախի խոցման հավանականությունը կամ դոնոր-բուժառու համատեղելիության աստիճանը: Կշռված զուգակցման խնդիրների լուծման համար անհրաժեշտ է դիտարկել ոչ միայն աճող ճանապարհները, այլև դրանցում կողերի կշիռների հանրահաշվական գումարը:

2.4 Զուգակցումներ երկկողմանի գրաֆներում և min-max թեորեմներ

Դիցուք $G = (V, E)$-ն գրաֆ է $M \subseteq E$:

Սահմանում 2.4.1: Կասենք, որ M-ը կողերի անկախ բազմություն է G գրաֆում, եթե M-ը չի պարունակում հարևան կողեր:

Կողերի անկախ բազմությանն ընդունված է անվանել զուգակցում: Դիցուք M-ը G գրաֆի զուգակցում է:

Սահմանում 2.4.2: Կասենք, որ M զուգակցումը փակուղային է, եթե G գրաֆում գոյություն չունի այնպիսի $e \notin M$ կող, որ $M \cup \{e\}$-ն լինի զուգակցում:

Սահմանում 2.4.3: Կասենք, որ M զուգակցումը առավելագույնն է, եթե հզորությամբ նրանից մեծ զուգակցում G գրաֆում չկա:

G գրաֆում առավելագույն զուգակցման հզորությունը կնշանակենք $\alpha'(G)$-ով: Նկատենք, որ ցանկացած G գրաֆում $\alpha'(G) \leq \frac{|V|}{2}$:

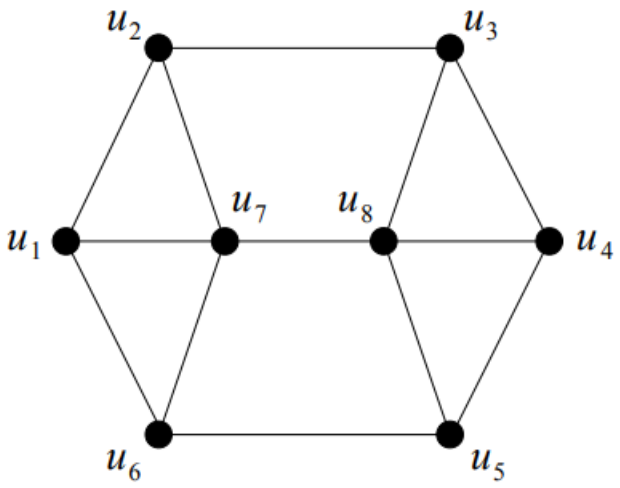
Սահմանում 2.4.4: Կասենք, որ M զուգակցումը կատարյալ է, եթե այն պարունակում է $\frac{|V|}{2}$ կող:

Նկատենք, որ գրաֆի կատարյալ զուգակցումը հանդիսանում է առավելագույն զուգակցում: Նշենք, որ հակառակը ճիշտ չէ, քանի որ գրաֆը կարող է չպարունակել կատարյալ զուգակցում (օրինակ, եռանկյունը), մինչդեռ առավելագույն զուգակցում գոյություն ունի միշտ:

Սահմանում 2.4.5: Կասենք, որ G գրաֆի M զուգակցումը հագեցնում է v գագաթը, եթե M զուգակցումը պարունակում է v գագաթին կից կող:

Նկատենք, որ ցանկացած M զուգակցում հագեցնում է $2|M|$ գագաթ, և, հետևաբար, այն չի հագեցնում $|V| - 2|M|$ գագաթ: Ավելին, նկատենք, որ զուգակցումը հանդիսանում է կատարյալ զուգակցում այն և միայն այն դեպքում, երբ այն հագեցնում է գրաֆի բոլոր գագաթները:

Դիտարկենք բերված սահմանումները պարզաբանող օրինակ:



Նկ.2.4.1

Նկ. 2.4.1-ում պատկերված G գրաֆում կողերի $M = \{u_2u_3, u_7u_8\}$ բազմությունը հանդիսանում է զուգակցում: M -ը հագեցնում է u_2, u_3, u_7, u_8 գագաթները, և չի հագեցնում՝ u_1, u_4, u_5, u_6 գագաթները: Նկատենք, որ այն չի հանդիսանում փակուղային զուգակցում, քանի որ M -ին կարելի է ավելացնել u_5u_6 կողը և ստանալ ավելի մեծ զուգակցում: Ավելին, նկատենք, որ $M' = \{u_2u_3, u_7u_8, u_5u_6\}$ զուգակցումն արդեն հանդիսանում է G գրաֆի փակուղային զուգակցում, բայց այն չի հանդիսանում առավելագույն զուգակցում, քանի քանի G գրաֆում կողերի $\{u_1u_2, u_3u_4, u_5u_6, u_7u_8\}$ բազմությունը հանդիսանում է ավելի մեծ զուգակցում: Նկատենք, որ վերջինս արդեն հանդիսանում է առավելագույն զուգակցում, քանի որ այն նաև կատարյալ զուգակցում է:

Դիցուք M -ը զուգակցում է, իսկ P -ն որևէ ճանապարհ է G գրաֆում:

Սահմանում 2.4.6: Կասենք, որ P ճանապարհը հանդիսանում է M -հերթափոխ ճանապարհ, եթե P ճանապարհի կողերը հերթականորեն պատկանում են և չեն պատկանում M-ին:

Սահմանում 2.4.7: Կասենք, որ M-հերթափոխ P ճանապարհը M -ավելացնող է, եթե այն միացնում է երկու գագաթ, որոնք հագեցած չեն M -ով:

M -ավելացնող ճանապարհների նշանակությունը և դերը երևում են հետևյալ թեորեմի վրա:

Թեորեմ 2.4.1 (Բերժ): Որպեսզի M զուգակցումը լինի առավելագույն, անհրաժեշտ է և բավարար, որ G գրաֆը չպարունակի M -ավելացնող ճանապարհ:

Թեորեմ 2.4.2 (Հոլլ): Դիցուք $G = (V, E)$ գրաֆն երկկողմանի է և $V = V_1 \cup V_2$ գագաթների բազմության համապատասխան տրոհումն է: Որպեսզի G գրաֆը պարունակի M զուգակցում, որը հագեցնում է V_1 բազմությունը, անհրաժեշտ է և բավարար, որ ցանկացած $S \subseteq V_1$ համար $|N_G(S)| \geq |S|$:

Ապացույց: Նախ նկատենք, որ եթե G գրաֆում գոյություն ունի V_1 բազմությունը հագեցնող M զուգակցում, ապա այդ զուգակցումը ցանկացած $S \subseteq V_1$ ենթաբազմության գագաթները կարտապատկերի V_2 ենթաբազմության իրարից տարբեր գագաթների, հետևաբար՝ $|N_G(S)| \geq |S|$:

Հակառակն ապացուցելու համար նկատենք, քանի որ G երկկողմանի գրաֆում ցանկացած զուգակցում պարունակում է ոչ ավելի, քան $|V_1|$ կող, ապա պնդումն ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ, որ G գրաֆի կամայական առավելագույն զուգակցումը հագեցնում է V_1 բազմության բոլոր գագաթները:

Ենթադրենք հակառակը. այսինքն ենթադրենք, որ G երկկողմանի գրաֆում ցանկացած $S \subseteq V_1$ համար $|N_G(S)| \geq |S|$, բայց նրա M առավելագույն զուգակցումը չի հագեցնում V_1 բազմության բոլոր գագաթները: Այդ դեպքում գոյություն կունենա $u \in V_1$ գագաթ, որը հագեցած չէ M զուգակցումով:

Նշանակենք S-ով և T-ով G գրաֆի գագաթների այն ենթաբազմությունները, համապատասխանաբար, V_1-ից ևV_2-ից, որոնք հասանելի են u գագաթից M-հերթափոխ ճանապարհով: Նկատենք, որ $u \in S$:

Ցույց տանք, որ M զուգակցումը հաստատում է փոխմիարժեք արտապատկերում $S \backslash \{u\}$ և T բազմությունների գագաթների միջև: Իրոք, u գագաթից սկսվող M- հերթափոխ ճանապարհերը հասնում են V_2 M զուգակցմանը չպատկանող կողով, իսկ V_1՝ M զուգակցմանը պատկանող կողով: Հետևաբար, $S \backslash \{u\}$ բազմության ցանկացած գագաթ հասանելի է T բազմության գագաթից M զուգակցման կողով: Քանի որ M զուգակցումը առավելագույն էր, ապա համաձայն թեորեմ 2.2.1-ի, G գրաֆում գոյություն չունեն M ավելացնող ճանապարհներ, և, հետևաբար, T բազմության ցանկացած գագաթ հագեցած

է M զուգակցումով, որտեղից հետևում է, որ եթե M-հերթափոխ ճանապարհը u գագաթից հասել է $y \in T$ գագաթ, ապա y-ին կից M զուգակցման կողը նրան կհամապատասխանեցնի $S\backslash\{u\}$ բազմության գագաթի: Ասվածից հետևում է, որ M զուգակցումը հաստատում է փոխմիարժեք արտապատկերում $S\backslash\{u\}$ և T բազմությունների գագաթների միջև, որը, մասնավորապես, նշանակում է, որ $|T| = |S\backslash\{u\}|$:

Մյուս կողմից, քանի որ M զուգակցումը արտապատկերում է T բազմության գագաթները $S\backslash\{u\}$ բազմության գագաթներին, ապա $T \subseteq N_G(S)$: Ցույց տանք, որ $T = N_G(S)$: Իրոք, եթե գոյություն ունենար $y \in N_G(S)\backslash T$ գագաթ, ապա այն հագեցած չէր լինի M զուգակցման կողով, և այն կառաջացներ u գագաթից սկիզբ առնող M-հերթափոխ ճանապարհ դեպի y գագաթ, ինչը կհակասեր $y \notin T$ պայմանին: Հետևաբար, $T = N_G(S)$:

Արդյունքում՝

$$|N_G(S)| = |T| = |S\backslash\{u\}| = |S| - 1 < |S|$$

ինչը հակասում է թեորեմի պայմաններին:

Դիցուք տրված է $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ բազմությունը և այդ բազմության ենթաբազմությունների $\mathfrak{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ ընտանիքը:

Սահմանում 2.3.8: S բազմության տարրերի $(s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_m})$ m-յակը կանվանենք տարբեր ներկայացուցիչների համակարգ $\mathfrak{F}$ ընտանիքի համար,եթե $s_{i_1} \in F_1$, $s_{i_2} \in F_2$, $\dots, s_{i_m} \in F_m$ և $s_{i_p} \neq s_{i_q}$, երբ $p \neq q$:

Թեորեմ 2.4.3 (Հոլլ): Որպեսզի $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, բազմության ենթաբազմությունների $\mathfrak{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ ընտանիքն ունենա տարբեր ներկայացուցիչների համակարգ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ ենթաբազմությունների $\mathfrak{F}$ ընտանիքին պատկանող ցանկացած k $F_{j_1}, F_{j_2}, \dots, F_{j_k}$ բազմությունների համար տեղի ունենա

$$|F_{j_1} \cup F_{j_2} \cup \dots \cup F_{j_k}| \geq k$$

պայմանը, որտեղ $1 \leq k \leq m$

ԳԼՈՒԽ 3. ՌԵՍՈՒՐՍՆԵՐԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ԲԱՇԽՄԱՆ ԱԼԳՈՐԻԹՄԱԿԱՆ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԸ

3.1 Հունգարական ալգորիթմի էությունը և քայլերը

Կշռված երկկողմանի գրաֆներում օպտիմալ (մաքսիմալ կամ մինիմալ կշռով) զուգակցում գտնելու խնդիրը հանդիսանում է կոմբինատոր օպտիմալացման դասական խնդիրներից մեկը: Այս խնդրի լուծման առավել արդյունավետ մեթոդը Հունգարական ալգորիթմ է (նաև հայտնի որպես Կուհն-Մանկրեսի ալգորիթմ):

Ալգորիթմ առաջին անգամ առաջարկվել է 1955 թվականին Հարոլդ Կուհնի կողմից, ով այն անվանել է «հունգարական», քանի որ մեթոդը մեծապես հիմված էր հունգարացի մաթեմատիկոսներ Դենես Քյոնիգի և Ենյո Էգերվարիի աշխատանքների վրա:

Ալգորիթմի տրամաբանական հիմքը

Հունգարական ալգորիթմի հիմքում ընկած է այն գաղափարը, որ եթե նշանակման խնդրի արդյունավետության մատրիցի որևէ տողի կամ սյան բոլոր տարրերից հանենք նույն հաստատուն թիվը, ապա օպտիմալ նշանակումը (զուգակցումը) չի փոխվի: Սա թույլ է տալիս ձևափոխել մատրիցն այնքան ժամանակ, մինչև հայտնվեն բավարար քանակով զրոյական տարրեր, որոնք հնարավորություն կտան կազմել կատարյալ զուգակցում 0 կշռով (ձևափոխված մատրիցում):

Ալգորիթմի քայլերի մանրամասն նկարագրությունը

Դիցուք ունենք $n \times n$ չափանի C մատրիցը, որտեղ c_{ij}-ն i −րդ ռեսուրսի կշիռն է j −րդ առաջադրանքի համար: Ալգորիթմ իրականացվում է հետևյալ քայլերով.

Քայլ 1. Տողերի նվազեցում (Row Reduction)

Յուրաքանչյուր տողի համար գտնվում է տվյալ տողի նվազագույն տարրը և հանվում է այդ տողի բոլոր տարրերից: Արդյունքում յուրաքանչյուր տողում հայտնվում է առնվազն մեկ զրո:

$$c_{ij}{}' = c_{ij} - \min_{1 \le j \le n} c_{ij}$$

Քայլ 2. Սյուների նվազեցում (Column Reduction)

Ստացված մատրիցի յուրաքանչյուր սյան համար գտնվում է նվազագույն տարրը և հանվում է սյան բոլոր տարրերից: Սա երաշխավորում է առնվազն մեկ զրոյի առկայությունը յուրաքանչյուր սյունակում:

Քայլ 3. Նվազագույն ծածկույթի որոնում

Անհրաժեշտ է գտնել նվազագույն քանակի ուղղահայաց և հորիզոնական գծեր, որոնք կծածկեն մատրիցի բոլոր զրոյական տարրերը: Դիցուք այդ գծերի քանակը k է:

Քայլ 4. Օպտիմալության ստուգում

1. Եթե $k = n$, ապա մատրիցում գոյություն ունի զրոյական կշռով կատարյալ զուգակցում: Ալգորիթմն ավարտվում է:

2. Եթե $k < n$, ապա անցնում ենք Փուլ 5-ին:

Քայլ 5. Մատրիցի վերահաշվարկ

Գտնվում է չծածկված տարրերից նվազագույնը (Δ): Այդ արժեքը հանվում է բոլոր չծածկված տարրերից և գումարվում է այն տարրերին, որոնք գտնվում են ծածկող գծերի հատման կետերում: Այնուհետև վերադառնում ենք Փուլ 3-ին:

Հունգարական ալգորիթմի արդյունավետությունը պայմանավորված է նրա բազմանդամային բարդությամբ: Սկզբնական տարբերակում այն ուներ $O(n^4)$ բարդություն, սակայն հետագա լրամշակումների և տվյալների կառուցվածքների (օրինակ՝ առաջնահերթության հերթերի) օգտագործման շնորհիվ այն հասցվել է $O(n^3)$: Սա նշանակում է, որ եթե ռեսուրսների քանակը մեծանում է 10 անգամ, հաշվարկների ժամանակը մեծանում է մոտ 1000 անգամ, ինչը շատ ավելի ձեռնտու է, քան լրիվ վերանայման մեթոդը $(n!)$, որը նույնիսկ $n = 20$ դեպքում կպահանջեր տարիների հաշվարկային հզորություն:

3.2. Ռազմական նշանակման խնդրի օրինակի լուծումը

Որպեսզի ցուցադրենք Հունգարական ալգորիթմի գործնական կիրառությունը, դիտարկենք հետևյալ ռազմական սցենարը. ունենք 5 տարբեր տեսակի զենքեր (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5) և 5 թիրախներ (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5): Յուրաքանչյուր զենքի արդյունավետությունը (կամ խոցման արժեքը) տվյալ թիրախի նկատմամբ տրված է ստորև բերված մատրիցի տեսքով (նպատակն է նվազեցնել ընդհանուր «ծախսը» կամ օպտիմալացնել նշանակումը):

Քայլ 0. Սկզբնական մատրիցի կազմում

Աղյուսակ 3.2.1. Սկզբնական արժեքների մատրից (C)

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
Z_1	10	19	8	15	19
Z_2	10	18	7	17	19
Z_3	13	16	9	14	19
Z_4	12	19	8	18	19
Z_5	14	17	10	19	15

Քայլ 1. Տողերի նվազեցում (Row Reduction)

Յուրաքանչյուր տողից հանում ենք այդ տողի նվազագույն արժեքը.

- Տող 1. min=8
- Տող 2. min=7
- Տող 3. min=9
- Տող 4. min=8
- Տող 5. min=10

Աղյուսակ 3.2.2. Մատրիցը տողերի նվազեցումից հետո

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
Z_1	2	11	0	7	11
Z_2	3	11	0	10	12
Z_3	4	7	0	5	10
Z_4	4	11	0	10	11
Z_5	4	7	0	9	5

Քայլ 2. Սյուների նվազեցում (Column Reduction)

Աղյուսակ 3.2.2.-ի սյուներից հանում ենք նվազագույն տարրերը (այս դեպքում T_1, T_2, T_4 և T_5 սյուներից).

Աղյուսակ 3.3.3. Մատրիցը սյուների նվազեցումից հետո

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
Z_1	0	4	0	2	6
Z_2	1	4	0	5	7
Z_3	2	0	0	0	5
Z_4	2	4	0	5	6
Z_5	2	0	0	4	0

Քայլ 3. Զրոների ծածկում նվազագույն գծերով

Այստեղ պետք է գծել նվազագույն քանակի գծեր: Տեսնում ենք, որ բոլոր զրոները կարելի է ծածկել 4 գծով ($L = 4$), բայց քանի որ մեր մատրիցը 5×5 է ($n = 5$), ուրեմն $L < n$: Անհրաժեշտ է կատարել լրացուցիչ ձևափոխություն:

Քայլ 4. Մատրիցի վերջնական ձևափոխում

Չծածկված տարրերից նվազագույնը Δ= 1 է:

1. Հանում ենք 1-ը բոլոր չծածկված տարրերից:
2. Գումարում ենք 1-ը գծերի հատման կետերում:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
Z_1	0	4	0	2	6
Z_2	0	3	0	4	6
Z_3	2	0	1	0	5
Z_4	1	3	0	4	5
Z_5	2	0	1	4	0

Վերջնական արդյունք և մեկնաբանություն

Ալգորիթմի ավարտին ստանում ենք օպտիմալ զուգակցումը.

- $Z_1 \rightarrow T_4$
- $Z_2 \rightarrow T_1$
- $Z_3 \rightarrow T_2$
- $Z_4 \rightarrow T_3$
- $Z_5 \rightarrow T_5$

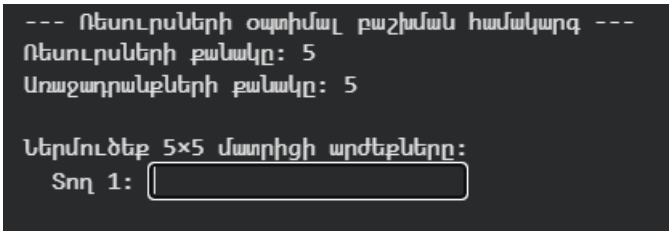
3.3. Ռեսուրսների օպտիմալ բաշխման ծրագրային համակարգի կառուցվածքը

Այս բաժնում ներկայացվում է մշակված ծրագրային փաթեթի ճարտարապետությունը և Հունգարական ալգորիթմի քայլ առ քայլ իրականացումը: Ծրագիրը գրված է Python լեզվով՝ օգտագործելով NumPy գրադարանը՝ մատրիցային բարձր արագագործություն ապահովելու համար:

3.3.1. Տվյալների ներմուծման և վալիդացիայի մոդուլներ

Ծրագրի կայունությունն ապահովելու համար իրականացվել են հատուկ ֆունկցիաներ, որոնք վերահսկում են օգտատիրոջ կողմից ներմուծվող տվյալների ճշգրտությունը:

- get_valid_int: Ապահովում է, որ ռեսուրսների և թիրախների քանակը լինի դրական ամբողջ թիվ:
- get_matrix: Իրականացնում է մատրիցի տող առ տող ներմուծումը՝ ստուգելով յուրաքանչյուր մուտքագրված արժեքի տիպը:



Նկար 3.3.1.

3.3.2. Հունգարական ալգորիթմի հիմնական մոդուլի իրականացումը

Ալգորիթմի առանցքը hungarian_algorithm ֆունկցիան է, որը սկսվում է մատրիցի նախնական մշակմամբ (Preprocessing):

```
def hungarian_algorithm(cost: np.ndarray):

    n = cost.shape[0]

    m = cost.shape[1]

    size = max(n, m)
```

```
# Քառակուսի մատրից — padding զրոներով
C = np.zeros((size, size))
C[:n, :m] = cost
# Փուլ 1. Տողերի նվազագույնի հանում
for i in range(size):
    C[i] -= C[i].min()
#  Փուլ 2. Սյունների նվազագույնի հանում
for j in range(size):
```

Մատրիցի ընդլայնումը (padding) թույլ է տալիս լուծել ոչ քառակուսային խնդիրներ, ինչը կարևոր է այն դեպքերում, երբ ռեսուրսները գերազանցում են առաջադրանքների քանակը կամ հակառակը:

3.3.3. Անկախ զրոների որոնման և ծածկույթի ձևավորման ալգորիթմը

Այս ենթաբաժնում դիտարկվում է մատրիցում աստղանշված (★) զրոների նախնական ընտրությունը, որը հիմք է հանդիսանում հետագա օպտիմալացման համար:

```
# Փուլ 3. Անկախ զրոների նախնական նշանակում
    for i in range(size):
        for j in range(size):
            if C[i, j] == 0 and not row_covered[i] and not col_covered[j]:
                starred[i, j] = True
                row_covered[i] = True
                col_covered[j] = True
```

Այնուհետև իրականացվում է cover_starred_cols օժանդակ ֆունկցիան, որը ծածկում է այն սյուները, որտեղ առկա է ★ զրո:

3.3.4. Մատրիցի ճշգրտման և շղթայական ճանապարհների կառուցման մեխանիզմը

Հունգարական ալգորիթմի արդյունավետությունը պայմանավորված է նրանով, որ այն չի փորձում կատարել պարզ սպառիչ որոնում, այլ օգտագործում է մատրիցի աստիճանական ձևափոխման մեթոդը: Երբ նախնական աստղանշված (★) զրոների քանակը փոքր է մատրիցի N չափից, ծրագիրն անցնում է իտերատիվ օպտիմալացման փուլին, որը բաղկացած է երկու հիմնական գործընթացից՝ մատրիցի թարմացում և շղթաների ընդլայնում:

Մատրիցի ճշգրտումը (Step Adjust)

Եթե չծածկված զրոներ չկան, բայց օպտիմալ լուծումը դեռ չի գտնվել, ծրագիրը կանչում է step_adjust() ֆունկցիան: Սա թույլ է տալիս ստեղծել նոր զրոներ այն բջիջներում, որոնք կարող են բերել ավելի շահավետ բաշխման:

```
def step_adjust():
    min_val = np.inf
    # 1. Գտնում ենք նվազագույն արժեքը չծածկված բջիջներում
    for i in range(size):
        for j in range(size):
            if not row_covered[i] and not col_covered[j]:
                if C[i, j] < min_val:
                    min_val = C[i, j]
    # 2. Ձևափոխում ենք մատրիցը
```

```
for i in range(size):
    for j in range(size):
        if row_covered[i]:
            C[i, j] += min_val
        if not col_covered[j]:
            C[i, j] -= min_val
```

Այս գործողության մաթեմատիկական իմաստն այն է, որ մենք «տեղափոխում» ենք պոտենցիալ զրոները մատրիցի մեկ հատվածից մյուսը: Հանելով նվազագույն արժեքը (min_val) չծածկված բոլոր տարրերից, մենք ստեղծում ենք առնվազն մեկ նոր զրոյական տարր: Միևնույն ժամանակ, գումարելով այն ծածկված տողերի և սյուների հատման կետերում, մենք պահպանում ենք նախկինում գտնված օպտիմալ զրոների հավասարակշռությունը:

Շղթայական ճանապարհների որոնում (Augmenting Paths)

Ալգորիթմի ամենաբարդ հատվածը augment_path տրամաբանությունն է, որը հիմված է Զիկովի և Բերժի թեորեմների վրա: Երբ ծրագիրը գտնում է չծածկված զրո, այն նշում է որպես պրայմավորված (′) զրո:

Եթե տվյալ տողում չկա աստղանշված (★) զրո, ապա կանչվում է շղթայի կառուցման գործընթացը.

```
def augment_path(path):
    """★ և ′ փոխանակում է ճանապարհի երկայնքով"""
    for i, j in path:
        if starred[i, j]:
            starred[i, j] = False
        else:
```

```
starred[i, j] = True
```

Այս ֆունկցիան աշխատում է հետևյալ սկզբունքով. այն կառուցում է հաջորդականություն, որտեղ ′ զրոները դառնում են ★, իսկ նախկին ★ զրոները՝ սովորական զրոներ։ Սա կոչվում է զուգակցման ընդլայնում։ Յուրաքանչյուր նման շղթայի ավարտից հետո աստղանշված զրոների (այսինքն՝ ընտրված ռեսուրս-առաջադրանք զույգերի) քանակը աճում է ուղիղ մեկով։

Այս գործողությունները կրկնվում են while not col_covered.all(): ցիկլում, մինչև որ ծածկված սյուների քանակը հավասարվի N-ին, ինչն էլ նշանակում է, որ բոլոր ռեսուրսները բաշխված են մաթեմատիկորեն հնարավոր լավագույն տարբերակով։

3.3.5. Ծրագրային փորձարկման արդյունքների ամփոփում և վերլուծություն

Մշակված ծրագրային համակարգի արդյունավետությունը ստուգելու համար իրականացվել է փորձնական հաշվարկ՝ օգտագործելով 3.2 բաժնում դիտարկված Weapon-Target Assignment (WTA) խնդրի տվյալները։ Փորձարկման նպատակն էր պարզել ծրագրի ճշգրտությունը և արագագործությունը իրական մատրիցային տվյալների հետ աշխատելիս։

Մուտքային տվյալներ և գործընթաց.

Ծրագրին փոխանցվել է 5×5 չափողականության մատրիցը, որտեղ տողերը ներկայացնում էին զինատեսակները (Z_1 - Z_5), իսկ սյուները՝ թիրախները (T_1 - T_5)։ Ընտրվել է «Նվազագույն ծախս» (Minimization) ռեժիմը։

```
--- Ռեսուրսների օպտիմալ բաշխման համակարգ ---
Ռեսուրսների քանակը: 5
Առաջադրանքների քանակը: 5

Ներմուծեք 5×5 մատրիցի արժեքները:
  Տող 1: 10 19 8 15 19
  Տող 2: 10 18 7 17 19
  Տող 3: 13 16 9 14 19
  Տող 4: 12 19 8 18 19
  Տող 5: 14 17 10 19 15

Խնդրի տեսակ:
  1 — Նվազագույն ծախս
  2 — Առավելագույն շահույթ
Ընտրություն (1 կամ 2): 1

==================================================
ՕՊՏԻՄԱԼ ԲԱՇԽՈՒՄ — ՆՎԱԶԱԳՈՒՅՆ ԾԱԽՍ
==================================================
  Ռեսուրս      Առաջադրանք        Արժեք
  ----------------------------------
  1            4                  15.00
  2            1                  10.00
  3            2                  16.00
  4            3                   8.00
  5            5                  15.00
--------------------------------------------------
  Ընդհանուր ծախս: 64.00
==================================================
```

Նկար 3.3.2.

Արդյունքների համեմատական վերլուծություն

Ծրագրի աշխատանքի արդյունքում ստացված տվյալները թույլ են տալիս կատարել հետևյալ եզրակացությունները.

1. Օպտիմալություն. Ծրագիրը հաջողությամբ գտել է նշանակումների այնպիսի համակցություն, որի դեպքում ընդհանուր ծախսը կազմել է 64 միավոր: Սա լիովին համապատասխանում է Հունգարական ալգորիթմի մաթեմատիկական սպասելիքներին և հաստատում է կոդի տրամաբանական ճշգրտությունը:

2. Արագագործություն. Ձեռքով հաշվարկի դեպքում (բաժին 3.2) նույն խնդրի լուծումը պահանջել է զգալի ժամանակ և բազմաթիվ աղյուսակների վերակառուցում: Ծրագրային իրականացումը նույն արդյունքին հասել է միլիվայրկյանների ընթացքում, ինչը փաստում է $O(n^3)$ բարդության արդյունավետությունը:

3. Ճկունություն. Ի տարբերություն ձեռքով հաշվարկի, որտեղ ցանկացած սխալ կարող էր հանգեցնել ամբողջական վերահաշվարկի, ծրագիրը թույլ է տալիս ակնթարթորեն փոփոխել մուտքային կշիռները և ստանալ նոր օպտիմալ լուծում:

Համակարգի կիրառելիությունը

Ստացված արդյունքները փաստում են, որ մշակված համակարգը պատրաստ է կիրառման իրական ռեսուրսային խնդիրներում: Այն կարող է ծառայել որպես հիմք ավելի բարդ՝ դինամիկ թիրախավորման համակարգերի համար, որտեղ տվյալները թարմացվում են իրական ժամանակում:

3.4 Խնդրի լուծման այլընտրանքային մեթոդների համեմատական վերլուծություն

Այս բաժինը թույլ կտա ցույց տալ, թե ինչու է հենց Հունգարական ալգորիթմը ընտրվել որպես հիմնական գործիք:

3.4.1. Սպառիչ որոնման մեթոդ

Ամենապարզ մեթոդն է, որը ստուգում է բոլոր հնարավոր n! համակցությունները: Ինչպես արդեն նշվել է բարդության վերլուծության մեջ, այս մեթոդը կիրառելի է միայն շատ փոքր չափողականության ($n \leq 8$) դեպքում: Այն երաշխավորում է լուծումը, բայց պահանջում է անիրատեսական հաշվողական ժամանակ:

3.4.2. Ագահ ալգորիթմեր

Ագահ ալգորիթմը յուրաքանչյուր քայլում ընտրում է տվյալ պահին ամենաէժան (կամ ամենաարդյունավետ) տարբերակը՝ առանց հաշվի առնելու հետագա հետևանքները:

- Առավելությունը. Աշխատում է շատ արագ ($O(n^3)$)
- Թերությունը. Հաճախ չի գտնում գլոբալ օպտիմալ լուծումը: Օրինակ՝ առաջին զենքին տալով իր համար լավագույն թիրախը, մենք կարող ենք մնացած զենքերին թողնել շատ վատ տարբերակներ, ինչը կմեծացնի ընդհանուր ծախսը:

3.4.3. Գծային ծրագրավորման սիմպլեքս մեթոդ

Նշանակման խնդիրը կարող է դիտարկվել որպես գծային ծրագրավորման մասնավոր դեպք։ Սիմպլեքս մեթոդը ունիվերսալ է և կարող է լուծել այս խնդիրը, սակայն այն պահանջում է շատ ավելի մեծ հիշողություն և հաշվողական ռեսուրսներ, քան Հունգարական մեթոդը, որը նեղ մասնագիտացված է հենց այս տիպի խնդիրների համար։

3.4.4. Գենետիկական ալգորիթմեր

Սրանք էվոլյուցիոն մեթոդներ են, որոնք լավ են աշխատում գերխոշոր մատրիցների դեպքում, որտեղ Հունգարական մեթոդը կարող է դանդաղել։ Սակայն գենետիկական ալգորիթմները տալիս են «բավարար լավ» լուծում, բայց ոչ երբեք բացարձակ օպտիմալը, ինչը ռազմական ոլորտում կարող է անթույլատրելի լինել։

ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ

Իրականացված հետազոտության և ծրագրային մշակման արդյունքում կարելի է փաստել, որ ռեսուրսների օպտիմալ բաշխման խնդիրը հանդիսանում է ժամանակակից կառավարման համակարգերի հիմնաքարերից մեկը։ Աշխատանքի ընթացքում դիտարկված տեսական դրույթները, մաթեմատիկական մոդելները և սեփական ծրագրային լուծումները թույլ են տալիս ձևակերպել հետևյալ հիմնական եզրահանգումները.

1. Տեսական հիմքերի և մոդելավորման արդյունավետությունը.

Աշխատանքի առաջին փուլում ցույց տրվեց, որ նշանակման խնդիրների (Assignment Problem) մոդելավորումը երկկողմանի գրաֆների միջոցով ապահովում է խնդրի հստակ մաթեմատիկական ձևակերպումը։ Երկկողմանի գրաֆների կատարյալ զուգակցումների և կշռված գրաֆների տեսությունը հնարավորություն տվեց ռեսուրսների բաշխման խնդիրը վերածել մատրիցային օպտիմալացման խնդրի, որտեղ նպատակային ֆունկցիան ուղղված է ընդհանուր ծախսի նվազեցմանը։

2. Հունգարական ալգորիթմի սեփական իրականացման առավելությունները.

Աշխատանքի առանցքային ձեռքբերումը Հունգարական ալգորիթմի (Kuhn-Munkres ալգորիթմ) հաջորդական քայլերի սեփական ծրագրային իրականացումն է։ Ի տարբերություն պատրաստի գրադարանների օգտագործման, մշակված կոդը թույլ է տալիս լիարժեք վերահսկել ալգորիթմի յուրաքանչյուր փուլը՝ ներառյալ մատրիցի ռեդուկցիան, աստղանշված զրոների որոնումը և շղթայական ճանապարհների (Augmenting Paths) կառուցումը։ Սա ապահովում է բացարձակ օպտիմալ լուծման ստացումը $O(n^3)$ պոլինոմիալ ժամանակային բարդությամբ։

3. Ծրագրային համակարգի ճկունությունը և ունիվերսալությունը.

Մշակված Python ծրագրային ապահովումը ցուցաբերեց բարձր ճկունություն ոչ ստանդարտ սցենարներում։ Մասնավորապես՝

- Ոչ քառակուսային մատրիցներ. "Padding" մեթոդի կիրառումը հնարավորություն տվեց հավասարեցնել ռեսուրսների և առաջադրանքների

քանակը՝ ապահովելով ալգորիթմի աշխատունակությունը իրական անհավասարաչափ բաշխումների ժամանակ։

- Բարդ սցենարներ. Ծրագիրը հաջողությամբ լուծում է թե՛ նվազագույն ծախսի, և թե՛ առավելագույն շահույթի խնդիրները՝ շնորհիվ մատրիցային տրանսֆորմացիաների։

4. Գործնական կիրառելիությունը ռազմական և տնտեսական ոլորտներում.

Weapon-Target Assignment (WTA) խնդրի վրա կատարված փորձարկումները փաստեցին, որ ավտոմատացված բաշխումը զգալիորեն գերազանցում է ձեռքով հաշվարկման մեթոդներին։ Ծրագիրը ոչ միայն գտավ մաթեմատիկորեն լավագույն լուծումը (64 միավոր), այլև դա կատարեց միլիվայրկյանների ընթացքում, ինչը կենսական է իրական ժամանակում որոշումների կայացման համար։

5. Մատրիցի ճշգրտման մեխանիզմների արդյունավետությունը.

Հետազոտությունը ցույց տվեց, որ step_adjust և augment_path ֆունկցիաների միջոցով մատրիցի դինամիկ թարմացումը թույլ է տալիս հաղթահարել այն իրավիճակները, երբ պարզ զրոների քանակը բավարար չէ օպտիմալ զուգակցում ստանալու համար։ Սա ապացուցում է ընտրված մեթոդի կայունությունը և հուսալիությունը։

Հետագա զարգացման հեռանկարները.

Չնայած ստացված բարձր արդյունքներին, համակարգը կարող է հետագայում զարգացվել հետևյալ ուղղություններով.

1. Ինտեգրում AI մոդելների հետ. Թիրախների կշիռների և ռեսուրսների արդյունավետության գործակիցների ավտոմատ կանխատեսման համար։
2. Զուգահեռ հաշվարկներ. Գերխոշոր մատրիցների (հազարավոր տարրերով) մշակման արագությունը բարձրացնելու համար՝ օգտագործելով GPU հաշվարկներ։

Ամփոփելով՝ կարելի է նշել, որ դիպլոմային աշխատանքի շրջանակներում առաջադրված նպատակները լիովին իրականացվել են։ Մշակված տեսական և գործնական գործիքակազմը հանդիսանում է պատրաստի լուծում ռեսուրսների

կառավարման բարդ համակարգերի համար՝ ապահովելով մաթեմատիկորեն հիմնավորված օպտիմալություն և բարձր արագագործություն։

Տնտեսագիտություն տիտխոսաթերթ

ԳԼՈՒԽ 4. Ռեսուրսների բաշխման խնդիրներում երկկողմանի գրաֆների կիրառման աշխատանքների ինքնարժեքի և գնի հաշվարկը:

Ժամանակակից տնտեսական պայմաններում ցանկացած գործունեություն առնչվում է տնտեսական հարցերի հետ: Նոր տեխնիկայի, տեխնոլոգիական պրոցեսների, տեխնիկա-տնտեսական հիմնավորման համար, մասնավորապես մեր աշխատանքի պայմաններում կարևորագույն տնտեսական հիմնահարցերից է ինքնարժեքի որոշումը:

Արտադրանքի կամ ծառայությունների ինքնարժեքը՝ դա արտադրանքի (ծառայությունների) արտադրության և իրացման վրա կատարված բոլոր ծախսերի գումարն է դրամական արտահայտությամբ:

Ինքնարժեքի մեջ իրենց արտահայտությունն են գտնում սպառված շրջանառու ֆոնդերը, կենդանի աշխատանքի մի մասը, որը աշխատողներին վճարում է աշխատավարձի ձևով:

Ինքնարժեքի մեջ մտնող ծախսերը դասակարգվում են ըստ տնտեսական տարերի և ըստ կալկուլյացիոն հոդվածների:

Ներկայումս կիրառվում է ծախսերի ըստ կալկուլյացիոն հիմնական հոդվածների հետևյալ դասակարգումը՝

1. համալրող առարկաներ,
2. էլեկտրաէներգիայի ծախսեր,
3. աշխատողների հիմնական աշխատավարձ,
4. աշխատողների լրացուցիչ աշխատավարձ,
5. սարքավորումների շահագործման և պահպանման ծախսեր,
6. տարածքի վարձակալության համար ծախս,
7. ընդհանուր տնտեսական ծախսեր:

Լրիվ ինքնարժեք (1-7 կետերի գումարը):

Հաշվարկի համար ելքային տվյալներն են.

- փաթեթի մեջ մտնող համալրող առարկաների քանակն ու անվանացանկը;

- ժամանակի ամփոփ նորմերը, աշխատանքի կարգն ու աշխատավարձի ձևերը,

- ժամավճարային և գործարքային պարգևատրման չափերը (օրինակ 24%),

- լրացուցիչ աշխատավարձի չափերը (օրինակ 12%),

- սարքավորումների պահպանման և շահագործման ծախսերի դրույքաչափերը (օրինակ 1%),

- ընդհանուր տնտեսական ծախսերի դրույքաչափը (օրինակ 111%),

- աշխատանքը իրականացվել է 12 ամիսների ընթացքում:

4.1Համալրող առարկաների ծախսի հաշվարկ

Գնված բաղադրիչների և կիսաֆաբրիկատների արժեքը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$Ծ_{կֆհա} = \sum Ք_i * Գ_i,$$

որտեղ $Ք_i$-ն i-րդ տեսակի գնված բաղադրիչների քանակն է, հատ, $Գ_i$-ն՝ i-րդ գնված բաղադրիչի միավորի գինը: Հաշվարկի արդյունքները բերված են աղյուսակ 1.1-ում:

Աղյուսակ 4.1

Բաղադրիչի անվանումն ու տեսակը	Մեկ փաթեթին ընկնող քանակ.հատ	Միավորի գինը.դրամ	Մեկ փաթեթին ընկնող արժեք.դրամ
Արագամաշ առարկաներ	1	300000	300000
Գրասենյակային տարրեր /ֆլեշ կրիչ, ներկանյութ և այլն/:	2	5000	10000
Ընդամենը			310000

Ընդամենը՝ 310000 դրամ:

4.2 Էլեկտրաէներգիայի ծախսի հաշվարկ

Համակարգիչները և կապի ու ՏՏ այլ սարքավորումները աշխատեցնելու համար էլեկտրաէներգիայի տարեկան ծախսը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$Է=ՎxԱ_Է,$$

որտեղ Վ-ն էլեկտրաէներգիայի տարեկան ծախսն է, $Ա_Է$-ն՝ 1կվ/ժ էլեկտրաէներգիայի արժեքը (50 դրամ, ըստ գործարանային գների):

Մեր օրինակի համար՝

Վ=1400կՎտ/ժ, Է= 1400*50=70000 դրամ/ամսական և 70000*12=840000 դրամ/տարեկան:

4.3 Աշխատողների հիմական աշխատավարձի հաշվարկը

Աշխատողների հիմական աշխատավարձի մեջ մտնում են՝

- գործարքային դրույքաչափերով աշխատավարձ,
- ժամավճարային աշխատավարձ,
- պարգևավճար:

Գործարքային աշխատավարձն ըստ տարիֆային համակարգի որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$Ա_{հիմ.}= Ժ_{դ.}*Ա_{արտ.},$$

որտեղ $Ժ_{դ.}$-ն ժամային դրույքաչափն է, $Ա_{արտ.}$-ն՝ ժամային նորմը: Հաշվարկման արդյունքները բերված են աղյուսակ 1.2-ում:

Աղյուսակ 4.2

Գործառույթի հաջորդական.	Վճարման ձև	Ժամանակային նորմ	Ժամային դրույք	Տարիֆային ֆոնդ
Նախագծում	Գործարքա-պարգևա-վճարային	25	1500	37500
Մշակում	Գործարքա-պարգևա-վճարային	23	4000	92000
Կարգավորում	Գործարքա-պարգևա-վճարային	25	4000	100000
Թեստավորում	Գործարքա-պարգևա-վճարային	35	3000	105000
Ընդամենը				334500

Պարգևատրման չափը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$Պ= Ա_{հիմ} * Պ_դ/100\%,$$

որտեղ $Պ_դ$-ն պարգևատրման դրույքաչափն է՝ տոկոսներով արտահայտված:

Պ= 334500*24/100=80280 դրամ:

Ընդամենը հիմնական աշխատավարձը կկազմի՝ 334500+80280=414780 դրամ/ամսական կամ՝ 414780*12=4977360 դրամ/տարեկան:

4.4 Աշխատողների լրացուցիչ աշխատավարձի հաշվարկը

Լրացուցիչ աշխատավարձի մեջ մտնում են՝ հերթական և լրացուցիչ գործողումների, արձակուրդների վճարները, պետական հանձնարարականների կատարման հետ

կապված ծախսերը և այլն: Աշխատողների լրացուցիչ աշխատավարձը հաշվարկվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$Ա_{լր.} = ԸԱ_{հիմ.} * Ա_{լր.դ}/100,$$

որտեղ $ԸԱ_{լր.դ}$–ն ընդհանուր հիմական աշխատավարձն է, իսկ $Ա_{լր.դ}$-ն՝ լրացուցիչ աշխատավարձի դրույքաչափը:

$$Ա_{լր.} = 414780*12/100=49774$$ դրամ/ամսական կամ

49774*12=597288 դրամ/տարեկան:

4.5 Սարքավորումների պահպանման և շահագործման ծախսերի հաշվարկը

Սարքավորումների պահպանման և շահագործման ծախսերի թվին են պատկանում ամորտիզացիոն, ընթացիկ վերանորոգման, տրանզիտորային միջոցների, գործիքների, հարմարանքների վերանորոգման և այլ ծախսերը: Սարքավորումների պահպանման և շահագործման ծախսերի թվին են պատկանում ամորտիզացիոն, ընթացիկ վերանորոգման, տրանզիստորային միջոցների, գործիքների և հարմարանքների վերանորոգման և այլ ծախսերը:

Հիմական միջոցների տարեկան ամորտիզացիան ($Ա_s$) հաշվարկվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$Ա_s=Հ_ա/Ն,$$

որտեղ $Հ_ա$-ն հիմական միջոցների սկզբնական արժեքն է, Ն-ն՝ հիմական միջոցների օգտակար գործունեության ժամկետը:

Աղյուսակ 4.3

Հիմնական միջոցի անվանումն ու տեսակը	Հիմնական միջոցի սկզբնական արժեքը	Ամորտիզացիոն հատկացումներ	
		ՀՄ օգտակար գործողության ժամկետ, տարի	Ամորտիզացիոն ծախս
Սարքավորումներ	310000	2	155000
Ընդամենը			155000

Սարքավորումների պահպանման և շահագործման ծախսերի գումարը որոշվում է հետևյալ կերպ՝

$$Ծ_{պ.շ.} = Ա_{հիմ}*12 * Ծ_{պ.շ.դ.}/100,$$

որտեղ $Ծ_{պ.շ.դ.}$-ն սարքավորումների պահպանման և շահագործման ծախսերի դրույքաչափն է, $Ա_{հիմ.}$–ը՝ աշխատողների տարեկան հիմնական աշխատավարձը:

$$Ծ_{պ.շ.} = 414780*12*1/100=49774 \text{ դրամ:}$$

Սարքավորումների ընթացիկ վերանորոգման ծախսը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$Ծ_{ը.վ.} = Ա_{հիմ} *12 * Ծ_{ը.վ.դ.}/100,$$

որտեղ $Ծ_{ը.վ.դ}$-ն սարքավորումների ընթացիկ վերանորոգման դրույքաչափն է:

$$Ծ_{ը.վ.} == 414780*12*6.6/100=328506 \text{ դրամ:}$$

Աղյուսակ 4.4

Ծախսի անվանումը	Դրույքաչափը	Տարեկան ծախսը
Սարքավորումների պահպանման և շահագործման ծախսեր	1	49774
Սարքավորումների ընթացիկ վերանորոգում	6.6	328506
Սարքավորումների ամորտիզացիա	-	155000
Ընդամենը		533280

4.6 Տարածքի վարձակալության ծախսի հաշվարկը

Գործունեության արդյունավետության հիմական պայմաններից մեկը տարածքի ճիշտ ընտրությունն է: Վարձակալվող տարածքը գտնվում է Երևան ք. բիզնես կենտրոններից մեկում: Այս տարածքում անհրաժեշտ տարածքի վարձակալության ամսական ծախսը կկազմի 140000 դրամ կամ 140000*12=1680000 դրամ տարեկան:

4.7 Ընդհանուր տնտեսական ծախսերի հաշվարկը

Ընդհանուր տնտեսավարման ծախսերի մեջ մտում են ձեռնարկության ընդհանուր կառավարման-ադմինիստրատիվ՝ կառավարող անձնակազմի աշխատավարձի, գործուղման, տպագրական, փոստային-հեռագրային ծախսերը և այլ ծախսեր: Այն որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$ԸՏԾ = Ա_{հիմ}* ԸՄԾ/100,$$

որտեղ ԸՏԾ-ն ընդհանուր տնտեսավարման ծախսերի տոկոսն է:

ԸՏԾ =4977360*111/100=5524870 դրամ:

4.8. Համակարգի/փաթեթի ինքնարժքի կալկուլացիան

Ինքնարժեքի կալկուլացիան բերված է աղյուսակ 1.5-ում:

Աղյուսակ 4.5

N	Ծախսերի հոդվածի անվանումը	գումարը, դրամ
1.	Համալրող առարկաներ	310000
2.	Էլեկտրաէներգիա	840000
3.	Հիմնական աշխատավարձ	4977360
4.	Լրացուցիչ աշխատավարձ	597288
5.	Սարքավորումների պահպանման և շահագործման ծախսեր	533280
6.	Տարածքի վարձակալություն	1680000
7.	Ընդհանուր տնտեսական ծախսեր	5524870
	Ինքնարժեք	14462798

Համակարգի ինքնարժեքը կկազմի՝

Ի=14462798 դրամ:

4.9. Շահույթի և միավորի գնի հաշվարկը

Համակարգի գինն իր մեջ ընդգրկում է ընկերության շահույթն ու ինքնարժեքը: Շահույթի հաշվարկն իրականացվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$Շ = Ի_{լրիվ}*Շ/100,$$

որտեղ Ի–ն համակարգի ինքնարժեքն է, Շ –ն՝ շահույթի դրույքաչափը: Մեր օրինակի համար.

$$Շ = 14462798 *24/100=3471072 դրամ :$$

Գնի հաշվարկը իրականացվում է հետևյալ կերպ՝

$$Գ = Ի + Շ:$$

Մեր օրինակի համար.

$$Գ =14462798 +3471072 =17933870 դրամ:$$

Համակարգի բացթողնման գինը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$Գ_{բաց.} = Գ + ԱԱՀ,$$

որտեղ $Գ_{բաց.}$–ը համակարգի/փաթեթի բացթողնման գինն է, ԱԱՀ-ն՝ ավելացված արժեքի հարկը (20%):

$$Գ_{բաց.} =17933870+17933870*20/100=17933870 + 3586774 = 21520644 դրամ:$$

Այսպիսով, կատարված հաշվարկների արդյունքում ստացանք, որ կորպորատիվ տեղեկատվական համակարգի ինքնարժեքը կկազմի 14462798 դրամ, իսկ գինը՝ 21520644 դրամ:

Բնապահպանություն տիտղոսաթերթ

Գլուխ 5. Բնապահպանություն

Գրաֆների տեսությունը բնապահպանական խնդիրներում՝ բնապահպանական խնդիրների արդիականությունը և մաթեմատիկական օպտիմալացման դերը

Ժամանակակից աշխարհում շրջակա միջավայրի պահպանությունը դադարել է լինել լոկ հասարակական կոչ կամ էթիկական նորմ. այն վերածվել է բարդ ինժեներական և մաթեմատիկական մարտահրավերի։ Մարդածին գործունեության ընդլայնումը, ուրբանիզացիան և արդյունաբերական ծավալների աճը հանգեցրել են նրան, որ բնական ռեսուրսների սպառումը գերազանցում է դրանց վերականգնման տեմպերը։ Այս համատեքստում առանցքային է դառնում «էկոլոգիական հետքի» նվազեցման հարցը, որը պահանջում է ոչ թե պարզապես սահմանափակումներ, այլ գոյություն ունեցող համակարգերի կառավարման առավելագույնս արդյունավետ մոդելների ներդրում։

Բնապահպանական կայուն զարգացման ռազմավարությունների իրագործման ճանապարհին մենք բախվում ենք մի խնդրի, որտեղ մարդկային գործոնը և սուբյեկտիվ որոշումները հաճախ բերում են ռեսուրսների ոչ ռացիոնալ բաշխման։ Օրինակ՝ տրանսպորտային լոգիստիկայի սխալ պլանավորումը կամ թափոնների տեղափոխման ոչ օպտիմալ երթուղիները տարեկան կտրվածքով առաջացնում են միլիոնավոր տոննա հավելյալ CO_2 արտանետումներ։ Այստեղ է, որ ասպարեզ է գալիս մաթեմատիկական օպտիմալացումը՝ որպես անաչառ և ճշգրիտ գործիքակազմ։

Գրաֆների տեսությունը հնարավորություն է տալիս կառուցել իրական աշխարհի բարդ էկոլոգիական կապերի մաթեմատիկական մոդելը։ Այն թույլ է տալիս էկոհամակարգերը դիտարկել որպես դինամիկ ցանցեր, որտեղ յուրաքանչյուր որոշում կարող է քանակապես գնահատվել։ Եթե ավանդական մոտեցումները հաճախ հիմնվում են փորձնական տվյալների վրա, ապա գրաֆային մոդելները և օպտիմալացման ալգորիթմները, ինչպիսին է Հունգարական ալգորիթմը, թույլ են տալիս գտնել լուծումներ, որոնք ապահովում են նվազագույն էկոլոգիական ֆնսաս՝ առավելագույն տնտեսական արդյունավետության պայմաններում։

Շրջակա միջավայրի պաշտպանության ոլորտում տվյալների գիտության և ալգորիթմական մոդելավորման ներդրումը հիմնավորվում է հետևյալ գործոններով.

- ✓ *Ճշգրտություն՝* մաթեմատիկական ալգորիթմները բացառում են մարդկային սխալը ռեսուրսների նշանակման հարցում:
- ✓ *Կանխատեսելիություն՝* գրաֆային մոդելները թույլ են տալիս սիմուլյացիայի ենթարկել տարբեր սցենարներ և ընտրել այն մեկը, որն ունի նվազագույն մարդածին ազդեցություն:
- ✓ *Մասշտաբայնություն՝* ալգորիթմները հավասարապես արդյունավետ են թե՛ փոքր համայնքային խնդիրների, և թե՛ գլոբալ լոգիստիկ ցանցերի օպտիմալացման համար:

Այսպիսով, դիտարկվող մեթոդաբանությունը նպատակ ունի կամրջել տեսական մաթեմատիկան և գործնական բնապահպանությունը՝ ստեղծելով հիմք «խելացի» և կայուն էկոհամակարգերի ձևավորման համար:

5.1 Երկկողմանի գրաֆների տեսական մոդելավորումը բնապահպանական համակարգերում

Բնապահպանական համակարգերի կառուցվածքային վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ խնդիրների զգալի մասն ունի բնական հիերարխիկ կամ բազմաշերտ բնույթ, ինչը թույլ է տալիս դրանք ներկայացնել երկկողմանի գրաֆների տեսքով: Մաթեմատիկորեն, $G = (V, E)$ գրաֆը կոչվում է երկկողմանի, եթե նրա գագաթների V բազմությունը կարելի է տրոհել երկու ոչ դատարկ և չհատվող ենթաբազմությունների՝ V_1 և V_2 այնպես, որ գրաֆի յուրաքանչյուր կող միացնի V_1-ի որևէ գագաթ V_2-ի որևէ գագաթի հետ:

Բնապահպանական տեսանկյունից այս կառուցվածքը հանդիսանում է իդեալական մոդել «աղբյուր-ընդունիչ» կամ «ռեսուրս-սպառող» հարաբերությունները նկարագրելու համար: Տեսական խորության մեջ մտնելով՝ կարող ենք սահմանել ենթաբազմությունների էկոլոգիական իմաստը.

1. V_1 ենթաբազմություն (Աղբյուրների բազմություն). Այն ներկայացնում է էկոլոգիական բեռի կամ ռեսուրսի գեներացման կետերը: Սրանք կարող են լինել քաղաքային թափոնների կուտակման վայրերը, օդն աղտոտող արդյունաբերական հանգույցները կամ ջրային ռեսուրսների ակունքները:

2. V_2 ենթաբազմություն (Կառավարման հանգույցների բազմություն). Սա ներկայացնում է այն օբյեկտները, որոնք կոչված են մշակելու, զտելու կամ վերամշակելու այդ ռեսուրսները: Օրինակ՝ թափոնների տեսակավորման գործարանները, կոյուղաջրերի մաքրման կայանները կամ էներգիայի բաշխիչ ենթակայանները:

Այսպիսի տրոհումը թույլ է տալիս խուսափել համակարգի ներսում առկա քառսային կապերից և կենտրոնանալ բուն բաշխման գործընթացի վրա: Երկկողմանի գրաֆի առանցքային առավելությունն այն է, որ այն բացառում է կապերը նույն խմբի ներսում (օրինակ՝ աղբի մի կետից մյուս կետ տեղափոխումը), ինչը տեսականորեն անիմաստ է և էկոլոգիապես ոչ ձեռնտու:

- Կողերի կշիռների (w) բազմագործոն իմաստը.

Եթե դասական գրաֆների տեսության մեջ կողի կշիռը սովորաբար դիտարկվում է որպես գծային հեռավորություն կամ ծախս, ապա բնապահպանական մոդելավորման մեջ w(e) ֆունկցիան ստանում է շատ ավելի խորը և բազմաշերտ բովանդակություն: Կշիռը կարող է սահմանվել որպես «էկոլոգիական գին», որը վճարվում է ռեսուրսը V_1-ից V_2 տեղափոխելու կամ փոխակերպելու համար:

Բնապահպանական կշռված գրաֆներում կշիռները կարող են ներկայացնել հետևյալ ցուցանիշները.

ա/ Ծխի և արտանետումների խտությունը. Եթե երթուղին անցնում է խիտ բնակեցված կամ պահպանվող տարածքներով, կողի կշիռը մեծանում է՝ ստիպելով ալգորիթմին շրջանցել այդ հատվածները՝ նվազագույնի հասցնելով բնակչության առողջությանը հասցվող վնասը:

բ/ Էներգիայի տեսակարար կորուստը. Ջրային կամ էներգետիկ ցանցերի դեպքում կշիռը արտացոլում է տեղափոխման ժամանակ ռեսուրսի կորուստը, ինչը մղում է ալգորիթմին գտնել առավելագույն օգտակար գործողության գործակից (ՕԳԳ) ունեցող կապերը:

գ/ Տրանսպորտային միջոցի CO_2 հետքը. Հաշվի է առնվում ոչ միայն հեռավորությունը, այլև ճանապարհի թեքությունը, ծածկույթի որակը և խցանումների հավանականությունը, որոնք ուղղակիորեն ազդում են վառելիքի այրման և արտանետումների ծավալի վրա:

Այսպիսով, երկկողմանի կշռված գրաֆների կիրառումը հնարավորություն է տալիս բնապահպանական խնդիրը վերածել խիստ մաթեմատիկական օպտիմալացման խնդրի: Մենք փնտրում ենք այնպիսի M զուգակցում, որի դեպքում գումարային էկոլոգիական կշիռը լինի նվազագույնը.

$$\sum_{e \in M} \omega(e) \to min$$

Սա նշանակում է, որ յուրաքանչյուր ռեսուրսի կցումը համապատասխան մշակման կայանին կատարվում է այնպես, որ ընդհանուր համակարգի բնապահպանական բեռը լինի հնարավորինս փոքր:

5.2 Տվյալների կենտրոնների էկոլոգիական օպտիմալացման հեռանկարները գրաֆային մոդելների միջոցով

Տվյալների մշակման կենտրոնների (ՏՄԿ) բնապահպանական ազդեցության նվազեցումը պահանջում է անցում դեպի կառավարման ալգորիթմական մոդելներ: Գրաֆների տեսությունը և Հունգարական ալգորիթմը հնարավորություն են տալիս իրական ժամանակում լուծել ՏՄԿ-ների առջև ծառացած հետևյալ խնդիրները.

Էներգաարդյունավետության բարձրացում. ՏՄԿ-ները սպառում են համաշխարհային էլեկտրաէներգիայի մոտ 1.5-2%-ը: Երկկողմանի գրաֆների միջոցով հնարավոր է օպտիմալացնել տվյալների հոսքերը սերվերների միջև՝ նվազեցնելով գերտաքացումը և հովացման համար ծախսվող էներգիան:

Արտանետումների կառավարում. Քանի որ ՏՄԿ-ները պատասխանատու են գլոբալ CO_2 արտանետումների շուրջ 0.5%-ի համար, օպտիմալացման ալգորիթմները թույլ են տալիս նվազեցնել ածխածնային հետքը՝ առավելագույնի հասցնելով ռեսուրսների օգտագործման ՕԳԳ-ն:

Թափոնների լոգիստիկա. Էլեկտրոնային թափոնների կառավարման շղթայում գրաֆային մոդելները թույլ են տալիս նվազագույնի հասցնել տեղափոխման ծախսերն ու դրանից բխող շրջակա միջավայրի աղտոտումը:

Եզրակացնելով, փաստում ենք, որ տվյալների կենտրոնների էկոլոգիական բեռի նվազեցումը հնարավոր է իրականացնել գրաֆների տեսության և Հունգարական ալգորիթմի կիրառմամբ:

Մաթեմատիկական օպտիմալացումը թույլ է տալիս ռեսուրսները բաշխել այնպես, որ նվազագույնի հասցվեն էներգիայի կորուստները և CO_2 արտանետումների ծավալը: Ալգորիթմական ճշգրտությունը հանդիսանում է կայուն թվային ապագայի և «կանաչ» տնտեսության ձևավորման առանցքային գործիքը:

Այսպիսով, մաթեմատիկական մոդելավորումը էկոլոգիական ոլորտում հանդիսանում է հզոր գործիք, որը թույլ է տալիս խորը հասկանալ բարդ էկոհամակարգերի դինամիկան, կանխատեսել դրանց զարգացումը տարբեր սցենարներում և մշակել կառավարման արդյունավետ ռազմավարություններ: Չնայած մոդելավորման բարդություններին, որոնք պայմանավորված են էկոլոգիական համակարգերի ոչ գծայնությամբ, դինամիկայով և բաղադրիչների փոփոխականությամբ, մաթեմատիկական մոտեցումը հնարավորություն է տալիս համակարգել և վերլուծել մեծ քանակությամբ տվյալներ, բացահայտել էկոլոգիական գործընթացների թաքնված օրինաչափությունները և ի վերջո նպաստել շրջակա միջավայրի պահպանությանն ու կայուն զարգացմանը:

ԿԱ Տիտղոսաթերթ

Գլուխ 6. Կենսագործունեության անվտանգություն

Ներածություն

Արտակարգ իրավիճակները (ԱԻ), լինեն դրանք բնական աղետներ թե տեխնածին վթարներ, լուրջ սպառնալիք են ներկայացնում հասարակության անվտանգության և բնականոն կենսագործունեության համար՝ պահանջելով կենսապահովման ռեսուրսների անհապաղ, հասցեական և ճշգրիտ բաշխում: Նման պայմաններում հիմնական մարտահրավերը ռեսուրսների խիստ սահմանափակությունն է. պահանջարկի կտրուկ և անկանխատեսելի աճը զուգակցվում է լոգիստիկ շղթաների խզմամբ, պահեստային հզորությունների կորստով և տրանսպորտային հաղորդակցության ուղիների փսասմամբ: Ավանդական կառավարման մոտեցումները ճգնաժամային պահերին հաճախ դառնում են ոչ արդյունավետ, քանի որ սուբյեկտիվ գործոնների վրա հիմնված որոշումները մեծացնում են մարդկային սխալի ռիսկը, ինչը կարող է հանգեցնել օգնության կրիտիկական ուշացման կամ ռեսուրսների անհավասարաչափ ու անարդարացի բաշխման տուժած գոտիների միջև:

Այս բարդ խնդիրների հաղթահարման և արձագանքման օպերատիվությունը բարձրացնելու համար առաջնային է դառնում մաթեմատիկական օպտիմալացման ժամանակակից մոդելների ներդրումը, որտեղ առանցքային դեր ունի երկկողմանի գրաֆների տեսությունը: Այն հնարավորություն է տալիս կենսապահովման համակարգը դիտարկել որպես դինամիկ և կառուցվածքային ցանց, որտեղ ռեսուրսների մատակարարման կետերն ու տուժած բնակավայրերը հանդիսանում են գրաֆի գագաթներ, իսկ դրանց միջև առկա բոլոր հնարավոր կապերը՝ օպտիմալացման ենթակա ուղիներ:

Բացի այդ, գրաֆային մոդելների կիրառումը հնարավորություն է տալիս իրականացնել տարբեր ճգնաժամային սցենարների համակարգչային սիմուլյացիա՝ նախապես հաշվի առնելով այնպիսի գործոններ, ինչպիսիք են ճանապարհների հնարավոր փլուզումները կամ որոշակի տեսակի ռեսուրսների հանկարծակի սպառումը: Սա թույլ է տալիս փրկարարական ծառայություններին և ԱԻ կառավարման մարմիններին նախապես մշակել ճկուն ու բազմավարիանտ ռազմավարություններ՝ ունենալով պատրաստի պահուստային լուծումներ նույնիսկ ամենաբարդ և

անկանխատեսելի իրավիճակների համար: Այսպիսով, մաթեմատիկական ճշգրտությունը վերածվում է կենսական անհրաժեշտության, որը երաշխավորում է կենսապահովման համակարգի անխափան և էֆեկտիվ աշխատանքը նույնիսկ ռեսուրսների ծայրահեղ սղության և բարձր անորոշության պայմաններում: Մոդելի ներդրումը ոչ միայն բարձրացնում է կառավարման որակը, այլև հանդիսանում է մարդասիրական օգնության արդարացի բաշխման գիտական երաշխիք:

6.1. ԱԻ ԿԵՆՍԱՊԱՀՈՎՄԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԸ ՈՐՊԵՍ ԵՐԿԿՈՂՄԱՆԻ ԳՐԱՖ

Արտակարգ իրավիճակների կառավարման գործընթացում կենսապահովման ռեսուրսների բաշխումը բարդ լոգիստիկ խնդիր է, որը պահանջում է հստակ կառուցվածքային մոդելավորում: Գրաֆների տեսությունը հնարավորություն է տալիս այս բարդ համակարգը վերածել մաթեմատիկական օբյեկտի, որտեղ առանցքային նշանակություն ունեն երկկողմանի գրաֆները:

6.1.1. Գագաթների բազմության տրոհումը և էկոլոգիական իմաստը

Մաթեմատիկորեն $G = (V, E)$ գրաֆը կոչվում է երկկողմանի, եթե նրա գագաթների V բազմությունը կարելի է տրոհել երկու չհատվող ենթաբազմությունների՝ V_1 և V_2 այնպես, որ յուրաքանչյուր կող միացնի V_1-ի գագաթը V_2-ի գագաթի հետ: ԱԻ պայմաններում այս տրոհումն ունի հետևյալ կենսական նշանակությունը.

1. V_1 ենթաբազմություն (Մատակարարման հանգույցներ). Սրանք այն կետերն են, որտեղ կենտրոնացված են կենսապահովման ռեսուրսները: Այստեղ ներառվում են մարդասիրական օգնության պահեստները, պարենային բազաները, բժշկական կենտրոնները և ջրի պաշարների կետերը:
2. V_2 ենթաբազմություն (Պահանջարկի հանգույցներ). Սրանք ներկայացնում են տուժած բնակավայրերը, ժամանակավոր կայանները կամ այն գոտիները, որտեղ առաջացել է ռեսուրսների կրիտիկական պահանջարկ:

Այսպիսի մոդելավորումը թույլ է տալիս բացառել ներքին կապերը նույն խմբի ներսում, ինչը ԱԻ ժամանակ խնայում է թանկարժեք ռեսուրսները և ժամանակը :

Օրինակ՝ երկկողմանի գրաֆի կիրառումը բացառում է ռեսուրսների տեղափոխումը երկու պահեստների միջև, եթե դրա կարիքը չկա, և ուղղում է բոլոր հոսքերը դեպի տուժած գոտիներ:

6.1.2. Կողերի կշիռների բազմագործոն գնահատումը

Երկկողմանի գրաֆի կողերը (E) ներկայացնում են տեղափոխման հնարավոր երթուղիները: Սակայն ԱԻ պայմաններում կողի «երկարությունը» միայն աշխարհագրական հեռավորությունը չէ: Կողի կշիռը (w) դառնում է բազմագործոն ցուցանիշ, որը ներառում է.

1. Արձագանքման ժամանակը. Սա ամենակարևոր գործոնն է, որը հաշվի է առնում ճանապարհների ընթացիկ վիճակը և անցանելիությունը:
2. Էկոլոգիական և տեխնածին ռիսկերը. Կշիռը կարող է մեծանալ, եթե երթուղին անցնում է վտանգավոր գոտիներով, օրինակ՝ ծխի բարձր խտությամբ կամ փլուզման ենթակա տարածքներով:

Մենք փնտրում ենք այնպիսի M զուգակցում, որը կապահովի նվազագույն գումարային կշիռ, ինչը նշանակում է առավելագույն արագություն և նվազագույն ռիսկ ԱԻ գոտում:

6.2. ՀՈՒՆԳԱՐԱԿԱՆ ԱԼԳՈՐԻԹՄԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ՌԵՍՈՒՐՍՆԵՐԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ԲԱՇԽՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ

Արտակարգ իրավիճակներում, երբ առկա են մատակարարման մի քանի կետեր և օգնության կարիք ունեցող մի քանի գոտիներ, առաջանում է «նշանակման խնդիրը»: Մաթեմատիկորեն սա ձևակերպվում է որպես երկկողմանի գրաֆում նվազագույն կշռով կատարյալ զուգակցման որոնում: Այս խնդրի լուծման ամենաարդյունավետ մեթոդը Հունգարական ալգորիթմն է:

6.2.1. Մեթոդի էությունը և ԱԻ առանձնահատկությունները

Հունգարական ալգորիթմը թույլ է տալիս $n \times n$ չափանի մատրիցում գտնել այնպիսի տարրերի համախումբ, որոնց գումարը նվազագույնն է, ընդ որում՝ յուրաքանչյուր տողից և սյունից կարող է ընտրվել միայն մեկ տարր: ԱԻ համատեքստում սա նշանակում է, որ.

1. Յուրաքանչյուր պահեստ սպասարկում է միայն մեկ աղետի գոտի (բաշխման հստակություն)։

2. Յուրաքանչյուր գոտի ստանում է օգնություն մեկ աղբյուրից (կրկնակի նշանակումների բացառում)։

3. Ընդհանուր ժամանակային կամ էներգետիկ ծախսը հասցվում է նվազագույնի։

6.2.2. Գործնական օրինակ. Մարդասիրական օգնության օպերատիվ բաշխում

Դիտարկենք մի իրավիճակ, որտեղ առկա են 3 մարդասիրական օգնության կենտրոններ (K_1, K_2, K_3) և 3 տուժած բնակավայրեր (B_1, B_2, B_3)։ Մատրիցի տարրերը ներկայացնում են օգնության հասնելու ժամանակը (րոպեներով)՝ հաշվի առնելով ճանապարհների բարդությունը։

Աղյուսակ 2.1. Ժամանակների սկզբնական մատրից

	B_1	B_2	B_3
K_1	20	15	25
K_2	10	25	20
K_3	15	10	30

Տողերի նվազեցում. Յուրաքանչյուր տողից հանում ենք նվազագույն արժեքը (K_1-ից՝ 15, K_2-ից՝ 10, K_3-ից՝ 10)։

Աղյուսակ 2.2.

	B_1	B_2	B_3
K_1	5	0	10
K_2	0	15	10
K_3	5	0	20

Սյուների նվազեցում. Ստացված մատրիցի սյունակներից հանում ենք նվազագույնները։

	B_1	B_2	B_3
K_1	5	0	0
K_2	0	15	0
K_3	5	0	10

Օպտիմալ զուգակցում. Գտնում ենք զրոների այնպիսի դասավորություն, որ ծածկենք բոլոր կետերը.

- $K_1 \to B_3$ (25 րոպե)
- $K_2 \to B_1$ (10 րոպե)
- $K_3 \to B_2$ (10 րոպե)

Ընդհանուր օպտիմալ ժամանակը կազմում է 45 րոպե։ Սակայն այս մեթոդի իրական ուժը դրսևորվում է մեծածավալ տվյալների հետ աշխատելիս։ Երբ խնդիրը ներառում է ոչ թե 3, այլ հարյուրավոր կամ հազարավոր մատակարարման կետեր և տուժած գոտիներ։

Հունգարական ալգորիթմն ունի $O(n^3)$ բարդություն, ինչը նշանակում է, որ տվյալների ծավալի մեծացմանը զուգընթաց հաշվարկի արագությունը մնում է բարձր։ Մեծ տվյալների պայմաններում այս հաշվարկը թույլ է տալիս ակնթարթորեն գտնել օպտիմալ լուծումներ, որոնք մարդկային գործոնով հնարավոր չէր լինի նույնականացնել։ Սա կրճատում է որոշումների կայացման ժամանակը՝ ապահովելով ռեսուրսների առավելագույնս արագ տեղափոխումը աղետի գոտի, ինչը կենսականորեն կարևոր է կենսագործունեության անվտանգության տեսանկյունից։

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. **Պետրոսյան Պ. Ա., Մկրտչյան Վ. Վ., Քամալյան Ռ. Ռ.**, *Գրաֆների տեսություն: Ուսումնամեթոդական ձեռնարկ*, Երևան, ԵՊՀ հրատարակչություն, 2015:
2. **Харари Ф.**, *Теория графов*, Пер. с англ. — М.: Мир, 1973.
3. **Brilliant.org**, *Hungarian Matching Algorithm*, հասանելի է https://brilliant.org/wiki/hungarian-matching/ կայքում:
4. **GeeksforGeeks**, *Hungarian Algorithm for Assignment Problem*, հասանելի է https://www.geeksforgeeks.org/hungarian-algorithm-assignment-problem-set-1-introduction/ կայքում: