ԳԼՈՒԽ 1. ԱՆՀՐԱԺԵՇՏ ՏԵՂԵԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

§ 1.1. Գրաֆների վերաբերյալ հիմնական տեղեկություններ

Դիցուք $V = \{ v_1, \ldots, v_n \}$-ը ցանկացած ոչ դատարկ վերջավոր բազմություն է, եւ դիցուք $V^{(2)}$-ը V բազմության տարրերի բոլոր ոչ կարգավոր զույգերի բազմությունն է: Նշենք, որ $|V^{(2)}| = \binom{n}{2}$: Ենթադրենք, որ $E \subseteq V^{(2)}$:

Սահմանում 1.1.1: (V, E) կարգավոր զույգին կանվանենք գրաֆ, եւ այն կնշանակենք G -ով:

$G = (V, E)$ գրաֆի V բազմության տարրերին կանվանենք գրաֆի գագաթներ, իսկ E բազմության տարրերին՝ կողեր: Եթե անհրաժեշտ է շեշտել, որ V -ն հանդիսանում է G գրաֆի գագաթների բազմություն, ապա այդ դեպքում մենք կգրենք $V(G)$, $(E(G))$: Եթե $e \in E$ կողը , $u, v \in V$ գագաթներից բաղկացած զույգն է, ապա այդ փաստը կգրենք $e = uv$ -ով:

Դիցուկ $G = (V, E)$ և $G' = (V', E')$ երկու գրաֆներ են:

Սահմանում 1. 1.2: G և G' գրաֆները կանվանենք հավասար և կգրենք $G = G'$ այն և միայն այն. դեպքում,երբ $V = V'$, և $E = E'$:

Նշենք, որ գրաֆները կարելի է դիտարկել որպես հատուկ տիպի համասեռ բինար հարաբերություն, որի հենքային բազմությունը V -ն է: Հիշենք, որ $\alpha \subseteq V \times V$ բինար հարաբերությունը կոչվում է

ռեֆլեքսիվ, եթե ցանկացած $v \in V$ համար $v\alpha v$,

անտիռեֆլեքսիվ, եթե ցանկացած $v \in V$ համար $v\alpha v$,

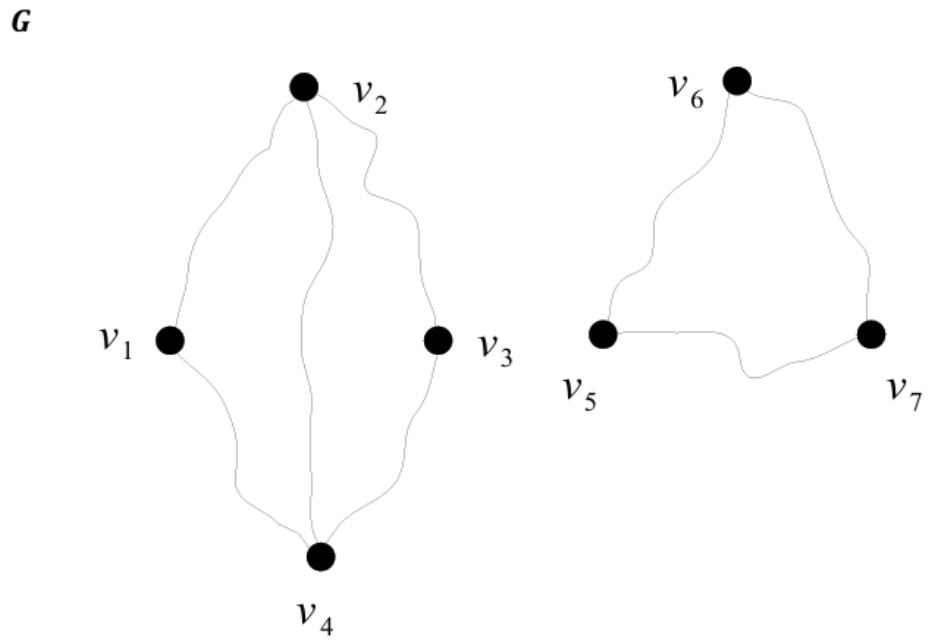
սիմետրիկ, եթե ցանկացած $u, v \in V$ համար բավարարվում է պայմանը. եթե $u\alpha v$, ապա $v\alpha u$:

Նկատենք, որ $G = (V, E)$ գրաֆը կարող ենք դիտարկել որպես $\alpha \subseteq V \times V$ անտիռեֆլեքսիվ, սիմետրիկ բինար հարաբերություն, որտեղ ցանկացած $u,v \in V$ համար բավարարվում է հետևյալ պայմանը. $u\alpha v$ այն միայն այն դեպքում, երբ $uv \in E$:

Ստորեւ կդիտարկենք գրաֆների տրման մի քանի եղանակներ: Նախ նշենք, որ գրաֆը կարելի է տալ, նշելով նրա գագաթների եւ կողերի բազմությունները: Օրինակ,

դիտարկենք **G = (V, E)** գրաֆը, որտեղ $\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_4}, \boldsymbol{v_5}, \boldsymbol{v_6}, \boldsymbol{v_7}\}$ և $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{v_1v_2}, \boldsymbol{v_2v_3}, \boldsymbol{v_3v_4}, \boldsymbol{v_1v_4}, \boldsymbol{v_2v_4}, \boldsymbol{v_5v_6}, \boldsymbol{v_6v_7}, \boldsymbol{v_5}\,\boldsymbol{v_7}\}$:

Մեկ այլ եղանակ է գրաֆների տրման երկրաչափական եղանակը, որի էությունը կայանում է հետևյալում. գրաֆի գագաթներին համապատասխանեցնում ենք հարթության կետեր (տարբեր գագաթներին համապատասխանում են տարբեր կետեր), և երկու կետեր միացվում են անընդհատ կորով, որը չի անցնում մեկ այլ գագաթին համապատասխանող կետով՝ այն և միայն այն դեպքում, երբ նրանց համապատասխանող գագաթները կող են կազմում գրաֆում: Օրինակ, վերը նշված գրաֆը կարելի է պատկերել հետևյալ կերպ.



Նկ. 1.1.1

Սահմանում 1.1.3: $\boldsymbol{G}$ գրաֆը կանվանենք նշված (կամ համարակալված), եթե այդ գրաֆի գագաթներին վերագրված են զույգ առ զույգ տարբեր նիշեր:

Գրաֆների տրման հաջորդ եղանակները նկարագրելու համար տանք մի քանի սահմանում:

Դիցուք $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ -ն գրաֆ է, $\mathbf{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ եւ $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e'} \in \boldsymbol{E}$:
Սահմանում 1.1.4: $\boldsymbol{u}$ և $\boldsymbol{v}$ գագաթները կանվանենք հարեւան, եթե $\boldsymbol{uv} \in \boldsymbol{E}$:
Սահմանում 1.1.5: $\boldsymbol{u}$ գագաթին և $\boldsymbol{e}$ կողին կանվանենք կից, եթե $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{e}$:
Սահմանում 1.1.6: $\boldsymbol{e}$ և $\boldsymbol{e'}$ տարբեր կողերը կանվանենք հարեւան, եթե գոյություն ունի

$v \in V$ այնպես, որ v -ն կից է e -ին եւ e' -ին:

Եթե $G = (V, E)$ գրաֆում $V = \{ v_1,..., v_n\}$ եւ $E = \{e_1,..., e_m\}$, ապա այդ գրաֆին համապատասխանեցնենք $n \times n$ կարգի $A(G) = (a_{ij})_{n\times n}$ մատրիցը հետեւյալ կերպ.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{եթե } v_i \text{ և } v_j \text{ հարևան են} \\ 0, \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$$

$A(G)$ մատրիցը կանվանենք G գրաֆի հարեւանության մատրից: Նկատենք, որ ցանկացած i-ի համար $(1\leq i \leq n)$ $a_{ii}=0$,և ցանկացած i, j -ի համար $(1\leq i, j \leq n)$ $a_{ij}=a_{ji}$:
Նկ. 1.1.1-ում բերված G գրաֆի հարեւանության մատրիցը կլինի՝

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Եթե $G = (V, E)$ գրաֆում $V = \{ v_1,..., v_n\}$ և $E = \{e_1,..., e_m\}$, ապա այդ գրաֆին համապատասխանեցնենք $n \times m$ կարգի $B(G) = (b_{ij})_{n\times m}$ մատրիցը հետեւյալ կերպ.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{եթե } v_i \text{ և } e_j \text{կից են} \\ 0, \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$$

$B(G)$ մատրիցը կանվանենք G գրաֆի կցության մատրից: Նկատենք, որ կցության մատրիցի սյուները զույգ առ զույգ տարբեր են և յուրաքանչյուր սյուն պարունակում է ճիշտ երկու 1:

G գրաֆի կցության մատրիցը կլինի՝

$$A(G)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

որտեղ ենթադրված է, որ $e_1 = v_1v_2, e_2 = v_2v_3, e_3 = v_3v_4, e_4 = v_1v_4, e_5 = v_2v_4, e_6 = v_5v_6,\ \ e_7 = v_6v_7, e_8 = v_5v_7$

Նշենք, որ զրոներից եւ մեկերից կազմված $n \times m$ կարգի յուրաքանչյուր B մատրից, որի սյուները զույգ առ զույգ տարբեր են եւ յուրաքանչյուր սյուն պարունակում է ճիշտ երկու 1, հանդիսանում է համարակալված գագաթներով և կողերով որևէ գրաֆի կցության մատրից:

§ . 1 . 2 Աստիճաններ, ենթագրաֆներ և ճանապարհներ

Վերցնենք $G = (V, E)$ գրաֆը: G գրաֆը կանվանենք $(n\ , m)$ – գրաֆ, եթե $|V| = n$ և $|E| = m$: Եթե $S \subseteq V(G)$: ապա կատարենք հետևյալ նշանակումները.

$$N_G(s) = \{u \in V \backslash S: \text{գոյություն ունի } v \in S \text{ որ}, uv \in E\},$$

$$\partial_G(S) = \{uv \in E: u \in S, v \in V \backslash S\}:$$

G գրաֆում $v \in V$ գագաթի շրջակայք ասելով կհասկանանք $N_G(\{v\})$ բազմությունը: Այն կրճատ կնշանակենք $N_G(v)$- ով : Ավելին, v գագաթին կից կողերի բազմությունն՝ $\partial_G(\{v\})$-ն կնշանակենք $\partial_G(v)$-ով :

Սահմանում 1.2.1: G գրաֆում v գագաթի աստիճան, որը կնշանակենք $d_G(v)$-ով կամ $d(v)$- ով կանվանենք այդ գագաթին կից կողերի քանակը: Պարզ է դառնում որ $d_G(v)=|d_G(v)|$:

Օրինակ, նկ. 1.1.1-ում պատկերված G գրաֆում v_2 գագաթի աստիճանը հավասար է երեքի:

G գրաֆում v գագաթը կանվանենք մեկուսացված, եթե $d_G(v) = 0$ և կանվանենք կախված, եթե $d_G(v) = 1$: G գրաֆի համար սահմանենք $\delta(G)$ և $\Delta(G)$ թվերը հետեվյալ կերպ.

$$\boldsymbol{\delta(G) = min_{v\in V} d_G(v), \Delta(G) = max_{v\in V} d_G(v)}$$

$\boldsymbol{\delta(G)}$ – կանվանենք $\boldsymbol{G}$ գրաֆի նվազագույն աստիճան, իսկ $\Delta(\boldsymbol{G})$- ն՝ առավելագույն աստիճան:

Թեորեմ 1.2.1 (Լ. Էյլեր) Կամայական $\boldsymbol{G = (V, E)}$ գրաֆում տեղի ունի

$$\sum_{v\in V(G)} \boldsymbol{d_G(v) = 2|E(G)|}$$

հավասարությունը:

Իրոք, քանի որ ցանկացած կող կից է երկու գագաթի, ապա $\sum_{v\in V} \boldsymbol{d_G(v)}$ գումարում այդ կողը հաշվվում է երկու անգամ, հետևաբար՝

$$\sum\nolimits_{v\in V(G)} \boldsymbol{d_G(v) = 2|E(G)|}$$

Հետևանք 1.2.1: Կամայական $\boldsymbol{G = (V, E)}$ գրաֆում կենտ աստիճան ունեցող գագաթների քանակը զույգ է:

Ապացույց: Իրոք, համաձայն թեորեմ 1.2.1-ի

$$\boldsymbol{2|E(G)|} = \sum\nolimits_{v\in V(G)} \boldsymbol{d_G(v)} = \sum\nolimits_{\boldsymbol{d_G(v)}\text{-ն զույգ է}} \boldsymbol{d_G(v)} + \sum\nolimits_{\boldsymbol{d_G(v)}\text{-ն կենտ է}} \boldsymbol{d_G(v)}:$$

Դիտողություն 1.2.1: Նշենք, որ թեորեմ 1.2.1-ը և հետևանք 1.2.1-ը մնում են ճիշտ նաև մուլտիգրաֆների և պսևդոգրաֆների դեպքում, միայն թե պայմանավորվում ենք, որ օղակները պսևդոգրաֆի գագաթի աստիճանն ավելացնում են երկուսով:

Սահմանում 1.2.2: $\boldsymbol{G}$ գրաֆը կանվանենք համասեռ կամ ռեգուլյար, եթե $\boldsymbol{\delta(G)} = \Delta(\boldsymbol{G})$ կամ որ նույնն է, որ եթե նրանում բոլոր գագաթների աստիճանները միևնույն թիվն է: $\boldsymbol{G}$ գրաֆը կանվանենք $\boldsymbol{r}$ -համասեռ կամ $\boldsymbol{r}$ -ռեգուլյար, եթե $\boldsymbol{\delta(G)} = \Delta(\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r} \in \mathbb{Z}_+)$

Թեորեմ 1.2.1-ից անմիջապես հետևում է, որ

Հետևանք 1.2.2: Եթե $\boldsymbol{G}$ -ն $\boldsymbol{r}$ -համասեռ $\boldsymbol{(n, m)}$-գրաֆ է, ապա

$$\boldsymbol{m = \frac{n \cdot r}{2}}$$

Սահմանում 1.2.3: 3-համասեռ գրաֆներին կանվանենք խորանարդ գրաֆներ:

Հետևանք 1.2.1-ից բխում է՝

Հետևանք 1.2.3: Խորանարդ գրաֆում գագաթների քանակը զույգ թիվ է:

Սահմանում 1.2.4: G գրաֆը կոչվում է լրիվ, եթե նրանում ցանկացած երկու գագաթ հարևան են:

n գագաթ ունեցող լրիվ գրաֆը կնշանակենք K_n -ով: K_3 - ը կանվանենք եռանկյուն:

Դժվար չէ տեսնել, որ K_n – ը $(n-1)$ – համասեռ գրաֆ է և

$$|E(K_n)| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Սահմանում 1.2.5: $G = (V, E)$ գրաֆը կանվանենք r -կողմանի ($r \in \mathbb{N}$), եթե V բազմությունը հնարավոր է տրոհել r ենթաբազմությունների այնպես, որ միևնույն ենթաբազմության գագաթները զույգ առ զույգ հարևան չեն: Եթե $r = 2$, ապա r -կողմանի գրաֆը կանվանենք երկկողմանի: Նկատենք, որ եթե $G = (V, E)$ գրաֆը երկկողմանի է, ապա V բազմությունը հնարավոր է տրոհել երկու ենթաբազմությունների V_1 և V_2-ի այնպես, որ G գրաֆի ցանկացած կող կից լինի մեկ գագաթի V_1-ից և մեկ գագաթի V_2-ից:

Սահմանում 1.2.6: Եթե $G = (V, E)$երկկողմանի գրաֆում V_1 բազմությանը պատկանող յուրաքանչյուր գագաթ միացված է V_2 բազմությանը պատկանող յուրաքանչյուր գագաթի, ապա G գրաֆը կանվանենք լրիվ երկկողմանի գրաֆ: Եթե այդ դեպքում $|V_1| = m$ և $|V_2| = n$, ապա կգրենք $G = K_{m,n}$:

Թեորեմ 1.2.2: Այն գրաֆների քանակը, որոնց գագաթների բազմությունը $V = \{v_1,\dots, v_n\}$ -ն է, հավասար է $2^{\binom{n}{2}}$:

Թեորեմ 1.2.3: Այն գրաֆների քանակը, որոնց գագաթների բազմությունը $V = \{v_1,\dots, v_n\}$ –ն է և որոնցում բոլոր գագաթների աստիճանները զույգ թվեր են, հավասար է $2^{\binom{n-1}{2}}$

Դիցուք G-ն և H -ը գրաֆներ են:

Սահմանում 1.2.7: H գրաֆը կոչվում է G գրաֆի ենթագրաֆ և կգրենք $H \subseteq G$, եթե $V(H) \subseteq V(G)$ և $E(H) \subseteq E(G)$: Հակառակ դեպքում, կգրենք $H \not\subseteq G$:

Սահմանում 1.2.8: H գրաֆը կոչվում է G գրաֆի կմախքային ենթագրաֆ, եթե $H \subseteq G$ և

$V(H) = V(G)$:

Դիցուք $G = (V, E)$-ն գրաֆ է և $S \subseteq V(G)$:

Սահմանում 1.2.9: $\boldsymbol{G}$ գրաֆի $\boldsymbol{G}$ $[\boldsymbol{S}]$ ենթագրաֆը կոչվում է $\boldsymbol{S}$ բազմությամբ ծնված ենթագրաֆ կամ ծնված ենթագրաֆ, եթ $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{G}[\boldsymbol{S}]) = \boldsymbol{S}$ և $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{G}[\boldsymbol{S}])=\{\boldsymbol{uv}; \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{S}$ և $\boldsymbol{uv} \in \boldsymbol{E}(\boldsymbol{G})\}$:

Դիցուք $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$-ն գրաֆ է :

Սահմանում 1.2.10 : $\boldsymbol{G}$ գրաֆի $\boldsymbol{u_0}, \boldsymbol{u_1}, \dots, \boldsymbol{u_{k-1}}, \boldsymbol{u_k}$ գագաթներից և $\boldsymbol{e_1}, \dots \boldsymbol{e_k}$ կողերից կազմված $\boldsymbol{u_0}, \boldsymbol{e_1}\ \boldsymbol{u_1}, \dots\ \boldsymbol{u_{k-1}}, \boldsymbol{e_k}, \boldsymbol{u_k}$ հաջորդականության կանվանենք $\boldsymbol{k}$ երկարությամբ $\boldsymbol{u_0}$-ից $\boldsymbol{u_k}$ շրջանցում կամ $\boldsymbol{k}$ $(\boldsymbol{u_0}, \boldsymbol{u_k})$-շրջանցում , եթե $\boldsymbol{e_j} = \boldsymbol{u_{i-1}}\boldsymbol{u_i}$, երբ $\boldsymbol{1} \leq \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{k}$: Սահմանված $(\boldsymbol{u_0}, \boldsymbol{u_k})$-շրջանցումը կրճատ կնշանակենք նրա գագաթների $\boldsymbol{u_0}, \boldsymbol{u_1}, \dots, \boldsymbol{u_{k-1}}, \boldsymbol{u_k}$ հաջորդականությամբ, ենթադրելով, որ յուրաքանչյուր հաջորդ գագաթ հարևան է նախորդին:

Սահմանում 1.2.11: $(\boldsymbol{u_0}, \boldsymbol{u_k})$-շրջանցումը կանվանենք փակ, եթե $\boldsymbol{u_0} = \boldsymbol{u_k}$:

Սահմանում 1.2.12: $\boldsymbol{G}$ գրաֆի $(\boldsymbol{u_0}, \boldsymbol{u_k})$-շրջանցումը կանվանենք $\boldsymbol{u_0}$-ից $\boldsymbol{u_k}$ ճանապարհ կամ $(\boldsymbol{u_0}, \boldsymbol{u_k})$-ճանապարհ, եթե $\boldsymbol{u_0}\ \boldsymbol{u_1}$-ը,..., $\boldsymbol{u_{k-1}}\boldsymbol{u_k}$-ն $\boldsymbol{G}$ գրաֆի զույգ առ զույգ տարբեր կողեր են: Եթե $\boldsymbol{P}$ -ն $\boldsymbol{G}$ գրաֆի ճանապարհ է, ապա $|\boldsymbol{P}|$-ով կնշանակենք այդ ճանապարհի երկարությունը, այսինքն՝ այդ ճանապարհի մեջ առկա կողերի քանակը:

Սահմանում 1.2.13: $\boldsymbol{G}$ գրաֆի $((\boldsymbol{u_0}, \boldsymbol{u_k})$-ճանապարհը կանվանենք պարզ $(\boldsymbol{u_0}, \boldsymbol{u_k})$-ճանապարհ, եթե նրա մեջ մտնող բոլոր գագաթները զույգ առ զույգ տարբեր են:

Սահմանում 1.2.14: $\boldsymbol{G}$ գրաֆի $(\boldsymbol{u_0}, \boldsymbol{u_k})$-ճանապարհը կանվանենք փակ ճանապարհ կամ ցիկլ, եթե այն փակ շրջանցում է, այսինքն՝ եթե $\boldsymbol{u_0} = \boldsymbol{u_k}$:

Սահմանում 1.2.15: $\boldsymbol{G}$ գրաֆի ցիկլը կանվանենք պարզ, եթե նրանում կրկնվում են միայն առաջին և վերջին գագաթները:

Սահմանում 1.2.16: $\boldsymbol{G}$ գրաֆում u և v գագաթների միջև հեռավորությունը

կսահմանենք որպես կարճագույն $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$-ճանապարհի երկարություն, եթե $\boldsymbol{G}$ գրաֆում գոյություն ունի առնվազն մեկ $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$-ճանապարհ, և $+\infty$՝ հակառակ դեպքում: $\boldsymbol{G}$ գրաֆում $\boldsymbol{u}$ և $\boldsymbol{v}$ գագաթների միջև հեռավորությունը կնշանակենք $\boldsymbol{d_G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$-ով կամ $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$-ով:

1. $\boldsymbol{G}$ գրաֆի ցանկացած u և v գագաթների համար $\boldsymbol{d_G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \geq \boldsymbol{0}$, և $\boldsymbol{d_G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$;
2. $\boldsymbol{G}$ գրաֆի ցանկացած u և v գագաթների համար $\boldsymbol{d_G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{d_G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$;

3. $\boldsymbol{G}$ գրաֆի ցանկացած u, v և w գագաթների համար և $\boldsymbol{d_G(u,v) \leq d_G(u,w) + d_G(w,v)}$

Լեմմա1.2.1: Ենթադրենք, որ $\boldsymbol{G}$ գրաֆում $\boldsymbol{u}$ -ն և $\boldsymbol{v}$ -ն իրարից տարբեր երքու գագաթներ են:

Այդ դեպքում ցանկացած $\boldsymbol{(u, v)}$- շրջանցումից կարելի է առանձնացնել պարզ $\boldsymbol{(u, v)}$ – ճանապարհ:

Լեմմա 1.2.2: G գրաֆի ցանկացած կենտ երկարություն ունեցող փակ շրջանցումից կարելի է առանձնացնել կենտ երկարություն ունեցող պարզ ցիկլ:

§ 1.3. Կապակցվածության բաղադրիչներ և կապակցված գրաֆներ

Դիցուք $\boldsymbol{G = (V, E)}$-ն գրաֆ է:

Սահմանում 1.3.1: $\boldsymbol{G}$ գրաֆը կանվանենք կապակցված, եթե նրա ցանկացած երկու $\boldsymbol{u}$ և $\boldsymbol{v}$ գագաթների համար $\boldsymbol{G}$ գրաֆում գոյություն ունի $\boldsymbol{(u, v)}$-ճանապարհ:

Նշենք, որ կապակցված գրաֆի օրինակներ են հանդիսանում լրիվ և լրիվ երկկողմանի գրաֆները:

Եթե $\boldsymbol{G = (V, E)}$-ն ցանկացած կրաֆ է, ապա դիտարկենք $\boldsymbol{V}$ բազմության վրա սահմանված $\boldsymbol{\alpha}$ բինար հարաբերությունը, որտեղ ցանկացած $\boldsymbol{u, v \in V}$ համար $\boldsymbol{u\alpha v}$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\boldsymbol{G}$ գրաֆում գոյություն ունի $\boldsymbol{(u, v)}$- ճանապարհ:

Նկատենք, որ $\boldsymbol{\alpha}$ բինար հարաբերությունը բավարարում է հետեւյալ երեք պայմաններին.

- ռեֆլեքսիվություն, այսինքն ցանկացած $\boldsymbol{v \in V}$ համար $\boldsymbol{u\alpha v}$,
- սիմետրիկություն, այսինքն ցանկացած $\boldsymbol{u, v \in V}$ համար, եթե $\boldsymbol{u\alpha v}$, ապա $\boldsymbol{v\alpha u}$,
- տրանզիտիվություն, այսինքն ցանկացած $\boldsymbol{u, v, w \in V}$ համար, եթե $\boldsymbol{u\alpha v}$ և $\boldsymbol{v\alpha w}$ ապա $\boldsymbol{u\alpha w}$:

Դիտարկենք $\boldsymbol{G}$ գրաֆի $\boldsymbol{G_j = G[V_j]}$ ենթագրաֆները, $\boldsymbol{1 \leq j \leq p}$: $\boldsymbol{G}$ գրաֆի $\boldsymbol{G_1, \dots, G_p}$ ենթագրաֆներն ընդունված է անվանել $\boldsymbol{G}$ գրաֆի կապակցվածություն կամ կապակցված բաղադրիչներ

Դիտողություն1.3.1: G գրաֆը կապակցված է այն եւ միայն այն դեպքում, երբ այն ունի կապակցվածության մեկ բաղադրիչ:

Դիտողություն 1.3.2: Կամայական G գրաֆում գոյություն ունի ամենաերկար ճանապարհ:

Եթե $G = (V, E)$-ն կապակցված (n, m)-գրաֆ է, ապա $cyc(G) = m - n + 1$ թիվը կանվանենք G գրաֆի ցիկլոմատիկ թիվ: Ստորև կապացուցենք կապակցված գրաֆների ցիկլոմատիկ թվին առնչվող մեկ թեորեմ:

Թեորեմ 1.3.1: Կապակցված $G = (V, E)$ գրաֆի համար $cyc(G) \geq 0$: Ավելին,

1. $cyc(G) = 0$ այն եւ միայն այն դեպքում, երբ G գրաֆում ցիկլ չկա,
2. $cyc(G) = 1$ այն եւ միայն այն դեպքում, երբ G գրաֆում կա ճիշտ մեկ ցիկլ:

$G = (V, E)$ գրաֆն անվանեցինք երկկողմանի, եթե V բազմությունը հնարավոր է տրոհել երկու ենթաբազմությունների V_1 և V_2-ի այնպես, որ G գրաֆի ցանկացած կող կից է մեկ գագաթի V_1 -ից և մեկ գագաթիV_2-ից:

§ 1.4. Գրաֆների իզոմորֆիզմ, հոմոմորֆիզմ, ավտոմորֆիզմ և գրաֆի ավտոմորֆիզմների խումբը

Սահմանենք գրաֆների իզոմորֆիզմի գաղափարը:

Սահմանում 1.4.1: G և H գրաֆները կոչվում են իզոմորֆ, եթե գոյություն ունի $f: V(G) \to V(H)$ փոխմիարժեք համապատասխանություն, որ $uv \in E(G)$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $f(u)f(v) \in E(H)$: Եթե G և Hգրաֆները իզոմորֆ են կգրենք $G \cong H$:

Հիպոթեզ 1.4.1: Դիցուք ունենք G և H գրաֆները, որտեղ $V(G) = \{u_1, \dots, u_n\}, V(H) = \{v_1, \dots, v_n\}$ և $n \geq 3$; : Եթե ցանկացած i-ի $(1 \leq i \leq n)$ համար տեղի ունի $G - u_i \cong H - v_i$ պայմանը, ապա $G \cong H$:

Հիպոթեզ 1.4.2: Դիցուք ունենք G և H գրաֆները, որտեղ $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}, E(H) = \{f_1, \dots, f_m\}$ և $m \geq 4$. Եթե ցանկացած i-ի $(1 \leq i \leq n)$ համար տեղի ունի $G - e_i \cong H - f_i$ պայմանը, ապա $G \cong H$:

Սահմանում 1.4.2: $\boldsymbol{G}$ գրաֆի հոմոմորֆիզմ $\boldsymbol{H}$ գրաֆի վրա կոչվում է $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{V}(\boldsymbol{G}) \to \boldsymbol{V}(\boldsymbol{H})$ արտապատկերումը, որի դեպքում եթե $\boldsymbol{uv} \in \boldsymbol{E}(\boldsymbol{G})$, ապա $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{E}(\boldsymbol{H})$: Եթե գոյություն ունի $\boldsymbol{f}$ $\boldsymbol{G}$ գրաֆի հոմոմորֆիզմ $\boldsymbol{H}$ գրաֆի վրա, ապա կգրենք : $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{H}$ կամ $\boldsymbol{G} \to \boldsymbol{H}$:

Սահմանում 1.4.3: $\boldsymbol{G}$ գրաֆի ավտոմորֆիզմ կոչվում է $\boldsymbol{G}$ գրաֆի իզոմորֆիզմը իր վրա:

Թեորեմ 1.4.1 (Ռ. Ֆրուխթ): Ցանկացած վերջավոր $\boldsymbol{F}$ խմբի համար գոյություն ունի $\boldsymbol{G}$ գրաֆ, որի $\boldsymbol{Aut}(\boldsymbol{G})$-ն իզոմորֆ է $\boldsymbol{F}$ -ին:

Սահմանում 1.4.4: $\boldsymbol{G}$ գրաֆի $\boldsymbol{u}$ և $\boldsymbol{v}$ գագաթները կոչվում են նման, եթե գոյություն ունի $\boldsymbol{G}$ գրաֆի այնպիսի $\boldsymbol{f}$ ավտոմորֆիզմ, որի դեպքում $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$:

Սահմանում 1.4.5: $\boldsymbol{G}$ գրաֆի $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{uv}$ և $\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{xy}$ կողերը կոչվում են նման, եթե գոյություն ունի $\boldsymbol{G}$ գրաֆի այնպիսի $\boldsymbol{f}$ ավտոմորֆիզմ, որի դեպքում $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{xy}$:

Սահմանում 1.4.6: $\boldsymbol{G}$ գրաֆը կոչվում է գագաթային սիմետրիկ գրաֆ, եթե նրա ցանկացած երկու գագաթներ նման են:

Սահմանում 1.4.7: $\boldsymbol{G}$ գրաֆը կոչվում է կողային սիմետրիկ գրաֆ, եթե նրա ցանկացած երկու կողեր նման են:

Սահմանում 1.4.8: Եթե $\boldsymbol{G}$-ն ունի միայն նույնական ավտոմորֆիզմ, ապա $\boldsymbol{G}$-ն կոչվում է ասիմետրիկ գրաֆ:

§ 1.5. Էքստրեմալ, կցության և հատումների գրաֆներ

Էքստրեմալ գրաֆների տեսությունում հիմնականում ուսումնասիրվում են 38 ամենամեծ կամ ամենափոքր (Էքստրեմալ) գրաֆները, որոնք օժտված են որոշակի հատկությամբ:

Կասենք, որ $\boldsymbol{G}$ գրաֆը չի պարունակում $\boldsymbol{F}$ գրաֆ, եթե $\boldsymbol{F}$ գրաֆը $\boldsymbol{G}$ գրաֆի ենթագրաֆ չէ: Եթե $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{C_3}$ կամ $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K_3}$, ապա ասում են, որ $\boldsymbol{G}$ գրաֆը չի պարունակում եռանկյուն:

Էքստրեմալ գրաֆների տեսության առաջին թեորեմն է համարվում Մանթելի կողմից ապացուցված թեորեմը եռանկյուն չպարունակող գրաֆների մասին:

Թեորեմ 1.5.1: Եթե $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m})$գրաֆը չի պարունակում եռանկյուն, ապա $\boldsymbol{m} \leq \left|\frac{\boldsymbol{n}^2}{4}\right|$:

Հետևանք 1.5.1: Կամայական , $G\left(n, \left|\frac{n^2}{4}\right| + 1\right)$-գրաֆ ($n \geq 3$) պարունակում է եռանկյուն:

Թեորեմ 1.5.2: Եթե G գրաֆը բավարարում է $\sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{2} > \binom{n}{2}$ պայմանին, ապա G-ն պարունակում է չորս երկարությամբ ցիկլ:

Թեորեմ 1.5.3: Եթե $G(n, m)$-գրաֆը չի պարունակում C_4, ապա $m \leq \frac{n}{4}\left(1 + \sqrt{4n - 3}\right)$:

Այժմ սահմանենք Տուրանի $ex(n, F)$ թիվը հետևյալ կերպ.

$$ex(n, F) = max_G\{|E(G)|: |V(G)| = n \text{ և } F \not\subseteq G$$

Սահմանենք Տուրանի $T_{n,r}$, գրաֆը: Տուրանի $T_{n,r}$ գրաֆը իրենից ներկայացնում է n գագաթ ունեցող լրիվ r-կողմանի գրաֆ, որի $n - r\left|\frac{n}{r}\right|$ կողմերը պարունակում են $\left|\frac{n}{r}\right|$ հատ գագաթներ:

Թեորեմ 1.5.4: n գագաթ ունեցող K_{r+1} չպարունակող գրաֆներից Տուրանի $T_{n,r}$ գրաֆը ունի ամենաշատ կողեր. $ex(n, K_{r+1}) = \left|E\left(T_{n,r}\right)\right|$:

Հետևանք 1.5.2: Ցանկացած $G\left(n, \left|\frac{n^2}{4}\right| + 1\right)$--գրաֆ ($n \geq r + 1$) պարունակում է K_{r+1}:

Դիցուք տրված է $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ բազմությունը և այդ բազմության ենթաբազմությունների $\mathfrak{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ ընտանիքը:

Սահմանենք $(S, \mathfrak{F})$ զույգի համար հետևյալ կցության $\mathrm{G}(S, \mathfrak{F})$ գրաֆը.

$$V\left(\mathrm{G}(S, \mathfrak{F})\right) = S \cup \{F_1, F_2, \dots, F_m\} \text{ և}$$

$$E\left(\mathrm{G}(S, \mathfrak{F})\right) = \left\{s_i F_j: s_i \in S, F_j \in \mathfrak{F} \text{ և } s_i \in F_j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\right\}:$$

Հեշտ է տեսնել, որ $\mathrm{G}(S, \mathfrak{F})$ կցության գրաֆը երկկողմանի գրաֆ է:

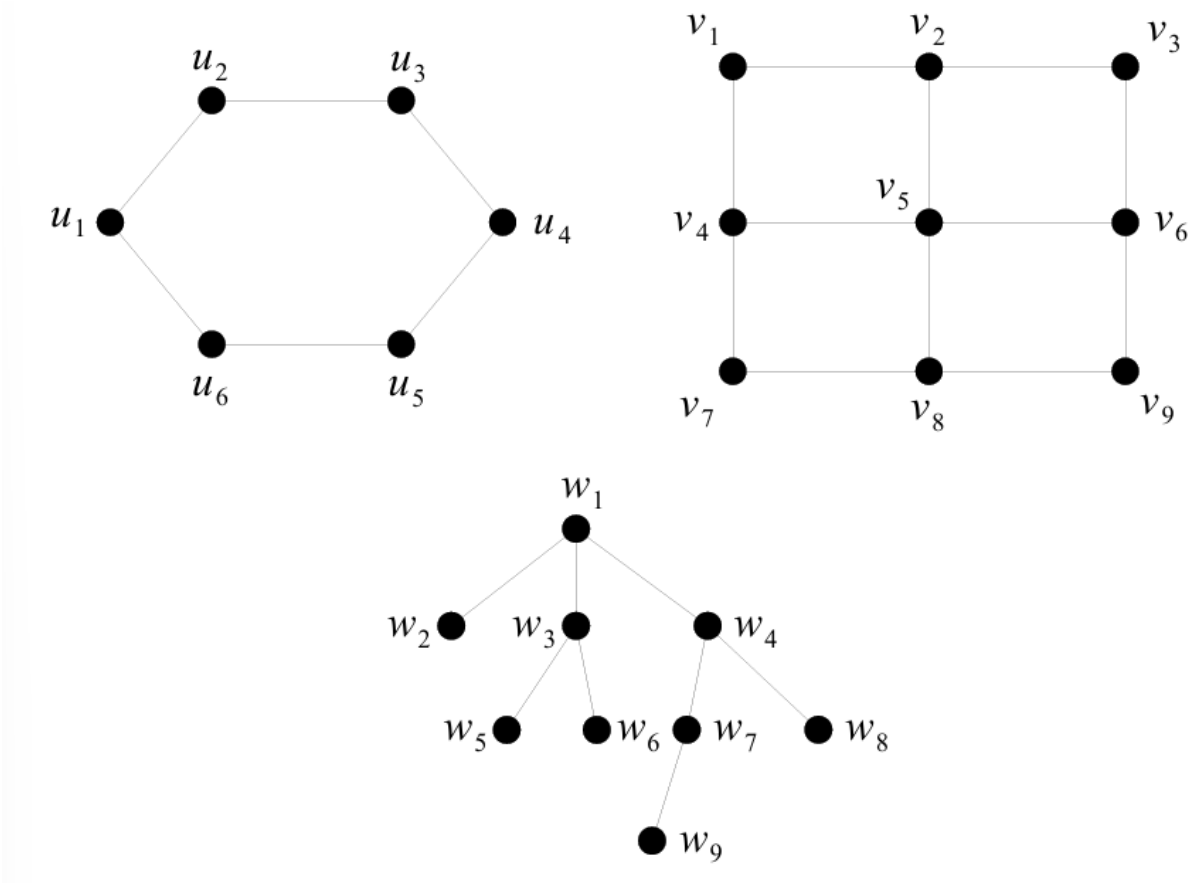
Սահմանում 1.5.1: G գրաֆը կոչվում է հատումների գրաֆ, եթե գոյություն ունի $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ բազմություն և այդ բազմության ենթաբազմությունների $\mathfrak{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ ընտանիք, որ $G \cong \Omega(S, \mathfrak{F})$:

Հատումների գրաֆներին վերաբերվող առաջին արդյունքը ստացվել է Մարչևսկու կողմից:

Թեորեմ 1.5.5: Կամայական գրաֆ հանդիսանում է հատումների գրաֆ:

Գլուխ 2. Երկկողմանի գրաֆներ

Հիշենք, որ **§ 1.2**-ում $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ գրաֆն անվանեցինք երկկողմանի, եթե $\boldsymbol{V}$ բազմությունը հնարավոր է տրոհել երկու ենթաբազմությունների $\boldsymbol{V_1}$ և $\boldsymbol{V_2}$-ի այնպես, որ $\boldsymbol{G}$ գրաֆի ցանկացած կող կից է մեկ գագաթի $\boldsymbol{V_1}$-ից և մեկ գագաթի $\boldsymbol{V_2}$-ից:



2.1.1

Նշենք, որ նկ. 2.1.1-ում պատկերված երեք գրաֆներն էլ երկկողմանի են: Իրոք, դիտարկենք նրանցից առաջինի գագաթների բազմության հետևյալ տրոհումը. $\boldsymbol{U_1} = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_3}, \boldsymbol{u_5}\}$ և $\boldsymbol{U_2} = \{\boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_4}, \boldsymbol{u_6}\}$, և նկատենք, որ այդ գրաֆի ցանկացած կող միացնում է մեկական գագաթ $\boldsymbol{U_1}$-ից և $\boldsymbol{U_2}$-ից: Երկրորդ գրաֆի երկկողմանիության մեջ համոզվելու համար դիտարկենք նրա գագաթների հետևյալ տրոհումը. $\boldsymbol{V_1} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_5}, \boldsymbol{v_7}, \boldsymbol{v_9}\}$ և $\boldsymbol{V_1} = \{\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_4}, \boldsymbol{v_6}, \boldsymbol{v_8}\}$, և նկատենք, որ այդ գրաֆի ցանկացած կող միացնում է մեկական գագաթ $\boldsymbol{V_1}$-ից և $\boldsymbol{V_2}$-ից: Եվ, վերջապես, երրորդ գրաֆի երկկողմանիության մեջ համոզվելու համար դիտարկենք նրա գագաթների հետևյալ տրոհումը.

$\boldsymbol{W_1} = \{ \boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_5}, \boldsymbol{w_6}, \boldsymbol{w_7}, \boldsymbol{w_8}\}$ և $\boldsymbol{W_2} = \{ \boldsymbol{w_2}, \boldsymbol{w_3}, \boldsymbol{w_4}, \boldsymbol{w_9}\}$, և նկատենք, որ այդ գրաֆի ցանկացած կող միացնում է մեկական գագաթ $\boldsymbol{W_1}$-ից և $\boldsymbol{W_2}$-ից:

Ստորև կապացուցենք Քյոնիգի թեորեմը, որը նկարագրում է երկկողմանի գրաֆները:

Թեորեմ 2.1.1 (Դ. Քյոնիգ): Որպեսզի $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ գրաֆը լինի երկկողմանի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն չպարունակի կենտ երկարություն ունեցող պարզ ցիկլ:

Դիտարկենք ցանկացած $\boldsymbol{G}$ գրաֆը, և դիցուք $\boldsymbol{G_1}, \ldots, \boldsymbol{G_p}$,-ն նրա կապակցվածության բաղադրիչներն են: Նկատենք, որ քանի որ $\boldsymbol{G}$ գրաֆը չի պարունակում կենտ երկարություն ունեցող պարզ ցիկլ, ապա նրա կապակցվածության բաղադրիչները ևս չեն պարունակի այդպիսի ցիկլ: Համաձայն վերը ապացուցվածի, $\boldsymbol{G_1},\ldots,\boldsymbol{G_p}$ կապակցվածության բաղադրիչները հանդիսանում են երկկողմանի գրաֆներ, և հետևաբար $\mathbf{j = 1, \ldots, p}$ -ի համար $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{G_j})$ բազմությունը կարելի է տրոհել $\boldsymbol{V}^{(1)}$ և $\boldsymbol{V}^{(2)}$ բազմությունների այնպես, որ $\boldsymbol{G_j}$ գրաֆի ցանկացած կող միացնում է մեկական գագաթ $\boldsymbol{V_1^{(j)}}$-ից և $\boldsymbol{V_2^{(j)}}$-ից: Նշանակենք՝

$$\boldsymbol{V}^{(1)} = \boldsymbol{V_1^{(1)}} \cup \ldots \cup \boldsymbol{V_1^{(p)}} \text{ և } \boldsymbol{V}^{(2)} = \boldsymbol{V_2^{(1)}} \cup \ldots \cup \boldsymbol{V_2^{(p)}}:$$

Նկատենք, որ $\boldsymbol{G}$ գրաֆի ցանկացած կող միացնում է մեկական գագաթ $\boldsymbol{V}^{(1)}$ -ից և $\boldsymbol{V}^{(2)}$ -ից, և, հետևաբար, $\boldsymbol{G}$ գրաֆը նույնպես երկկողմանի է:

Դիցուք $\boldsymbol{G}$ -ն գրաֆ է: $\boldsymbol{G}$ գրաֆի կցության $\mathrm{B}(\boldsymbol{G})$ մատրիցը կանվանենք տոտալ ունիմոդուլյար մատրից, եթե այդ մատրիցի յուրաքանչյուր քառակուսային ենթամատրիցի որոշիչը հավասար է $\mathbf{0,1}$ կամ $\mathbf{-1}$-ի: Այժմ տանք երկկողմանի գրաֆների մեկ այլ նկարագրում:

Թեորեմ 2.1.2: Որպեսզի $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$գրաֆը լինի երկկողմանի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա կցության $\mathrm{B}(\boldsymbol{G})$ մատրիցը լինի տոտալ ունիմոդուլյար:

Ապացույց: Նախ ցույց տանք, որ եթե $\boldsymbol{G}$ գրաֆի կցության $\mathrm{B}(\boldsymbol{G})$ մատրիցը տոտալ ունիմոդուլյար է, ապա $\boldsymbol{G}$ -ն երկկողմանի գրաֆ է: Ենթադրենք հակառակը՝ $\boldsymbol{G}$ գրաֆի կցության $\mathrm{B}(\boldsymbol{G})$ մատրիցը տոտալ ունիմոդուլյար է, բայց $\boldsymbol{G}$-ն երկկողմանի գրաֆ չէ: Ըստ թեորեմ 2.1.1-ի $\boldsymbol{G}$-ն պարունակում է կենտ երկարություն ունեցող պարզ ցիկլ: Դիցուք այդ պարզ ցիկլի երկարությունը $\mathbf{2}\boldsymbol{l}\mathbf{+1}$ է: Դիտարկենք այդ ցիկլի գագաթներին և կողերին համապատասխանող $\mathrm{B}(\boldsymbol{G})$ մատրիցի ենթամատրիցը: Դիցուք այդ մատրիցը $\boldsymbol{B}'$-ն է: Պարզ է, որ $\boldsymbol{B}'$-ը $(\mathbf{2}\boldsymbol{l}\mathbf{+1}) \times (\mathbf{2}\boldsymbol{l}\mathbf{+1})$ կարգի քառակուսային մատրից է:

Այժմ դիտարկենք $\boldsymbol{B''}$ մատրիցը, որը ստացվում է $\boldsymbol{B'}$-ից որոշ տողեր և սյուներ տեղափոխելով այնպես, որ $\boldsymbol{B''}$ մատրիցը ընդունի հետևյալ տեսքը.

$$\boldsymbol{B''} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}:$$

Հեշտ է տեսնել, որ $\mathbf{det}(\boldsymbol{B''}) = \mathbf{1} + (-\mathbf{1})^{\mathbf{2}\boldsymbol{l}} = \mathbf{2}$: Մյուս կողմից պարզ է, որ $\boldsymbol{B'}$ մատրիցի որոշիչը կարող է տարբերվել$\mathbf{det}(\boldsymbol{B''})$-ից միայն նշանով, իսկ դա հակասում է $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{G})$ մատրիցի տոտալ ունիմոդուլյար լինելուն:

Այժմ ցույց տանք, որ եթե $\boldsymbol{G}$-ն երկկողմանի գրաֆ է, ապա $\boldsymbol{G}$ գրաֆի կցության $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{G})$ մատրիցը տոտալ ունիմոդուլյար է: Դիտարկենք $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{G})$ մատրիցի ցանկացած $\boldsymbol{Q}$ $\mathbf{k} \times \mathbf{k}$ կարգի քառակուսային ենթամատրիցը: Ապացույցը կատարենք մակածման եղանակով ըստ $\mathbf{k}$-ի: Եթե $\mathbf{k} = \mathbf{1}$-ի, ապա ակնհայտ է, որ $\mathbf{det}(\boldsymbol{Q})$կամ $\mathbf{det}(\boldsymbol{Q}) = \mathbf{1}$: Ենթադրենք, որ պնդումը ճիշտ է $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{G})$ մատրիցի $\boldsymbol{Q'}$ $\boldsymbol{k'} \times \boldsymbol{k'}$ կարգի ցանկացած քառակուսային ենթամատրիցի համար, որտեղ $\boldsymbol{k'} < \boldsymbol{k}$: Դիտարկենք $\boldsymbol{Q}$ $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k}$ կարգի քառակուսային ենթամատրիցը: Եթե $\boldsymbol{Q}$-ն պարունակում է սյուն, որի բոլոր տարրերը զրոներ են, ապա պարզ է որ $\mathbf{det}(\boldsymbol{Q}) = \mathbf{0}$: Եթե $\boldsymbol{Q}$ -ն պարունակում է սյուն, որի ճիշտ մեկ տարրն է $\mathbf{1}$, ապա վերլուծելով $\mathbf{det}(\boldsymbol{Q})$-ն ըստ այդ սյանը մենք ըստ մակածման ենթադրության կստանանք, որ $\mathbf{det}(\boldsymbol{Q}) = \mathbf{0}, \mathbf{1}$ կամ $-\mathbf{1}$ -ի: Այստեղից հետևում է, որ մենք կարող ենք ենթադրել, որ $\boldsymbol{Q}$ մատրիցի յուրաքանչյուր սյուն պարունակում է ճիշտ երկու հատ $\mathbf{1}$: Քանի որ $\boldsymbol{G}$-ն երկկողմանի գրաֆ է, ուստի այդ մեկերից մեկը կպատկանի $\boldsymbol{G}$-ի մի կողմին, իսկ մյուսը՝ մյուս կողմին: Պարզ է, որ մենք կարող ենք ենթադրել, որ $\boldsymbol{Q}$ մատրիցի առաջին $\boldsymbol{r}$ տողերին համապատասխանում է $\boldsymbol{G}$ երկկողմանի գրաֆի մի կողմը, իսկ մյուս $\boldsymbol{k} - \boldsymbol{r}$ տողերին՝ այդ գրաֆի մյուս կողմը: Քանի որ $\boldsymbol{G}$-ն երկկողմանի գրաֆ է, ուստի $\boldsymbol{Q}$ մատրիցի յուրաքանչյուր սյուն կպարունակի մեկ հատ $\mathbf{1}$ առաջին $\boldsymbol{r}$ տողերից և ճիշտ մեկ հատ $\mathbf{1}$ մյուս $\boldsymbol{k} - \boldsymbol{r}$ տողերից: Այստեղից հետևում է, որ $\boldsymbol{Q}$ մատրիցի առաջին $\boldsymbol{r}$ տողերի գումարը հավասար է այդ մատրիցի մյուս $\boldsymbol{k} - \boldsymbol{r}$ տողերի գումարին, ուստի $\boldsymbol{Q}$ մատրիցի տողերը գծորեն կախված են և $\mathbf{det}(\boldsymbol{Q}) = \mathbf{0}$:

Ապացուցենք մի թեորեմ, որը ցույց է տալիս, որ ցանկացած գրաֆ պարունակում է կողերով հարուստ կմախքային երկկողմանի ենթագրաֆ:

Թեորեմ 2.1.3 (Պ. Էրդյոշ): Կամայական $\boldsymbol{G}$ գրաֆ պարունակում է կմախքային երկկողմանի $\boldsymbol{H}$ ենթագրաֆ, որում $|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H})| \geq \frac{|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{G})|}{\mathbf{2}}$:

Ապացույց: Դիտարկենք $\boldsymbol{G}$ գրաֆի գագաթների $V(\boldsymbol{G})$ բազմության բոլոր հնարավոր տրոհումները երկու ենթաբազմությունների և ընտրենք այն մեկը, որի դեպքում այդ երկու ենթաբազմությունների միջև կողերի քանակը առավելագույնն է: Դիցուք այդ տրոհումը $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{U} \cup \boldsymbol{W}$-ն է: Պարզ է, որ այդ տրոհումը ծնում է կմախքային երկկողմանի $\boldsymbol{H}$ ենթագրաֆ: Ցույց տանք, որ ցանկացած $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{G})$-ի համար $\boldsymbol{d_H}(\boldsymbol{v}) \geq \frac{\boldsymbol{d_G}(\boldsymbol{v})}{\mathbf{2}}$: Ենթադրենք հակառակը՝ գոյություն ունի $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{G})$-ին, որ $\boldsymbol{d_H}(\boldsymbol{u}) < \frac{\boldsymbol{d_G}(\boldsymbol{u})}{\mathbf{2}}$: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{G})$: Քանի որ $\boldsymbol{d_H}(\boldsymbol{u}) < \frac{\boldsymbol{d_G}(\boldsymbol{u})}{\mathbf{2}}$, ուստի $\boldsymbol{u}$ գագաթը $\boldsymbol{U}$-ում ավելի շատ հարևան գագաթներ ունի քան $\boldsymbol{W}$-ում, իսկ դա նշանակում է, որ եթե մենք $\boldsymbol{u}$ գագաթը $\boldsymbol{U}$-ից տեղափոխենք $\boldsymbol{W}$, ապա կստանանք $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{G}) = (\boldsymbol{U}\{\boldsymbol{u}\}) \cup (\boldsymbol{W} \cup \{\boldsymbol{u}\})$ նոր տրոհումը, որի $(\boldsymbol{U}\{\boldsymbol{u}\})$ և $(\boldsymbol{W} \cup \{\boldsymbol{u}\})$ ենթաբազմությունների միջև կողերի քանակը ավելի մեծ է, որը հակասում է սկզբնական տրոհման ընտրությանը: Այստեղից հետևում է, որ

$$|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H})| = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \sum_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{G})} \boldsymbol{d_H}(\boldsymbol{v}) \geq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \sum_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{G})} \frac{\boldsymbol{d_G}(\boldsymbol{v})}{\mathbf{2}} = \frac{|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{G})|}{\mathbf{2}}:$$