Estadística Multivariada

– Ejercicios Martes 12 de Marzo del 2024 –

Israel García Ramírez – 211179

Ejercicio 1. Suponga que $Y \in \{0, \ldots, K-1\}$ con $K \geq 2$. Si $f(x)$ es gaussiano: $X \mid Y = k \sim N(\mu_k, \Sigma_k)$, la regla de Bayes se escribe como

$$h^*(x) = \arg\max_k \delta_k(x),$$

donde

$$\delta_k = -\frac{1}{2}\log|\Sigma_k| - \frac{1}{2}(x-\mu_k)^T\Sigma_k^{-1}(x-\mu_k) + \log(\pi_k).$$

Sea $n_k = \sum_i \mathbf{1}_{\{y_i=k\}}$ para $k = 0, \ldots, K-1$. Demuestra que los estimadores puntuales de π_k, μ_k, Σ_k, y Σ son:

$$\hat{\pi}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{\{y_i=k\}}, \qquad \hat{\mu}_k = \frac{1}{n_k}\sum_{\{i:y_i=k\}} X_i, \qquad \hat{\Sigma}_k = \frac{1}{n_k-1}\sum_{\{i:y_i=k\}}(X_i-\hat{\mu}_k)(X_i-\hat{\mu}_k)^T$$

y

$$\hat{\Sigma} = \frac{\sum_{k=0}^{K-1}(n_k-1)\hat{\Sigma}_k}{n-K}.$$

Toma un conjunto de puntos y calcula tales valores estimados.

Solución.

- Para $\hat{\mu}_K$

Sabemos que el estimador para la media es

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Por lo cual, en este caso se tiene para cada K:

$$\hat{\mu}_K = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- Para $\hat{\Sigma}_K$

Sabemos que el estimador para la covarianza

$$\Sigma_{XY} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$$

En este caso para cada K:

$$\hat{\Sigma}_K = \frac{1}{n_K-1}\sum(x_i-\mu_K)^2$$

En forma matricial y usando $\hat{\mu}_K$:

$$\hat{\Sigma}_K = \frac{1}{n_K-1}\sum(x_i-\hat{\mu}_K)(x_i-\hat{\mu}_K)^T$$

- Para $\hat{\pi}_K$

Por def. $\pi_K = \mathbb{P}(x \in \pi_K)$, es la proba de clasificar un punto dentro del grupo π_K.

Recordando la función clasificadora:

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$$

Por lo que,

$$\hat{\pi}_K = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\pi_K}(x)$$

Ejercicio 2. Bajo el supuesto de que las observaciones en la k-ésima clase se toma a partir de una distribución normal, el clasificador de Bayes asigna una observación a la clase para la cual se maximiza la función discriminante. ¿Cuál es la función discriminante en este caso?

Solución.

Su discriminante es:

$$\log\left(\frac{f_1(x)\pi_1}{f_K(x)\pi_K}\right) = \log(f_1(x)\pi_1) - \log(f_K(x)\pi_K)$$

$$= -\frac{1}{2}\log|\Sigma_1| - \frac{1}{2}(x-\mu_1)^T \Sigma_1^{-1}(x-\mu_1) + \log(\pi_1)$$

$$+\frac{1}{2}\log|\Sigma_K| + \frac{1}{2}(x-\mu_K)^T \Sigma_K^{-1}(x-\mu_K) - \log(\pi_K)$$

$$= -\frac{1}{2}\log\left(\frac{|\Sigma_1|}{|\Sigma_K|}\right) - \frac{1}{2}\left[(x-\mu_1)^T \Sigma_1^{-1}(x-\mu_1) - (x-\mu_K)^T \Sigma_K^{-1}(x-\mu_K)\right] + \log\left(\frac{\pi_1}{\pi_K}\right)$$

Ejercicio 3. Sean $\mu_1 = (1, 0)$. Considere la siguiente matriz:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

¿Existe un vector gaussiano con media μ_1 y matriz de covarianza Σ?

Solución.

Para que exista un vector gaussiano con la μ y Σ dadas se debe comprobar que Σ sea simétrica y positiva definida.

Analizando a través de eigenvalores:

$$|\Sigma - \lambda I| = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 8 \\ 8 & 4-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)^2 - 64 = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda - 48 = 0$$

$$(\lambda - 12)(\lambda + 4) = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 12 \quad , \quad \lambda_2 = -4$$

Como $\lambda_2 < 0$, Σ no es positiva definida.

Por lo tanto, no existe un vector gaussiano con tal μ y Σ.

Ejercicio 4. Sea $u \in (1, \infty)$ y (X_1, X_2, X_3) un vector aleatorio con densidad:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(ux_1^2 + x_2^2 + ux_3^2 + 2x_1x_2)\right),$$

con $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Calcula la distribución de (X_1, X_2, X_3).

Sea $X = (x_1, x_2, x_3)$. Se tiene que $X \sim N_3(\mu, \Sigma)$

Ahora se supone $\mu = (0, 0, 0)$

Y se observa la forma cuadrática dentro de $f(x_1, x_2, x_3)$

$$Q(X) = ux_1^2 + x_2^2 + ux_3^2 + 2x_1x_2$$

Pero $Q(x)$ se puede escribir matricialmente como:

$$Q(X) = X^T \Sigma^{-1} X = (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} Var(X_1) & Cov(x_1, x_2) & Cov(x_1, x_3) \\ Cov(x_2, x_1) & Var(X_2) & Cov(x_2, x_3) \\ Cov(x_3, x_1) & Cov(x_3, x_2) & Var(x_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Nótese que de lo anterior podemos asumir la forma de Σ^{-1},

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} u & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}$$

Obteniendo Σ,

$$\Sigma = \frac{Adj(\Sigma^{-1})^T}{|\Sigma^{-1}|} = \frac{\begin{pmatrix} u & -u & 0 \\ -u & u^2 & 0 \\ 0 & 0 & u-1 \end{pmatrix}^T}{u(u-1)} = \frac{\begin{pmatrix} u & -u & 0 \\ -u & u^2 & 0 \\ 0 & 0 & u-1 \end{pmatrix}}{u(u-1)}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{1}{u-1} & -\frac{1}{u-1} & 0 \\ -\frac{1}{u-1} & \frac{u}{u-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{u} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5. $\mu_1 = (1,0)$ y $\mu_2 = (-2,2)$. Considere las siguientes matrices:

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- ¿Existe un vector gaussiano bivariado con media μ_1 y matriz de covarianza Σ_1?

Analizando si Σ_1 es positiva definida:

$$|\Sigma - \lambda I| = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 7-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(7-\lambda)(1-\lambda) - 4 = 0$$

$$7 - 7\lambda - \lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 4 + \sqrt{13} \approx 7.60$$

$$\lambda_2 = 4 - \sqrt{13} \approx 0.39$$

Como $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, entonces Σ_1 es positiva definida, además de simétrica, por lo que existe un vector gaussiano bivariado para μ_1 y Σ_1 dadas.

- Si $\pi_k = 0.5$ para $k = 1, 2$ y si $f_1(x_1, x_2) \sim N(\mu_1, \Sigma_1)$ y $f_2(x_1, x_2) \sim N(\mu_2, \Sigma_1)$; calcule

$$L(x_1, x_2) = \log\left(\frac{f_1(x_1, x_2)\pi_1}{f_2(x_1, x_2)\pi_2}\right).$$

Recuerda que asignamos (x_1, x_2) a Π_1 si: $L(x_1, x_2) > 0$.

Sea $X = (x_1, x_2)$. $\qquad \mu_1 = (1, 0) \qquad \mu_2 = (-2, 2)$

$$L(X) = \log\left\{\frac{f_1(X)\pi_1}{f_2(X)\pi_2}\right\} = b_0 + b^T X = \frac{47}{6} + \frac{7}{3}x_1 - \frac{20}{3}x_2$$

$$\Sigma_1^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 7/3 \end{pmatrix} \qquad \Sigma_2^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$b = \Sigma_1^{-1}(\mu_1 - \mu_2) = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 7/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 4/3 \\ -2 - 14/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ -20/3 \end{pmatrix}$$

$$b_0 = -\frac{1}{2}\left(\mu_1^T \Sigma_1^{-1} \mu_1 - \mu_2^T \Sigma_1^{-1} \mu_2\right) + \log(\pi_2/\pi_1)$$

$$= -\frac{1}{2}\left((1\ 0)\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 7/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (-2\ 2)\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 7/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + \log(1)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1/3 - 16\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{47}{3}\right) = \frac{47}{6}$$

- ¿A qué grupo asignas $(2,1)$?

$$L(x_1=2,\ x_2=1)=\frac{47}{6}+\frac{7}{3}(2)-\frac{20}{3}(1)$$

$$=\frac{35}{6}>0$$

$\therefore$ $(2,1)$ lo asigno a Π_1

- Si $\pi_k = 0.5$ para $k = 1, 2$; calcule

$$Q(x_1, x_2) = \log\left(\frac{f_1(x_1,x_2)\pi_1}{f_2(x_1,x_2)\pi_2}\right).$$

Recuerda que asignamos (x_1, x_2) a Π_1 si: $Q(x_1, x_2) > 0$.

$$Q(X)=\beta_0+\beta^T X + X^T\Omega X = \frac{5}{2}+\begin{pmatrix} 7/3 & -4/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Omega=-\frac{1}{2}\left(\Sigma_1^{-1}-\Sigma_2^{-1}\right)=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\beta=\Sigma_1^{-1}\mu_1-\Sigma_2^{-1}\mu_2=\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 7/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 \\ 2/3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}$$

$$\beta_0=-\frac{1}{2}\left[\log\frac{|\Sigma_1|}{|\Sigma_2|}+\mu_1^T\Sigma_1^{-1}\mu_1-\mu_2^T\Sigma_2^{-1}\mu_2\right]-\log\left(\Pi_2/\Pi_1\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\log(1)+\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 7/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right]-\log(1)$$

$$=-\frac{1}{2}\left[1/3-16/3\right]=-\frac{1}{2}(-5)=\frac{5}{2}$$

- ¿A qué grupo asignas $(2,1)$?

$$Q(x_1=2,x_2=1)=\frac{5}{2}+\begin{pmatrix} 7/3 & -4/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{15}{2}>0$$

$\therefore$ Asigno $(2,1)$ a Π_1