UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA

CENTRO DE TECNOLOGIA

ENGENHARIA ELÉTRICA

TRABALHO DE MÉTODOS NUMÉRICOS E COMPUTACIONAIS

ISRAEL PANAZOLLO

Santa Maria RS

Dezembro 2017

QUESTÕES

1) Use um programa em Python para integrar numericamente a função:

$$\int_0^3 x^2 e^x dx$$

usando a regra dos trapézios, a regra de 1/3 de Simpson e a regra de 3/8 de Simpson com 12 subintervalos. Compare dos resultados obtidos com a solução analítica.

Resultado pela Regra dos Trapézios: 99.993313079696478.
Resultado pela Regra 1/3 de Simpson: 98.441752379785527.
Resultado pela Regra 3/8 de Simpson: 98.458927988704005.
Resultado pela solução analítica: $5e^3 - 2 =$ 98.42768.

Obs:Link para solução analítica: https://es.symbolab.com/solver/integral-calculator/%5Cint_%7B0%7D%5E%7B3%7D%20x%5E%7B2%7De%5E%7Bx%7D%20dx

2) Suponha que uma força para cima de resistência do ar em um objeto em queda livre seja proporcional ao quadrado da velocidade. Nesse caso, a velocidade pode ser calculada por

$$v(t) = \sqrt{\frac{gm}{C_d}}\tanh(\sqrt{\frac{gC_d}{m}}t)$$

em que C_d é o coeficiente de arrasto de segunda ordem. Se$g = 9{,}81\ m/s^2$, $m = 68{,}1\ Kg$ e $C_d = 0{,}25\ Kg/m$, calcule, usando um programa em Python e integração numérica, quanto o objeto cai em $10s$. Use um número de intervalos suficientemente grande para que se tenha pelo menos três casas decimais de precisão.

Resultado Regra dos Trapézios: 334.17816724733302.
Resultado 1/3 de Simpson: 334.1781672474076.
Resultado 3/8 de Simpson: 334.17804369400096.

Portanto o valor mais próximo da velocidade é 334,178 m/s

3) A massa total de uma haste de densidade variável é dada por:

$$m = \int_0^L \rho(x)A_c(x)dx$$

em que m é a massa, $\rho(x)$ é a densidade, $A_c(x)$ é a área da seção transversal, x é distância ao longo da haste e L é o comprimento total da haste. Os seguintes dados foram medidos para uma haste de $12m$. Determine a massa em quilogramas usando integração numérica com as regras de 1/3.

x, m	0	2	4	6	8	10	12
$\rho, g/cm^3$	4,00	3,95	3,80	3,60	3,41	3,30	3,20
A_c, cm^3	100	103	110	120	133	150	171

A massa será, com a Regra 1/3 de Simpson, 5,350439999999999 Kg.

4) Desenvolva um programa para resolver o sistema abaixo, utilizando algum método iterativo e algum método de decomposição.

$$
\begin{cases}
6{,}1x_1 + 0{,}32x_2 + 1{,}3x_3 + 2{,}1x_4 + 0{,}11x_5 = 19{,}52 \\
0{,}82x_1 + 8{,}81x_2 + 1{,}01x_3 + 3x_4 + 3{,}12x_5 = 15{,}83 \\
0{,}5x_1 + 1{,}78x_2 + 15{,}2x_3 + 4{,}2x_4 + 8{,}1x_5 = -22{,}14 \\
4{,}2x_1 + 5{,}3x_2 + 1{,}8x_3 + 20{,}9x_4 + 7{,}51x_5 = 27{,}28 \\
0{,}2x_1 + 9{,}1x_2 + 4{,}68x_3 + 4{,}3x_4 + 20{,}1x_5 = -21{,}78
\end{cases}
$$

Pelo método de decomposição LU teremos:
$x_1 = 3.0000000000000004$
$x_2 = 1.9999999999999996$
$x_3 - 1.0000000000000007$
$x_4 = 1.0$
$x_5 = -1.9999999999999996$

Pelo método iterativo de Gauss-Seidel obtemos:
$x_1 = 2.99985938$
$x_2 = 1.99968299$
$x_3 = -1.00034068$
$x_4 = 1.00001885$
$x_5 = -1.99977979$
$\varepsilon = 0.000398674691561$

A solução analítica por Gauss - Jordan:
$x_1 = 3$
$x_2 = 2$
$x_3 - 1$
$x_4 = 1$
$x_5 = -2$

Obs: Link para solução analítica: https://matrixcalc.org/pt/slu.html#solve-using-Gauss-Jordan-elimination%28%7B%7B61%2F10,8%2F25,13%2F10,21%2F10,11%2F100,488%2F25%7D,%7B41%2F50,881%2F100,101%2F100,3,78%2F25,1583%2F100%7D,%7B1%2F2,89%2F50,76%2F5,21%2F5,81%2F10,-%281107%2F50%29%7D,%7B21%2F5,53%2F10,9%2F5,209%2F10,751%2F100,682%2F25%7D,%7B1%2F5,91%2F10,117%2F25,43%2F10,201%2F10,-%281089%2F50%29%7D%7D%29

5) O método das diferenças finitas transforma a equação diferencial ordinária

$$
\begin{cases}
y'' + x^2y' - 4xy = 0, x \in [0,1] \\
\quad y(0) = 0, \qquad y(1) = 5
\end{cases}
$$

em um sistema de equações lineares da forma:

$$(2-k^2h^3)y_{k-1}-4(1+2kh^3)y_k+(2+k^2h^3)y_{k+1}=0$$

com $k=1,2,3,\dots,(n-1)$, $h=1/n$, $y_0=0$, $y_n=5$.
Sabendo disso, faça $n=5$ e monte o sistema linear associado. Então, resolva numericamente o sistema e compare a solução numérica com a solução analítica exata $y(x)=x^4+4x$.
O sistema de equações será:

$$\begin{cases} -4{,}064y_1+2{,}008y_2=0 \\ 1{,}968y_1-4{,}128y_2+2{,}032y_3=0 \\ 1{,}928y_2-4{,}192y_3+2{,}072y_4=0 \\ 1{,}872y_3-4{,}256y_4=-10{,}64 \end{cases}$$

A resolução por decomposição LU:
$y_0=0$
$y_1=\ 0.8082256859416148$
$y_2=\ 1.6357715078021529$
$y_3=\ 2.540293619229424$
$y_4=\ 3.6173471934204606$
$y_5=\ 5$

A resolução por Gauss-Seidel com $\varepsilon<0{,}001$:
$\varepsilon=7.76049110925\ \times 10^{-5}$
$y_0=0$
$y_1=\ 0.8078849$
$y_2=\ 1.63536251$
$y_3=\ 2.53999663$
$y_4=\ 3.61721656$
$y_5=\ 5$

A solução analítica de $y(x)=x^4+4x$ é:
$y(0)=0^4+4.0=0$
$y(0{,}2)=0{,}2^4+4.0{,}2=0{,}8016$
$y(0{,}4)=0{,}4^4+4.0{,}4=1{,}6256$
$y(0{,}6)=0{,}6^4+4.0{,}6=2{,}5296$
$y(0{,}8)=0{,}8^4+4.0{,}8=3{,}6096$
$y(1)=1^4+4.1=5$

Obs: link para a resolução analítica por Gauss-Jordan:
https://matrixcalc.org/pt/slu.html#solve-using-Gauss-Jordan-elimination%28%7B%7B-%28508%2F125%29,251%2F125,0,0,0%7D,%7B246%2F125,-%28516%2F125%29,254%2F125,0,0%7D,%7B0,241%2F125,-%28524%2F125%29,259%2F125,0%7D,%7B0,0,234%2F125,-%28532%2F125%29,-%28266%2F25%29%7D%7D%29