সপ্তম অধ্যায় [CHAPTER-7]
ল্যাপলাস রূপান্তর
[The Laplace Transform]

7.1 ঃ সূচনা ঃ ল্যাপলাস রূপান্তর একটি অতি গুরুত্বপূর্ণ নতুন ধারণা (topic), যাহা গণিতের ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ, পদার্থবিদ্যা এবং ইঞ্জিনিয়ারিং এ Boundary value problem এর সমাধানে অতীব কার্যকর এক পদ্ধতি।

7.2 ঃ সংজ্ঞা ঃ ল্যাপলাস রূপান্তর [The Laplace transform]

মনেকরি $F(t)$ হইল t এর একটি ফাংশন, যাহা $t > 0$ এর জন্য সংজ্ঞায়িত, তবে $F(t)$ এর ল্যাগলাস রূপান্তরকে $L\{F(t)\}$, অথবা $f(s)$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং ইহা নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত ঃ

$$L\{F(t)\} = f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt, \text{ যখন } s \text{ বাস্তব অথবা জটিল}$$

যদি s এর কতিপয় মানের জন্য $\int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$ ইনটিগ্র্যালটি অভিসারী হয়, তবে $L\{F(t)\}$ বিদ্যমান আছে অন্যথায় ইহা বিদ্যমান নাই।

Definition : Let $F(t)$ be a function of t defined for $t > 0$ then the Laplace transform of $F(t)$ is denoted by $L\{F(t)\}$, or $f(s)$ and is defined as follows :

$$L\{F(t)\} = f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt, \text{ where } s \text{ is real, or complex.}$$

If the integral $\int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$, converges for some value of s then $L\{F(t)\}$ is said to exist otherwise it does not exist.

উদাহরণ–1 ঃ নিম্নলিখিত ফাংশনগুলোর ল্যাপলাস রূপান্তর নির্ণয় কর ঃ

[Find the Laplace transform of the followintg functions.]

(i). $F(t) = 1$ (ii). $F(t) = t$ (iii). $F(t) = t^n$

সমাধান-(i) ঃ ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞা হইতে জানি [From the definition of Laplace transform, we know]

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt, \ s > 0 \cdots (1)$$

(1) নং এ $F(t) = 1$ বসাইয়া পাই [we put $F(t) = 1$ in (1) then we get]

$$L\{1\} = \int_0^\infty e^{-st} 1\, dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty$$

$$\Rightarrow L(1) = -\frac{1}{s}(e^{-\infty} - e^0) = -\frac{1}{s}(0-1)$$

$$\Rightarrow L\{1\} = \frac{1}{s}.$$

সমাধান-(ii) ঃ ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞা হইতে জানি [From the definition of Laplace transform, we know]

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt,\ s > 0 \cdots (1)$$

(1) নং এ $F(t) = t$ বসাইয়া পাই [We put $F(t) = t$ in (1) then we get]

$$L\{t\} = \int_0^\infty e^{-st}\, t\, dt$$

$$\Rightarrow L\{t\} = \left[t.\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty - \int_0^\infty 1.\frac{e^{-st}}{-s}\, dt$$

$$\Rightarrow L\{t\} = -\frac{1}{s}\left[\frac{t}{e^{st}}\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\, dt$$

$$\Rightarrow L\{t\} = -\frac{1}{s}(0) + \frac{1}{s}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty$$

$$\Rightarrow L\{t\} = 0 - \frac{1}{s^2}(e^{-\infty} - e^0) = -\frac{1}{s^2}(0-1)$$

$$\Rightarrow L(t) = \frac{1}{s^2}.$$

সমাধান-(iii) ঃ ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞা হইতে পাই [From the definition of Laplace transform, we get]

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt,\ s > 0 \cdots (1)$$

(1) নং এ $F(t) = t^n$ বসাইয়া পাই [We put $F(t) = t^n$ in (1) then we get]

$$L\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st}.\, t^n\, dt$$

$$\Rightarrow L\{t^n\} = \left[t^n \frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty - n\int_0^\infty t^{n-1}\frac{e^{-st}}{-s}\,dt$$

$$\Rightarrow L\{t^n\} = -\frac{1}{s}\left[\frac{t^n}{e^{st}}\right]_0^\infty + \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1} e^{-st}\,dt$$

$$\Rightarrow L\{t^n\} = 0 + \frac{n}{s}\left(\left[t^{n-1}\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty - (n-1)\int_0^\infty t^{n-2}\,.\,\frac{e^{-st}}{-s}\,dt\right)$$

$$\Rightarrow L\{t^n\} = \frac{n}{s}\left(0 + \frac{n-1}{s}\int_0^\infty t^{n-2} e^{-st}\,dt\right)$$

$$\Rightarrow L\{t^n\} = \frac{n(n-1)}{s^2}\int_0^\infty t^{n-2} e^{-st}\,dt$$

$$L\{t^n\} = \frac{n(n-2+1)}{s^2}\int_0^\infty t^{n-2} e^{-st}\,dt.$$

একইভাবে ইহাকে আরও $n-2$ বার ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [In the same way integrate this more $n-2$ times then we get]

$$L\{t^n\} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-n+1)}{s^n}\int_0^\infty t^0 e^{-st}\,dt$$

$$\Rightarrow L\{t^n\} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 3.\,2.\,1}{s^n}\int_0^\infty e^{-st}\,dt$$

$$\Rightarrow L\{t^n\} = \frac{n!}{s^n}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty$$

$$\Rightarrow L\{t^n\} = -\frac{n!}{s^{n+1}}(e^{-\infty} - e^0) = -\frac{n!}{s^{n+1}}(0-1)$$

$$\Rightarrow L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \text{ অথবা } L\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}.$$

Alternate method by Gamma function :

$$L\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st} t^n\,dt$$

ধরি $st = u$

বা $t = \frac{u}{s}$ তবে $dt = \frac{du}{s}$

সীমা ঃ যদি $t = 0$ হয়, তবে $u = 0$

যদি $t = \infty$ হয়, তবে $u = \infty$

$$\therefore L\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{s}\right)^n \frac{du}{s}$$

$$= \int_0^\infty e^{-u} \frac{u^n}{s^n} \frac{du}{s}$$

$$= \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^{n+1-1}\, du$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$$

$$\therefore L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

উদাহরণ-2 ঃ নিম্নলিখিত ফাংশনগুলোর ল্যাপলাস রূপান্তর নির্ণয় কর [Find the Laplace transform of the following functions]

(i). e^{at} [NUH-2007] (ii). e^{-at} [DUH-1990]

সমাধান-(i). ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞা হইতে জানি [From the definition of Laplace transform, we know]

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt,\ s > 0 \cdots (1)$$

(1) নং এ $F(t) = e^{at}$ বসাইয়া পাই [We put $F(t) = e^{at}$ in (1) then we get]

$$L\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at}\, dt$$

বা $$L\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt$$

বা $$L\{e^{at}\} = \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right]_0^\infty = -\frac{1}{(s-a)}(e^{-\infty} - e^0)$$

বা $$L\{e^{at}\} = -\frac{1}{s-a}(0-1)$$

$$\therefore L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}.$$

সমাধান-(ii) ঃ ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞা হইতে জানি [From the definition of Laplace transform, we know]

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt,\ s > 0 \cdots (1)$$

(1) নং এ $F(t) = e^{-at}$ বসাইয়া পাই [We put $F(t) = e^{-at}$ in (1) then we get]

$$L\{e^{-at}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{-at}\, dt$$

$$\text{বা } L\{e^{-at}\} = \int_0^\infty e^{-(s+a)t}\, dt$$

$$\text{বা } L\{e^{-at}\} = \left[\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)}\right]_0^\infty = -\frac{1}{(s+a)}(e^{-\infty} - e^0)$$

$$\text{বা } L\{e^{-at}\} = -\frac{1}{(s+a)}(0-1)$$

$$\therefore L\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}.$$

উদাহরণ–3 ঃ প্রমাণ কর ঃ

(i). $L\{\cos at\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$ (ii). $L\{\sin at\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$.

সমাধান-(i) ঃ ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [By definition of Laplace transform, we get]

$$L\{\cos at\} = \int_0^\infty e^{-st} \cos at\, dt,\ s > 0$$

$$\text{বা } L\{\cos at\} = \left[\frac{e^{-st}(-s\cos at + a\sin at)}{s^2+a^2}\right]_0^\infty$$

$$\text{বা } L\{\cos at\} = \frac{1}{(s^2+a^2)}\{0 - e^0(-s\cos 0 + a\sin 0)\};\ \text{যেহেতু } e^{-\infty} = 0$$

$$\text{বা } L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}.$$

সমাধান-(ii) ঃ ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [By the definition of Laplace transform, we get]

$$L\{\sin at\} = \int_0^\infty e^{-st} \sin at\, dt,\ s > 0$$

$$\text{বা } L\{\sin at\} = \left[\frac{e^{-st}(-s\sin at - a\cos at)}{s^2+a^2}\right]_0^\infty$$

$$\text{বা } L\{\sin at\} = \frac{1}{(s^2+a^2)}\{0 - e^0(-s.\sin 0 - a\cos 0)\},\ \text{যেহেতু } e^{-\infty} = 0$$

$$\text{বা } L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}.$$

নোট ঃ $\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2}$

$\int e^{at}\sin bt\, dt = \frac{e^{at}(a\sin bt - b\cos bt)}{a^2+b^2}$.

উদাহরণ–4 ঃ প্রমাণ কর ঃ

(i). $L\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2-a^2}$ **[NUH–2005]**

(ii). $L\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2-a^2}$.

প্রমাণ-(i) ঃ ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [By the definition of Laplace transform, we get]

$$L\{\cosh at\} = \int_0^\infty e^{-st}\cosh at\, dt,\ s>0$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}(e^{at}+e^{-at})\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \{e^{-(s-a)t}+e^{-(s+a)t}\}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}+\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{(s-a)}(e^{-\infty}-e^0)-\frac{1}{(s+a)}(e^{-\infty}-e^0)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{(s-a)}(0-1)-\frac{1}{(s+a)}(0-1)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2s}{(s-a)(s+a)}$$

$$\therefore L\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2-a^2}.$$

প্রমাণ-(ii) ঃ ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [By the definition of Laplace transform, we get].

$$L\{\sinh at\} = \int_0^\infty e^{-st}\sinh at\, dt,\ s>0$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}(e^{at}-e^{-at})\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \{e^{-(s-a)t}-e^{-(s+a)t}\}\, dt$$

$$L\{\sinh at\} = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} - \frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{(s-a)}(e^{-\infty} - e^0) + \frac{1}{s+a}(e^{-\infty} - e^0)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{s-a}(0-1) + \frac{1}{s+a}(0-a)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2a}{(s-a)(s+a)}$$

$$\therefore L\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2 - a^2}.$$

ল্যাপলাস রূপান্তরের কতিপয় ধর্ম [Some properties of Laplace transform]

7.3 ঃ রৈখিক ধর্ম [The linarity property]

সংজ্ঞা ঃ ল্যাপলাস রূপান্তর $L\{F(t)\}$ কে রৈখিক বলা হইবে যদি প্রত্যেক জোড়া ফাংশন $F_1(t)$ এবং $F_2(t)$ এর জন্য নিম্নলিখিত শর্তটি সিদ্ধ করে ঃ

$$L\{c_1F_1(t) + c_2F_2(t)\} = c_1L\{F_1(t)\} + c_2L\{F_2(t)\}$$

যেখানে c_1 এবং c_2 যে কোন ধ্রুবক।

Definition : A Laplace transform $L\{F(t)\}$ is said to be linear if for every pair of functions $F_1(t)$ and $F_2(t)$ satisfy the following condition :

$$L\{c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)\} = c_1L\{F_1(t)\} + C_2L\{F_2(t)\}$$

where c_1 and c_2 are any constants.

উপপাদ্য–1 ঃ যদি $L\{F_1(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F_1(t)\, dt$ এবং

$L\{F_2(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F_2(t)\, dt$ হয়

তবে $L\{c_1 F_1(t) + c_2F_2(t)\} = c_1L\{F_1(t)\} + c_2L\{F_2(t)\}$

যেখানে c_1 এবং c_2 যে কোন ধ্রুবক।

প্রমাণ ঃ ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে আমরা লিখিতে পারি [By the definition of Laplace transform, we can write]

$$L\{c_1F_1(t) + c_2F_2(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\{c_1F_1(t) + c_2F_2(t)\}\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}c_1F_1(t)\,dt + \int_0^\infty e^{-st}c_2F_2(t)\,dt$$

$$= c_1\int_0^\infty e^{-st}F_1(t)\,dt + c_2\int_0^\infty e^{-st}F_2(t)\,dt$$

$$= c_1L\{F_1(t)\} + c_2L\{F_2(t)\}.$$

উদাহরণ-1 ঃ $4e^{5t} + 6t^3 - 3\cos 4t + 4\sin 5t$ এর ল্যাপলাস রূপান্তর নির্ণয় কর। [Find the L. T. of $4e^{5t} + 6t^3 - 3\cos 4t + 4\sin 5t$.]

সমাধান ঃ রৈখিক বৈশিষ্ট প্রয়োগ করিয়া পাই [Applying the linearity property, we get]

$$L\{4e^{5t} + 6t^3 - 3\cos 4t + 4\sin 5t\}$$

$$= 4L\{e^{5t}\} + 6L\{t^3\} - 3L\{\cos 4t\} + 4L\{\sin 5t\}$$

$$= 4\left(\frac{1}{s-5}\right) + 6\left(\frac{3!}{s^4}\right) - 3\left(\frac{s}{s^2+4^2}\right) + 4\left(\frac{5}{s^2+5^2}\right)$$

$$= \frac{4}{s-5} + \frac{36}{s^4} - \frac{3s}{s^2+16} + \frac{20}{s^2+25}.$$

7.4 ঃ প্রথম স্থানান্তরের ধর্ম ঃ [First translation or Shifting property]

উপপাদ্য-2 ঃ যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয়, তবে দেখাও যে $L\{e^{at}F(t)\} = f(s-a)$.
[If $L\{F(t)\} = f(s)$ then $L\{e^{at}F(t)\} = f(s-a)$]. **[NUH-1994]**

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে [Given that] $L\{F(t)\} = f(s)$ ... (1)

ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞা হইল [Definition of Laplace transform is]

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt,\ s > 0$$

বা $f(s) = \int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$ ... (2), (1) নং দ্বারা।

আবার ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [Again by the definition of Laplace transform, we get]

$$L\{e^{at}F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}F(t)\,dt$$

বা $L\{e^{at}F(t)\} = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}F(t)\,dt$

বা $L\{e^{at} F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-ut} F(t)\, dt$, যখন $s - a = u$

বা $L\{e^{at} F(t)\} = f(u)$, (2) নং এর সাহায্যে।

বা $L\{e^{at} F(t)\} = f(s - a)$.

উদাহরণ ঃ $e^{-2t} \cos 3t$ এর ল্যাপলাস রূপান্তর নির্ণয় কর। [Find the Laplace transfor m of $e^{-2t} \cos 3t$]

সমাধান ঃ আমরা জানি [We know]

$$L(\cos 3t) = \frac{s}{s^2 + 9}$$

$$\therefore L\{e^{-2t} \cos 3t\} = \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 9}$$

$$\Rightarrow L\{e^{-2t} \cos 3t\} = \frac{s + 2}{s^2 + 4s + 13}.$$

7.5 ঃ দ্বিতীয় স্থানান্তরের ধর্ম [Second translation or shiftng property]

উপপাদ্য–3 ঃ যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয় এবং $G(t) = \begin{cases} F(t - a) & \text{যখন } t > a \\ 0 & \text{যখন } t < a \end{cases}$

হয়, তবে দেখাও যে $L\{G(t)\} = e^{-as} f(s)$.

প্রমাণ ঃ ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞা হইল [Definition of Laplace transform is]

$$L\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t)\, dt,\ s > 0$$

বা $f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t)\, dt \cdots (1)$, যেহেতু $L\{F(t)\} = f(s)$

দেওয়া আছে [Given that] $G(t) = \begin{cases} F(t - a) & \text{যখন } t > a \\ 0 & \text{যখন } t < a \end{cases} \cdots (2)$

আবার ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [Again by the definition of Laplace transform, we get]

$$L\{G(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} G(t)\, dt$$

বা $L\{G(t)\} = \int_0^{a} e^{-st} G(t)\, dt + \int_a^{\infty} e^{-st} G(t)\, dt$

বা $L\{G(t)\} = \int_0^a e^{-st}.\,0\,dt + \int_a^\infty e^{-st} F(t-a)\,dt$, (2) নং হইতে।

বা $L\{G(t)\} = 0 + \int_a^\infty e^{-st} F(t-a)\,dt \cdots (3)$

ধরি $t - a = u$ তবে $dt = du$	we put $t - a = u$ then $dt = du$
সীমা ঃ যদি $t = a$ হয় তবে $u = 0$	**Limits :** If $t = a$ then $u = 0$
যদি $t = \infty$ হয় তবে $u = \infty$	If $t = \infty$ then $u = \infty$

$\therefore (3) \Rightarrow L\{G(t)\} = \int_0^\infty e^{-s(a+u)} F(u)\,du$

$\Rightarrow L\{G(t)\} = e^{-as} \int_0^\infty e^{-su} F(u)\,du$

$\Rightarrow L\{G(t)\} = e^{-as} f(s)$, (1) নং এর সাহায্যে।

উদাহরণ ঃ $F(t)$ এর ল্যাপলাস রূপান্তর নির্ণয় কর যখন [Find the Laplace transform of $F(t)$ where]

$$F(t) = \begin{cases} \cos(t - 2\pi/3) & \text{যখন } t > 2\pi/3 \\ 0 & \text{যখন } t < 2\pi/3 \end{cases}$$

সমাধান ঃ দেওয়া আছে [Given that]

$$F(t) = \begin{cases} \cos(t - 2\pi/3) & \text{যখন } t > 2\pi/3 \\ 0 & \text{যখন } t < 2\pi/3 \end{cases} \cdots (1)$$

ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞা হইল [Definition of Laplace transform is]

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt$$

বা $L\{F(t)\} = \int_0^{2\pi/3} e^{-st} F(t)\,dt + \int_{2\pi/3}^\infty e^{-st} F(t)\,dt$

বা $L\{F(t)\} = \int_0^{2\pi/3} e^{-st}.0\,dt + \int_{2\pi/3}^\infty e^{-st}\cos(t - 2\pi/3)\,dt$, (1) নং হইতে

বা $L\{F(t)\} = 0 + \int_{2\pi/3}^\infty e^{-st}\cos(t - 2\pi/3)\,dt \cdots (2)$

ধরি $t - 2\pi/3 = u$	we put $t - 2\pi/3 = u$
$\therefore dt = du$	$\therefore dt = du$
সীমা ঃ যদি $t = 2\pi/3$ হয়, তবে $u = 0$	**Limits :** It $t = 2\pi/3$ then $u = 0$
যদি $t = \infty$ হয়, তবে $u = \infty$	If $t = \infty$ then $\infty - 2\pi/3 = u \Rightarrow u = \infty$

$\therefore (2) \Rightarrow L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-s(u+2\pi/3)} \cos u \, du$

বা $L\{F(t)\} = e^{-2\pi s/3} \int_0^\infty e^{-su} \cos u \, du$

বা $L\{F(t)\} = e^{-2\pi s/3}. L\{\cos u\}$

বা $L\{F(t)\} = e^{-2\pi s/3}. \frac{s}{s^2+1}$

$\therefore L\{F(t)\} = \frac{se^{-2\pi s/3}}{s^2+1}$.

7.6 ঃ স্কেল পরিবর্তনের ধর্ম [Change of scale property]

উপপাদ্য–4 ঃ যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয়, তবে দেখাও যে [If $L\{F(t)\} = f(s)$ then show that]

$$L\{F(at)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right).$$ **[NUH–1994, 2000, 2008]**

প্রমাণ ঃ ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [By the definition of Laplace transform, we get]

$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t) \, dt.$

বা $f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) \, dt \cdots (1)$, যেহেতু $L\{F(t)\} = f(s)$

এবং $L\{F(at)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(at) \, dt \cdots (2)$

ধরি $at = u$	we put $at = u$
বা $t = \frac{u}{a}$ তবে $dt = \frac{1}{a} du$	or $t = \frac{u}{a}$ then $dt = \frac{du}{a}$
সীমা ঃ যদি $t = 0$ হয়, তবে $u = 0$	**Limits :** If $t = 0$ then $u = 0$
যদি $t = \infty$ হয়, তবে $u = \infty$	If $t = \infty$ then $u = \infty$

$\therefore (2) \Rightarrow L\{F(at)\} = \int_0^\infty e^{-us/a} F(u) \frac{du}{a}$

বা $L\{F(at)\} = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-us/a} F(u) \, du$

বা $L\{F(at)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right)$, (1) নং এর সাহায্যে।

উদাহরণ ঃ cos3t এর ল্যাপলাস রূপান্তর নির্ণয় কর [Find the Laplace transform of cos3t]

সমাধান ঃ আমরা জানি [we know] $L\{\cos t\} = \dfrac{s}{s^2+1}$

$$\Rightarrow L\{\cos 3t\} = \frac{1}{3}\frac{s/3}{(s/3)^2+1}\text{, উপরের উপপাদ্যের সাহায্যে।}$$

$$\Rightarrow L\{\cos 3t\} = \frac{s}{s^2+9}.$$

7.7 ঃ অন্তরীকরণের ল্যাপলাস রূপান্তর [Laplace transform of derivatives]

উপপাদ্য–5 ঃ যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয়, তবে দেখাও যে [If $L\{F(t)\} = f(s)$ then show that]

$$L\{F'(t)\} = sf(s) - F(0).$$ **[DUH–1988]**

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে [Given that] $L\{F(t)\} = f(s) \cdots (1)$

∴ ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [By the definition of Laplace transform, we get]

$$L\{F'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F'(t)\, dt$$

ইনটিগ্রেশনের অংশক্রমের সাহায্যে [Integration by parts]

$$\Rightarrow L\{F'(t)\} = \left[e^{-st}F(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$$

$$\Rightarrow L\{F'(t)\} = 0 - e^0 F(0) + sL\{F(t)\},\ \text{যেহেতু } e^{-\infty} = 0$$

$$\Rightarrow L\{F'(t)\} = -F(0) + sf(s),\quad (1) \text{ নং দ্বারা।}$$

$$\Rightarrow L\{F'(t)\} = sf(s) - F(0). \text{ প্রমাণিত।}$$

উপপাদ্য–6 ঃ যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয়, তবে দেখাও যে [If $L\{F(t)\} = f(s)$ then show that]

$$L\{F''(t)\} = s^2 f(s) - sF(0) - F'(0).$$ **[NUH–2005, 2009]**

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে [Given that] $L\{F(t)\} = f(s) \cdots (1)$

ল্যাপলাস রূপন্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [By the definition of Laplace transform, we get]

$$L\{F''(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F''(t)\, dt$$

ইনটিগ্রেশনের অংশক্রমের সাহায্যে [Integration by parts]

$$L\{F''(t)\} = \left[e^{-st}F'(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}\,F'(t)\,dt$$

$$\Rightarrow L\{F''(t)\} = 0 - e^0\,F'(0) + s\left(\left[e^{-st}F(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}\,F(t)\,dt\right)$$

$$\Rightarrow L\{F''(t)\} = -F'(0) + s\left(0 - e^0F(0) + sL\{F(t)\}\right)$$

$$\Rightarrow L\{F''(t)\} = -F'(0) - sF(0) + s^2 f(s),$$ (1) দ্বারা।

$$\Rightarrow L\{F''(t)\} = s^2 f(s) - sF(0) - F'(0).$$ প্রমাণিত।

উপপাদ্য–7 : যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয়, তবে দেখাও যে [If $L\{F(t)\} = f(s)$ then show that]

$$L\{F'''(t)\} = s^3 f(s) - s^2 F(0) - sF'(0) - F''(0).$$

[NUH–2001, DUH–1987]

প্রমাণ : দেওয়া আছে [Given that] $L\{F(t)\} = f(s)$ ... (1)

ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [By the definition of Laplace transform, we get]

$$L\{F'''(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\,F'''(t)\,dt$$

$$\Rightarrow L\{F'''(t)\} = \left[e^{-st}F''(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}\,F''(t)\,dt$$

$$\Rightarrow L\{F'''(t)\} = 0 - e^0\,F''(0) + s\left(\left[e^{-st}F'(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}\,F'(t)\,dt\right)$$

$$\Rightarrow L\{F'''(t)\} = -F''(0) + s\left(0 - e^0\,F'(0) + s\int_0^\infty e^{-st}\,F'(t)\,dt\right)$$

$$\Rightarrow L\{F'''(t)\} = -F''(0) - sF'(0) + s^2\int_0^\infty e^{-st}\,F'(t)\,dt$$

$$\Rightarrow L\{F'''(t)\} = -F''(0) - sF'(0) + s^2\left(\left[e^{-st}F(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}\,F(t)\,dt\right)$$

$$\Rightarrow L\{F'''(t)\} = -F''(0) - sF'(0) + s^2\left(0 - e^0\,F(0) + sL\{F(t)\}\right)$$

$$\Rightarrow L\{F'''(t)\} = -F''(0) - sF'(0) - s^2\,F(0) + s^3 f(s),$$ (1) নং দ্বারা।

$$\Rightarrow L\{F'''(t)\} = s^3 f(s) - s^2\,F(0) - sF'(0) - F''(0).$$ প্রমাণিত।

উপপাদ্য–8 ঃ যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয়, তবে দেখাও যে [If $L\{F(t)\} = f(s)$ then show than]

$$L\{F^n(t)\} = s^n f(s) - s^{n-1} F(0) - s^{n-2} F'(0) - \cdots - sF^{n-2}(0) - F^{n-1}(0).$$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে [Given that] $L\{F(t)\} = f(s) \cdots (1)$

আরোহ পদ্ধতি প্রয়োগ করিয়া নিম্নের উপপাদ্যটি প্রমাণ করিব [We shall prove the following theorem by the method of induction]

$$L\{F^n(t)\} = s^n f(s) - s^{n-1} F(0) - s^{n-2} F'(0) - \cdots - sF^{n-2}(0) - F^{n-1}(0) \cdots (2)$$

ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [By the definition of Laplace transform, we get]

$$L\{F'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F'(t)\, dt$$

$$\Rightarrow L\{F'(t)\} = \left[e^{-st}F(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$$

$$\Rightarrow L\{F'(t)\} = 0 - e^0 F(0) + sL\{F(t)\}$$

$$\Rightarrow L\{F'(t)\} = sf(s) - F(0), \text{ (1) নং দ্বারা।}$$

সুতরাং (2) নং উপপাদ্যটি $n = 1$ এর জন্য সত্য। [Hence the theorem (2) is true for $n = 1$]

মনেকরি উপপাদ্যটি $n = m$ এর জন্য সত্য [Let the theorem is true for $n = m$]

i, e. $L\{F^m(t)\} = s^m f(s) - s^{m-1} F(0) - s^{m-2} F'(0)$

$$- \cdots - sF^{m-2}(0) - F^{m-1}(0) \cdots (3)$$

আবার (3) নং এর বামপক্ষ হইতে পাই [Again from L. H. S. of (3) we get]

$$L\{F^m(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F^m(t)\, dt$$

$$\text{বা } L\{F^m(t)\} = \left[F^m(t)\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty - \int_0^\infty F^{m+1}(t)\frac{e^{-st}}{-s}\, dt$$

$$\text{বা } L\{F^m(t)\} = -\frac{1}{s}\left[e^{-st}F^m(t)\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st} F^{m+1}(t)\, dt$$

$$\text{বা } L\{F^m(t)\} = -\frac{1}{s}\{0 - e^0 F^m(0)\} + \frac{1}{s}L\{F^{m+1}(t)\}$$

$$\text{বা } L\{F^m(t)\} = \frac{1}{s}F^m(0) + \frac{1}{s}L\{F^{m+1}(t)\} \cdots (4)$$

এখন (3) নং এবং (4) নং হইতে পাই [Now from (3) and (4), we get]

$$\frac{1}{s}F^m(0)+\frac{1}{s}L\{F^{m+1}(t)\}=s^m f(s)-s^{m-1}F(0)-s^{m-2}F'(0)-\cdots$$
$$-sF^{m-2}(0)-F^{m-1}(0)$$

বা $F^m(0)+L\{F^{m+1}(t)\}=s^{m+1}f(s)-s^m F(0)-s^{m-1}F'(0)-\cdots$
$$-s^2F^{m-2}(0)-sF^{m-1}(0)$$

বা $L\{F^{m+1}(t)\}=s^{m+1}f(s)-s^m F(0)-s^{m-1}F'(0)-\cdots$
$$-sF^{m-1}(0)-F^m(0)\cdots(5)$$

$\therefore$ উপপাদ্যটি $n=m$ এর জন্য সত্য হইলে $n=m+1$ এর জন্যও সত্য হইবে।

কিন্তু উপপাদ্যটি $n=1$ এর জন্য সত্য প্রমাণিত হইয়াছে। অতএব উপপাদ্যটি $n=1+1=2$, $n=2+1=3$, $n=3+1=4\cdots$ ইত্যাদির জন্য সত্য। সুতরাং উপপাদ্যটি n এর সকল যোগবোধক পূর্ণসংখ্যার জন্য সত্য। অর্থাৎ

$$L\{F^n(t)\}=s^n f(s)-s^{n-1}F(0)-s^{n-2}F'(0)-\cdots-sF^{n-2}(0)-F^{n-1}(0)$$

[$\therefore$ If the theorem is true for $n=m$ then it is true for $n=m+1$.

But the theorem was proved for $n=1$. Therefore the theorem is true for $n=1+1=2$, $n=2+1=3$, $n=3+1=4\cdots$ etc. Hence the theorem is true for all positive integral n. i, e.

$$L\{F^n(t)\}=s^n f(s)-s^{n-1}F(0)-s^{n-2}F'(0)-\cdots-sF^{n-2}(0)-F^{n-1}(0)]$$

উদাহরণ ঃ প্রথম অন্তরীকরণের ল্যাপলাস রূপান্তর প্রয়োগ করিয়া দেখাও যে [Applying the Laplace transform of first derivative, show that]

(i). $L(t)=\frac{1}{s^2},\ s>0$ (ii). $L\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a}$

সমাধান-(i) ঃ আমরা জানি [We know] $L\{F'(t)\}=sL\{F(t)\}-F(0)\cdots(1)$

ধরি $F(t)=t$, তাহা হইলে $F'(t)=1$ এবং $F(0)=0$

$\therefore (1)\Rightarrow L\{1\}=sL(t)-0\cdots(2)$

আবার (1) নং এ $F(t)=1$ ধরি [Again we put $F(t)=1$ in (1)]

$\therefore F'(t)=0$ এবং $F(0)=1$

$\therefore (1)\Rightarrow L\{0\}=sL\{1\}-1$

$\Rightarrow 0=sL\{1\}-1$, যেহেতু $L\{0\}=0$

$\Rightarrow sL\{1\}=1$

$\Rightarrow L\{1\}=\frac{1}{s}\cdots(3)$

(2) নং এবং (3) নং হইতে পাই [From (2) and (3) we get]

$$\frac{1}{s} = sL\{t\} - 0$$

$$\Rightarrow L\{t\} = \frac{1}{s^2}.$$

সমাধান-(ii) ঃ আমরা জানি [We know]

$$L\{F'(t)\} = sL\{F(t)\} - F(0) \cdots (1)$$

ধরি $F(t) = e^{at}$ তবে $F'(t) = ae^{at}$ এবং $F(0) = e^0 = 1$

$$(1) \Rightarrow L\{ae^{at}\} = sL\{e^{at}\} - 1.$$

$$\Rightarrow aL\{e^{at}\} = sL\{e^{at}\} - 1$$

$$\Rightarrow 1 = (s-a)\, L\{e^{at}\}$$

$$\Rightarrow L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}.$$

উদাহরণ-2 ঃ দ্বিতীয় অন্তরীকরণের ল্যাপলাস রূপান্তর ব্যবহার করিয়া প্রমাণ কর [Applying the Laplace transform of second derivative, prove that]

(i). $L\{\sin at\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}, s > 0$ (ii). $L\{\cosh at\} = \dfrac{s}{s^2-a^2}, s > |a|$.

সমাধান-(i) ঃ আমরা জানি [We know]

$$L\{F''(t)\} = s^2 L\{F(t)\} - sF(0) - F'(0) \cdots (1)$$

ধরি $F(t) = \sin at$, তাহা হইলে

$F'(t) = a\cos at$ এবং $F''(t) = -a^2 \sin at$

$\therefore F(0) = \sin 0 = 0$ এবং $F'(0) = a\cos 0 = a$

$$\therefore (1) \Rightarrow L\{-a^2 \sin at\} = s^2 L\{\sin at\} - s.0 - a$$

$$\Rightarrow -a^2 L\{\sin at\} = s^2 L\{\sin at\} - a$$

$$\Rightarrow a = s^2 L\{\sin at\} + a^2 L\{\sin at\}$$

$$\Rightarrow (s^2+a^2)\, L\{\sin at\} = a$$

$$\Rightarrow L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}.$$

সমাধান-(ii) ঃ আমরা জানি [We know]

$$L\{F''(t)\} = s^2 L\{F(t)\} - sF(0) - F'(0) \cdots (1)$$

ধরি $F(t) = \cosh at$, তাহা হইলে

$$F'(t) = a\sinh at \text{ এবং } F''(t) = a^2 \cosh at$$

$$\therefore F(0) = \cosh 0 = 1 \text{ এবং } F'(0) = a\sinh 0 = 0$$

$$\therefore (1) \Rightarrow L\{a^2 \cosh at\} = s^2 L\{\cosh at\} - s.1 - 0$$

$$\Rightarrow a^2 L\{\cosh at\} = s^2 L\{\cosh at\} - s$$

$$\Rightarrow s = (s^2 - a^2) L\{\cosh at\}$$

$$\Rightarrow L\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2 - a^2}.$$

7.8 ঃ t^n দ্বারা গুণিতক ফাংশনের ল্যাপলাস রূপান্তর [Laplace transform of a function multiplication by t^n]

উপপাদ্য–9 ঃ যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয়, তবে দেখাও যে [If $L\{F(t)\} = f(s)$ then show that]

$$L\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s) = (-1)^n f^n(s) \text{ যেখানে } n = 1, 2, 3, \cdots$$

[NUH–1993, 2007]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে [Given that]

$$L\{F(t)\} = f(s) \cdots (1)$$

ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞা হইল [Definition of Laplace transform is]

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$$

$$\Rightarrow f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt, \quad (1) \text{ নং দ্বারা।}$$

লিবনীজের নিয়মে ইনটিগ্রেশন চিহ্নের ভিতরে s এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই [By Leibnitz's rule, differentiating w. r. to s under the sign of integration, we get]

$$\frac{d}{ds} f(s) = f'(s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} f(s) = f'(s) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} F(t)\, dt$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} f(s) = f'(s) = \int_0^\infty e^{-st} (-t) F(t)\, dt$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} f(s) = f'(s) = -\int_0^\infty e^{-st} \{tF(t)\}\, dt$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} f(s) = f'(s) = -L\{tF(t)\}$$

$$\Rightarrow L\{tF(t)\} = -\frac{d}{ds} f(s) = -f'(s)$$

$$\Rightarrow L\{tF(t)\} = (-1)^1 \frac{d}{ds} f(s) = (-1)^1 f'(s)$$

সুতরাং উপপাদ্যটি $n = 1$ এর জন্য সত্য [Thus the theorem is true for $n = 1$]

উপপাদ্যটি প্রমাণের জন্য গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি ব্যাবহার করিব। মনেকরি উপপাদ্যটি $n = k$ এর জন্য সত্য, অর্থাৎ ধরি [To establish the theorem, we use mathematical induction. Let the theorem is true for $n = k$, i. e assume]

$$L\{t^k F(t)\} = (-1)^k f^k(s)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-st} t^k F(t)\, dt = (-1)^k f^k(s)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} \{t^k F(t)\}\, dt = (-1)^k \frac{d}{ds} f^k(s)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} \{t^k F(t)\}\, dt = (-1)^k f^{k+1}(s)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-st} (-t) \{t^k F(t)\}\, dt = (-1)^k f^{k+1}(s)$$

$$\Rightarrow (-1)^1 \int_0^\infty e^{-st} \{t^{k+1} F(t)\}\, dt = (-1)^k f^{k+1}(s)$$

$$\Rightarrow (-1)^2 \int_0^\infty e^{-st} \{t^{k+1} F(t)\}\, dt = (-1)^1 (-1)^k f^{k+1}(s)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-st} \{t^{k+1} F(t)\}\, dt = (-1)^{k+1} f^{k+1}(s)$$

ইহা অনুসরণীয় যে, যদি উপপাদ্যটি $n = k$ এর জন্য সত্য হয়, তবে উপপাদ্যটি $n = k + 1$ এর জন্য সত্য হইবে। কিন্তু উপপাদ্যটি $n = 1$ এর জন্য সত্য প্রমাণিত হইয়াছে। সুতরাং উপপাদ্যটি $n = 1 + 1 = 2$ এবং $n = 2 + 1 = 3, \ldots$ ইত্যাদির জন্য সত্য। অর্থাৎ উপপাদ্যটি n এর সকল যোগবোধক পূর্ণ সংখ্যার জন্য সত্য।

i. e. $L\{t^n F(t)\} = (-1)^n f^n(s)$, যেখানে $f^n(s) = \frac{d^n}{ds^n} f(s)$

[It follows that if the theorem is true for n = k then the theorem must be true for n = k + 1. But the theorem was proved for n = 1. Hence it is true for n = 1 + 1 = 2 and n = 2 + 1 = 3, ··· etc and thus for all positive integral values of n. i. e.

$L\{t^n F(t)\} = (-1)^n f^n(s)$ where $f^n(s) = \frac{d^n}{ds^n} f(s)$]

উদাহরণ ঃ নির্ণয় কর [Find] (i). L{tsinat},

(ii). $L\{t^2 \cos at\}$ [NUH-2008]

(iii). $L\{t^3 e^t\}$. [DUH-1989]

সমাধান-(i) ঃ আমরা জানি [We know]

$$L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$\Rightarrow f(s) = \frac{a}{s^2 + a^2} \cdots (1)$$

$$\therefore L\{t\sin at\} = (-1)^1 \frac{d}{ds} f(s)$$

$$= -\frac{d}{ds}\left(\frac{a}{s^2 + a^2}\right), \text{ (1) নং দ্বারা ।}$$

$$= -\frac{(-a).\,2s}{(s^2 + a^2)^2}$$

$$= \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}.$$

সমাধান-(ii) ঃ আমরা জানি [We know]

$$L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$\Rightarrow f(s) = \frac{s}{s^2 + a^2} \cdots (1)$$

$$\therefore L\{t^2 \cos at\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} f(s)$$

$$= \frac{d}{ds} \cdot \frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2 + a^2}\right), \text{ (1) নং হইতে ।}$$

$$= \frac{d}{ds}\left\{\frac{(s^2 + a^2)\,1 - s.2s}{(s^2 + a^2)^2}\right\}$$

$$= \frac{d}{ds}\left\{\frac{a^2 - s^2}{(s^2 + a^2)^2}\right\}$$

$$= \frac{(s^2 + a^2)^2 (-2s) - (a^2 - s^2)\,.\,2(s^2 + a^2).2s}{(s^2 + a^2)^4}$$

$$\therefore L\{t^2 \cos at\} = \frac{(s^2+a^2)(-2s) - (a^2-s^2)\,4s}{(s^2+a^2)^3}$$

$$= \frac{2s^3 - 6a^2 s}{(s^2+a^2)^3}.$$

সমাধান-(iii) ঃ আমরা জানি [We know]

$$L\{e^t\} = \frac{1}{s-1}$$

$$\Rightarrow f(s) = \frac{1}{s-1} \quad \cdots (1)$$

$$\therefore L\{t^3 e^t\} = (-1)^3 \frac{d^3}{ds^3} f(s)$$

$$= -\frac{d^2}{ds^2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-1}\right), \text{ (1) নং হইতে।}$$

$$= -\frac{d}{ds}\cdot\frac{d}{ds}\frac{(-1)}{(s-1)^2}$$

$$= -\frac{d}{ds}\frac{(-1)(-2)}{(s-1)^3}$$

$$= -\frac{(-1)(-2)(-3)}{(s-1)^4}$$

$$= \frac{6}{(s-1)^4}.$$

7.9 ঃ t দ্বারা ভাগ ফাংশনের ল্যাপলাস রূপান্তর [Laplace transform of a function division by t]

উপপাদ্য–10 ঃ যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয় তবে দেখাও যে [If $L\{F(t)\} = f(s)$ then show that]

$$L\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u)\,du.$$

প্রমাণ ঃ ধরি $\frac{F(t)}{t} = G(t) \cdots (1)$

তবে $F(t) = tG(t) \cdots (2)$

ধরি $L\{G(t)\} = g(s) \cdots (3)$

(2) নং এর উভয় পক্ষে ল্যাপলাস রূপান্তর গ্রহণ করিয়া পাই [Taking Laplace ransform on both sides of (2) then we get]

$$L\{F(t)\} = L\{tG(t)\}$$

$$\Rightarrow f(s) = (-1)^1 \frac{d}{ds} g(s), \text{ যেহেতু } L\{t^n G(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} g(s)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} g(s) = -f(s)$$

উভয় পক্ষকে s এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating both sides w. r. to s then we get]

$$g(s) = -\int_{\infty}^{s} f(u)\,du$$

$$\Rightarrow g(s) = \int_{s}^{\infty} f(u)\,du$$

$$\Rightarrow L\{G(t)\} = \int_{s}^{\infty} f(u)\,du, \text{ (3) নং দ্বারা।}$$

$$\Rightarrow L\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_{s}^{\infty} f(u)\,du, \text{ (1) নং দ্বারা।}$$

নোট ঃ ধ্রুব পদকে এমনভাবে নির্বাচন করা হইয়াছে যেন $\lim\limits_{s\to\infty} g(s) = 0.$

উপপাদ্য–11 ঃ দেখাও যে $\int_0^{\infty} \frac{F(t)}{t}\,dt = \int_0^{\infty} f(u)\,du$, যেখানে ইনটিগ্র্যালদ্বয় অভিসারী। [Show that $\int_0^{\infty} \frac{F(t)}{t}\,dt = \int_0^{\infty} f(u)\,du$, Provided the integrals converge]

সমাধান ঃ t দ্বারা ভাগ ফাংশনের ল্যাপলাস রূপান্তর হইল [Laplace transform of a function division by t is]

$$L\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_{s}^{\infty} f(u)\,du$$

বা $\int_0^{\infty} e^{-st}\frac{F(t)}{t}\,dt = \int_{s}^{\infty} f(u)\,du \cdots (1)$

উভয় পক্ষ limit $s \to 0+$ লইয়া পাই [Taking limit $s \to 0+$ on both sides, we get]

$$\lim_{s\to 0+}\int_0^{\infty} e^{-st}\frac{F(t)}{t}\,dt = \lim_{s\to 0}\int_{s}^{\infty} f(u)\,du$$

বা $\int_0^{\infty} \left(\lim\limits_{s\to 0+} e^{-st}\right)\frac{F(t)}{t}\,dt = \int_0^{\infty} f(u)\,du$

বা $\int_0^{\infty} 1.\frac{F(t)}{t}\,dt = \int_0^{\infty} f(u)\,du$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{F(t)}{t}\,dt = \int_0^{\infty} f(u)\,du.$$

উদাহরণ ঃ প্রমাণ কর [Prove that] $\int_0^{\infty}\frac{\sin at}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}, a>0.$ **[NUH-2009]**

সমাধান ঃ ধরি $F(t)=\sin at \cdots (1)$

$$\Rightarrow L\{F(t)\}=L\{\sin\ at\}$$

$$\Rightarrow f(s)=\frac{a}{s^2+a^2}\cdots(2)$$

আমরা জানি [We know]

$$\int_0^{\infty}\frac{F(t)}{t}\,dt=\int_0^{\infty}f(u)\,du$$

বা $\int_0^{\infty}\frac{\sin at}{t}\,dt=\int_0^{\infty}\frac{a}{u^2+a^2}\,du,$ (1) নং এবং (2) নং দ্বারা।

$$=a.\frac{1}{a}\left[\tan^{-1}\frac{u}{a}\right]_0^{\infty}$$

$$=\tan^{-1}\infty-\tan^{-1}0$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

7.10 ঃ ইনটিগ্র্যালের ল্যাপলাস রূপান্তর [Laplace transform of integrals]

উপপাদ্য-12 ঃ যদি $L\{F(t)\}=f(s)$ হয়, তবে দেখাও যে [If $L\{F(t)\}=f(s)$ then show that.

(i). $L\left\{\int_0^t F(u)\,du\right\}=\frac{f(s)}{s}.$

[NUH-2006, NU(Pass)- 2009, DUH-1987, 1989]

(ii). $L\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du\right\}=\frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}$

[NUH- 2003, 2005, 2006, 2008, NU(Pass)-2007, 2009]

প্রমাণ-(i) ঃ ধরি $G(t)=\int_0^t F(u)\,du\cdots(1)$

$$\Rightarrow G(0)=\int_0^0 F(u)\,du=0\cdots(2)$$

$$\Rightarrow G'(t)=F(t)$$

$$\Rightarrow L\{G'(t)\}=L\{F(t)\}$$

$$\Rightarrow sL\{G(t)\}-G(0)=L\{F(t)\}$$

$\Rightarrow sL\{G(t)\} - 0 = L\{F(t)\}$, (2) নং দ্বারা।

$\Rightarrow L\{G(t)\} = \dfrac{L\{F(t)\}}{s}$

$\Rightarrow L\left\{\int_0^t F(u)\,du\right\} = \dfrac{L\{F(t)\}}{s}$, (1) নং দ্বারা।

$\Rightarrow L\left\{\int_0^t F(u)\,du\right\} = \dfrac{f(s)}{s}$, যেহেতু $L\{F(t)\} = f(s)$.

প্রমাণ-(ii) ঃ যদি $F(t) = \sin t \cdots (1)$

$\Rightarrow L\{F(t)\} = L\{\sin t\}$

$\Rightarrow f(s) = \dfrac{1}{s^2+1} \cdots (2)$

আবার যদি [Again we put]

$G(t) = \dfrac{F(t)}{t} \cdots (3)$

$\Rightarrow L\{G(t)\} = L\left\{\dfrac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u)\,du$

$\Rightarrow L\{G(t)\} = \int_s^\infty \dfrac{1}{u^2+1}\,du$, (2) নং দ্বারা।

$\Rightarrow L\{G(t)\} = \lim\limits_{\epsilon \to 0} \int_s^{1/\epsilon} \dfrac{du}{u^2+1}$

$\Rightarrow L\{G(t)\} = \lim\limits_{\epsilon \to 0} \left[\tan^{-1} u\right]_s^{1/\epsilon}$

$\Rightarrow L\{G(t)\} = \lim\limits_{\epsilon \to 0} \{\tan^{-1}(1/\epsilon) - \tan^{-1} s\}$

$\Rightarrow L\{G(t)\} = \lim\limits_{\epsilon \to 0} \tan^{-1} \dfrac{1/\epsilon - s}{1 + (1/\epsilon)s}$

$\Rightarrow L\{G(t)\} = \lim\limits_{\epsilon \to 0} \tan^{-1} \dfrac{1 - \epsilon s}{\epsilon + s}$

$\Rightarrow G\{L(t)\} = \tan^{-1} \dfrac{1}{s}$

$\Rightarrow g(s) = \tan^{-1} \dfrac{1}{s} \cdots (4)$ (ধরি)

কিন্তু আমরা জানি [But we know]

$$L\left\{\int_0^t G(u)\,du\right\} = \frac{g(s)}{s}$$

$$\Rightarrow L\left\{\int_0^t \frac{F(u)}{u}\,du\right\} = \frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s},$$ (3) নং এবং (4) নং দ্বারা।

$$\Rightarrow L\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du\right\} = \frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s},$$ (1) নং দ্বারা। প্রমাণিত।

বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর [The Inverse Laplace Transform]

7.11 ঃ সংজ্ঞা ঃ যদি $L\{F(t)\} = F(s)$ হয়, তবে $F(t)$ কে $f(s)$ এর বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর বলা হয় এবং ইহাকে $F(t) = L^{-1}\{f(s)\}$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়, যেখানে L^{-1} কে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর অপারেটর বলা হয়।

Definition : If $L\{F(t)\} = f(s)$ then $F(t)$ is called an inverse **Laplace transform** of $f(s)$ and it is denoted by $F(t) = L^{-1}\{f(s)\}$.

where L^{-1} is called the **invrese Laplace transformation operator.**

উদাহরণ ঃ (i). $L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \Rightarrow e^{at} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}$

(ii). $L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2} \Rightarrow \cos at = L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\}$

(iii). $L\{t^2\} = \frac{2!}{s^3} \Rightarrow t^2 = L^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}$

7.12 ঃ বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তরের কতিপয় ধর্ম **[Some properties of inverse Laplace transform]**

উপপাদ্য–13 ঃ যদি $L\{F_1(t)\} = f_1(s)$ এবং $L\{F_2(t)\} = f_2(s)$ হয় এবং c_1, c_2 ধ্রুব সংখ্যা হইলে

$$L^{-1}\{c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)\} = c_1 L^{-1}\{f_1(s)\} + c_2 L^{-1}\{f_2(s)\}$$
$$= c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t).$$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে [Given that]

$$L\{F_1(t)\} = f_1(s) \cdots (1) \Rightarrow F_1(t) = L^{-1}\{f_1(s)\} \cdots (2)$$

এবং $L\{F_2(t)\} = f_2(s) \cdots (3) \Rightarrow F_2(t) = L^{-1}\{f_2(s)\} \cdots (4)$

এখন $L\{c_1F_1(t) + c_2F_2(t)\} = c_1L\{F_1(t)\} + c_2 L\{F_2(t)\}$. উপপাদ্য-1 ঃ দ্বারা।

$\Rightarrow L\{c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)\} = c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)$, (1) নং এবং (3) নং দ্বারা

$\Rightarrow c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t) = L^{-1} \{c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)\}$

$\Rightarrow c_1 L^{-1} \{f_1(s)\} + c_2 L^{-1} \{f_2(s)\} = L^{-1} \{c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)\}$

(2) নং এবং (4) নং দ্বারা।

অর্থাৎ $L^{-1} \{c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)\} = c_1 L^{-1} \{f_1(s)\} + c_2 L^{-1} \{f_2(s)\}$.

উদাহরণ ঃ নির্ণয় কর $L^{-1}\left\{\frac{5}{s-3} - \frac{2s}{s^2+25} + \frac{3}{s^2+4} + \frac{1}{s^4}\right\}$

সমাধান ঃ $L^{-1}\left\{\frac{5}{s-3} - \frac{2s}{s^2+25} + \frac{3}{s^2+4} + \frac{1}{s^4}\right\}$

$$= 5L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} - 2L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+5^2}\right\} + \frac{3}{2}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\} + \frac{1}{3!}L^{-1}\left\{\frac{3!}{s^{3+1}}\right\}$$

$$= 5e^{3t} - 2\cos 5t + \frac{3}{2}\sin 2t + \frac{1}{6}t^3.$$

7.13 ঃ প্রথম স্থানান্তরের ধর্ম [First translation or shifting property]

উপপাদ্য–14 ঃ যদি $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ হয় তবে দেখাও যে

[If $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ then show that] $L^{-1} \{f(s-a)\} = e^{at} F(t)$.

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে [Given that]

$$L^{-1}\{f(s)\} = F(t) \Rightarrow f(s) = L\{F(t)\}$$

আমরা জানি [We know] $L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$

$$\text{বা } f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt \cdots (1)$$

(1) নং এ s এর স্থলে s – a স্থাপন করিয়া পাই [Replacing s by s – a in (1) then we get]

$$f(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} F(t)\, dt$$

$$\text{বা } f(s-a) = \int_0^\infty e^{-st} \{e^{at} F(t)\}\, dt$$

বা $f(s-a) = L\{e^{at} F(t)\}$

$\Rightarrow L^{-1} \{f(s-a)\} = e^{at} F(t)$. প্রমাণিত।

উদাহরণ ঃ প্রমাণ কর

(i). $L^{-1}\left\{\dfrac{6s-4}{s^2-4s+20}\right\} = 2e^{2t}(3\cos 4t + \sin 4t)$.

[NU(Pass)–2008, DUS–1989]

(ii). $L^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{s^2+6s+25}\right\} = e^{-3t}\left[\cos 4t - \dfrac{1}{2}\sin 4t\right]$

(iii). $L^{-1}\left\{\dfrac{4s+12}{s^2+8s+16}\right\} = 4e^{-4t}(1-t)$ [NUH–2006]

সমাধান-(i) ঃ $L^{-1}\left\{\dfrac{6s-4}{s^2-4s+20}\right\} = L^{-1}\left\{\dfrac{6s-4}{(s-2)^2+4^2}\right\}$

$$= L^{-1}\left\{\frac{6(s-2)+8}{(s-2)^2+4^2}\right\}$$

$$= 6L^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s-2)^2+4^2}\right\} + 2L^{-1}\left\{\frac{4}{(s-2)^2+4^2}\right\}$$

$$= 6.e^{2t}\cos 4t + 2.e^{2t}\sin 4t$$

$$= 2e^{2t}(3\cos 4t + \sin 4t).$$

সমাধান-(ii) ঃ $L^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{s^2+6s+25}\right\} = L^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{(s+3)^2+4^2}\right\}$

$$= L^{-1}\left\{\frac{(s+3)-2}{(s+3)^2+4^2}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2+4^2}\right\} - \frac{2}{4}L^{-1}\left\{\frac{4}{(s+3)^2+4^2}\right\}$$

$$= e^{-3t}\cos 4t - \frac{1}{2}e^{-3t}\sin 4t$$

$$= e^{-3t}\left(\cos 4t - \frac{1}{2}\sin 4t\right).$$

সমাধান-(iii) ঃ $L^{-1}\left\{\dfrac{4s+12}{s^2+8s+16}\right\} = L^{-1}\left\{\dfrac{4s+12}{(s+4)^2}\right\}$

$$= L^{-1}\left\{\frac{4(s+4)-4}{(s+4)^2}\right\}$$

$$= 4L^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} - 4L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^2}\right\}$$

$$= 4e^{-4t} - 4te^{-4t}$$

$$= 4e^{-4t}(1-t).$$

7.14 ঃ দ্বিতীয় স্থানান্তরের ধর্ম [Second translation or shifting property]

উপপাদ্য-15 ঃ যদি $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ হয় তবে দেখাও যে [If $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ then show that]

$$L^{-1}\{e^{-as} f(s)\} = \begin{cases} F(t-a) &, t > a \\ 0 &, t < a \end{cases}$$

প্রমাণ ঃ ধরি $e^{-as} f(s) = L\{G(t)\}$

তবে $L^{-1}\{e^{-as} f(t)\} = G(t) = \begin{cases} F(t-a) &, t > a \\ 0 &, t < a \end{cases}$

কাজেই $L\{G(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} G(t)\, dt$

বা $L\{G(t)\} = \int_0^a e^{-st} G(t)\, dt + \int_a^\infty e^{-st} G(t)\, dt$

বা $L\{G(t)\} = \int_0^a e^{-st}\, 0\, dt + \int_a^\infty e^{-st} F(t-a)\, dt$

বা $L\{G(t)\} = 0 + \int_a^\infty e^{-st} F(t-a)\, dt \cdots (1)$

ধরি $t - a = u$ তবে $dt = du$	we put $t - a = u$ then $dt = du$
সীমা ঃ যদি $t = a$ তবে $u = 0$	**Limits :** If $t = a$ then $u = 0$
যদি $t = \infty$ তবে $u = \infty$	If $t = \infty$ then $u = \infty$

$\therefore (1) \Rightarrow L\{G(t)\} = \int_0^\infty e^{-s(a+u)} F(u)\, du$

বা $L\{G(t)\} = e^{-as} \int_0^\infty e^{-su} F(u)\, du$

বা $L\{G(t)\} = e^{-as} \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$

বা $L\{G(t)\} = e^{-as} L\{F(t)\}$

বা $L\{G(t)\} = e^{-as} f(s)$

বা $G(t) = L^{-1}\{e^{-as} f(s)\}$

$\Rightarrow L^{-1}\{e^{-as} f(s)\} = G(t) = \begin{cases} F(t-a) &, t > a \\ 0 &, t < a \end{cases}$

$\Rightarrow L^{-1}\{e^{-as} f(s)\} = \begin{cases} F(t-a) &, t > a \\ 0 &, t < a \end{cases}$ প্রমাণিত।

উদাহরণ ঃ দেখাও যে [Show that]

(i). $L^{-1}\left\{\dfrac{8e^{-3s}}{s^2+4}\right\} = \begin{cases} 4\sin 2(t-3) & , t>3 \\ 0 & , t<3 \end{cases}$

(ii). $L^{-1}\left\{\dfrac{se^{-2\pi s/3}}{s^2+9}\right\} = \begin{cases} \cos 3t & , t>2\pi/3 \\ 0 & , t<2\pi/3 \end{cases}$

(iii). $L^{-1}\left\{\dfrac{e^{-5s}}{(s-2)^4}\right\} = \begin{cases} \dfrac{1}{6}(t-5)^3 e^{2(t-5)} & , t>5 \\ 0 & , t<5 \end{cases}$

সমাধান-(i) ঃ আমরা জানি [We know]

$$L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\} = \sin 2t$$

বা $4L^{-1}\left\{\dfrac{2}{s^2+2^2}\right\} = 4\sin 2t$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{8e^{-3s}}{s^2+4}\right\} = \begin{cases} 4\sin 2(t-3) & , t>3 \\ 0 & , t<3 \end{cases}$$

সমাধান-(ii) ঃ আমরা জানি [We know]

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3^2}\right\} = \cos 3t$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{se^{-2\pi s/3}}{s^2+9}\right\} = \begin{cases} \cos 3(t-2\pi/3) & , t>2\pi/3 \\ 0 & , t<2\pi/3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{se^{-2\pi s/3}}{s^2+9}\right\} = \begin{cases} \cos 3t & , t>2\pi/3 \\ 0 & , t<2\pi/3 \end{cases}$$

সমাধান-(iii) ঃ আমরা জানি [We know]

$$L\{t^3\} = \frac{3!}{s^4}$$

$$\Rightarrow L\{e^{2t}t^3\} = \frac{6}{(s-2)^4}$$

$$\Rightarrow e^{2t}t^3 = L^{-1}\left\{\frac{6}{(s-2)^4}\right\}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^4}\right\} = \frac{1}{6}e^{2t}t^3$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{(s-2)^4}\right\} = \begin{cases} \dfrac{1}{6}e^{2(t-5)}(t-5)^3 & , t>5 \\ 0 & , t<5 \end{cases}$$

7.15 ঃ স্কেল পরিবর্তনের ধর্ম [Change of scale property]

উপপাদ্য–16 ঃ যদি $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ হয় তবে দেখাও যে [If $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ then show that]

$$L^{-1}\{f(as)\} = \frac{1}{a}F(t/a).$$

প্রমাণ ঃ আমরা জানি [We know]

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$$

$$\Rightarrow f(s) = \int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$$

s এর পরিবর্তে as বসাইয়া পাই [Replacing s by as then we get]

$$f(as) = \int_0^\infty e^{-ast}F(t)\,dt \cdots (1)$$

ধরি $at = u$ তাহা হইলে $dt = \frac{du}{a}$

সীমা ঃ যদি $t = 0$ হয়, তবে $u = 0$

যদি $t = \infty$ হয়, তবে $u = \infty$

we put $at = u$ then $dt = \frac{du}{a}$

Limits : If $t = 0$ then $u = 0$

If $t = \infty$ then $u = \infty$

$$\therefore (1) \Rightarrow f(as) = \int_0^\infty e^{-su}F(u/a)\frac{du}{a}$$

$$\Rightarrow f(as) = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-su}F(u/a)\,du$$

$$\Rightarrow f(as) = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-st}F(t/a)\,dt$$

$$\Rightarrow f(as) = \frac{1}{a}L\{F(t/a)\}$$

$$\Rightarrow f(as) = L\left\{\frac{1}{a}F\left(\frac{t}{a}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{f(as)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{t}{a}\right).$$ প্রমাণিত।

উদাহরণ ঃ প্রমাণ কর

(i). $L^{-1}\left\{\frac{4}{4s^2+16}\right\} = \frac{1}{2}\sin 2t$ **(ii).** $L^{-1}\left\{\frac{as}{a^2s^2+b^2}\right\} = \frac{1}{a}\cos\frac{bt}{a}$

সমাধান-(i) ঃ ধরি $F(t) = \sin 4t \cdots (1)$

আমরা জানি [we know]

$$L\{\sin 4t\} = \frac{4}{s^2+4^2}$$

$$\Rightarrow f(s) = \frac{4}{s^2+16}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{f(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+16}\right\}$$

s এর পরিবর্তে 2s বসাইয়া পাই [Replacing s by 2s, we get]

$$L^{-1}\{f(2s)\} = L^{-1}\left\{\frac{4}{(2s)^2+16}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}F\left(\frac{t}{2}\right) = L^{-1}\left\{\frac{4}{4s^2+16}\right\},$$ স্কেল পরিবর্তনের ধর্মের দ্বারা।

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\sin\left(\frac{4t}{2}\right) = L^{-1}\left\{\frac{4}{4s^2+16}\right\},$$ (1) নং দ্বারা।

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{4}{4s^2+16}\right\} = \frac{1}{2}\sin 2t.$$ প্রমাণিত।

সমাধান-(ii) ঃ ধরি $F(t) = \cos bt \cdots (1)$

আমরা জানি [We know]

$$L\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2+b^2}$$

$$\Rightarrow f(s) = \frac{s}{s^2+b^2}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{f(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+b^2}\right\}$$

s এর পরিবর্তে as বসাইয়া পাই [Replacing s by as, we get]

$$L^{-1}\{f(as)\} = L^{-1}\left\{\frac{as}{(as)^2+b^2}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}F\left(\frac{t}{a}\right) = L^{-1}\left\{\frac{as}{a^2s^2+b^2}\right\},$$ স্কেল পরিবর্তনের ধর্মের দ্বারা

$$\Rightarrow \frac{1}{a}\cos(bt/a) = L^{-1}\left\{\frac{as}{a^2s^2+b^2}\right\},$$ (1) নং দ্বারা।

$$\therefore L^{-1}\left\{\frac{as}{a^2s^2+b^2}\right\} = \frac{1}{a}\cos(bt/a).$$

7.16 : অন্তরীকরণের বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর [Inverse Laplace transform of derivatives]

উপপাদ্য–17 : যদি $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ হয়, তবে দেখাও যে [If $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ then show that]

$$L^{-1}\{f^n(s)\} = (-1)^n t^n F(t).$$

প্রমাণ : আমরা জানি, যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয়, তবে [we know. if $L\{F(t)\} = f(s)$ then]

$$L\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s)$$

$$\Rightarrow L\{t^n F(t)\} = (-1)^n f^n(s)$$

$$\Rightarrow (-1)^n L\{t^n F(t)\} = (-1)^n (-1)^n f^n(s)$$

$$\Rightarrow L\{(-1)^n t^n F(t)\} = (-1)^{2n} f^n(s)$$

$$\Rightarrow f^n(s) = L\{(-1)^n t^n F(t)\}, \text{ যেহেতু } 2n \text{ জোড়}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{f^n(s)\} = (-1)^n t^n F(t). \text{ প্রমাণিত।}$$

উদাহরণ : প্রমাণ কর $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = \frac{t\sin at}{2a}$ **[NUH–2007, DUS–1986]**

সমাধান : ধরি $F(t) = \frac{\sin at}{a}$ ... (1)

আমরা জানি [We know]

$$L\left\{\frac{\sin at}{a}\right\} = \frac{1}{s^2+a^2} = f(s)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s^2+a^2} = f(s)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+a^2}\right) = \frac{d}{ds} f(s)$$

$$\Rightarrow \frac{-2s}{(s^2+a^2)^2} = f'(s)$$

$$\Rightarrow \frac{s}{(s^2+a^2)^2} = -\frac{1}{2} f'(s)$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = -\frac{1}{2} L^{-1}\{f'(s)\}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = -\frac{1}{2}(-1)^1\, tF(t),$$ যেহেতু $L^{-1}\{f^n(s)\} = (-1)^n t^n F(t)$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = \frac{1}{2}\,.\, t.\frac{\sin at}{a},$$ (1) নং দ্বারা।

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = \frac{t\sin at}{2a}.$$ প্রমাণিত।

7.17 ঃ ইনটিগ্র্যালের বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর [Inverse Laplace transform of integrals]

উপপাদ্য–18 ঃ যদি $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ হয় তবে দেখাও যে

[If $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ then show that] $L^{-1}\left\{\int_s^\infty f(u)\,du\right\} = \frac{F(t)}{t}$.

প্রমাণ ঃ আমরা জানি, যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয়, তবে [We know, if $L\{F(t)\} = f(s)$ then]

$$L\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u)\,du$$

$$\Rightarrow \frac{F(t)}{t} = L^{-1}\left\{\int_s^\infty f(u)\,du\right\}$$

$$\text{i, e. } L^{-1}\left\{\int_s^\infty f(u)\,du\right\} = \frac{F(t)}{t}.$$ প্রমাণিত।

উদাহরণ ঃ দেখাও যে $L^{-1}\left\{\int_s^\infty \frac{du}{u^2(u^2+1)}\right\} = \frac{t-\sin t}{t}$.

সমাধান ঃ ধরি $f(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)}$

$$\Rightarrow L^{-1}\{f(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{f(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{f(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{f(s)\} = t - \sin t = F(t) \cdots (1)$$

$$\therefore L^{-1}\left\{\int_s^\infty \frac{1}{u^2(u^2+1)}du\right\} = \frac{F(t)}{t}$$, উপপাদ্য 18 এর সাহায্যে।

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\int_s^\infty \frac{du}{u^2(u^2+1)}\right\} = \frac{t-\sin t}{t}$$, (1) নং দ্বারা।

7.18 : s^n দ্বারা গুন [Multiplication by s^n]

উপপাদ্য–19 : যদি $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ এবং $F(0) = 0$ হয়, তবে দেখাও যে [If $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ and $F(0) = 0$ then show that]

$$L^{-1}\{sf(s)\} = F'(t).$$

প্রমাণ : আমরা জানি [We know]

$$L\{F'(t)\} = sf(s) - F(0)$$

$$\Rightarrow L\{F'(t)\} = sf(s) - 0$$

$$\Rightarrow \{F'(t)\} = L^{-1}\{sf(s)\}$$

i, e. $L^{-1}\{sf(s)\} = F'(t) = \frac{d}{dt}F(t)$. প্রমাণিত।

উদাহরণ : যদি $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{2}t\sin t$ হয়, তবে $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{2}t\sin t$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{s.\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{dt}\left(\frac{1}{2}t\sin t\right)$$, উপপাদ্য 19 দ্বারা।

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{(s^2+1)-1}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(t\sin t)$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{2}(1.\sin t + t\cos t)$$

$$\Rightarrow \sin t - L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{2}(\sin t + t\cos t)$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\} = \sin t - \frac{1}{2}(\sin t + t\cos t)$$

$$= \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t).$$

7.19 : s দ্বারা ভাগ [Division by s]

উপপাদ্য–20 : যদি $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ হয়, তবে দেখাও যে [If $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ then show that]

$$L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\} = \int_0^t F(u)\,du.$$

প্রমাণ : ধরি $G(t) = \int_0^t F(u)\,du \cdots (1)$ তবে

$$\therefore G'(t) = F(t) \text{ এবং } G(0) = \int_0^0 F(u)\,du = 0$$

$$\Rightarrow L\{G'(t)\} = L\{F(t)\}$$

$$\Rightarrow sL\{G(t)\} - G(0) = L\{F(t)\}$$

$$\Rightarrow sL\{G(t)\} - 0 = f(s)$$

$$\Rightarrow L\{G(t)\} = \frac{f(s)}{s}$$

$$\Rightarrow G(t) = L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\}.$$

i, e. $L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\} = \int_0^t F(u)\,du$; (1) নং দ্বারা। প্রমাণিত।

উপপাদ্য–21 : যদি $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ হয়, তবে দেখাও যে [If $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ then show that]

$$L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2}\right\} = \int_0^t \int_0^v F(u)\,du\,dv.$$

প্রমাণ : ধরি $G(t) = \int_0^t \int_0^v F(u)\,du\,dv \cdots (1)$

তাহা হইলে $G'(t) = \int_0^t F(u)\,du \cdots (2)$ এবং $G''(t) = F(t) \cdots (3)$

$$\text{এবং } G(0) = \int_0^0 \int_0^v F(u)\,du\,dv = 0$$

$$G'(0) = \int_0^0 F(u)\,du = 0$$

অর্থাৎ $G(0) = G'(0) = 0 \cdots (4)$

(3) নং এর উভয় পক্ষে ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking Laplace transform on both sides of (3) then we get]

$$L\{G''(t)\} = L\{F(t)\}$$

$$\Rightarrow s^2 L\{G(t)\} - sG(0) - G'(0) = f(s)$$

$$\Rightarrow s^2 L\{G(t)\} - 0 - 0 = f(s),$$ (4) নং দ্বারা।

$$\Rightarrow L\{G(t)\} = \frac{f(s)}{s^2}$$

$$\Rightarrow G(t) = L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2}\right\}$$

i, e. $L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2}\right\} = \int_0^t \int_0^v F(u)\, du\, dv.$ (1) নং দ্বারা। (প্রমাণিত)

নোট–1 ঃ $L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2}\right\} = \int_0^t \int_0^v f(u)\, du\, dv$ কে নিম্নরূপেও লিখা যায়।

$$L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2}\right\} = \int_0^t \int_0^t F(t)\, dt.\, dt$$

নোট–2 ঃ $L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^n}\right\} = \int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t f(t)\,(dt)^n$

উদাহরণ ঃ $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\}$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH–2005]**

সমাধান ঃ আমরা জানি [We know]

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$$

$$\therefore L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\} = \int_0^t \int_0^t \int_0^t \sin t\, dt\, dt\, dt$$

$$= \int_0^t \int_0^t [-\cos]_0^t\, dt\, dt$$

$$= \int_0^t \int_0^t (1-\cos t) dt\, dt$$

$$= \int_0^t [t - \sin t]_0^t\, dt = \int_0^t (t - \sin t)\, dt$$

$$= \left[\frac{t^2}{2} + \cos t\right]_0^t = \frac{t^2}{2} + \cos t - 1.$$

7.20 ঃ কনভলিউশনের ধর্ম [Convolution property] :

উপপাদ্য–22 ঃ যদি $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$, $L^{-1}\{g(s)\} = G(t)$ হয়, তবে দেখাও যে [If $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$, $L^{-1}\{g(s)\} = G(t)$ then show that]

$$L^{-1}\{f(s)\,g(s)\} = \int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du.$$ **[NUH–2005, 2009]**

প্রমাণ ঃ আমরা প্রমাণ করিতে চাই [We want to prove that]

$$L^{-1}\{f(s)\,g(s)\} = \int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du$$

ইহার জন্য আমাদের দেখাইতে হইবে [For this we shall have to show that]

$$f(s)\,g(s) = L\left\{\int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du\right\}$$

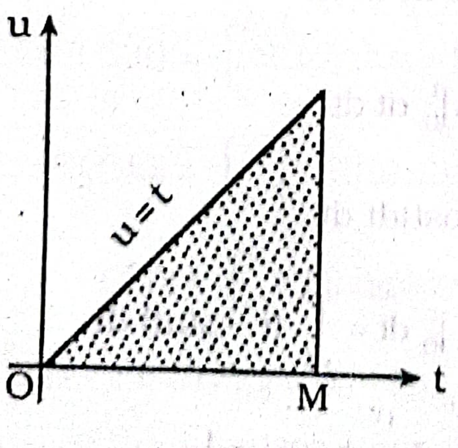
যখন $f(s) = L\{F(t)\}$ এবং $g(s) = L\{G(t)\}$, [where $f(s) = L\{F(t)\}$ and $g(s) = L\{G(t)\}$].

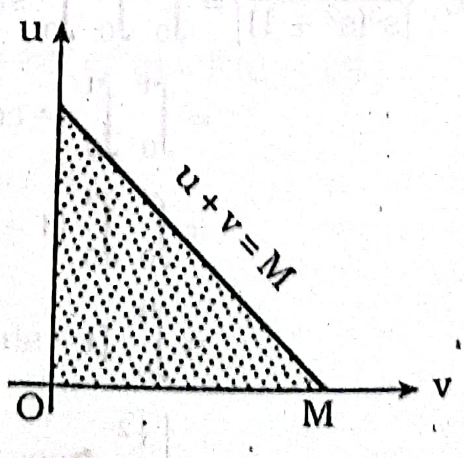
ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [By definition of Laplace transform, we get]

$$L\left\{\int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\left\{\int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du\right\}dt$$

$$= \int_{t=0}^\infty \int_{u=0}^\infty e^{-st}\,F(u)\,G(t-u)\,du\,dt$$

$$= \lim_{M\to\infty}\int_{t=0}^M \int_{u=0}^t e^{-st}\,F(u)\,G(t-u)\,du\,dt \cdots (1)$$





ধরি $t-u = v$, বা $t = u+v \Rightarrow dt = dv$

$$\therefore (1) \Rightarrow L\left\{\int_0^t F(u)\, G(t-u)\, du\right\}$$

$$= \lim_{M\to\infty} \int_0^M \int_0^{M-v} e^{-s(u+v)} F(u)\, G(v)\, du\, dv$$

$$\Rightarrow L\left\{\int_0^t F(u)\, G(t-u)\, du\right\} = \int_0^\infty e^{-su} F(u)\, du \int_0^\infty e^{-sv} G(v)\, dv$$

$$\Rightarrow L\left\{\int_0^t F(u)\, G(t-u)\, du\right\} = f(s)\, g(s)$$

$$\Rightarrow \int_0^t F(u)\, G(t-u)\, du = L^{-1}\{f(s)\, G(s)\}$$

$\therefore L^{-1}\{f(s)\, g(s)\} = \int_0^t F(u)\, G(t-u)\, du.$ (প্রমাণিত)

নোট : $L^{-1}\{f(s)\, g(s)\} = \int_0^t G(u)\, F(t-u)\, du.$

উদাহরণ : $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s+1)^3}\right\}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি $f(s) = \dfrac{1}{s^2}$ এবং $g(s) = \dfrac{1}{(s+1)^3}$.

$$\therefore F(t) = L^{-1}\{f(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$$

এবং $G(t) = L^{-1}\{g(s)\} = L^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+1)^3}\right\} = \dfrac{t^2}{2!} e^{-t} = \dfrac{1}{2} t^2 e^{-t}$

$$\therefore L^{-1}\{f(s)\, g(s)\} = \int_0^t G(u)\, F(t-u)\, du$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\frac{1}{(s+1)^3}\right\} = \int_0^t \frac{1}{2} u^2 e^{-u}(t-u)\, du$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)^3}\right\} = \frac{1}{2}\int_0^t (u^2 t - u^3)\, e^{-u}\, du$$

$$= \frac{1}{2}\left[(u^2 t - u^3)(-e^{-u}) - (2ut - 3u^2)(e^{-u}) + (2t - 6u)(-e^{-u}) - (-6)e^{-u}\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{2}[\{0 - (-t^2)e^{-t} + (-4t)(-e^{-t}) + 6e^{-t}\} - \{2t(-1) + 6\}]$$

$$= \frac{1}{2}(t^2 e^{-t} + 4te^{-t} + 6e^{-t} + 2t - 6)$$

$$= \frac{1}{2} t^2 e^{-t} + 2te^{-t} + 3e^{-t} + t - 3.$$

7.21 ঃ আংশিক অন্তরকে ল্যাপলাস রূপান্তরের প্রয়োগ [Application of Laplace transform in partial derivative] :

যদি প্রদত্ত ফাংশন U(x, t) সংজ্ঞায়িত হয় $a \le x \le b$, $t > 0$ এর জন্য তবে নির্ণয় কর [If the given function U(x, t) defined for $a \le x \le b$, $t > 0$ then find]

(i). $L\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\}$, (ii) $L\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right\}$, (iii). $L\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\}$, (iv). $L\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\}$.

সমাধান–(i) ঃ ধরি $L\{U(x, t)\} = u(x, s) = u \cdots (1)$

$$\therefore L\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial U}{\partial t}\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial}{\partial t}U(x, t)\,dt$$

$$= \left[e^{-st}\,U(x,t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}\,U(x, t)\,dt$$

$$= 0 - U(x, 0) + sL\{U(x, t)\}$$

$$= su(x, s) - U(x, 0);\ \text{by (1)}$$

$$= su - U(x, 0).$$

সমাধান–(ii) ঃ ধরি $L\{U(x, t)\} = u(x, s) = u.$

$$\therefore L\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial^2}{\partial t^2}U(x, t)\,dt.$$

$$\Rightarrow L\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right\} = \left[e^{-st}\frac{\partial}{\partial t}U(x, t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial}{\partial t}U(x, t)\,dt$$

$$= \left[e^{-st}\,U_t(x, t)\right]_0^\infty + s\left\{\left[e^{-st}\,U(x, t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}\,U(x, t)\,dt\right\}$$

$$= 0 - U_t(x, 0) + s\{0 - U(x, 0)\} + s^2L\{U(x, t)\}$$

$$= -U_t(x, 0) - sU(x, 0) + s^2\,u(x, s)$$

$$= s^2u - sU(x, 0) - U_t(x, 0)$$

সমাধান–(iii) ঃ ধরি $L\{U(x, t)\} = u(x, s) = u$

$$L\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial}{\partial x}U(x, t)\,dt$$

$$= \frac{d}{dx}\int_0^\infty e^{-st}\,U(x, t)\,dt$$

$$\Rightarrow L\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} = \frac{d}{dx} L\{U(x, t)\}$$
$$= \frac{d}{dx} u(x, s)$$
$$= \frac{du}{dx}.$$

সমাধান–(iv) ঃ ধরি $L\{U(x, t)\} = u(x, s) = u$

$$\therefore L\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, t)\, dt$$
$$= \frac{d^2}{dx^2} \int_0^\infty e^{-st} U(x, t)\, dt$$
$$= \frac{d^2}{dx^2} L\{U(x, t)\}$$
$$= \frac{d^2}{dx^2} u(x, s)$$
$$= \frac{d^2u}{dx^2}.$$

উদাহরণমালা [EXAMPLES]

উদাহরণ–1 ঃ $4e^{2t}$, e^{-t}, sint, $t^2\, e^t$ এবং cos2t এর ল্যাপলাস রূপান্তর নির্ণয় কর। **[DUS–1992]**

সমাধান ঃ সংজ্ঞানুসারে আমরা লিখিতে পারি [By definition we can write]

$$L\{4e^{2t}\} = \int_0^\infty e^{-st}\, 4e^{2t}\, dt = 4\int_0^\infty e^{-(s-2)t}\, dt$$
$$= 4\left[\frac{e^{-(s-2)t}}{-(s-2)}\right]_0^\infty = \frac{-4}{s-2}(0-1)$$
$$= \frac{4}{s-2}$$

$$L\{e^{-t}\} = \int_0^\infty e^{-st}\, e^{-t}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s+1)t}\, dt$$
$$= \left[\frac{e^{-(s-1)t}}{-(s+1)}\right]_0^\infty$$
$$= -\frac{1}{(s+1)}(0-1)$$
$$= \frac{1}{s+1}$$

$$L\{\sin t\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \sin t \, dt$$

$$= \left[\frac{e^{-st}(-s\sin t - \cos t)}{s^2+1}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{s^2+1}\{0 - e^0(s\sin 0 - \cos 0)\}$$

$$= \frac{1}{s^2+1}$$

আমরা জানি $L\{t^2\} = \frac{2!}{s^3}$

$$\Rightarrow L\{e^t t^2\} = \frac{2!}{(s-1)^3}$$

$$\Rightarrow L\{e^t t^2\} = \frac{2}{(s-1)^3}$$

$$L\{\cos 2t\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cos 2t \, dt$$

$$= \left[\frac{e^{-st}(-s\cos 2t + 2\sin 2t)}{s^2+2^2}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{s^2+4}\{0 - e^0(-s\cos 0 + 2\sin 0)\}$$

$$= \frac{s}{s^2+4}.$$

উদাহরণ-2. মান নির্ণয় কর [Find] (i) $L\{t^2 \sin t\}$ **[NUH-2006]**

(ii). $L\{t^2 \sin 3t\}$. **[NUH-2000, 2008]**

সমাধান-2(i) : আমরা জানি [We know]

$$L\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow f(s) = \frac{1}{s^2+1} \cdots (1)$$

$$\therefore L\{t^2 \sin t\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} f(s)$$

$$= \frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right); \text{ (1) নং দ্বারা।}$$

$$= \frac{d}{ds}\frac{d}{ds}(s^2+1)^{-1}$$

$$= \frac{d}{ds}(-1)\cdot(s^2+1)^{-2}(2s)$$

$$L\{t^2 \sin t\} = (-1) \cdot 2 \frac{d}{ds} \{s(s^2+1)^{-2}\}$$

$$= (-1) \cdot 2[(s^2+1)^{-2} + s(-2)(s^2+1)^{-3} 2s]$$

$$= -2\left[\frac{1}{(s^2+1)^2} - \frac{4s^2}{(s^2+1)^3}\right]$$

$$= -2\left[\frac{s^2+1-4s^2}{(s^2+1)^3}\right] = \frac{-2(-3s^2+1)}{(s^2+1)^3}$$

$$= \frac{2(3s^2-1)}{(s^2+1)^3}.$$

সমাধান-2(ii) : আমরা জানি [We know]

$$L\{\sin 3t\} = \frac{3}{s^2+3^2}$$

$$\Rightarrow f(s) = \frac{3}{s^2+9} \cdots (1)$$

$$\therefore L\{t^2 \sin 3t\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} f(s)$$

$$= \frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\left(\frac{3}{s^2+9}\right); \text{ by } (1)$$

$$= \frac{d}{ds}\frac{d}{ds}[3(s^2+9)^{-1}]$$

$$= \frac{d}{ds}[3(-1)(s^2+9)^{-2} \cdot 2s]$$

$$= -6\frac{d}{ds}[s(s^2+9)^{-2}]$$

$$= -6[1(s^2+9)^{-2} + s(-2)(s^2+9)^{-3} 2s]$$

$$= -6\left[\frac{1}{(s^2+9)^2} - \frac{4s^2}{(s^2+9)^3}\right]$$

$$= -6\left[\frac{s^2+9-4s^2}{(s^2+9)^3}\right] = -\frac{6[-3s^2+9]}{(s^2+9)^3}$$

$$= \frac{18(s^2-3)}{(s^2+9)^3}.$$

উদাহরণ-3 ঃ মান নির্ণয় কর ঃ

3(i). $L^{-1}\left\{\frac{8}{s^2-6s+25}\right\}$ **[DUH-1987]**

3(ii). $L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2-1)}\right\}$ **[NUH-2008]**

3(iii). $L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}$ **[NUH-2002, 2008]**

3(iv). $L^{-1}\left\{\dfrac{7s+12}{s^2+9}\right\}$ [NUH-2002]

3(v). $L^{-1}\left\{\dfrac{2s-11}{(s+2)(s-3)}\right\}$ [NUH-2006, 2009]

সমাধান-3(i) ঃ $L^{-1}\left\{\dfrac{8}{s^2-6s+25}\right\} = L^{-1}\left\{\dfrac{8}{(s-3)^2+4^2}\right\}$

$$= 2L^{-1}\left\{\frac{4}{(s-3)^2+4^2}\right\}$$

$$= 2e^{3t}\sin 4t.$$

সমাধান-3(ii) : $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s^2-1)}\right\} = L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2-1}-\dfrac{1}{s}\right\}$

$$= L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-1}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$$

$$= \cosh t - 1.$$

সমাধান-3(iii) : $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s^2+1)}\right\} = L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}-\dfrac{s}{s^2+1}\right\}$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}$$

$$= 1 - \cos t.$$

সমাধান-3(iv) ঃ $L^{-1}\left\{\dfrac{7s+12}{s^2+9}\right\} = L^{-1}\left\{\dfrac{7s}{s^2+9}\right\} + L^{-1}\left\{\dfrac{12}{s^2+9}\right\}$

$$= 7L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3^2}\right\} + 4L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\}$$

$$= 7\cos 3t + 4\sin 3t$$

সমাধান-3(v) ঃ

$$L^{-1}\left\{\frac{2s-11}{(s+2)(s-3)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{-4-11}{(s+2)(-2-3)} + \frac{6-11}{(3+2)(s-3)}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{3}{s+2} - \frac{1}{s-3}\right\}$$

$$= 3L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$$

$$= 3e^{-2t} - e^{3t}.$$

উদাহরণ-3(vi) ঃ $L^{-1}\left\{\dfrac{2s^2-6s+5}{s^3-6s^2+11s-6}\right\}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $L^{-1}\left\{\dfrac{2s^2-6s+5}{s^3-6s^2+11s-6}\right\}$

$$= L^{-1}\left\{\frac{2s^2-6s+5}{s^2(s-1)-5s(s-1)+6(s-1)}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{2s^2-6s+5}{(s-1)(s^2-5s+6)}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{2s^2-6s+5}{(s-1)(s-2)(s-3)}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{2-6+5}{(s-1)(-1)(-2)}+\frac{8-12+5}{1(s-2)(-1)}+\frac{18-18+5}{2.1(s-3)}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{2(s-1)}-\frac{1}{s-2}+\frac{5}{2(s-3)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}+\frac{5}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}e^{t}-e^{2t}+\frac{5}{2}e^{3t}.$$

উদাহরণ-3(vii) ঃ $L^{-1}\left\{\dfrac{6}{2s-3}-\dfrac{3+4s}{9s^2-16}+\dfrac{8-6s}{16s^2+9}\right\}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $L^{-1}\left\{\dfrac{6}{2s-3}-\dfrac{3+4s}{9s^2-16}+\dfrac{8-6s}{16s^2+9}\right\}$

$$= L^{-1}\left\{\frac{6}{2s-3}-\frac{3}{9s^2-16}-\frac{4s}{9s^2-16}+\frac{8}{16s^2+9}-\frac{6s}{16s^2+9}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{6}{2(s-3/2)}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{3}{9(s^2-16/9)}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{4s}{9(s^2-16/9)}\right\}$$

$$+L^{-1}\left\{\frac{8}{16(s^2+9/16)}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{6s}{16(s^2+9/16)}\right\}$$

$$= 3L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3/2}\right\}-\frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-(4/3)^2}\right\}-\frac{4}{9}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-(4/3)^2}\right\}$$

$$+\frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+(3/4)^2}\right\}-\frac{3}{8}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+(3/4)^2}\right\}$$

$$= 3L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3/2}\right\} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4/3}L^{-1}\left\{\frac{4/3}{s^2-(4/3)^2}\right\} - \frac{4}{9}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-(4/3)^2}\right\}$$

$$+\frac{1}{2.3/4}L^{-1}\left\{\frac{3/4}{s^2+(3/4)^2}\right\} - \frac{3}{8}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+(3/4)^2}\right\}$$

$$= 3e^{3t/2} - \frac{1}{4}\sinh\frac{4t}{3} - \frac{4}{9}\cosh\frac{4t}{3} + \frac{2}{3}\sin\frac{3t}{4} - \frac{3}{8}\cos\frac{3t}{4}.$$

উদাহরণ–3(viii) ঃ $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2(s-2)}\right\}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ আংশিক ভগ্নাংশের কভার আপ নিয়ম অনুসারে পাই [By the rule of cover up partial fraction, we get]

$$\frac{1}{(s+2)^2(s-2)} = \frac{1}{(s+2)^2(-2-2)} + \frac{A}{s+2} + \frac{1}{(2+2)^2(s-2)}$$

বা $\frac{1}{(s+2)^2(s-2)} = \frac{1}{-4(s+2)^2} + \frac{A}{s+2} + \frac{1}{16(s-2)}$ ... (1)

এখন উভয় পক্ষ $s = 0$ বসাইয়া পাই [Now putting $s = 0$ on both sides then we get]

$$\frac{1}{2^2(-2)} = \frac{1}{-4(2)^2} + \frac{A}{2} + \frac{1}{16(-2)}$$

বা $\frac{A}{2} = \frac{1}{-8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$

বা $\frac{A}{2} = \frac{-4+2+1}{32}$

বা $\frac{A}{2} = \frac{-1}{32} \Rightarrow A = -\frac{1}{16}$

$\therefore (1) \Rightarrow \frac{1}{(s+2)^2(s-2)} = \frac{-1/4}{(s+2)^2} + \frac{-1/16}{s+2} + \frac{1/16}{s-2}$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর গ্রহণ করিয়া পাই [Taking inverse Laplace transform on both sides, we get]

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2(s-2)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{-1/4}{(s+2)^2} + \frac{-1/16}{s+2} + \frac{1/16}{s-2}\right\}$$

$$= -\frac{1}{4}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} - \frac{1}{16}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \frac{1}{16}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$$

$$= -\frac{1}{4}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} - \frac{1}{16}e^{-2t} + \frac{1}{16}e^{2t} \text{ ... (2)}$$

আমরা জানি $L\{e^{-2t}\} = \frac{1}{s+2}$

$$\Rightarrow L\{te^{-2t}\} = (-1)^1 \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+2}\right)$$

$$= L\{te^{-2t}\} = (-1)\frac{(-1)}{(s+2)^2}$$

$$\Rightarrow te^{-2t} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} \cdots (3)$$

এখন (2) নং এবং (3) নং হইতে পাই [From (2) and (3), we get]

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2(s-2)}\right\} = -\frac{1}{4}te^{-2t} - \frac{1}{16}e^{-2t} + \frac{1}{16}e^{2t}.$$

উদাহরণ–4 : $L^{-1}\left\{\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি $\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} \cdots (1)$

বা $3s+1 = A(s^2+1) + (Bs+C)(s-1) \cdots (2)$

বা $3s+1 = As^2 + A + Bs^2 - Bs + Cs - C \cdots (3)$

এখন (2) নং এর উভয় পক্ষে $s = 1$ বসাইয়া পাই [Putting $s = 1$ on both sides of (2), we get]

$$4 = A(2) + 0 \Rightarrow A = 2$$

(3) নং এর উভয় পক্ষ হইতে s^2 এবং s এর সহগ সমীকৃত করিয়া পাই [Equating the coefficient of s^2, s from both sides of (3), we get]

$0 = A + B$, বা $0 = 2 + B \Rightarrow B = -2$

এবং $3 = -B + C$

বা $3 = 2 + C \Rightarrow C = 1$

$$\therefore (1) \Rightarrow \frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{2}{s-1} + \frac{-2s+1}{s^2+1}$$

এখন উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking inverse Laplace transform on both sides then we get]

$$L^{-1}\left\{\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{s-1} - \frac{2s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$= 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - 2L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$= 2e^t - 2\cos t + \sin t.$$

উদাহরণ–5 ঃ নিম্নলিখিত বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর সমূহ নির্ণয় কর [Find the following inverse Laplace transforms; ঃ

(i). $L^{-1}\left\{\frac{(s+1)\,e^{-\pi s}}{s^2+s+1}\right\}$, (ii). $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}\right\}$.

সমাধান–5(i) ঃ $L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+s+1}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1/2)^2+3/4}\right\}$

$$= L^{-1}\left\{\frac{(s+1/2)+1/2}{(s+1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}\right\} + \frac{1}{\sqrt{3}}L^{-1}\left\{\frac{\sqrt{3}/2}{(s+1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}\right\}$$

$$= e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}$$

$$= \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} + \sin\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{(s+1)\,e^{-\pi s}}{s^2+s+1}\right\}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{e^{-(t-\pi)/2}}{\sqrt{3}}\left\{\sqrt{3}\cos\dfrac{\sqrt{3}(t-\pi)}{2} + \sin\dfrac{\sqrt{3}\,(t-\pi)}{2}\right\}, & t>\pi \\ 0, & t<\pi \end{cases}$$

সমাধান–5(ii) ঃ আমরা জানি [We know]

$$J_0(at) = 1 - \frac{a^2t^2}{2^2} + \frac{a^4t^4}{2^2\cdot 4^2} - \frac{a^6t^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \cdots$$

$$\Rightarrow L\{J_0(at)\} = L\left\{1 - \frac{a^2t^2}{2^2} + \frac{a^4t^4}{2^2\cdot 4^2} - \frac{a^6t^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \cdots\right\}$$

$$\Rightarrow L\{J_0(at)\} = L\{1\} - \frac{a^2}{2^2}L(t^2) + \frac{a^4}{2^2\cdot 4^2}L\{t^4\} - \frac{a^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}L\{t^6\} + \cdots$$

$$\Rightarrow L\{J_0(at)\} = \frac{1}{s} - \frac{a^2}{2^2}\cdot\frac{2!}{s^3} + \frac{a^4}{2^2\cdot 4^2}\cdot\frac{4!}{s^5} - \cdots$$

$$\Rightarrow L\{J_0(at)\} = \frac{1}{s}\left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{s^2}\right) + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{a^2}{s^2}\right)^2 - \cdots\right\}$$

$$\Rightarrow L\{J_0(at)\} = \frac{1}{s}\left(1 + \frac{a^2}{s^2}\right)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow L\{J_0(at)\} = \frac{1}{s}\left(\frac{s^2}{s^2+a^2}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow L\{J_0(at)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$$

উভয় পক্ষকে a এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই [Differentiating both sides w. r. to a then we get]

$$L\{tJ_0'(at)\} = -\frac{1}{2}(s^2+a^2)^{-3/2}\cdot 2a$$

বা $L\{tJ_0'(at)\} = \dfrac{-a}{(s^2+a^2)^{3/2}}$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}\right\} = -\frac{t}{a}J_0'(at)$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}\right\} = -\frac{t}{a}\{-J_1(at)\};$$ যেহেতু $J_0'(x) = -J_1(x)$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}\right\} = \frac{tJ_1(at)}{a}.$$

উদাহরণ–6(i) : সমাধান কর [Solve] :

$$Y''(t) - 2Y'(t) - 8Y(t) = 0,\ Y(0) = 3,\ Y'(0) = 6.$$ **[NUH–2000]**

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণসমূহ [Given equations are]

$$Y''(t) - 2Y'(t) - 8Y(t) = 0 \cdots (1)$$

এবং $Y(0) = 3,\ Y'(0) = 6 \cdots (2)$

ধরি $L\{Y(t)\} = y(s)$, তবে $Y(t) = L^{-1}\{y(s)\}$

এখন (1) নং এ ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform on (1) we get]

$$L\{Y''(t)\} - 2L\{Y'(t)\} - 8L\{Y(t)\} = 0$$

বা $s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) - 2\{sy(s) - Y(0)\} - 8y(s) = 0$

বা $s^2y(s) - 3s - 6 - 2\{sy(s) - 3\} - 8y(s) = 0$

বা $(s^2 - 2s - 8)\,y(s) - 3s - 6 + 6 = 0$

বা $y(s) = \dfrac{3s}{s^2 - 2s - 8}$

বা $y(s) = \dfrac{3s}{(s-4)(s+2)}$

বা $y(s) = \dfrac{12}{6(s-4)} + \dfrac{-6}{-6(s+2)}$

বা $y(s) = \dfrac{2}{s-4} + \dfrac{1}{s+2}$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking inverse Laplace transform on both sides then we get]

$$L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{s-4}+\frac{1}{s+2}\right\}$$

$$\text{বা } Y(t) = 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$

$$\text{বা } Y(t) = 2e^{4t}+e^{-2t}.$$

উদাহরণ–6(ii) ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$Y''(x) - Y'(x) = x$ যখন $Y(0) = 2$ এবং $Y'(0) = -3$. **[DUS–1990]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণসমূহ [Given equations are]

$$Y''(x) - Y'(x) = x \cdots (1)$$

এবং $Y(0) = 2,\ Y'(0) = -3 \cdots (2)$

ধরি $L\{Y(x)\} = y(s)$, তবে $Y(x) = L^{-1}\{y(s)\}$

এখন (1) নং এ ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform on (1), we get]

$$L\{Y''(x)\} - L\{Y'(x)\} = L(x)$$

$$\text{বা } s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) - \{sy(s) - Y(0)\} = \frac{1}{s^2}$$

$$\text{বা } s^2y(s) - 2s + 3 - sy(s) + 2 = \frac{1}{s^2}, \quad \text{(2) নং দ্বারা।}$$

$$\text{বা } (s^2 - s)\, y(s) = \frac{1}{s^2} + 2s - 5$$

$$\text{বা } y(s) = \frac{1}{s^2(s^2-s)} + \frac{2s}{s^2-s} - \frac{5}{s^2-s}$$

$$\text{বা } y(s) = \frac{1}{s^3(s-1)} + \frac{2}{s-1} - \frac{5}{s(s-1)} \cdots (2)$$

$$\text{ধরি } \frac{1}{s^3(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s-1} \cdots (3)$$

$$\text{বা } \frac{1}{s^3(s-1)} = \frac{As^2(s-1) + Bs(s-1) + C(s-1) + Ds^3}{s^3(s-1)}$$

$$\text{বা } 1 = As^2(s-1) + Bs(s-1) + C(s-1) + Ds^3 \cdots (4)$$

এখন (4) নং এ পর্যায়ক্রমে $s = 0$ এবং $s = 1$ বসাইয়া পাই [Putting $s = 0$ and $s = 1$ successively in (4) then we get]

$$1 = C(0 - 1) \Rightarrow C = -1$$

এবং $1 = D.1^3 \Rightarrow D = 1$

এখন (4) নং এর উভয় পক্ষ হইতে s^3 এবং s^2 এর সহগ সমীকৃত করিয়া পাই [Now equating the coefficients of s^3 and s^2 from both sides of (4) then we get]

$$0 = A + D, \quad \text{বা } A + 1 = 0 \Rightarrow A = -1$$

এবং $0 = -A + B$, বা $B - (-1) = 0 \Rightarrow B = -1$

$$\therefore (3) \Rightarrow \frac{1}{s^3(s-1)} = \frac{-1}{s} + \frac{-1}{s^2} - \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s-1} \cdots (5)$$

$$\text{এবং } \frac{5}{s(s-1)} = \frac{5}{s(0-1)} + \frac{5}{1(s-1)}$$

$$\text{বা } \frac{5}{s(s-1)} = -\frac{5}{s} + \frac{5}{s-1} \cdots (6)$$

এখন (5) নং এবং (6) নং এর সাহায্যে (2) নং কে নিম্নরূপে লিখা যায় [By using (5) and (6), (2) can be written as follows] :

$$y(s) = -\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s-1} + \frac{2}{s-1} + \frac{5}{s} - \frac{5}{s-1}$$

$$\text{বা } y(s) = \frac{4}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3} - \frac{2}{s-1}$$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর হইয়া পাই [Taking inverse Laplace transform on both sides then we get]

$$L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{4}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3} - \frac{2}{s-1}\right\}$$

$$\text{বা } Y(x) = 4L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} - 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}$$

$$\text{বা } Y(x) = 4(1) - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - 2e^x, \quad \text{যেহেতু } L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{x^n}{n!}$$

$$\therefore Y(x) = 4 - x - \frac{1}{2}x^2 - 2e^x.$$

উদাহরণ–6(iii) ঃ সমাধান কর [Solve] $Y''(t) + 9Y(t) = \cos 2t$ যদি $Y(0) = 1$ এবং $Y(\pi/2) = -1$. **[NUH–2000, NU(Pass)–2006, DUH–1993, 1988]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণসমূহ [Given equations are]

$$Y''(t) + 9Y(t) = \cos 2t \cdots (1)$$

এবং $Y(0) = 1,\ Y(\pi/2) = -1 \cdots (2)$

ধরি $L\{Y(t)\} = y(s)$, তবে $Y(t) = L^{-1}\{y(s)\}$

এখন (1) নং এ ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform in (1) then we get]

$$L\{Y''(t)\} + 9L\{Y(t)\} = L\{\cos 2t\}$$

বা $s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) + 9y(s) = \dfrac{s}{s^2 + 2^2}$

বা $s^2\, y(s) - s - Y'(0) + 9y(s) = \dfrac{s}{s^2 + 4}$, (2) নং দ্বারা।

বা $(s^2 + 9)\, y(s) - s - a = \dfrac{s}{s^2 + 4}$, যখন $a = Y'(0)$.

বা $(s^2 + 9)\, y(s) = \dfrac{s}{s^2 + 4} + s + a$

বা $y(s) = \dfrac{s}{(s^2 + 4)\,(s^2 + 9)} + \dfrac{s}{s^2 + 9} + \dfrac{a}{s^2 + 9}$

বা $y(s) = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{s}{s^2 + 4} - \dfrac{s}{s^2 + 9}\right) + \dfrac{s}{s^2 + 9} + \dfrac{a}{s^2 + 9}$

বা $y(s) = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{s}{s^2 + 4} + \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{s}{s^2 + 9} + \dfrac{a}{s^2 + 9}$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking inverse Laplace transform on both sides then we get]

$$L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{5} \cdot \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{4}{5} \cdot \frac{s}{s^2 + 9} + \frac{a}{s^2 + 9}\right\}$$

বা $Y(t) = \dfrac{1}{5} L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2 + 2^2}\right\} + \dfrac{4}{5} L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2 + 3^2}\right\} + \dfrac{a}{3} L^{-1}\left\{\dfrac{3}{s^2 + 3^2}\right\}$

বা $Y(t) = \dfrac{1}{5} \cos 2t + \dfrac{4}{5} \cos 3t + \dfrac{a}{3} \sin 3t \cdots (2)$

এখন (2) নং এ $t = \pi/2$ বসাইয়া পাই [Now putting $t = \pi/2$ in (2) then we get]

$$Y(\pi/2) = \frac{1}{5}\cos\pi + \frac{4}{5}\cos\frac{3\pi}{2} + \frac{a}{3}\sin\frac{3\pi}{2}$$

বা $-1 = -\frac{1}{5} + 0 + \frac{a}{3}(-1)$, (2) নং দ্বারা।

বা $1 = \frac{1}{5} + \frac{a}{3} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{4}{5}$

$\therefore$ (2) $\Rightarrow Y(t) = \frac{1}{5}\cos 2t + \frac{4}{5}\cos 3t + \frac{4}{5}\sin 3t.$

উদাহরণ–6(iv) : সমাধান কর [Solve] : $Y''(t) + 2Y'(t) + Y(t) = 4\sin t,$

$Y(0) = -2,\ Y'(0) = 1.$ **[NUH–2001]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ সমূহ [Given equations are]

$$Y''(t) + 2Y'(t) + Y(t) = 4\sin t \quad \cdots (1)$$

এবং $Y(0) = -2,\ y'(0) = 1 \cdots (2)$

ধরি $L\{Y(t)\} = y(s)$ তবে $Y(t) = L^{-1}\{y(s)\}$

এখন (1) নং এ ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform in (1) then we get]

$$L\{Y''(t) + 2Y'(t) + Y(t)\} = L\{4\sin t\}$$

বা $L\{Y''(t)\} + 2L\{Y'(t)\} + L\{Y(t)\} = 4L\{\sin t\}$

বা $s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) + 2\{sy(s) - Y(0)\} + y(s) = \frac{4}{s^2+1}$

বা $s^2y(s) + 2s - 1 + 2\{sy(s) + 2\} + y(s) = \frac{4}{s^2+1}$

বা $(s^2 + 2s + 1)\,y(s) = \frac{4}{s^2+1} - 2s + 1 - 4$

বা $(s+1)^2\,y(s) = \frac{4}{s^2+1} - 2s - 3$

বা $y(s) = \frac{4}{(s+1)^2(s^2+1)} - \frac{2s+3}{(s+1)^2}$

$$= \frac{4}{(s+1)^2(s^2+1)} - \frac{2(s+1)+1}{(s+1)^2}$$

$$= \frac{4}{(s+1)^2(s^2+1)} - \frac{2}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$\Rightarrow y(s) = -\frac{2}{s+1} + \frac{4 - s^2 - 1}{(s+1)^2 (s^2+1)}$$

$$= \frac{-2}{s+1} - \frac{s^2 - 3}{(s+1)^2 (s^2+1)} \cdots (3)$$

ধরি $\frac{s^2 - 3}{(s+1)^2 (s^2+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{Cs + D}{s^2+1} \cdots (4)$

বা $\frac{s^2 - 3}{(s+1)^2 (s^2+1)} = \frac{A(s+1)(s^2+1) + B(s^2+1) + (Cs+D)(s+1)^2}{(s+1)^2 (s^2+1)}$

বা $s^2 - 3 = A(s^3 + s^2 + s + 1) + B(s^2+1) + (Cs+D)(s^2+2s+1)$

বা $s^2 - 3 = A(s^3 + s^2 + s + 1) + B(s^2+1) + C(s^3 + 2s^2 + s) + D(s^2 + 2s + 1)$

উভয় পক্ষ হইতে একজাতীয় পদগুলো সমীকৃত করিয়া পাই [Equating like terms from both sides we get]

$0 = A + C \cdots$ (i), $\quad 1 = A + B + 2C + D \cdots$ (ii)

$0 = A + C + 2D \cdots$ (iii) এবং $-3 = A + B + D \cdots$ (iv)

(iii) – (i) $\Rightarrow 2D = 0 \Rightarrow D = 0$

(ii) – (iv) $\Rightarrow 1 + 3 = 2C \Rightarrow C = 2$

(iii) $\Rightarrow A + 2 + 0 = 0 \Rightarrow A = -2$

(iv) $\Rightarrow -2 + B + 0 = -3 \Rightarrow B = -1$

এখন (4) নং এ $A = -2$, $B - 1$, $C = 2$ এবং $D = 0$ স্থাপন করি [Now putting $A = -2$, $B = -1$, $C = 2$ and $D = 0$ in (4)]

$$\frac{s^2 - 3}{(s+1)^2 (s^2+1)} = \frac{-2}{s+1} + \frac{-1}{(s+1)^2} + \frac{2s + 0}{s^2+1}$$

$$\therefore (3) \Rightarrow y(s) = \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{2s}{s^2+1}$$

$$\text{বা } y(s) = -\frac{2s}{s^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking inverse Laplace transform on both sides, we get]

$$L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{-2s}{s^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2}\right\}$$

$$\text{বা } Y(t) = -2L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}$$

$$\text{বা } Y(t) = -2\cos t - te^{-t}.$$

উদাহরণ-6(v) ঃ সমাধান কর [Solve]

$$Y''(t) + Y(t) = t\cos 2t, \quad Y(0) = 0, Y'(0) = 0.$$ **[NUH-2004]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ সমূহ [Given equations are]

$$Y''(t) + Y(t) = t\cos 2t \cdots (1)$$

এবং $Y(0) = 0, Y'(0) = 0 \cdots (2)$

ধরি $L\{Y(t)\} = y(s)$ তবে $Y(t) = L^{-1}\{y(s)\}$

এখন (1) নং ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform in (1), we get]

$$L\{Y''(t) + Y(t)\} = L\{t\cos 2t\}$$

বা $L\{Y''(t)\} + L\{Y(t)\} = (-1)^1 \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{s}{s^2+4}\right)$

বা $s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) + y(s) = (-1)\left[\dfrac{1}{s^2+4} - \dfrac{2s^2}{(s^2+4)^2}\right]$

বা $s^2y(s) - 0 - 0 + y(s) = \dfrac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$

বা $(s^2+1)\,y(s) = \dfrac{(s^2+4)-8}{(s^2+4)^2}$

বা $(s^2+1)\,y(s) = \dfrac{1}{s^2+4} - \dfrac{8}{(s^2+4)^2}$

বা $y(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} - \dfrac{8}{(s^2+1)(s^2+4)^2}$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+4}\right] - \frac{8}{(s^2+1)(s^2+4)^2} \cdots (3)$$

এখন $\dfrac{1}{(s^2+1)(s^2+4)^2}$ এর আংশিক ভগ্নাংশ নির্ণয় করিব।

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)^2} = \frac{1}{(k+1)(k+4)^2}$$ যখন $s^2 = k$

আংশিক ভগ্নাংশের কভার আপ নিয়ম অনুসারে পাই

$$\frac{1}{(k+4)^2(k+1)} = \frac{1}{(k+4)^2(-4+1)} + \frac{A}{k+4} + \frac{1}{(-1+4)^2(k+1)}$$

বা $\dfrac{1}{(k+4)^2(k+1)} = -\dfrac{1}{3(k+4)^2} + \dfrac{A}{k+4} + \dfrac{1}{9(k+1)} \cdots (4)$

উভয় পক্ষে $k = 0$ বসাইয়া পাই [Putting $k = 0$ on both sides we get]

$$\frac{1}{16(1)} = \frac{1}{-3(16)} + \frac{A}{4} + \frac{1}{9}$$

বা $\frac{A}{4} = \frac{1}{16} + \frac{1}{3(16)} - \frac{1}{9} = \frac{9+3-16}{144} = \frac{-4}{9(16)}$

বা $A = \frac{-16}{9(16)} \Rightarrow A = -\frac{1}{9}$

$$(4) \Rightarrow \frac{1}{(k+4)^2\,(k+1)} = -\frac{1}{3(k+4)^2} - \frac{1}{9(k+4)} + \frac{1}{9(k+1)}$$

বা $\frac{1}{(s^2+4)^2\,(s^2+1)} = -\frac{1}{3(s^2+4)^2} - \frac{1}{9(s^2+4)} + \frac{1}{9(s^2+1)}$

$$\therefore (3) \Rightarrow y(s) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+4}\right] - 8\left[-\frac{1}{3(s^2+4)^2} - \frac{1}{9(s^2+4)} + \frac{1}{9(s^2+1)}\right]$$

বা $y(s) = \left(\frac{1}{3} - \frac{8}{9}\right)\frac{1}{s^2+1} + \left(\frac{-1}{3} + \frac{8}{9}\right)\frac{1}{s^2+4} + \frac{8}{3(s^2+4)^2}.$

$$y(s) = \frac{-5}{9}\cdot\frac{1}{s^2+1} + \frac{5}{9}\cdot\frac{1}{s^2+4} + \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{(s^2+4)^2}$$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking inverse Laplace transform on both sides, we get]

$$L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{-5}{9}\cdot\frac{1}{s^2+1} + \frac{5}{9}\cdot\frac{1}{s^2+4} + \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{(s^2+4)^2}\right\}$$

বা $Y(t) = \frac{-5}{9}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} + \frac{5}{9}\cdot\frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\} + \frac{8}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+2^2)^2}\right\}$

$$= \frac{-5}{9}\sin t + \frac{5}{18}\sin 2t + \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{16}(\sin 2t - 2t\cos 2t)$$

$$= -\frac{5}{9}\sin t + \left(\frac{5}{18} + \frac{1}{6}\right)\sin 2t - \frac{t\cos 2t}{3}$$

$$= -\frac{5}{9}\sin t + \frac{4}{9}\sin 2t - \frac{t\cos 2t}{3}.$$

উদাহরণ–6(vi) ঃ সমাধান কর [Solve] :

$$X''(t) - X(t) = 6\cos 2t,\ X(0) = 3,\ X'(0) = 1. \qquad \text{[NUH-2006]}$$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ সমূহ [Given equations are]

$$X''(t) - X(t) = 6\cos 2t \cdots (1)$$

এবং $X(0) = 3,\ X'(0) = 1 \cdots (2)$

111

ধরি $L\{X(t)\} = x(s)$ তবে $X(t) = L^{-1}\{x(s)\}$

এখন (1) নং এ ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform in (1), we get]

$$L\{X''(t) - X(t)\} = L\{6\cos 2t\}$$

বা $L\{X''(t)\} - L\{X(t)\} = 6\,L\{\cos 2t\}$

বা $s^2 x(s) - sX(0) - X'(0) - x(s) = 6 \cdot \dfrac{s}{s^2+4}$

বা $s^2 x(s) - 3s - 1 - x(s) = \dfrac{6s}{s^2+4}$

বা $(s^2 - 1)\,x(s) = 3s + 1 + \dfrac{6s}{s^2+4}$

বা $x(s) = \dfrac{3s+1}{s^2-1} + \dfrac{6s}{(s^2+4)(s^2-1)}$

বা $x(s) = \dfrac{3s}{s^2-1} + \dfrac{1}{s^2-1} + \dfrac{6}{5}\left[\dfrac{s}{s^2-1} - \dfrac{s}{s^2+4}\right]$

বা $x(s) = \left(3 + \dfrac{6}{5}\right)\dfrac{s}{s^2-1} + \dfrac{1}{s^2-1} - \dfrac{6}{5} \cdot \dfrac{s}{s^2+4}$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking inverse Laplace transform on both sides we get]

$$L^{-1}\{x(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{21}{5} \cdot \frac{s}{s^2-1} + \frac{1}{s^2-1} - \frac{6}{5} \cdot \frac{s}{s^2+4}\right\}$$

বা $X(t) = \dfrac{21}{5} \cdot L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2-1}\right\} + L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-1}\right\} - \dfrac{6}{5} \cdot L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+2^2}\right\}$

বা $X(t) = \dfrac{21}{5} \cdot \cosh t + \sinh t - \dfrac{6}{5}\cos 2t.$

উদাহরণ–6(vii) ঃ সমধান কর [Solve] :

$$Y''(t) - 6Y'(t) + 9Y(t) = t^2 e^{3t},\ Y(0) = 2,\ Y'(0) = 6.$$

[NUH–2002]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ সমূহ [Given equations are]

$$Y''(t) - 6Y'(t) + 9Y(t) = t^2 e^{3t} \cdots (1)$$

এবং $Y(0) = 2,\ Y'(0) = 6 \cdots (2)$

ধরি $L\{Y(t)\} = y(s)$ তবে $Y(t) = L^{-1}\{y(s)\}$

এখন (1) নং এ ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform in (1), we get]

$$L\{Y''(t) - 6Y'(t) + 9Y(t)\} = L\{t^2 e^{3t}\}$$

বা $L\{Y''(t)\} - 6L\{Y'(t)\} + 9L\{Y(t)\} = L\{t^2 e^{3t}\}$

বা $s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) - 6\{sy(s) - Y(0)\} + 9y(s) = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-3}\right)$

বা $s^2y(s) - 2s - 6 - 6sy(s) + 12 + 9y(s) = \frac{d}{ds}\frac{(-1)}{(s-3)^2}$

বা $(s^2 - 6s + 9)\, y(s) = 2s - 6 + \frac{(-1)(-2)}{(s-3)^3}$

বা $y(s) = \frac{2(s-3)}{(s-3)^2} + \frac{2}{(s-3)^5}$

বা $y(s) = \frac{2}{s-3} + \frac{2}{(s-3)^5}$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking inverse Laplace transform on both sides, we get]

$$L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{s-3} + \frac{2}{(s-3)^5}\right\}$$

বা $Y(t) = 2e^{3t} + 2\frac{t^4 e^{3t}}{4!}$

বা $Y(t) = 2e^{3t} + \frac{t^4 e^{3t}}{12}$.

উদাহরণ–6(viii) ঃ সমাধান কর [Solve] $Y''(t) + a^2Y(t) = F(t)$

যখন $Y(0) = 1,\ Y'(0) = -2$. **[NU(Pass)–2007, DUH–1994]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equations are]

$$Y''(t) + a^2Y(t) = F(t) \quad \cdots (1)$$

এবং $Y(0)] = 1. Y'(0) = -2 \quad \cdots (2)$

ধরি $L\{F(t)\} = f(s)$, $L\{Y(t)\} = y(s)$ তবে $Y(t) = L^{-1}\{y(s)\}$

এখন (1) নং এ ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform in (1) then we get]

$$L\{Y''(t)\} + a^2 L\{Y(t)\} = L\{F(t)\}$$

বা $s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) + a^2y(s) = f(s)$

বা $s^2y(s) - s + 2 + a^2y(s) = f(s)$, (2) নং দ্বারা।

বা $(s^2 + a^2)\, y(s) = s - 2 + f(s)$

বা $y(s) = \dfrac{s}{s^2 + a^2} - \dfrac{2}{s^2 + a^2} + \dfrac{f(s)}{s^2 + a^2}$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking inverse Laplace transform on both sides then we get]

$$L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + a^2} - \frac{2}{s^2 + a^2} + \frac{f(s)}{s^2 + a^2}\right\}$$

$$L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + a^2}\right\} - \frac{2}{a} L^{-1}\left\{\frac{a}{s^2 + a^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2 + a^2}\right\}$$

বা $Y(t) = \cos at - \dfrac{2}{a}\sin at + \dfrac{1}{a} L^{-1}\left\{f(s).\, \dfrac{a}{s^2 + a^2}\right\}$

বা $Y(t) = \cos at - \dfrac{2}{a}\sin at + \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^t F(u)\sin a(t-u)\, du$

[কনভলিউশন উপপাদ্যের সাহায্যে]

উদাহরণ–6(ix) ঃ সমাধান কর $Y'' - a^2Y = F(t)$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$Y''(t) - a^2Y(t) = F(t) \cdots (1)$$

ধরি $Y(0) = b$ এবং $Y'(0) = c \cdots (2)$

ধরি $L\{F(t)\} = f(s)$, $L\{Y(t)\} = y(s)$ তবে $Y(t) = L^{-1}\{y(s)\}$

এখন (1) নং এ ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform in (1) then we get]

$$L\{Y''(t)\} - a^2 L\{Y(t)\} = L\{F(t)\}$$

বা $s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) - a^2y(s) = f(s)$

বা $s^2y(s) - bs - c - a^2y(s) = f(s)$, (2) নং দ্বারা।

বা $(s^2 - a^2)\, y(s) = bs + c + f(s)$

বা $y(s) = \dfrac{bs}{s^2 - a^2} + \dfrac{c}{s^2 - a^2} + \dfrac{f(s)}{s^2 - a^2}$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking inverse Laplace transform on both sides then we get]

$$L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{bs}{s^2-a^2}+\frac{c}{s^2-a^2}+\frac{f(s)}{s^2-a^2}\right\}$$

বা $Y(t) = bL^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-a^2}\right\}+\frac{c}{a}L^{-1}\left\{\frac{a}{s^2-a^2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2-a^2}\right\}$

বা $Y(t) = b\cosh at+\frac{c}{a}\sinh at+\frac{1}{a}L^{-1}\left\{f(s)\cdot\frac{a}{s^2-a^2}\right\}$

বা $Y(t) = b\cosh at+\frac{c}{a}\sinh at+\frac{1}{a}\int_0^t F(u)\sinh a(t-u)\,du$

[By convolution theorem]

উদাহরণ–7(i) ঃ ল্যাপলাস রূপান্তর ব্যবহার করিয়া সমাধান কর [Solve by using the Laplace transform] :

$$\frac{dx}{dt}-y=e^t$$

$$\frac{dy}{dt}+x=\sin t,\text{ with } x(0)=1,\ y(0)=0$$

সমাধান ঃ দেওয়া আছে [Given that]

$$\frac{dx}{dt}-y=e^t \cdots (1)$$

$$\frac{dy}{dt}+x=\sin t \cdots (2)$$

$x(0)=1 \cdots (3)$ এবং $y(0)=0 \cdots (4)$

ধরি $L\{x\}=X \Rightarrow x=L^{-1}\{X\}$ এবং $L\{y\}=Y\Rightarrow y=L^{-1}\{Y\}$

(1) নং এর উভয় পক্ষে ল্যাপলাস রূপান্তর লই [Taking Laplace transform on both sides of (1)]

$$L\left\{\frac{dx}{dt}\right\}-L\{y\}=L\{e^t\}$$

বা $sX-x(0)-Y=\frac{1}{s-1}$

বা $sX-1-Y=\frac{1}{s-1}$; (3) নং দ্বারা।

বা $sX-Y=1+\frac{1}{s-1}$

বা $sX-Y=\frac{s}{s-1} \cdots (5)$

এখন (2) নং এর উভয় পক্ষে ল্যাপলাস রূপান্তর গ্রহণ করি [Now taking Laplace transform on both sides of (2)]

$$L\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + L\{x\} = L\{\sin t\}$$

বা $sY - y(0) + X = \frac{1}{s^2+1}$

বা $X + sY = \frac{1}{s^2+1} \cdots (6)$, যেহেতু $y(0) = 0$

$(5)\,s + (6) \Rightarrow (s^2+1)\,X = \frac{s^2}{s-1} + \frac{1}{s^2+1}$

বা $X = \frac{s^2}{(s-1)(s^2+1)} + \frac{1}{(s^2+1)^2} \cdots (7)$

ধরি $\frac{s^2}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} \cdots (8)$

বা $s^2 = A(s^2+1) + (Bs+C)(s-1) \cdots (9)$

বা $s^2 = As^2 + A + Bs^2 - Bs + Cs - C \cdots (10)$

এখন (9) নং $s = 1$ স্থাপন করি [Putting $s = 1$ in (9)]

$$1 = A(2) + 0 \Rightarrow A = 1/2$$

(10) নং এর উভয় পক্ষ হইতে s^2 এর সহগ এবং ধ্রুবসংখ্যা সমীকৃত করি [Equating the coefficient of s^2 and constant terms from both sides of (10)]

$1 = A + B$, বা $1 = \frac{1}{2} + B \Rightarrow B = \frac{1}{2}$

এবং $0 = A - C$, বা $0 = \frac{1}{2} - C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

$\therefore (8) \Rightarrow \frac{s^2}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{1}{2(s-1)} + \frac{s+1}{2(s^2+1)}$

$\therefore (7) \Rightarrow X = \frac{1}{2(s-1)} + \frac{s+1}{2(s^2+1)} + \frac{1}{(s^2+1)^2}$

বা $X = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{2}{(s^2+1)^2}\right]$

বা $X = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{s^2+1+2}{(s^2+1)^2}\right]$

বা $X = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{(1-s^2)+(2+2s^2)}{(s^2+1)^2}\right]$

বা $X = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{1-s^2}{(s^2+1)^2} + \frac{2}{s^2+1}\right]$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর গ্রহণ করি [Taking inverse Laplace transform on both sides]

$$L^{-1}\{X\} = \frac{1}{2} L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+1} + \frac{1-s^2}{(s^2+1)^2}\right\}$$

$$\therefore x(t) = \frac{1}{2}[e^t + \cos t + 2\sin t - t\cos t]$$

$$\therefore (6) \Rightarrow sY = \frac{1}{s^2+1} - X$$

$$\text{বা } sY = \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{(s^2+1)^2} - \frac{s^2}{(s-1)(s^2+1)}; \text{ by (7)}$$

$$\text{বা } Y = \frac{1}{s(s^2+1)} - \frac{1}{s(s^2+1)^2} - \frac{s}{(s-1)(s^2+1)}$$

$$\text{বা } Y = \frac{s^2+1-1}{s(s^2+1)^2} - \frac{s}{(s-1)(s^2+1)}$$

$$\text{বা } Y = \frac{s^2}{s(s^2+1)^2} - \frac{s}{(s-1)(s^2+1)} \cdots (11)$$

$$\text{ধরি } \frac{s}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{D}{s-1} + \frac{Es+F}{s^2+1} \cdots (12)$$

$$\text{বা } s = D(s^2+1) + (Es+F)(s-1) \cdots (13)$$

(13) নং এ $s = 1$ বসাই [Putting $s = 1$ in (13)]

$$1 = D(2) + 0 \Rightarrow D = 1/2$$

(13) নং এর উভয় পক্ষ হইতে s^2 এবং s এর সহগ সমীকৃত করি [Equating the coefficients of s^2 and s from both sides of (13)]

$$0 = D + E, \text{ বা } 0 = \frac{1}{2} + E \Rightarrow E = -\frac{1}{2}$$

$$\text{এবং } 1 = -E + F, \text{ বা } 1 = \frac{1}{2} + F \Rightarrow F = \frac{1}{2}$$

$$\therefore (12) \Rightarrow \frac{s}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{1}{2(s-1)} - \frac{s-1}{2(s^2+1)}$$

$$\therefore (11) \Rightarrow Y = \frac{s}{(s^2+1)^2} - \frac{1}{2(s-1)} + \frac{s-1}{2(s^2+1)}$$

$$\text{বা } Y = \frac{1}{2}\left[\frac{2s}{(s^2+1)^2} - \frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}\right]$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{Y\} = \frac{1}{2} L^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2+1)^2} - \frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}[t\sin t - e^t + \cos t - \sin t]$$

∴ নির্ণেয় সমাধান [Required solution is]

$$x = \frac{1}{2}[e^t + \cos t + 2\sin t - t\cos t]$$

$$y = \frac{1}{2}[t\sin t - e^t + \cos t - \sin t]$$

উদাহরণ–7(ii) ঃ ল্যাপলাস রূপান্তর ব্যাবহার করিয়া সমাধান কর [Solve by using the Laplace transform] :

$$(D^2 + 2)x - Dy = 1$$

$$Dx + (D^2 + 2)y = 0$$

with $t > 0$; $x = 0$, $Dx = Dy = y = 0$ when $t = 0$.

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণসমূহকে নিম্নরূপে লিখা যায় [Given equations can be written as follows]

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 2x = 1 \cdots (1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 2y = 0 \cdots (2)$$

$$x(0) = 0 \cdots (3),\ x'(0) = y'(0) = y(0) = 0 \cdots (4)$$

ধরি $L\{x\} = X \Rightarrow x = L^{-1}\{X\}$ এবং $L\{y\} = Y \Rightarrow y = L^{-1}\{Y\}$

(1) নং এবং (2) নং এর উভয় পক্ষে পর্যায়ক্রমে ল্যাপলাস রূপান্তর গ্রহণ করি [Taking Laplace transform on both sides of (1) and (2) successively]

$$L\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} - L\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + 2L\{x\} = L\{1\}$$

বা $s^2X - sx(0) - x'(0) - \{sY - y(0)\} + 2X = \frac{1}{s}$

বা $s^2X - 0 - 0 - sY + 0 + 2X = \frac{1}{s}$; by (3) and (4)

বা $(s^2 + 2)X - sY = \frac{1}{s} \cdots (5)$

এবং $L\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} + L\left\{\frac{dx}{dt}\right\} + 2L\{y\} = 0$

বা $s^2Y - sy(0) - y'(0) + sX - x(0) + 2Y = 0$

বা $s^2Y - 0 - 0 + sX - 0 + 2Y = 0$; (3) নং এবং (4) নং দ্বারা ।

বা $sX + (s^2 + 2)Y = 0 \cdots (6)$

এখন (5) s − (6) $(s^2+2) \Rightarrow -s^2Y - (s^2+2)^2 Y = 1$

বা $[(s^2+2)^2 + s^2]Y = -1$

বা $[s^4 + 5s^2 + 4]Y = -1$

বা $(s^2+4)(s^2+1)Y = -1$

বা $Y = \dfrac{-1}{(s^2+4)(s^2+1)}$

বা $Y = \dfrac{-1}{3}\left[\dfrac{1}{s^2+1} - \dfrac{1}{s^2+4}\right] \cdots (7)$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর গ্রহণ করি [Taking inverse Laplace transform on both sides]

$$L^{-1}\{Y\} = -\frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+4}\right\}$$

বা $L^{-1}\{Y\} = -\dfrac{1}{3}L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+1}\right\} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}L^{-1}\left\{\dfrac{2}{s^2+2^2}\right\}$

বা $y = -\dfrac{1}{3}\sin t + \dfrac{1}{6}\sin 2t$

$\therefore$ (6) $\Rightarrow sX = -(s^2+2)Y$

বা $sX = \dfrac{1}{3}(s^2+2)\cdot\left[\dfrac{1}{s^2+1} - \dfrac{1}{s^2+4}\right]$; by (7)

বা $sX = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{(s^2+1)+1}{s^2+1} - \dfrac{(s^2+4)-2}{s^2+4}\right]$

বা $sX = \dfrac{1}{3}\left[1 + \dfrac{1}{s^2+1} - 1 + \dfrac{2}{s^2+4}\right]$

বা $X = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{s(s^2+1)} + \dfrac{2}{s(s^2+4)}\right]$

বা $X = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+1} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+4}\right)\right]$

বা $X = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{2s} - \dfrac{s}{s^2+1} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{s}{s^2+4}\right]$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপল্যাস রূপান্তর গ্রহণ করি [Taking inverse Laplace transform on both sides]

$$L^{-1}\{X\} = \frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+2^2}\right\}$$

বা $x = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{3}{2}\cdot 1 - \cos t - \dfrac{1}{2}\cos 2t\right]$

$\therefore x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\cos t - \dfrac{1}{6}\cos 2t$

∴ নির্ণেয় সমাধান [Required solution is]

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{6}\cos 2t \\ Y &= -\frac{1}{3}\sin t + \frac{1}{6}\sin 2t \end{aligned}\right\}.$$

উদাহরণ–7(iii) ঃ ল্যাপলাস রূপান্তর ব্যবহার করিয়া সমাধান কর [Solve by using the Laplace transform] :

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} - 2x + 2y = 1 - 2t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + x = 0$$

যখন $x(0) = 0,\ y(0) = 0,\ x'(0) = 0$

সমাধান ঃ দেওয়া আছে [Given that]

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} - 2x + 2y = 1 - 2t \cdots (1)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + x = 0 \cdots (2)$$

যখন [when] $x(0) = 0 \cdots (3)$, $y(0) = 0 \cdots (4)$ এবং $x'(0) = 0 \cdots (5)$

ধরি $L\{x\} = X$ তবে $x = L^{-1}\{X\}$ এবং $L\{y\} = Y$ তবে $y = L^{-1}\{Y\}$

(1) নং এ ল্যাপলাস রূপান্তর গ্রহণ করি [Taking Laplace transform in (1)]

i.e. $L\left\{\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} - 2x + 2y\right\} = L\{1 - 2t\}$

বা $sX - x(0) - sY + y(0) - 2X + 2Y = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2}$

বা $sX - 0 - sY + 0 - 2X + 2Y = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2}$; by (3), (4)

বা $(s - 2)X - (s - 2)Y = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2} \cdots (6)$

এখন (2) নং এ ল্যাপলাস রূপান্তর গ্রহণ কর [Now taking Laplace transform in (2)]

i.e. $L\left\{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + x\right\} = 0$

বা $s^2X - sx(0) - x'(0) + 2sY - 2y(0) + X = 0$

বা $s^2X - 0 - 0 + 2sY - 0 + X = 0$

বা $(s^2 + 1)X + 2sY = 0 \cdots (7)$

(6) নং এবং (7) নং এ আছে [We have in (6) and (7)]

$$(s-2)X-(s-2)Y-\left(\frac{1}{s}-\frac{2}{s^2}\right)=0$$

$$(s^2+1)X+2sY-0=0$$

$$\therefore \frac{X}{0+2-4/s}=\frac{Y}{-(s^2+1)\left(\frac{1}{s}-\frac{2}{s^2}\right)-0}=\frac{1}{2s(s-2)+(s^2+1)(s-2)}$$

$$\Rightarrow X=\frac{2-4/s}{(s-2)(s^2+2s+1)}$$ এবং $$Y=\frac{(s^2+1)(2/s^2-1/s)}{(s-2)(2s+s^2+1)}$$

বা $X=\dfrac{2(s-2)}{s(s-2)(s+1)^2}=\dfrac{2}{s(s+1)^2}$ ... (8)

ধরি $\dfrac{2}{s(s+1)^2}=\dfrac{2}{s(0+1)^2}+\dfrac{2}{-1(s+1)^2}+\dfrac{A}{s+1}$

বা $\dfrac{2}{s(s+1)^2}=\dfrac{2}{s}-\dfrac{2}{(s+1)^2}+\dfrac{A}{s+1}$ ... (9)

(9) নং এ s = 1 বসাইয়া পাই [Putting s = 1 in (9) we get]

$$\frac{2}{1(4)}=\frac{2}{1}-\frac{2}{4}+\frac{A}{2}.$$

বা $\dfrac{A}{2}=\dfrac{2}{4}+\dfrac{2}{4}-2$, বা $\dfrac{A}{2}=-1\Rightarrow A=-2.$

$$(9)\Rightarrow\frac{2}{s(s+1)^2}=\frac{2}{s}-\frac{2}{(s+1)^2}-\frac{2}{s+1}$$

$$\Rightarrow X=\frac{2}{s}-\frac{2}{(s+1)^2}-\frac{2}{s+1};\ \text{by (8)}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{X\}=L^{-1}\left\{\frac{2}{s}-\frac{2}{(s+1)^2}-\frac{2}{s+1}\right\}$$

$$\Rightarrow x=2-2te^{-t}-2e^{-t}$$

$$\therefore x=2(1-te^{-t}-e^{-t})$$

এবং $Y=\dfrac{(s^2+1)(2-s)}{s^2(s-2)(s+1)^2}$

$$=\frac{-(s-2)(s^2+1)}{s^2(s-2)(s+1)^2}=\frac{-(s^2+1)}{s^2(s+1)^2}\ \cdots(10)$$

ধরি $\dfrac{s^2+1}{s^2(s+1)^2}=\dfrac{A}{s}+\dfrac{B}{s^2}+\dfrac{C}{s+1}+\dfrac{D}{(s+1)^2}$ ... (11)

বা $s^2+1=As(s+1)^2+B(s+1)^2+Cs^2(s+1)+Ds^2$ ... (12)

(12) নং এ পর্যায়ক্রমে s = 0 এবং s = – 1 বসাই

$1=B(1)\Rightarrow B=1$, এবং $2=D(1)\Rightarrow D=2$

উভয় পক্ষ হইতে s এবং s^2 এর সহগ সমীকৃত করিয়া পাই

$$0 = A + 2B, \text{ বা } A = -2B \Rightarrow A = -2$$

এবং $1 = 2A + B + C + D$, বা $1 = -4 + 1 + C + 2 \Rightarrow C = 2$

$$(11) \Rightarrow \frac{s^2+1}{s^2(s+1)^2} = \frac{-2}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2}\text{; by (10)}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{Y\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2}\right\}$$

$$\Rightarrow y = 2 - t - 2e^{-t} - 2te^{-t}$$

$$= -t(1 + 2e^{-t}) + 2(1 - e^{-t})$$

∴ নির্ণেয় সমাধান [Required solution is]

$$\begin{cases} x = 2(1 - te^{-t} - e^{-t}) \\ y = -t(1 + 2e^{-t}) + 2(1 - e^{-t}). \end{cases}$$

উদাহরণ–8(i) ঃ ল্যাপলাস রূপান্তর ব্যবহার করিয়া সমাধান কর [Solve by using the Laplace transform] :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\ U(0, t) = 0,\ U(5, t) = 0$$

$$U(x, 0) = 10 \sin 4\pi x - 5 \sin 6\pi x.$$ **[NUH–2006]**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে [Given that]

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cdots (1),\ U(0, t) = 0 \cdots (2)$$

$$U(5, t) = 0 \cdots (3) \text{ এবং } U(x, 0) = 10 \sin 4\pi x - 5 \sin 6\pi x \cdots (4)$$

ধরি $L\{U(x, t)\} = u(x, s) = u$ তবে $U(x, t) = L^{-1}\{u(x, s)\} = L^{-1}\{u\}$

(1) নং এর উভয় পক্ষে ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking Laplace transform on both sides of (1) we get]

$$L\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} = L\left\{2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\}$$

বা $su - U(x, 0) = 2L\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\}$

বা $su - \{10 \sin 4\pi x - 5 \sin 6\pi x\} = 2\frac{d^2u}{dx^2}$; (4) নং দ্বারা।

বা $\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{s}{2}u = \frac{1}{2}(5 \sin 6\pi x - 10 \sin 4\pi x)$

বা $\left(D^2 - \frac{s}{2}\right)u = \frac{1}{2}(5 \sin 6\pi x - 10 \sin 4\pi x) \cdots (5)$, যখন $D = \frac{d}{dx}$

সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $D^2 - \frac{s}{2} = 0$ বা $D^2 = \frac{s}{2} \Rightarrow D = \pm\sqrt{s/2}$

$\therefore u_c = c_1 e^{\sqrt{s/2}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{s/2}\,x}$

. বিশেষ ইনটিগ্যাল [Particular integral is]

$$u_p = \frac{1}{D^2 - s/2} \cdot \frac{1}{2} (5 \sin 6\pi x - 10 \sin 4\pi x)$$

বা $u_p = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{D^2 - s/2} \sin 6\pi x - 5 \cdot \frac{1}{D^2 - s/2} \sin 4\pi x$

$$= \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{-36\pi^2 - s/2} \sin 6\pi x - 5 \cdot \frac{1}{-16\pi^2 - s/2} \sin 4\pi x$$

$$= -\frac{5}{2} \cdot \frac{2 \sin 6\pi x}{72\pi^2 + s} + \frac{5(2 \sin 4\pi x)}{32\pi^2 + s}$$

$$= \frac{10 \sin 4\pi x}{s + 32\pi^2} - \frac{5 \sin 6\pi x}{s + 72\pi^2}$$

$\therefore$ (5) নং এর সাধারণ সমাধান [General solution of (5) is]

$u = u_c + u_p$

বা $u(x, s) = c_1 e^{\sqrt{s/2}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{s/2}\,x} + \frac{10 \sin 4\pi x}{s + 32\pi^2} - \frac{5 \sin 6\pi x}{s + 72\pi^2} \cdots (6)$

এখণ (2) নং এবং (3) নং সীমা শর্তে ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform on the boundary conditions (2) and (3), we get]

$L\{U(0, t)\} = u(0, s) = 0 \cdots (7)$

এবং $L\{U(5, t)\} = u(5, s) = 0 \cdots (8)$

(6) নং এ পর্যায়ক্রমে $x = 0$ এবং $x = 5$ স্থাপন করিয়া পাই [Putting $x = 0$ and $x = 5$ in (6) successively, we get]

$u(0, s) = c_1 + c_2 + 0$

বা $0 = c_1 + c_2$, (7) নং দ্বারা।

$\Rightarrow c_1 = -c_2 \cdots (9)$

এবং $u(5, s) = c_1 e^{5\sqrt{s/2}} + c_2 e^{-5\sqrt{s/2}} + 0$; যেহেতু $\sin 20\pi = 0$, $\sin 30\pi = 0$.

বা $0 = -c_2 e^{5\sqrt{s/2}} + c_2 e^{-5\sqrt{s/2}}$, by (8) and (9)

বা $c_2(e^{-5\sqrt{s/2}} - e^{5\sqrt{s/2}}) = 0$

$\Rightarrow c_2 = 0$, যেহেতু [since] $e^{-5\sqrt{s/2}} - e^{5\sqrt{s/2}} \neq 0$

$\therefore (9) \Rightarrow c_1 = 0$

$\therefore (6) \Rightarrow u(x, s) = \dfrac{10 \sin 4\pi x}{s + 32\pi^2} - \dfrac{5 \sin 6\pi x}{s + 72\pi^2}$

$\Rightarrow L^{-1}\{u(x, s)\} = L^{-1}\left\{\dfrac{10 \sin 4\pi x}{s + 32\pi^2} - \dfrac{5 \sin 6\pi x}{s + 72\pi^2}\right\}$

$\Rightarrow U(x, t) = 10 \sin 4\pi x\, L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s + 32\pi^2}\right\} - 5 \sin 6\pi x\, L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s + 72\pi^2}\right\}$

$\Rightarrow U(x, t) = 10 \sin 4\pi x \cdot e^{-32\pi^2 t} - 5 \sin 6\pi x \cdot e^{-72\pi^2 t}$

$\therefore U(x, t) = 10e^{-32\pi^2 t} \sin 4\pi x - 5e^{-72\pi^2 t} \sin 6\pi x$

ইহাই নির্ণেয় সমাধান [Which is the required solution]

উদাহরণ–8(ii) ঃ ল্যাপলাস রূপান্তর ব্যবহার করিয়া সমাধান কর [Solve by using the Laplace transform] :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\ y(0, t) = 0,\ y(2, t) = 0,\ y_t(x, 0) = 0$$

$$y(x, 0) = 20 \sin 2\pi x - 10 \sin 5\pi x.$$

সমাধান ঃ দেওয়া আছে [Given that]

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdots (1),\ y(0, t) = 0 \cdots (2),\ y(2, t) = 0 \cdots (3)$$

$$y_t(x, 0) = 0 \cdots (4),\ y(x, 0) = 20 \sin 2\pi x - 10 \sin 5\pi x \cdots (5)$$

ধরি $L\{y(x, t)\} = Y(x, s) = Y$ তবে $y(x, t) = L^{-1}\{Y(x, s)\} = L^{-1}\{Y\}$

(1) নং এর উভয় পক্ষে ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking Laplace transform on both sides of (1), we get]

$$L\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right\} = L\left\{9\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right\}$$

বা $s^2 Y - sy(x, 0) - y_t(x, 0) = 9L\left\{\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right\}$

বা $s^2 Y - s(20 \sin 2\pi x - 10 \sin 5\pi x) - 0 = 9\dfrac{d^2 Y}{dx^2}$; by (4) & (5)

বা $\dfrac{d^2 Y}{dx^2} - \dfrac{s^2}{9} Y = -\dfrac{20}{9} s \sin 2\pi x + \dfrac{10}{9} s \sin 5\pi x$

বা $\left(D^2 - \dfrac{s^2}{3^2}\right) Y = \dfrac{-20}{9} s \sin 2\pi x + \dfrac{10}{9} s \sin 5\pi x \cdots (6)$

∴ সহায়ক সমীকরণ [Auxiliary equation is]

$D^2 - \dfrac{s^2}{3^2} = 0$, বা $D^2 = \dfrac{s^2}{3^2} \Rightarrow D = \pm\dfrac{s}{3}$

$Y_c = c_1 e^{(s/3)x} + c_2 e^{-(s/3)x}$

বিশেষ ইনটিগ্যাল [Particular integral is]

$$Y_p = \frac{1}{D^2 - (s/3)^2}\left[\frac{-20}{9} s \sin 2\pi x + \frac{10s}{9}\sin 5\pi x\right]$$

$$= \frac{-20s}{9}\cdot\frac{1}{D^2 - s^2/9}\sin 2\pi x + \frac{10s}{9}\cdot\frac{1}{D^2 - s^2/9}\sin 5\pi x.$$

$$= \frac{-20s}{9}\cdot\frac{\sin 2\pi x}{-4\pi^2 - s^2/9} + \frac{10s}{9}\cdot\frac{\sin 5\pi x}{-25\pi^2 - s^2/9}$$

$$= \frac{-20s}{9}\cdot\frac{(-9\sin 2\pi x)}{36\pi^2 + s^2} - \frac{10s}{9}\cdot\frac{9\sin 5\pi x}{225\pi^2 + s^2}$$

$$= \frac{20s}{s^2 + 36\pi^2}\sin 2\pi x - \frac{10s}{s^2 + 225\pi^2}\sin 5\pi x$$

$\therefore$ (6) নং এর সাধারণ সমাধান [General solution of (6) is]

$$Y = Y_c + Y_p$$

বা $Y(x, s) = c_1 e^{(s/3)x} + c_2 e^{-(s/3)x} + \dfrac{20s \sin 2\pi x}{s^2 + 36\pi^2} - \dfrac{10s \sin 5\pi x}{s^2 + 225\pi^2}$ ... (7)

এখন (2) নং এবং (3) নং সীমা শর্তে ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform on the boundary conditions (2) and (3), we get]

$L\{y(0, t)\} = Y(0, s) = 0$ ... (8)

এবং $L\{y(2, t)\} = Y(2, s) = 0$ ... (9)

(7) নং এ $x = 0$ স্থাপন করি [Putting $x = 0$ in (7)]

$$Y(0, s) = c_1 + c_2 + 0$$

বা $0 = c_1 + c_2$; (8) নং দ্বারা।

$\Rightarrow c_1 = -c_2$ ... (10)

আবার (7) নং এ $x = 2$ স্থাপন করি [Again putting $x = 2$ in (7)]

$$Y(2, s) = c_1 e^{(s/3)2} + c_2 e^{-(s/3)2} + 0$$

বা $0 = -c_2 e^{(s/3)2} + c_2 e^{-(s/3)2}$; by (9)

বা $c_2 (e^{(s/3)2} - e^{-(s/3)2}) = 0$

$\Rightarrow c_2 = 0$, যেহেতু $e^{(s/3)2} - e^{-(s/3)2} \neq 0$

$\therefore (10) \Rightarrow c_1 = 0$

$\therefore (7) \Rightarrow Y(x, s) = \frac{20s}{s^2 + 36\pi^2} \sin 2\pi x - \frac{10s}{s^2 + 225\pi^2} \sin 5\pi x$

$\Rightarrow L^{-1}\{Y(x, s)\} = L^{-1}\left\{\frac{20s \cdot \sin 2\pi x}{s^2 + 36\pi^2} - \frac{10s \cdot \sin 5\pi x}{s^2 + 225\pi^2}\right\}$

$\Rightarrow L^{-1}\{Y(x, s)\} = 20 \cdot \sin 2\pi x \, L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + (6\pi)^2}\right\}$

$- 10 \cdot \sin 5\pi x \, L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + (15\pi)^2}\right\}$

$\Rightarrow y(x, t) = 20 \sin 2\pi x \cdot \cos 6\pi t - 10 \sin 5\pi x \cdot \cos 15\pi t.$

উদাহরণ-8(iii) ঃ ল্যাপলাস রূপান্তর ব্যবহার করিয়া সমাধান কর [Solve by using the Laplace transform] :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \; U_x(0, t) = 0, \; U(\pi/2, t) = 0$$

$$U(x, 0) = 20 \cos 3x - 5 \cos 9x.$$

সমাধান ঃ দেওয়া আছে [Given that]

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cdots (1), \; U_x(0, t) = 0 \cdots (2)$$

$U(\pi/2, t) = 0 \cdots (3)$ এবং $U(x, 0) = 20 \cos 3x - 5 \cos 9x \cdots (4)$

ধরি $L\{U(x, t)\} = u(x, s) = u$ তবে $U(x, t) = L^{-1}\{u(x, s)\} = L^{-1}\{u\}$

(1) নং এর উভয় পক্ষে ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking Laplace transform on both sides of (1), we get]

$$L\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} = L\left\{3\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\}$$

বা $su - U(x, 0) = 3L\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\}$

বা $su - (20 \cos 3x - 5 \cos 9x) = 3\frac{d^2u}{dx^2}$; (4) নং দ্বারা।

বা $\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{s}{3}u = -\frac{1}{3}(20 \cos 3x - 5 \cos 9x)$

বা $\left(D^2 - \frac{s}{3}\right)u = \frac{1}{3}(5 \cos 9x - 20 \cos 3x) \cdots (5)$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [Auxiliary equation is]

$D^2 - \frac{s}{3} = 0$, বা $D^2 = \frac{s}{3} \Rightarrow D = \pm\sqrt{s/3}$

$\therefore u_c = c_1 e^{\sqrt{s/3}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{s/3}\,x}$

$\therefore$ বিশেষ ইনটিগ্র্যাল [Particular integral is]

$$u_p = \frac{1}{D^2 - s/3} \cdot \frac{1}{3} (5\cos 9x - 20\cos 3x)$$

$$= \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{D^2 - s/3} \cos 9x - \frac{20}{3} \cdot \frac{1}{D^2 - s/3} \cos 3x$$

$$= \frac{5}{3} \cdot \frac{\cos 9x}{-9^2 - s/3} - \frac{20}{3} \cdot \frac{\cos 3x}{-3^2 - s/3}$$

$$= \frac{20}{3} \cdot \frac{\cos 3x}{9 + s/3} - \frac{5}{3} \cdot \frac{\cos 9x}{81 + s/3}$$

$$= \frac{20}{3} \cdot \frac{3\cos 3x}{s + 27} - \frac{5}{3} \cdot \frac{3\cos 9x}{s + 243}$$

$$= \frac{20\cos 3x}{s + 27} - \frac{5\cos 9x}{s + 243}$$

$\therefore$ (5) নং এর সাধারণ সমাধান [General solution of (5) is]

$$u = u_c + u_p$$

বা $u(x, s) = c_1 e^{\sqrt{s/3}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{s/3}\,x} + \frac{20\cos 3x}{s + 27} - \frac{5\cos 9x}{s + 243}$ ... (6)

এখন (2) নং এবং (3) নং সীমাশর্তে ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform on the boundary conditions (2) and (3), we get]

$$L\{U_x(0, t)\} = \frac{du(0, s)}{dx} = 0 \cdots (7)$$

এবং $L\{U(\pi/2, t)\} = u(\pi/2, s) = 0 \cdots (8)$

(6) নং কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করি [Differentiating (6) w. r. to x]

$$\frac{du(x, s)}{dx} = \sqrt{\frac{s}{3}}\, c_1 e^{\sqrt{s/3}\,x} - \sqrt{\frac{s}{3}}\, c_2 e^{-\sqrt{s/3}\,x}$$
$$- \frac{60\sin 3x}{s + 27} + \frac{45\sin 9x}{s + 243} \cdots (9)$$

(9) নং এ $x = 0$ স্থাপন করি [Putting $x = 0$ in (9)]

$$\frac{du(0, s)}{dx} = \sqrt{\frac{s}{3}}\, c_1 - \sqrt{\frac{s}{3}}\, c_2 - 0$$

বা $0 = \sqrt{\frac{s}{3}}\,(c_1 - c_2)$; (7); নং দ্বারা।

বা $c_1 - c_2 = 0$ যেহেতু $\sqrt{s/3} \neq 0$

$\therefore c_1 = c_2 \cdots (10)$

আবার (6) নং এ $x = \pi/2$ স্থাপন করি [Again putting $x = \pi/2$ in (6)]

$$u(\pi/2, s) = c_1 e^{(\pi/2)\sqrt{s/3}} + c_2 e^{-(\pi/2)\sqrt{s/3}} + 0$$

বা $0 = c_2 e^{(\pi/2)\sqrt{s/3}} + c_2 e^{-(\pi/2)\sqrt{s/3}}$; by (8) and (10)

বা $c_2 \{e^{(\pi/2)\sqrt{s/3}} + e^{-(\pi/2)\sqrt{s/3}}\} = 0$

$\therefore c_2 = 0$, যেহেতু [since] $e^{(\pi/2)\sqrt{s/3}} + e^{-(\pi/2)\sqrt{s/3}} \neq 0$

$\therefore (10) \Rightarrow c_1 = 0$

$$(6) \Rightarrow u(x, s) = \frac{20\cos 3x}{s+27} - \frac{5\cos 9x}{s+243}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{u(x, s)\} = L^{-1}\left\{\frac{20\cos 3x}{s+27} - \frac{5\cos 9x}{s+243}\right\}$$

$$\Rightarrow U(x, t) = 20\cos 3x\, L^{-1}\left\{\frac{1}{s+27}\right\} - 5\cos 9x\, L^{-1}\left\{\frac{1}{s+243}\right\}$$

$$\Rightarrow U(x, t) = 20\cos 3x \cdot e^{-27t} - 5\cos 9x \cdot e^{-243t}$$

$$\therefore U(x, t) = 20e^{-27t}\cos 3x - 5e^{-243t}\cos 9x$$

ইহাই নির্ণেয় সমাধান [Which is the required solution].

প্রশ্নমালা [EXERCISE]–7

1. নিম্নলিখিত ল্যাপলাস রূপান্তর সমূহ নির্ণয় কর ঃ

(i). $L(a)$, $L\{t^{-1/2}\}$ (ii). $L\{(t^2 - 3t + 2)\sin 3t)$

(iii). $L\{t^3 \cos t)$ (iv). $L\{J_0(t)\}$

(v). $L\{J_0(at)\}$ (vi). $L\{J_1(t)\}$

(vii). $L\{J_0(at)\}$ (viii). $L\{e^{-at} J_0(bt)\}$

2. নিম্নলিখিত বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর সমূহ নির্ণয় কর ঃ

(i). $L^{-1}\left\{\frac{2s}{4s^2+16}\right\}$ (ii). $L^{-1}\left\{\frac{b}{a^2s^2+b^2}\right\}$

(iii). $L^{-1}\left\{\frac{3s-4}{s^2-4s+8}\right\}$ (iii). $L^{-1}\left\{\frac{4s+12}{s^2+8s+16}\right\}$

[NUH-2000, 2006, 2008]

(v). $L^{-1}\left\{\frac{3s-8}{s^2+4}-\frac{4s-24}{s^2-16}\right\}$

3. নিম্নলিখিত বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর সমূহ নির্ণয় কর ঃ

(i). $L^{-1}\left\{\frac{2s-1}{(s+2)(s-3)}\right\}$ **[NUH-2006, 2009]**

(ii). $L^{-1}\left\{\frac{2s+16}{(s-3)(s+2)}\right\}$ (iii). $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s-2)}\right\}$

(iv). $L^{-1}\left\{\frac{3s+7}{(s-3)(s+1)}\right\}$ (v). $L^{-1}\left\{\frac{2s-1}{s(s-1)(s+1)}\right\}$

(vi). $L^{-1}\left\{\frac{19s+37}{(s-2)(s+1)(s+3)}\right\}$ (vii). $L^{-1}\left\{\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right\}$

(viii). $L^{-1}\left\{\frac{11s^2-2s+5}{(s-2)(2s-1)(s+1)}\right\}$ (ix). $L^{-1}\left\{\frac{8s+20}{s^2-12s+32}\right\}$

(x). $L^{-1}\left\{\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}\right\}$

(xi). $L^{-1}\left\{\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}\right\}$ **[NUH-2003]**

(xii). $L^{-1}\left\{\frac{s^2-2s+3}{(s-1)^2(s+1)}\right\}$ (xiii). $L^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2(s+3)}\right\}$.

4. নিম্নলিখিত বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর সমূহ নির্ণয় কর ঃ

(i). $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$ (ii). $L^{-1}\left\{\frac{4s}{(s-2)(s^2+4)}\right\}$

(iii). $L^{-1}\left\{\frac{27-12s}{(s+4)(s^2+9)}\right\}$.

5. নিম্নলিখিত বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর সমূহ নির্ণয় কর।

a(i). $L^{-1}\left\{\frac{2(s-a)}{(s-a)^2+b^2}+\frac{8-6s}{16s^2+9}+\frac{24-30\sqrt{s}}{s^4}\right\}$

(ii). $L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2s+5}}\right\}$ (iii). $L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+6s+25}\right\}$

(iv). $L^{-1}\left\{\dfrac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\}$

b(i). $L^{-1}\left\{\dfrac{se^{-2s}}{s^2+3s+2}\right\}$

(ii). $L^{-1}\left\{\dfrac{e^{4-3s}}{(s+4)^{5/2}}\right\}$

c(i). $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}$ [NUH-2004, 2005, 2008]

(ii). $L^{-1}\left\{\dfrac{s^2}{(s^2+4)^2}\right\}$ (iii). $L^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{(s^2+2s+1)^2}\right\}$

d(i). $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s+1)^3}\right\}$ (ii). $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s+1)^2}\right\}$

(iii). $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s^2+1)^2}\right\}$ (iv). $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^3(s+1)}\right\}$

(v). $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-1)^5(s+2)}\right\}$

e(i). $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+1)^3}\right\}$ (ii). $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+4)^3}\right\}$ [NUH-2007]

(iii). $L^{-1}\left\{\ln\dfrac{s+2}{s+1}\right\}$ (iv). $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\ln\dfrac{s+2}{s+1}\right\}$

(v). $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\ln\left(1+\dfrac{1}{s^2}\right)\right\}$

6. ল্যাপলাস রূপান্তরের সাহায্যে নিম্নলিখিত ডিফারিনসিয়াল সমীকরণ সমূহ সমাধান কর ঃ

(i). $Y''(x)+Y(x)=x$ যখন $Y(0)=0,\ Y'(0)=-3$ [DUH-1990]

(ii). $Y''(t)+Y(t)=0$ যখন $Y(0)=0,\ Y'(0)=1$

(iii). $Y''-Y'-2Y=t^2$ যখন $Y(0)=1,\ Y'(0)=3$ [DUH-1989]

(iv). $Y''(t)+9Y(t)=\cos t$ যদি $Y(0)=1,\ Y(\pi/2)=-1$ [DUH-1987]

(v). $Y''+2Y'+5Y=e^{-t}\sin t$ যদি $Y(0)=0,\ Y'(0)=1$

[NUH-2000, 2003, NU(Pass)-2009]

(vi). $Y''(t) + Y(t) = 1$ যখন $Y(0) = 2, Y'(0) = 0$

(vii). $Y''(t) + Y(t) = t$ যখন $Y(0) = 1, Y'(0) = -2$ [DUH-199

(viii). $Y'' - 3Y' + 2Y = 4e^{2t}$ যদি $Y(0) = -3, Y'(0) = 5$ [NU(Pass)-200

(ix). $Y'' + 2Y' + Y = 3te^{-t}$ যদি $Y(0) = 4, Y'(t) = 2$

(x). $Y''(t) + Y(t) = t$ যদি $Y(0) = 0, Y'(0) = 2$

(xi). $Y''(t) + 4Y(t) = 9t$ যদি $Y(0) = 0, Y'(0) = 7$

(xii). $Y''(t) - 3Y'(t) + 2Y(t) = 4t + 12e^{-t}$ যদি $Y(0) = 6, Y'(0) = -1$

(xiii). $Y''(t) + 2Y'(t) + 5Y(t) = e^{-t} \sin t$

(xiv). $Y''(t) - 4Y'(t) + 5Y(t) = 125t^2$ যদি $Y(0) = Y'(0) = 0$

(xv). $Y''(t) + Y(t) = 8\cos t$ যদি $Y(0) = 1, Y'(0) = -1$

(xvi). $Y'' + 9Y = 18t$ যদি $Y(0) = 0, Y(\pi/2) = 0$

(xvii). $Y''(t) + tY'(t) - Y(t) = 0$ যদি $Y(0) = 0, Y'(0) = 1$ [NUH-200

(xviii). $tY''(t) + (1 - 2t) Y'(t) - 2Y(t) = 0$ যদি $Y(0) = 1, Y'(0) = 2$

[DUH-199

(xix). $tY''(t) + 2Y'(t) + tY(t) = 0$ যদি $Y(0) = 1, Y(\pi) = 0$

(xx). $tY''(t) + Y'(t) + 4tY(t) = 0$ যদি $Y(0) = 3, Y'(0) = 0$

(xxi). $Y''(t) - tY'(t) + Y(t) = 1$ যদি $Y(0) = 1, Y'(0) = 2$

(xxii). $tY''(t) + (t - 1) Y'(t) - Y(t) = 0$ যদি $Y(0) = 5, Y(\infty) = 0$

(xxiii). $Y''' - 3Y'' + 3Y' - Y = t^2 e^t$ যদি $Y(0) = 1; Y'(t) = 0, Y''(0) = -2$

[NUH-2005, 200

(xxiv). $Y'' + k^2Y = F(t)$ যদি $Y(0) = A, Y'(0) = B$

(xxv). $Y'' - 4Y' + 3Y = F(t)$ যদি $Y(0) = 1, Y'(0) = 0$

(xxvi). $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = e^t, x(0) = 2, x'(0) = -1.$

7. ল্যাপলাস রূপান্তরের সাহায্যে নিম্নলিখিত ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ জোট সমাধান কর [Solve the following simultaneous differential equation by the Laplace transform] :

(i). $(D-2)x + 3y = 0$

$2x + (D-1)y = 0$

যখন [when] $x(0) = 8,\ y(0) = 3.$

(ii). $(D-2)x - (D+1)y = 6e^{3t}$

$(2D-3)x + (D-3)y = 6e^{3t}$

যখন $x(0) = 3,\ y(0) = 0.$

(iii). $\dfrac{dx}{dt} + y = \sin t$

$\dfrac{dy}{dt} + x = \cos t$

যখন $x(0) = 2,\ y(0) = 0.$

8. ল্যাপলাস রূপান্তর ব্যবহার করিয়া সমাধান কর [Solve by using the Laplace transform] :

(i). $\dfrac{\partial U}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(0,t) = 0$, $U(5,t) = 0$ এবং $U(x,0) = 10\sin 4\pi x.$

(ii). $\dfrac{\partial U}{\partial t} = 3\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U_x(0,t) = 0$, $U(\pi/2, t) = 0$ এবং $U(x,0) = 30\cos 5x.$

(iii). $\dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 4U$, $U(0,t) = 0$, $U(\pi, t) = 0$

এবং $U(x,0) = 6\sin x - 4\sin 2x$

(iv). $\dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(0,t) = 0$, $U(1,t) = 0$

$U(x,0) = 3\sin 2\pi x$ যেখানে $0 < x < 1,\ t > 0$

(v). $\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$, $Y(0,t) = 0$, $Y(2,t) = 0$

এবং $Y(x,0) = 20\sin 2\pi x - 10\sin 5\pi x$

(vi). $\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 16\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$, $Y_x(0,t) = 0$, $Y(3/2, t) = 0$

$Y(x,0) = 0$ এবং $Y_t(x,0) = 12\cos\pi x + 16\cos 3\pi x - 8\cos 5\pi x.$

উত্তরমালা [ANSWERS]–7

1(i). $L\{a\} = \frac{s}{a}$; $L\{t^{-1/2}\} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$

(ii). $\frac{6s^4 - 18s^3 + 126s^2 - 162s + 432}{(s^2+9)^3}$

(iii). $\frac{6(s^4 - 6s^2 + 1)}{(s^2+1)^4}$ (iv). $\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$

(v). $\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$ (vi). $\frac{\sqrt{s^2+1} - s}{\sqrt{s^2+1}}$

(vii). $\frac{s}{(s^2+a^2)^{3/2}}$ (viii). $\frac{1}{\sqrt{(s+a)^2+b^2}}$.

2(i). $\frac{\cos 2t}{2}$ (ii). $\frac{\sin(bt/a)}{a}$

(iii). $e^{2t}(3\cos 2t + \sin 2t)$ (iv). $4e^{-4t}(1-t)$

(v). $3\cos 2t - 4\sin 2t - 4\cosh 4t + 6\sinh 4t$.

3(i). $e^{-2t} + e^{3t}$ (ii). $2(11e^{3t} - 6e^{-2t})/5$

(iii). $(e^{2t} - e^{-t})/3$ (iv). $4e^{3t} - e^{-t}$

(v). $(2 + e^{t} - 3e^{-t})/2$ (v). $5e^{2t} - 3e^{-t} - 2e^{-3t}$

(vii). $(21e^{3t} - 8e^{2t} - e^{-t})/6$ (viii). $(10e^{2t} - 3e^{t/2} + 4e^{-t})/2$

(ix). $21e^{8t} - 13e^{4t}$ (x). $\frac{e^{2t}}{3} + 4te^{2t} - \frac{7t^2 e^{2t}}{2} - \frac{e^{-t}}{3}$

(xi). $e^{-t}(\sin t + \sin 2t)/3$ (xii). $(2te^{t} - e^{t} + 3e^{-t})/2$

(xiii). $(6t + 1 - e^{-3t})/9$ 4(i). $(e^{-t} - \cos t + \sin t)/2$

(ii). $e^{2t} - \cos 2t + \sin 2t$ (iii). $3(e^{-4t} - \cos 3t)$

5a(i). $2e^{at}\cos bt + \frac{2}{3}\sin\frac{3t}{4} - \frac{3}{8}\cos\frac{3t}{4} + 4t^3 - \frac{16t^{5/2}}{\sqrt{\pi}}$

(ii). $\frac{t^{-1/2} e^{-5t/2}}{\sqrt{2\pi}}$ (iii). $\frac{e^{-3t}(2\cos 4t - \sin 4t)}{2}$

(iv). $4e^{3t} - e^{-t}$ b(i). $2e^{-2t} - e^{-t}$

(ii). $\begin{cases} 4(t-3)^{3/2} e^{-4(t-4)}, & t > 3 \\ 0, & t < 3 \end{cases}$

(iii). $\begin{cases} \dfrac{e^{-(t-\pi)/2}}{\sqrt{3}}\left\{\sqrt{3}\cos\dfrac{\sqrt{3}(t-\pi)}{2}+\sin\dfrac{\sqrt{3}(t-\pi)}{2}\right\} & , \; t>\pi \\ 0 & , \; t<\pi \end{cases}$

c(i). $\dfrac{t\sin at}{2a}$ (ii). $\dfrac{2t\cos 2t+\sin 2t}{4}$

(iii). $\dfrac{te^{-t}\sin t}{2}$ d(i). $-\dfrac{e^{-t}(t^2+2t+2)}{2}+1$

(ii). $te^{-t}+2e^{-t}+t-2$ (iii). $(2t-3\sin t+t\cos t)/2$

(iv). $\dfrac{t^2}{2}-e^{-t}-t+1$

(v). $\dfrac{e^{t}}{72}\left(t^4-\dfrac{4t^3}{3}+\dfrac{4t^2}{3}-\dfrac{8t}{9}+\dfrac{8}{27}\right)-\dfrac{e^{-2t}}{243}$

e(i). $\{(3-t^2)\sin t-3t\cos t\}/8$

(ii). $t(\sin 2t-2t\cos 2t)/64$

(iii). $\dfrac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}$ (iv). $\displaystyle\int_0^t \frac{(e^{-u}-e^{-2u})}{u}\,du$

(v). $\displaystyle 2\int_0^t \frac{(1-\cos u)}{u}\,du$ (vi). $\dfrac{tJ_1(at)}{a}$

6(i). $Y(x)=x-4\sin x$ (ii). $Y(t)=\sin t$

(iii). $Y(t)=-\dfrac{3}{4}+\dfrac{t}{2}-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{17e^{2t}}{12}+\dfrac{e^{-t}}{3}$

(iv). $Y(t)=\dfrac{\sin t}{8}+\dfrac{9\sin 3t}{8}+\cos 3t$

(v). $Y(t)=e^{-t}(\sin t+2\sin 2t)/3$

(vi). $Y(t)=1+\cos t$

(vii). $Y(t)=t-3\sin t+\cos t$

(viii). $Y(t)=4e^{2t}-7e^{t}+4te^{2t}$

(ix). $Y(t)=(4+6t+t^3/2)e^{-t}$

(x). $Y(t)=t+\sin t$

(xi). $Y(t)=\dfrac{9t}{4}+\dfrac{19\sin 2t}{8}$

(xii). $Y(t)=3+2t+3e^{t}-2e^{2t}+2e^{-t}$

(xiii). $Y(t) = \frac{e^{-t}\sin t}{3} - \frac{e^{-t}\sin 2t}{6} + ae^{-t}\cos 2t + (a+b)\,e^{-t}\sin 2t$

(xiv). $Y(t) = 22 + 40t + 25t^2 - 22e^{2t}\cos t + 4e^{2t}\sin t$

(xv). $Y(t) = \cos t - \sin t + 4t\sin t$

(xvi). $Y(t) = 2t + \pi\sin 3t$

(xvii). $Y(t) = t$ (xviii). $Y(t) = e^{2t}$

(xix). $Y(t) = \frac{\sin t}{t}$ (xx). $Y(t) = 3J_0(2t)$

(xxi). $Y(t) = 1 + 2t$ (xxii). $Y(t) = 5e^{-t}$

(xxiii). $Y(t) = e^t - te^t - \frac{t^2 e^t}{2} + \frac{t^5 e^t}{60}$

(xxiv). $Y(t) = A\cos kt + \frac{B}{k}\sin kt + \frac{1}{k}\int_0^t F(u)\sin k(t-u)\,du$

(xxv). $T(t) = \frac{3e^t}{2} - \frac{e^{3t}}{2} + \frac{1}{2}\int_0^t (e^{3u} - e^u)\,F(t-u)\,du.$

7(i). $x = 5e^{-t} + 3e^{4t}$

$y = 5e^{-t} - 2e^{4t}$

(ii). $x = (1+2t)\,e^t + 2e^{3t}$

$y = (1-t)\,e^t - e^{3t}$

(iii). $x = e^t + e^{-t}$

$y = e^{-t} - e^t + \sin t.$

8(i). $U(x, t) = 10e^{-32\pi^2 t}\sin 4\pi x$

(ii). $U(x, t) = 30e^{-75t}\cos 5x$

(iii). $U(x, t) = 6e^{-5t}\sin x - 4e^{-8t}\sin 2x$

(iv). $U(x, t) = 3e^{-4\pi^2 t}\sin 2\pi x.$

(v). $Y(x, t) = 20\sin 2\pi x\cos 6\pi t - 10\sin 5\pi x\cos 15\pi t.$

(vi). $Y(x, t) = \frac{3}{\pi}\cos\pi x \cdot \sin 4\pi t + \frac{4}{3\pi}\cos 3\pi x \cdot \sin 12\pi t - \frac{2}{5\pi}\cos 5\pi x\sin 20\pi t.$

———x———