ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করি [Differentiating this w. r. to x]

$$e^x \frac{dy}{dx} + ye^x = 2x + 0$$

$$e^x \left[\frac{dy}{dx} + y\right] = 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} + y = 2xe^{-x}.$$ **(Proved)**

(1) নং এ $y(-1) = e + 3$ প্রয়োগ করি, অর্থাৎ (1) নং এ $x = -1$, $y = e + 3$ বসাইয়া পাই,

বা $(e+3)e^{-1} = (-1)^2 + c$

বা $1 + \frac{3}{e} = 1 + c \Rightarrow c = \frac{3}{e}$

$\therefore y = (x^2 + 3/e)\, e^{-x}$, ইহাই নির্দিষ্ট সমাধান।

উদাহরণ-2(i). $y = A\cos x + B\sin x$ সম্পর্ক হইতে ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ গঠন কর। [Form a differential equation from the relation $y = A\cos x + B\sin x$.] **[NUH–2010]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$y = A\cos x + B\sin x \cdots (1)$$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই [Differentiating this w. r. to x we get]

$$\frac{dy}{dx} = -A\sin x + B\cos x$$

ইহাকে আবার x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই [Again differe-ntiating this w. r. to x we get]

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -A\cos x - B\sin x$$

বা $\frac{d^2y}{dx^2} = -[A\cos x + B\sin x]$

বা $\frac{d^2y}{dx^2} = -y$; (1) নং দ্বারা [by (1)]

বা $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

ইহাই নির্ণেয় ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ। [This is the required differential equation]

উদাহরণ–2(ii). দেখাও যে $Ax^2 + By^2 = 1$ এর ডিফারেনসিয়ার সমীকরণ [Show that the differential equation of $Ax^2 + By^2 = 1$ is] **[NUH(NM)–2006]**

$$x\left[y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = y\frac{dy}{dx}.$$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is] ঃ

$$Ax^2 + By^2 = 1 \quad \cdots (1)$$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই [Differentiating this w. r. to x we get]

$$2Ax + 2By\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\text{বা } By\frac{dy}{dx} = -Ax$$

$$\text{বা } \frac{y}{x}\frac{dy}{dx} = -\frac{A}{B}$$

ইহাকে আবার x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই [Again differentiating this w. r. to x we get]

$$\frac{y}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{d}{dx}(u) - u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$$

$$\text{বা } \frac{y}{x}\frac{d^2y}{dx^2} + \left[\frac{x(dy/dx) - y.1}{x^2}\right]\cdot\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\text{বা } \frac{y}{x}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x^2}\left[x\frac{dy}{dx} - y\right]\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\text{বা } \frac{y}{x}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y}{x^2}\frac{dy}{dx}$$

$$\text{বা } xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y\frac{dy}{dx}$$

$$\text{বা } x\left[y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = y\frac{dy}{dx}.$$ প্রমাণিত।

উদাহরণ–2(iii). $xy^2 = ax + b\ ln\, x$, যেখানে a ও b ধ্রুবক, হইতে একটি সাধারণ অন্তরক সমীকরণ তৈরী কর এবং সমীকরণটি চিহ্নিত কর।

[Form an ODE from $xy^2 = ax + b\ ln\, x$, where a, b are constant and identify it]

[NUH–2000]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$xy^2 = ax + b\ ln\ x \cdots (1)$$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করি [Differentiating this w. r. to x]

$$2xy\frac{dy}{dx} + y^2 = a + \frac{b}{x}$$

বা $2x^2y\frac{dy}{dx} + xy^2 = ax + b$

আবার ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করি

$$2x^2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4xy\frac{dy}{dx} + 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 = a + 0$$

বা $2x^2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 6xy\frac{dy}{dx} + y^2 = a$

পুনরায় ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করি

$$2x^2y\frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + 4xy\frac{d^2y}{dx^2} + 4x^2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}$$
$$+ 4x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 6xy\frac{d^2y}{dx^2} + 6x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 6y\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

$$\therefore 2x^2y\frac{d^3y}{dx^3} + 6x^2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + 10xy\frac{d^2y}{dx^2} + 10x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 8y\frac{dy}{dx} = 0$$

যেহেতু সমীকরণটিতে অধীন চলক এবং ডেরিভেটিভ গুণ আকারে আছে এবং চতুর্থ পদে প্রথম ক্রমের মাত্রা দুই। কাজেই উহা একটি অরৈখিক ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ।

[Since the product of the dependent variable and its derivative is present and in the 4th term, degree of $\frac{dy}{dx}$ is two, so it is non-linear differential equation.]

উদাহরণ-2(iv). এমন একটি অন্তরক সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার একটি সমাধান $y = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$, যেখানে A ও B ইচ্ছাধীন ধ্রুবক এবং α একটি নির্দিষ্ট ধ্রুবক। প্রাপ্ত অন্তরক সমীকরণটির ঘাত এবং ক্রম কত? **[NUH–2004]**

[Obtain the differential equation of which $y = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$ is a solution, where A and B are arbitrary constants and α is a fixed constant. What are the degree and the order of the obtained differential equation?] **[NUH–2004]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$y = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x \cdots (1)$$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করি [Differentiating this w. r. to x]

$$\frac{dy}{dx} = -A\alpha\sin\alpha x + B\alpha\cos\alpha x$$

আবার ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করি [Again differentiating this w. r. to x]

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -A\alpha^2\cos\alpha x - B\alpha^2\sin\alpha x$$

বা $\frac{d^2y}{dx^2} = -\alpha^2(A\cos\alpha x + B\sin\alpha x)$

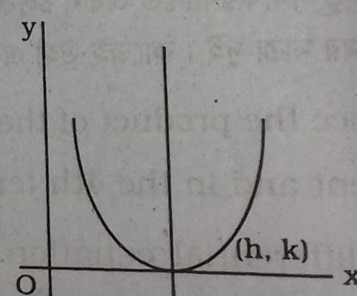
বা $\frac{d^2y}{dx^2} = -\alpha^2 y$; [by (1)]

বা $\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y = 0.$

প্রাপ্ত অন্তরক সমীকরণের ঘাত 1 এবং ক্রম 2.

উদাহরণ–3 ঃ প্রমাণ কর ঃ যে সকল প্যারাবোলার অক্ষ y অক্ষের সমান্তরাল তাহাদের ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$. [Prove : the differential equation of a parabolas whose axes are parallel to y-axis is $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$]

সমাধান ঃ যে সকল প্যারাবোলার অক্ষ, y অক্ষের সমান্তরাল তাহাদের সমীকরণ [The equation of parabolas, whose axes are parallel to y-axis is]



$$(x-h)^2 = 4a(y-k) \cdots (1)$$

যখন a, h, k অবাধ ধ্রুবক [when a, h, k are arbitrary constants]

(1) নং এর উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই [Differentiating both sides of (1) w. r. to x we get]

$$2(x-h) = 4a\frac{dy}{dx}$$

আবার উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই [Again differentiating both sides w. r. ot x we get]

$$1 = 2a\frac{d^2y}{dx^2}$$

বা $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2a}$

পুনরায় x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই [Also differentiating w. r. to x we get]

$\frac{d^3y}{dx^3} = 0.$ [প্রমাণিত]

উদাহরণ–4(i). $r = a(1 + \cos\theta)$ কার্ডিঅয়েডের জন্য প্রযোজ্য একটি ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ গঠন করে। [Form a differential equation for a cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$].

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$r = a(1 + \cos\theta) \cdots (1)$$

উভয় পক্ষকে θ এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই [Differentiating both sides w. r. to θ we get]

$$\frac{dr}{d\theta} = -a\sin\theta$$

বা $a = -\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{dr}{d\theta}$

এখন a এর মান (1) নং এর স্থাপন করিয়া পাই [Now putting the value of a in (1) we get]

$$r = -\frac{1}{\sin\theta}(1 + \cos\theta)\frac{dr}{d\theta}$$

বা $r\sin\theta = -(1 + \cos\theta)\frac{dr}{d\theta}$

বা $r\sin\theta + (1 + \cos\theta)\frac{dr}{d\theta} = 0$

ইহাই নির্ণেয় ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ। [The is the required differential quation]

আবার ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করি [Again differentiating this w. r. to x]

$$2\left[y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=0$$

$$\therefore y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0.$$

প্রশ্নমালা [EXERCISE]–1

1(i). $y = A\cos x + \sin x$ এর ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ নির্ণয় কর। [Find the differential equation of $y = A\cos x + \sin x$]

(ii). দেখাও যে $xy = c^2$ দ্বারা বর্ণিত হাইপারবোলা সমূহের ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ $xdy + ydx = 0$ [Show that $xdy + ydx = 0$ is the differential equation of hyperbolas represented by $xy = c^2$]

(iii). $y^2 = 4a(x + a)$ প্যারাবোলা সমূহের ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ গঠন কর। [Form the differential equation of parabolas $y^2 = 4a(x + a)$.]

[NU(Pass)–2006]

(iv). $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্ত সমূহের ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ নির্ণয় কর। [Find the differential equation of circles $x^2 + y^2 = a^2$].

(v). দেখাও যে সমকেন্দ্রিক বৃত্তের ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ $xdx + ydy = 0$ [Show that the differential equation of concentric circles is $xdx + ydy = 0$].

(vi) দেখাও যে x অক্ষকে মূলবিন্দুতে স্পর্শকারী বৃত্ত সমূহের ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ $(x^2 - y^2)dy - 2xy\,dx = 0$ [Show that the differential equation of circles touch the x-axis at the origin is $(x^2 - y^2)dy - 2xy\,dx = 0$].

[NUH(NM)–2005, 2007, 2012, NUH–2009]

2(i). $y = Ae^{2x} + Be^{-2x}$ রেখা হইতে ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ গঠন কর [Form the differential equation from the curve $y = Ae^{2x} + Be^{-2x}$].

(ii). $y = Ae^{3x} + Be^{-2x} + \sin 5x$ এর জন্য প্রযোজ্য একটি ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ গঠন কর। [Form a differential equation for the curve $y = Ae^{3x} + Be^{-2x} + \sin 5x$.]

(iii). $y = e^x(A\cos x + B\sin x)$ রেখা গোত্রের জন্য প্রযোজ্য একটি ডিফারেনসিয়ার সমীকরণ গঠন কর। [Form a differential equation of the family of curves $y = e^x(A\cos x + B\sin x)$]. **[NUH–2007, NU(Pass)–2008]**

(iv) $xy = ae^x + be^{-x} + x^2$ এর ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ গঠন কর। [Form a differential equation of $xy = ae^x + be^{-x} + x^2$].

(v). $xy = ae^x + be^{-x}$ সম্পর্ক হইতে ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ গঠন কর। [Form a differential equation from the relation $xy = ae^x + be^{-x}$].

(vi). $y = a\sinh x + b\cosh x$ সম্পর্ক হইতে ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ গঠন কর। [Form a differential equation from the relation $y = a\sinh x + b\cosh x$]

(vii). দেখাও যে $y = ax + bx^2$ সম্পর্কটির ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ $y = x\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{x^2}{2}\dfrac{d^2y}{dx^2}$ [Show that $y = x\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{x^2}{2}\dfrac{d^2y}{dx^2}$ is the differential equation of the relation $y = ax + bx^2$].

(viii). $y = a\ln x + b$ এর ডিফারেনসিয়ার সমীকরণ গঠন কর [Form a differential equation of $y = a\ln x + b$]. **[NU(Pass)–2008]**

(ix). দেখাও যে $v = \dfrac{A}{r} + B$ এর জন্য প্রযোজ্য ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ $\dfrac{d^2v}{dr^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{dv}{dr} = 0$ [Show that $\dfrac{d^2v}{dr^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{dv}{dr} = 0$ is the differential equation for $v = \dfrac{A}{r} + B$]. **[NUH(NM)–2004]**

(x). $x = a\cos t + b\sin t$ সম্পর্ক হইতে একটি ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ গঠন কর। [Form a differential equation from the relation $x = a\cos t + b\sin t$].

3. $y = ax + \dfrac{b}{x}$ এর ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ গঠন কর। [Form a differential equation of $y = ax + \dfrac{b}{x}$].

4(i). $r = a(1 - \cos\theta)$ কার্ডিঅয়েডের জন্য প্রযোজ্য একটি ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ গঠন কর। [Form a differntial equation for cardioide $r = a(1 - \cos\theta)$].

(ii). $r^2 = a^2\cos 2\theta$ বক্ররেখা হইতে ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ গঠন কর [Form a differential equation from the curve $r^2 = a^2\cos 2\theta$].

(iii). $r = a + b\cos\theta$ বক্ররেখা হইতে একটি ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ গঠন কর। [Form a differential equation from the curve $r = a + b\cos\theta$]

উত্তরমালা [ANSWERS]

1(i). $\cos x \frac{dy}{dx} + y\sin x = 1$ (iii). $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0$

(iv). $xdx + ydy = 0$

2(i). $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0$

(ii). $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = -31\sin 5x - 5\cos 5x$

(iii). $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ (iv). $x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - xy + x^2 - 2 = 0$

(v). $x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - xy = 0$ (vi). $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$

(viii). $x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$ (x). $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$

3. $x\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

4(i). $r\sin\theta = (1 - \cos\theta)\frac{dr}{d\theta}$ (ii). $r\sin 2\theta + \cos 2\theta \frac{dr}{d\theta} = 0$

(iii). $\frac{d^2r}{d\theta^2} = \cot\theta \frac{dr}{d\theta}$.

দ্বিতীয় অধ্যায় [CHAPTER–2]

2.1 ঃ প্রথম ক্রম এবং প্রথম ঘাতের ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ [First order and first degree differential equation] ঃ

সংজ্ঞা ঃ $M + N\frac{dy}{dx} = 0$, অথবা $Mdx + Ndy = 0$ এই আকারের ডিফারেনসিয়াল সমীকরণকে প্রথম ক্রম এবং প্রথম ঘাতের ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ বলা হয়, যখন M এবং N উভয়েই x ও y এর ফাংশন অথবা ধ্রুব সংখ্যা। [A differential equation of the form $M + N\frac{dy}{dx} = 0$, or $Mdx + Ndy = 0$ is called first order and first degree differential equation where both M and N are functions of x and y or constants].

2.2 ঃ সমাধানের সুবিদার্থে এবং আকারের ভিত্তিতে ইহাকে প্রধানতঃ ছয়ভাবে বিভক্ত করা যায়।

1. চলক পৃথকীকরণ [Separation of Variables].
2. সমমাত্রিক সমীকরণ [Homogeneous equation].
3. সমমাত্রায় প্রকাশযোগ্য সমীকরণ [Equation reducible to homogeneous].
4. প্রকৃত সমীকরণ [Exact equation].
5. একমাত্রিক সমীকরণ [Linear equation].
6. একমাত্রিক সমীকরণে প্রকাশযোগ্য সমীকরণ [Reducible to linear equation].

দ্বিতীয় অধ্যায় [CHAPTER–2]

প্রথম পরিচ্ছেদ [SECTION–1]

চলক পৃথকীকরণ
[Variables separable]

2-1.1 ঃ যদি Mdx + Ndy = 0 ডিফারেনসিয়াল সমীকরণকে $f(x)\,dx + \phi(y)\,dy = 0$ আকারে প্রকাশ করা যায়, তবে তাহাকে চলক পৃথকীকরণ করা হইয়াছে বলা হয়। [If the differential equation Mdx + Ndy = 0 can be expressed in the form $f(x)dx + \phi(y)dy = 0$ then it is called variables are separable.]

2-1.2 ঃ চলক পৃথকীকরণ যোগ্য সমীকরণ [Equation reducible to variables separable] ঃ

যদি ডিফারেনসিয়াল সমীকরণটি $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$ এই আকারে থাকে, তবে প্রতিস্থাপন পদ্ধতি দ্বারা ইহাকে চলক পৃথকীকরণ যোগ্য সমীকরণে পরিনত করা হয়। অর্থাৎ $ax + by + c = z$. [If the differential equation of the form $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$ it can be reduced to an equation in which variables can be separated by method of substitation. That is $ax + by + c = z$.]

যেমন, প্রদত্ত সমীকরণ [i. e. Given equation is]

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) \cdots (1)$$

ধরি [We put] $ax + by + c = z$

$$\therefore a + b\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

$$\text{বা } b\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - a$$

$$\text{বা } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left[\frac{dz}{dx} - a\right] \cdots (2)$$

এখন (1) নং এবং (2) নং হইতে পাই [From (1) and (2) we get]

$$\frac{1}{b}\left[\frac{dz}{dx} - a\right] = f(z)$$

$$\text{বা } \frac{dz}{dx} - a = bf(z)$$

বা $\dfrac{dz}{dx} = a + bf(z)$

বা $\dfrac{dz}{a + bf(z)} = dx.$

উপরের সমীকরণটিতে চলক পৃথক করিয়া সাজানো হইয়াছে। এখন শুধু ইনটিগ্রেট করিলেই সমাধান পাওয়া যায়।

নিয়ম-1 ঃ যদি ডিফারেনসিয়াল সমীকরণটি $f(x)\,dx + f(y)\,dy = 0$ এই আকারে থাকে, অর্থাৎ dx এর সাথে x এর ফাংশন এবং dy এর সাথে y এর ফাংশন থাকে, তবে কেবলমাত্র ইনটিগ্রেট করিলে সমাধান পাওয়া যায়।

যেমন $f(x)\,dx + f(y)\,dy = 0$

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx + \int f(y)\,dy = 0$$

$$\Rightarrow F(x) + F(y) = c \text{ যখন } \int f(x)\,dx = F(x).$$

নিয়ম-2 ঃ যদি কোন ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ $f(x)\,\varphi(y)\,dx + f(y)\,\varphi(x)\,dy = 0$ এই আকারে থাকে, তবে প্রদত্ত সমীকরণকে $\varphi(x)\,\varphi(y)$ দ্বারা ভাগ করিলে সমীকরণটি $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}dx + \dfrac{f(y)}{\varphi(y)}dy = 0$ আকার ধারণ করে। অর্থাৎ dx এর সাথে x এর ফাংশন এবং dy এর সাথে y এর ফাংশন থাকে। অতঃপর ইহাকে ইনটিগ্রেট করিলে সমাধান পাওয়া যায়।

নিয়ম-3 ঃ যদি ডিফারেনসিয়াল সমীকরণটি $\dfrac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$ এই আকারে থাকে, তবে $ax + by + c = z$ ধরিয়া সরলীকরণ করিয়া চলক পৃথকীকরণ করিতে হয়। অতঃপর কেবলমাত্র ইনটিগ্রেট করিলে সমাধান পাওয়া যায়।

উদাহরণমালা [EXAMPLES]

উদাহরণ-1 : সমাধান কর [Solve] :

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y^2+y+1}{x^2+x+1}=0.$$ **[NU(Pass)-2008, CUH-19**

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y^2+y+1}{x^2+x+1}=0$$

বা $$\frac{dy}{y^2+y+1}+\frac{dx}{x^2+x+1}=0$$

উভয় পক্ষকে ইনটিগ্রেট করি [Integrating both sides]

$$\int\frac{dy}{y^2+y+1}+\int\frac{dx}{x^2+x+1}=0$$

বা $$\int\frac{dy}{(y+1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}+\int\frac{dx}{(x+1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}=0$$

বা $$\frac{1}{\sqrt{3}/2}\tan^{-1}\left(\frac{y+1/2}{\sqrt{3}/2}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}/2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2}\right)=c$$

বা $$\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)=c.$$

উদাহরণ-2(i) : সমাধান কর [Solve] :

$$x\sqrt{1-y^2}\,dx+y\sqrt{1-x^2}\,dy=0.$$ **[NUH-2011, CUH-19**

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$x\sqrt{1-y^2}\,dx+y\sqrt{1-x^2}\,dy=0$$

উভয় পক্ষকে $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই [Dividing both si by $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$ we get]

$$\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}=0$$

উভয় পক্ষকে ইনটিগ্রেট করি [Integrating this]

i. e. $$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}=0$$

বা $$-\frac{1}{2}\int\frac{-2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{2}\int\frac{-2y\,dy}{\sqrt{1-y^2}}=0$$

বা $-\frac{1}{2}.2\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}.2\sqrt{1-y^2}=-c$

যেহেতু [Since] $\int\frac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)}}=2\sqrt{f(x)}$.

বা $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=c$.

উদাহরণ-2(ii) ঃসমাধান কর [Solve] : $\sec^2x \tan y\, dx+\sec^2y \tan x\, dy=0$.

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\sec^2x \tan y\, dx+\sec^2y \tan x\, dy=0$$

উভয় পক্ষকে tanx tany দ্বারা ভাগ করিয়া পাই [Dividing both sides by tanx. tany we get]

$$\frac{\sec^2x\, dx}{\tan x}+\frac{\sec^2y\, dy}{\tan y}=0$$

ইহাকে ইনটিগ্রেট করি [Integrating this]

i. e. $\int\frac{\sec^2x\, dx}{\tan x}+\int\frac{\sec^2y\, dy}{\tan y}=0$

বা $\ln(\tan x)+\ln(\tan y)=\ln c$; যেহেতু [Since] $\int\frac{f'(x)\,dx}{f(x)}=\ln f(x)$

বা $\ln(\tan x.\ \tan y)=\ln c$

$\therefore \tan x \tan y=c$.

উদাহরণ-2(iii) ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ $y-x\frac{dy}{dx}=a\left(y^2+\frac{dy}{dx}\right)$.

[NUH–2008]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$y-x\frac{dy}{dx}=a\left(y^2+\frac{dy}{dx}\right)$$

বা $y dx-x dy=ay^2dx+a dy$

বা $y(1-ay)\,dx=(x+a)\,dy$

বা $\frac{dx}{x+a}=\frac{dy}{y(1-ay)}$

বা $\frac{dx}{x+a}=\left\{\frac{1}{y(1-0)}+\frac{1}{(1/a)\,(1-ay)}\right\}dy$

বা $\frac{dx}{x+a}=\frac{dy}{y}+\frac{a dy}{1-ay}$

বা $\frac{dx}{x+a}-\frac{a dy}{1-ay}=\frac{dy}{y}$

উভয় পক্ষকে ইনটিগ্রেট করি [Integrating both sides]

i. e. $\int \frac{dx}{x+a} - \int \frac{a\,dy}{1-ay} = \int \frac{dy}{y}$

বা $ln(x+a) + ln(1-ay) = ln y + ln c$

বা $ln(x+a)(1-ay) = ln\, cy$

$\therefore (x+a)(1-ay) = cy.$

উদাহরণ-3(ii) ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$$\sin^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = x + y.$$

[NUH-05, NUH(NM)-05, NUH(Pass)-09, CUH-85]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$\sin^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = x + y$

বা $\frac{dy}{dx} = \sin(x+y) \cdots (1)$

ধরি $x + y = z$ তবে $1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$, বা $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1 \cdots (2)$

[We put $x + y = z$ then $1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$, or $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1 \cdots (2)$]

(1) নং এবং (2) নং হইতে পাই [From (1) and (2) we get]

$\frac{dz}{dx} - 1 = \sin z$

বা $\frac{dz}{dx} = 1 + \sin z$

বা $\frac{dz}{1+\sin z} = dx$

উভয় পক্ষকে ইনটিগ্রেট করি [Integrating both sides]

i. e. $\int \frac{dz}{1+\sin z} = \int dx$

বা $\int \frac{(1-\sin z)\,dz}{1-\sin^2 z} = \int dx$

বা $\int \frac{(1-\sin z)dz}{\cos^2 z} = \int dx$

বা $\int \sec^2 z\, dz - \int \sec z \tan z\, dz = \int dx$

বা $\tan z - \sec z = x + c$

বা $\tan(x+y) - \sec(x+y) = x + c.$

উদাহরণ-3(ii) ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ $\frac{dy}{dx} = (4x + y + 1)^2$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{dy}{dx} = (4x + y + 1)^2 \cdots (1)$$

ধরি $4x + y + 1 = z$ তবে $4 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$, বা $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 4 \cdots (2)$

[We put $4x + y + 1 = z$ then $4 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$, or $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 4 \cdots (2)$]

(1) নং এবং (2) নং হইতে পাই [From (1) and (2) we get]

$$\frac{dz}{dx} - 4 = z^2$$

বা $\frac{dz}{dx} = 4 + z^2$

বা $\frac{dz}{4 + z^2} = dx$

উভয় পক্ষকে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating both sides we get]

$$\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{z}{2} = x + \frac{c}{2}$$

বা $\tan^{-1}\frac{z}{2} = 2x + c$

বা $\frac{z}{2} = \tan(2x + c)$

বা $4x + y + 1 = 2\tan(2x + c)$.

নিচের টুকু জানতে হবে

উদাহরণ-3(iii). সমাধান কর [Solve] :

$\frac{dy}{dx} = 1 + e^{x-y}$ **[NU(Pass)-2009, NUH(NM)-2004]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{dy}{dx} = 1 + e^{x-y} \cdots (1)$$

ধরি $x - y = z$ তবে $1 - \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$ বা $1 - \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdots (2)$

(1) নং এবং (2) নং হইতে পাই [From (1) and (2) we get]

$$1 - \frac{dz}{dx} = 1 + e^z$$

বা $-\frac{dz}{dx} = e^z$, বা $-e^{-z}\frac{dz}{dx} = 1$, বা $-e^{-z}dz = dx$

উভয় পক্ষকে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating both sides we get]

$e^{-z} = x + c$, যখন c অবাধ ধ্রুবক।

$\therefore e^{-(x-y)} = x + c$.

সমাধান কর [Solve] ঃ

1(i). $dy = (y^2 - 1)\,dx,$ [DUH-1

(ii). $\tan x\,dy = \cot y\,dx$ [NUH-2

(iii). $\sqrt{1-x^2}\,dy + \sqrt{1-y^2}\,dx = 0$

(iv). $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin x + x\cos x}{y(2\ln y + 1)}$

(v). $(3 + 2\sin x + \cos x)\,dy = (1 + 2\sin y + \cos y)\,dx$ [NU(Pass)-20

(vi). $y\,dx + (1 + x^2)\tan^{-1}x\,dy = 0$

(vii). $(\cos x - \sin x)\,dx + (\sin x + \cos x)\,dy = 0$

(viii). $x\ln x\,dy + \sqrt{1+y^2}\,dx = 0.$ [CUH-19

2a(i). $y\,dx - x\,dy = xy\,dx$ [RUH-19

(ii). $(xy^2 + x)dx + (yx^2 + y)\,dy = 0$

(iii). $(xy + x)\,dy = (xy + y)\,dx$

(iv). $(1 - x^2)(1 - y)\,dx = xy(1 + y)\,dy$ [NU(Pass)-20

(v). $x\sqrt{y}\,dx + (1 + y)\sqrt{1+x}\,dy = 0$ [NUH-20

(vi). $y\sqrt{x^2-1}\,dx + x\sqrt{y^2-1}\,dy = 0$

NU(Pass)-2007, CUH-1980, DUS-1989, 1

(vii). $xy(1 + x^2)\,dy - (1 + y^2)\,dx = 0$

(viii). $x(1 + y^2)\,dx = y(1 + x^2)\,dy$

(ix). $\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\,dx + xy\,dy = 0\,.$

b(i). $\cos y\,\ln(\sec x + \tan x)\,dx = \cos x\,\ln(\sec y + \tan y)\,dy$

(ii). $3e^x \tan y\,dx + (1 - e^x)\sec^2 y\,dy = 0$

(iii). $(e^y + 1)\cos x\,dx + e^y \sin x\,dy = 0$

(iv). $y\sec^2 x\,dx + (y + 7)\tan x\,dy = 0\,.$

c(i). $y - x\dfrac{dy}{dx} = b\left(1 + x^2\dfrac{dy}{dx}\right)$

(ii). $x(e^y + 4)\,dx + e^{x+y}\,dy = 0$

(iii). $\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2e^{-y}$ [NU

(iv). $\ln\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = ax + by$ [NU

3(i). $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y - x}$

(ii). $\frac{dy}{dx} = (x + y)^2$

(iii). $\frac{dy}{dx} = (2x + 3y - 5)^2$

(iv). $(x + y)^2 \frac{dy}{dx} = a^2$ [NUH(NM)-2004]

(v). $\sqrt{x + y + 1}\ \frac{dy}{dx} = 1$

(vi). $(x + y)(dx - dy) = dx + dy$

(vii). $x\frac{dy}{dx} - y = x\sqrt{x^2 + y^2}$

(viii). $\frac{dy}{dx} = \sin(x + y) + \cos(x + y)$ [NUH-2009]

(ix). $\left(\frac{x + y - a}{x + y - b}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + a}{x + y + b}$

(x). $\frac{xdx + ydy}{xdy - ydx} = \sqrt{\frac{a^2 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$

উত্তরমালা [ANSWERS]

1(i). $ln\frac{y - 1}{y + 1} = 2x + c$

(ii). $\sin x \cos y = c$

(iii). $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = c$

(iv). $y^2\, ln y = x \sin x + c$

(v). $\tan^{-1}\left(1 + \tan\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\, ln\left(1 + 2\tan\frac{y}{2}\right) + c$

(vi). $y \tan^{-1}x = c$

(vii). $e^y [\sin x + \cos x] = c$

(viii). $ln x.\, [y + \sqrt{y^2 + 1}] = c$

2a(i). $ln\frac{x}{y} = x + c$

(ii). $(1 + x^2)(1 + y^2) = c$

(iii). $y - x = ln\frac{cx}{y}$

(iv). $\ln x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 2y + 2\ln(1-y) = c$

(v). $(x-2)\sqrt{1+x} + (y+3)\sqrt{y} = c$

(vi). $\sqrt{x^2-1} + \sqrt{y^2-1} - \sec^{-1}x - \sec^{-1}y = c$

(vii). $(1+x^2)(1+y^2) = cx^2$

(viii). $1 + y^2 = c(1+x^2)$

(ix). $\sqrt{x^2-1} - \sec^{-1}x + \sqrt{y^2-1} = c$

b(i). $[\ln(\sec x + \tan x)]^2 - [\ln(\sec y + \tan y)]^2 = c$

(ii). $(1-e^x)^3 = c\tan y$

(iii). $\sin x.\ [e^y + 1] = c$

(iv). $y^7 \tan x = ce^{-y}$.

c(i). $x = c(y-b)(1+bx)$

(ii). $\ln(e^y + 4) = (x+1)e^{-x} + c$

(iii). $3[e^y - e^x] = x^3 + c$

(iv). $be^{ax} + ae^{-by} + c = 0$.

3(i). $2\sqrt{y-x} + 2\ln(\sqrt{y-x} - 1) = x + c$

(ii). $x + y = \tan(x+c)$

(iii). $\frac{1}{\sqrt{6}}\tan^{-1}\left\{\frac{(2x+3y-5)\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right\} = x + c$

(iv). $a\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{a}\right) = y + c$

(v). $x + y + 1 - 2\sqrt{x+y+1} + 2\ln(1 + \sqrt{x+y+1}) = x + c$

(vi). $\ln(x+y) = x - y + c$

(vii). $\frac{y}{x} + \sqrt{1 + y^2/x^2} = ce^x$

(viii). $1 + \tan\left(\frac{x+y}{2}\right) = ae^x$

(ix). $(b-a)\ln\{(x+y)^2 - ab\} = 2(x-y) + c$

(x). $\sqrt{x^2+y^2} = a\sin\left(\tan^{-1}\frac{y}{x} + c\right)$.

দ্বিতীয় অধ্যায় [CHAPTER–2]
দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ [SECTION–2]

সমমাত্রিক ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ [Homogeneous Differential Equation]

2-2.1 ঃ সমমাত্রিক সমীকরণ [Homogeneous equation]

যে সমীকরণের প্রতি পদের x এবং y এর ঘাত যোগ করিলে সমান হয়, সেই সমীকরণকে সমমাত্রিক সমীকরণ বলা হয়।

An equation in which sum of the powers of x and y in every terms are equal, this equation is called homogeneous equation.

যেমন ঃ $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 0$ এই সমীকরণটিতে প্রতি পদের x এবং y এর ঘাত যোগ করিলে 3 হয়; কাজেই ইহা 3 ঘাতের সমমাত্রিক সমীকরণ এবং $x + y = 0$ সমীকরণটি এক ঘাতের সমমাত্রিক সমীকরণ।

2-2.2 ঃ সমমাত্রিক ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ [Homogeneous differential equation] [NUH–2011]

যদি M(x, y) এবং N(x, y) ফাংশন দুইটি x ও y এর একই ঘাতের সমমাত্রিক ফাংশন হয় তবে

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

এই আকারের ডিফারেনসিয়াল সমীকরণকে সমমাত্রিক ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ বলা হয়। সমমাত্রিক সমীকরণকে $\boxed{y = vx, \ \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}}$ ধরিয়া সমাধান করিতে হয়।

If the two functions M(x, y) and N(x, y) are homogeneous functions of x and y of the same degree then the equation of the form

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

is called homogeneous differential equation. Homogeneous differential equation can be solved by putting

$$\boxed{y = vx, \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}}.$$

কার্য্য পদ্ধতি **[Working rule]** ঃ প্রথমে প্রদত্ত সমীকরণকে $\frac{dy}{dx}=\frac{M(x}{N(x}$ আকারে লিখিয়া $y = vx$ প্রতিস্থাপন করিতে হয়। অতঃপর $y = vx$ কে অন্তরীক $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ হয়। এই y এবং $\frac{dy}{dx}$ এর মান প্রদত্ত সমীকরণে স্থাপন করিলে

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{M(v)}{N(v)} \text{ পাওয়া যায়}$$

$$\text{বা } v + x\frac{dv}{dx} = F(v), \text{ যখন } F(v) = \frac{M(v)}{N(v)}$$

$$\text{বা } x\frac{dv}{dx} = F(v) - v$$

অতঃপর চলক পৃথকীকরণ করার পর ইনটিগ্রেট করিলে সমাধান পাওয়া যায়।

উদাহরণমালা [EXAMPLES]

উদাহরণ 1 ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$$2x\,dy - 2y\,dx - \sqrt{x^2 + 4y^2}\,dx = 0.$$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$2x\,dy - 2y\,dx - \sqrt{x^2 + 4y^2}\,dx = 0$$

$$\text{বা } 2x\,dy = (2y + \sqrt{x^2 + 4y^2})\,dx$$

$$\text{বা } \frac{dy}{dx} = \frac{2y + \sqrt{x^2 + 4y^2}}{2x} \quad \cdots (1)$$

ধরি [we put] $y = vx$ তবে [then] $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ ... (2)

(2) নং হইতে y এবং $\frac{dy}{dx}$ এর মান (1) নং এ স্থাপন করি পাই [From (2) the values of y and $\frac{dy}{dx}$ in (1) we get]

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{2vx + \sqrt{x^2 + 4v^2x^2}}{2x}$$

$$\text{বা } v + x\frac{dv}{dx} = v + \frac{\sqrt{1 + 4v^2}}{2}.$$

$$\text{বা } x\frac{dv}{dx} = \frac{\sqrt{1 + 4v^2}}{2}$$

$$\text{বা } \frac{2dv}{\sqrt{1 + 4v^2}} = \frac{dx}{x}$$

উভয় পক্ষকে ইনটিগ্রেট করি [Integrating both sids] i, e.

অর্থাৎ $\int \frac{2dv}{\sqrt{1+4v^2}} = \int \frac{dx}{x}$

বা $\int \frac{2dv}{2\sqrt{(1/2)^2 + v^2}} = \int \frac{dx}{x}$

বা $ln\left(v + \sqrt{\frac{1}{4} + v^2}\right) = lnx + lnc$

বা $ln\left(v + \sqrt{\frac{1}{4} + v^2}\right) = lncx$

বা $v + \sqrt{\frac{1}{4} + v^2} = cx$

বা $\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{y^2}{x^2}} = cx$

বা $\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{x^2 + 4y^2}{4x^2}} = cx$

বা $\frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + 4y^2}}{2x} = cx$

বা $2y + \sqrt{x^2 + 4y^2} = 2cx^2$.

উদাহরণ-2(i) ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$(x^2 + y^2)dx - 2xy\, dy = 0$ **[NUH–2008, 2012, 1996, CUH–1986]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$(x^2 + y^2)\, dx = 2xy\, dy$

বা $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$ ... (1)

ধরি [we put] $y = vx$ তবে [then] $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ ... (2)

(2) নং হইতে y এবং $\frac{dy}{dx}$ এর মান (1) নং এ স্থাপন করিয়া পাই

[From (2) putting the values of y and $\frac{dy}{dx}$ in (1) we get]

$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^2 + v^2x^2}{2xvx}$

বা $x\frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2}{2v} - v$

বা $x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2-2v^2}{2v}$

বা $x\frac{dv}{dx}=\frac{-(v^2-1)}{2v}$

বা $\frac{2v\,dv}{v^2-1}=-\frac{dx}{x}$

উভয় পক্ষকে ইনটিগ্রেট করি [Integrating both sides]

i, e. $\int\frac{2v\,dv}{v^2-1}+\int\frac{dx}{x}=0$

বা $ln\,(v^2-1)+lnx=lnc$

বা $ln(v^2-1)x=lnc$

বা $(v^2-1)x=c$

বা $\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)x=c$

বা $\frac{y^2-x^2}{x}=c$

$\boxed{\therefore y^2-x^2=cx.}$

উদাহরণ–2(ii) ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ $\frac{dy}{dx}=\frac{y(x-2y)}{x(x-3y)}$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is] ঃ

$\frac{dy}{dx}=\frac{xy-2y^2}{x^2-3xy}\cdots(1)$

ধরি [we put] $y=vx$ তবে [then] $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}\cdots(2)$

(2) নং হইতে y এবং $\frac{dy}{dx}$ এর মান (1) নং এ স্থাপন করিয়া পাই

[From (2) putting the values of y and $\frac{dy}{dx}$ in (1) we get]

$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{xvx-2v^2x^2}{x^2-3x\,vx}$

বা $x\frac{dv}{dx}=\frac{v-2v^2}{1-3v}-v$

বা $x\frac{dv}{dx}=\frac{v-2v^2-v+3v^2}{1-3v}$

বা $x\frac{dv}{dx}=\frac{v^2}{1-3v}$

বা $\frac{(1-3v)\,dv}{v^2}=\frac{dx}{x}$

বা $\frac{dx}{x}-\frac{dv}{v^2}+3\frac{dv}{v}=0$

উভয় পক্ষকে ইনটিগ্রেট করি [Inetgrating both sides]

i, e. $\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dv}{v^2}+3\int\frac{dv}{v}=0$

বা $lnx+\frac{1}{v}+3lnv=a$

বা $lnx+lnv^3=a-\frac{1}{v}$

বা $ln(xv^3)=a-\frac{1}{v}$

বা $ln\left(x.\frac{y^3}{x^3}\right)=a-\frac{x}{y}$

বা $\frac{y^3}{x^2}=e^{a-x/y}$

বা $y^3=x^2.\,e^a.\,e^{-x/y}$

$\therefore$ $y^3=cx^2\ e^{-x/y}$ যখন $c=e^a$.

উদাহরণ–2(iii) সমাধান কর [Solve] : $(x^2-xy+y^2)\,dx=xy\,dy$.

[NUH(NM)–2005]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$xy\,dy=(x^2-xy+y^2)\,dx$

বা $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-xy+y^2}{xy}\cdots(1)$

ধরি [We put] $y=vx$ তবে [then]

$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}\cdots(2)$

(1) নং এবং (2) নং হইতে পাই [From (1) and (2) we get]

$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{x^2-vx^2+v^2x^2}{vx^2}$

বা $x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v+v^2}{v}-v$

বা $x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v+v^2-v^2}{v}$

বা $x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v}{v}$

বা $\frac{v\,dv}{1-v}=\frac{dx}{x}$

বা $\frac{\{-(1-v)+1\}\,dv}{1-v}=\frac{dx}{x}$

বা $\left(-1+\frac{1}{1-v}\right)dv=\frac{dx}{x}$

বা $\left(1+\frac{1}{v-1}\right)dv+\frac{dx}{x}=0.$

ইহাকে ইনটিগ্রেটিং করি [Integrating this]

$v+ln(v-1)+ln\,x=c$

বা $v+ln\,x(v-1)=c$

বা $\frac{y}{x}+ln\,x\left(\frac{y}{x}-1\right)=c$

বা $\frac{y}{x}+ln\,(y-x)=c$

$\therefore y+x\,ln(y-x)=cx$

উদাহরণ-3(i) ঃ সমাধান কর [solve] ঃ

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$ **[NUH-2005, NUH(NM)-2004, NU(Pass)-20**
[CUH-1983, 1985; DUH-1977, 19

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is] ঃ

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$ ... (1)

ধরি [we put] $y=vx$ তবে [then] $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$ ... (2)

(2) নং হইতে y এবং $\frac{dy}{dx}$ এর মান (1) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [From
putting the values of y and $\frac{dy}{dx}$ in (1) we get]

$v+x\frac{dv}{dx}=v+\tan v$

বা $x\frac{dv}{dx}=\tan v$

বা $\cot v\,dv=\frac{dx}{x}$

উভয় পক্ষকে ইনটিগ্রেট করি [Integrating both sides]

i. e. $\int \cot v\,dv=\int\frac{dx}{x}$

বা $ln\,(\sin v)=ln x+ln c$

বা $ln\,(\sin v)=ln cx$

বা $\sin v=cx$

$\therefore \sin\left(\frac{y}{x}\right)=cx.$

উদাহরণ-3(ii) ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$\left(x\sin\frac{y}{x}-y\cos\frac{y}{x}\right)dx+x\cos\frac{y}{x}\,dy=0.$ **[DUH-1980]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is] ঃ

$\left(x\sin\frac{y}{x}-y\cos\frac{y}{x}\right)dx+x\cos\frac{y}{x}\,dy=0$

বা $x\cos\frac{y}{x}\,dy=-\left(x\sin\frac{y}{x}-y\cos\frac{y}{x}\right)dx$

বা $\frac{dy}{dx}=\frac{y\cos(y/x)-x\sin(y/x)}{x\cos(y/x)}$ ... (1)

ধরি [we put] $y=vx$ তবে [then] $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$ ... (2)

(2) নং হইতে y এবং $\frac{dy}{dx}$ এর মান (1) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [From (2) putting the values of y and $\frac{dy}{dx}$ in (1) we get]

$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{vx\cos v-x\sin v}{x\cos v}$

বা $v+x\frac{dv}{dx}=v-\tan v$

বা $x\frac{dv}{dx}=-\tan v$

বা $\cot v\,dv=-\frac{dx}{x}$

বা $\cot v\,dv+\frac{dx}{x}=0$

উভয় পক্ষকে ইনটিগ্রেট করি [Integrating both sides]

i. e. $\int \cot v \, dv + \int \frac{dx}{x} = 0$

বা $\ln(\sin v) + \ln x = \ln c$

বা $\ln(x \sin v) = \ln c$

বা $x \sin v = c$

$\therefore x \sin\left(\frac{y}{x}\right) = c.$

প্রশ্নমালা [EXERCISE]–2(2)

সমাধান কর[Solve] ঃ

1(i). $(2x + y)\,dx - y\,dy = 0$

(ii). $y\,dx - x\,dy = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$ **[NUH–2005, DUS–1**

(iii). $(x + y)\,dy + (y - x)\,dx = 0$

(iv). $2x + y\frac{dy}{dx} = 3y$

(v). $(3x + 5y)\,dx + (4x + 6y)\,dy = 0$ **[JUS–19**

(vi). $(2x - y)\,dy = (2y - x)\,dx$

(vii). $(x + y)\,dy + (x - y)\,dx = 0$

[NUH(NM)–2007, 2010, 2011, NU(Pass)–2007, 2

(viii). $x\,dy - y\,dx - \sqrt{x^2 - y^2}\,dx = 0$ **[NUH–2011, RUS–19**

2(i). $(x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$ **[JUS–19**

(ii). $y^2 + x^2\frac{dy}{dx} = xy\frac{dy}{dx}$

(iii). $(x^2 + y^2)\,dy = xy\,dx$ **[NU(Pass)–20**

(iv). $\frac{dy}{dx} + \frac{y(x + y)}{x^2} = 0$

(v). $\frac{1}{2x}\frac{dy}{dx} + \frac{x + y}{x^2 + y^2} = 0$

(vi). $(x^2 - y^2)\frac{dy}{dx} = xy$

(vii). $(x + y)^2 = xy\frac{dy}{dx}$

(xiii). $(x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (y^2 + 2xy - x^2)\,dy = 0$

(ix). $(x^2 + y^2)\,dx - 2x^2\,dy = 0$

(x). $xy\,dy - (x^2 + 2y^2)\,dx = 0$

(xi). $y^2\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0$

(xii). $y(x - y)\,dx = x(x + y)\,dy$

(xiii). $(3xy - x^2)\,dx + x^2\,dy = 0$

(xiv). $2\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$ **[NUH(NM)–2008]**

(xv). $(x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$

(xvi). $(3x^2 + y^2)\,dy + (x^2 + 3y^2)\,dx = 0$

(xvii). $y^2\,dx + (x^2 - xy + y^2)\,dy = 0$

(xviii). $(3x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (x^2 - 2xy - 3y^2)\,dy = 0$

(xix). $(x^2 - 2xy)\,dy + (x^2 - 3xy + 2y^2)\,dx = 0$

(xx). $(x^3 + 3xy^2)\,dx + (y^3 + 3x^2y)\,dy = 0$ **[NUH(NM)–2006]**

(xxi). $(x^3 + y^2\sqrt{x^2 + y^2})\,dx - xy\sqrt{x^2 + y^2}\,dy = 0$ **[NUH–2004, 1997]**

(xxii). $x^2y\,dx - x^3\,dy = y^3\,dy$

(xxiii). $(x^4 + 4x^3y + 3x^2y^2)\,dx + (x^4 + 2x^3y + y^4)\,dy = 0$

3(i). $\left(x\cos\frac{y}{x} + y\sin\frac{y}{x}\right)y = \left(y\sin\frac{y}{x} - x\cos\frac{y}{x}\right)x\frac{dy}{dx}$

(ii). $x\sin\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} = y\sin\frac{y}{x} - x$

(iii). $\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\,dx = \left(\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x}\right)dy.$

এখন a, b এর মান (1) নং এ বসাই [Now putting the values of a and b in (1)]

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1mx+b_1my+c}{a_1x+b_1y+c_1}$$

বা $$\frac{dy}{dx}=\frac{m(a_1x+b_1y)+c}{a_1x+b_1y+c_1} \cdots (2)$$

ধরি [we put] $a_1x+b_1y=v$

তবে [then] $$a_1+b_1\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$$

বা $$b_1\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}-a_1$$

বা $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b_1}\left(\frac{dv}{dx}-a_1\right) \cdots (3)$$

(2) নং এবং (3) নং হইতে পাই [From (2) and (3) we get]

$$\frac{1}{b_1}\left(\frac{dv}{dx}-a_1\right)=\frac{mv+c}{v+c_1}$$

বা $$\frac{dv}{dx}-a_1=\frac{b_1(mv+c)}{v+c_1}$$

অতঃপর চলক পৃথক করার পর ইনটিগ্রেট করিলে সমাধান পাওয়া যায়। [Then after variables seperable, solution is obtained by integration.]

উদাহরণমালা [EXAMPLES]

উদাহরণ-1 ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x+y-2}{3x+y-3}$.

[NU(Pass)–2007, DUH–1985]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y-2}{3x+y-3} \cdots (1) \text{ এখানে } \frac{2}{3}\neq\frac{1}{1}$$

ধরি $x=\alpha+h$ এবং $y=\beta+k$ যখন h, k অবাধ ধ্রুবক।

[We put $x=\alpha+h$ and $y=\beta+k$ when h, k are arbitrary constants]

$\therefore$ $dx=d\alpha$ এবং [and] $dy=d\beta$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{d\beta}{d\alpha} \cdots (2)$$

(1) নং এবং (2) নং হইতে পাই [From (1) and (2) we get]

$$\frac{d\beta}{d\alpha}=\frac{2(\alpha+h)+\beta+k-2}{3(\alpha+h)+\beta+k-3}$$

বা $\dfrac{d\beta}{d\alpha}=\dfrac{2\alpha+\beta+2h+k-2}{3\alpha+\beta+3h+k-3}$ ... (3)

এখানে h এবং k কে এমনভাবে নির্ধারন করা হইয়াছে, যেন [Here h and k h chosen such that]

$$2h+k-2=0$$

এবং $3h+k-3=0.$

$\therefore \dfrac{h}{-3+2}=\dfrac{k}{-6+6}=\dfrac{1}{2-3}$

বা $\dfrac{h}{-1}=\dfrac{k}{0}=\dfrac{1}{-1}$

$\Rightarrow h=1$ এবং $k=0$

অতঃপর (3) নং হইতে পাই [Then from (3) we get]

$$\frac{d\beta}{d\alpha}=\frac{2\alpha+\beta}{3\alpha+\beta}\ \cdots (4)$$

ধরি [we put] $\beta=v\alpha$ তবে [then] $\dfrac{d\beta}{d\alpha}=v+\alpha\dfrac{dv}{d\alpha}$ ... (5)

(5) নং হইতে β এবং $\dfrac{d\beta}{d\alpha}$ এর মান (4) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [From putting the values of β and $\dfrac{d\beta}{d\alpha}$ in (4) we get]

$$v+\alpha\frac{dv}{d\alpha}=\frac{2\alpha+v\alpha}{3\alpha+v\alpha}$$

বা $\alpha\dfrac{dv}{d\alpha}=\dfrac{2+v}{3+v}-v$

বা $\alpha\dfrac{dv}{d\alpha}=\dfrac{2+v-3v-v^2}{3+v}$

বা $\alpha\dfrac{dv}{d\alpha}=\dfrac{-(v^2+2v-2)}{v+3}$

বা $\dfrac{(v+3)\,dv}{v^2+2v-2}=-\dfrac{d\alpha}{\alpha}$

বা $\dfrac{\left\{\dfrac{1}{2}(2v+2)+2\right\}dv}{v^2+2v-2}+\dfrac{d\alpha}{\alpha}=0$

উভয় পক্ষকে ইনটিগ্রেট করি [Integrating both sides]

i, e. $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{(2v+2)\,dv}{v^2+2v-2}+2\int\frac{dv}{v^2+2v-2}+\int\frac{d\alpha}{\alpha}=0$

বা $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{(2v+2)\,dv}{v^2+2v-2}+2\int\frac{dv}{(v+1)^2-(\sqrt{3})^2}+\int\frac{d\alpha}{\alpha}=0$

বা $\dfrac{1}{2}\ln(v^2+2v-2)+\dfrac{2}{2\sqrt{3}}\ln\dfrac{v+1-\sqrt{3}}{v+1+\sqrt{3}}+\ln\alpha=\dfrac{1}{2}c$

বা $\ln(v^2+2v-2)+\ln\alpha^2+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\ln\dfrac{v+1-\sqrt{3}}{v+1+\sqrt{3}}=c$

বা $\ln\left(\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}+\dfrac{2\beta}{\alpha}-2\right)\alpha^2+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\ln\left(\dfrac{\beta/\alpha+1-\sqrt{3}}{\beta/\alpha+1+\sqrt{3}}\right)=c$

বা $\ln(\beta^2+2\alpha\beta-2\alpha^2)+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\ln\left\{\dfrac{\beta+(1-\sqrt{3})\alpha}{\beta+(1+\sqrt{3})\alpha}\right\}=c$

যেহেতু $x=\alpha+1$ এবং $y=\beta+0$, কাজেই $\alpha=x-1$ এবং $\beta=y$ উপরের সমীকরণে স্থাপন করিয়া পাই [Since $x=\alpha+1$ and $y=\beta+0$ so putting $\alpha=x-1$ and $\beta=y$ in the above equation we get]

$$\ln\{y^2+2y(x-1)-2(x-1)^2\}+\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left\{\frac{y+(1-\sqrt{3})(x-1)}{y+(1+\sqrt{3})(x-1)}\right\}=c.$$

উদাহরণ–2(i) ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$$(x+y+1)\,dx-(2x+2y+1)\,dy=0$$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(x+y+1)\,dx=(2x+2y+1)\,dy$$

বা $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y+1}{2x+2y+1}$

বা $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y+1}{2(x+y)+1}$ ... (1)

ধরি [we put] $x+y=v$, তবে [then]

$$1+\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$$

বা $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dv}{dx}-1$ ... (2)

(1) নং এবং (2) নং হইতে পাই [From (1) and (2) we get]

$$\frac{dv}{dx} - 1 = \frac{v+1}{2v+1}$$

বা $\frac{dv}{dx} = 1 + \frac{v+1}{2v+1}$

বা $\frac{dv}{dx} = \frac{3v+2}{2v+1}$

বা $\frac{(2v+1)\,dv}{3v+2} = dx$

বা $\frac{\left\{\frac{2}{3}(3v+2) - \frac{1}{3}\right\}dv}{3v+2} = dx$

বা $\left\{\frac{2}{3} - \frac{1}{3(3v+2)}\right\} dv = dx$

উভয় পক্ষকে ইনটিগ্রেট করি [Integrating both sides]

$$\frac{2}{3}\int dv - \frac{1}{3}\int \frac{dv}{3v+2} = \int dx$$

বা $\frac{2}{3}\int dv - \frac{1}{9}\int \frac{3dv}{3v+2} = \int dx$

বা $\frac{2v}{3} - \frac{1}{9} \ln(3v+2) = x + \frac{1}{9}c$

বা $6v - \ln(3v+2) = 9x + c$

বা $6(x+y) - \ln(3x+3y+2) = 9x + c$

বা $6y - 3x - \ln(3x+3y+2) = c.$

উদাহরণ–2(ii). সমাধান কর [Solve] :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x-2y-7}{3x-y+4}.$$ **[NUH–2006]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(3x-y)-7}{3x-y+4} \quad \cdots (1)$$

ধরি [We put] $3x - y = v$ তবে [then]

$$3 - \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}, \text{ বা } 3 - \frac{dv}{dx} = \frac{dy}{dx} \quad \cdots (2)$$

(1) নং এবং (2) নং হইতে পাই [From (1) and (2) we get]

$$3 - \frac{dv}{dx} = \frac{2v-7}{v+4}$$

বা $3 - \frac{2v-7}{v+4} = \frac{dv}{dx}$

বা $\frac{3v+12-2v+7}{v+4} = \frac{dv}{dx}$

বা $\frac{dv}{dx} = \frac{v+19}{v+4}$

বা $\frac{(v+4)\,dv}{v+19} = dx$

বা $\frac{\{(v+19)-15\}\,dv}{v+19} = dx$

বা $\left(1 - \frac{15}{v+19}\right) dv = dx$

ইহাকে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating this we get]

$$v - 15 \ln(v+19) = x + c$$

বা $3x - y - 15\ln(3x - y + 19) = x + c$

$\therefore 2x - y - 15 \ln(3x - y + 19) = c.$

উদাহরণ–2(iii). সমাধান কর [Solve] :

$$(2x+y+1)\,dx + (4x+2y-1)\,dy = 0.$$ **[NUH–2009]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(2x+y+1)\,dx + (4x+2y-1)\,dy = 0$$

বা $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y+1}{4x+2y-1}$

বা $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y+1}{2(2x+y)-1} \cdots (1)$

ধরি [We put] $2x + y = v$ তবে [then]

$$2 + \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

বা $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 2 \cdots (2)$

(1) নং এবং (2) নং হইতে পাই [From (1) and (2) we get]

$$\frac{dv}{dx}-2=-\frac{v+1}{2v-1}$$

বা $\dfrac{dv}{dx}=2-\dfrac{v+1}{2v-1}$

বা $\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{4v-2-v-1}{2v-1}$

বা $\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{3(v-1)}{2v-1}$

বা $\dfrac{(2v-1)\,dv}{v-1}=3\,dx$

বা $\dfrac{\{2(v-1)+1\}\,dv}{v-1}=3\,dx$

$$\left(2+\frac{1}{v-1}\right)dv=3\,dx$$

ইহাকে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating this we get]

$$2v+\ln(v-1)=3x+c$$

বা $2(2x+y)+\ln(2x+y-1)=3x+c$

বা $x+2y+\ln(2x+y-1)=c.$

প্রশ্নমালা [EXERCISE]–2(3)

সমাধান কর [Solve] ঃ

1(i). $(y-x+1)dx=(y+x+5)dy$

(ii). $(y+x-5)dy=(y-x+1)dx$

(iii). $(x-3y+4)dy+(7y-5x)dx=0$

(iv). $(4x-y+7)dx-(2x+y-1)dy=0$

(v). $(6x-5y+4)dy-(2x-y+1)dx=0$

(vi). $(x+2y-3)dx-(2x+y-3)dy=0$

(vii). $(2y-x-4)dx=(y-3x+3)dy$

(viii). $(2x+9y-20)dx=(6x+2y-10)dy$

(ix). $(12x+21y-9)dx+(47x+40y+7)dy=0$

(x). $(4x+3y+1)dx+(3x+2y+1)dy=0$

(xi). $(2x-5y+3)dx-(2x+4y-6)dy=0$

(xii). $(3x-7y-3)dy=(3y-7x+7)dx$

(xiii). $(2x+y+3)dy-(x+2y+3)dx=0.$

(xiv). $(x+y-3)dx=(3x-y-1)dy$ [RUS–1991]

2(i). $(2x-2y+5)dy=(x-y+3)dx$

(ii). $(3x-4y-2)dx=(3x-4y-3)dy$

(iii). $(x+y+1)dx=(2x+2y+1)dy$

(iv). $(x-y+3)dx=(2x-2y+5)dy$

(v). $(2x-6y+3)dx-(x-3y-1)dy=0$

(vi). $(4x+6y+5)dx=(3y+2x+4)dy$

(vii). $(1-3x-3y)dx=2(x+y)dy$

(viii). $(4x+2y+1)dy=(2x+y+3)dx$

(ix). $(3x+2y-1)dx-(3x+2y+1)dy=0$

(x). $(6x-4y+1)dy=(3x-2y+1)dx.$

উত্তরমালা [ANSWERS]

1(i). $\ln(x^2+y^2+4x+6y+13)+2\tan^{-1}\left(\dfrac{y+3}{x+2}\right)=c$

ii). $\ln\{(y-2)^2+(x-3)^2\}+2\tan^{-1}\left(\dfrac{y-2}{x-3}\right)=c$

iii). $(3y-5x+10)^2=c(y-x+1)$

iv). $(x-y+4)^3(4x+y+1)^2=c$

v). $(5y-2x-3)^4=c(4y-4x-3)$

vi). $(x-y)^3=c(x+y-2)$

(1) নং এবং (2) নং হইতে পাই [From (1) and (2) we get]

$$\frac{dv}{dx} - 2 = -\frac{v+1}{2v-1}$$

বা $\frac{dv}{dx} = 2 - \frac{v+1}{2v-1}$

বা $\frac{dv}{dx} = \frac{4v-2-v-1}{2v-1}$

বা $\frac{dv}{dx} = \frac{3(v-1)}{2v-1}$

বা $\frac{(2v-1)\,dv}{v-1} = 3\,dx$

বা $\frac{\{2(v-1)+1\}\,dv}{v-1} = 3\,dx$

$$\left(2 + \frac{1}{v-1}\right) dv = 3\,dx$$

ইহাকে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating this we get]

$$2v + \ln(v-1) = 3x + c$$

বা $2(2x+y) + \ln(2x+y-1) = 3x + c$

বা $x + 2y + \ln(2x+y-1) = c.$

প্রশ্নমালা [EXERCISE]–2(3)

সমাধান কর [Solve] ঃ

1(i). $(y - x + 1)dx = (y + x + 5)dy$

(ii). $(y + x - 5)dy = (y - x + 1)dx$

(iii). $(x - 3y + 4)dy + (7y - 5x)dx = 0$

(iv). $(4x - y + 7)dx - (2x + y - 1)dy = 0$

(v). $(6x - 5y + 4)dy - (2x - y + 1)dx = 0$

(vi). $(x + 2y - 3)dx - (2x + y - 3)dy = 0$

নিয়ম-4 ঃ যদি $Mdx + Ndy = 0$ ডিফারেনসিয়াল সমীকরণটি প্রকৃত না হয় অর্থাৎ $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$. কিন্তু $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ কেবলমাত্র x এর ফাংশন হয়, অর্থাৎ $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x)$ হয়, তবে I. F. $= e^{\int f(x)dx}$ দ্বারা প্রদত্ত সমীকরণকে গুন করিলে প্রকৃত হইবে। অতঃপর নিয়ম–1 ঃ অনুযায়ী সমাধান করিতে হইবে।

নিয়ম-5 ঃ যদি $Mdx + Ndy = 0$ ডিফারেনসিয়াল সমীকরণটি প্রকৃত না হয় অর্থাৎ $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$. কিন্তু $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ কেবলমাত্র y এর ফাংশন হয়, অর্থাৎ $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = f(y)$ হয়, তবে I. F. $= e^{\int f(y)dy}$ দ্বারা প্রদত্ত সমীকরণকে গুন করিলে প্রকৃত হইবে। অতঃপর নিয়ম–1 ঃ অনুযায়ী সমাধান করিতে হইবে।

উদাহরণমালা [EXAMPLES]

উদাহরণ–1 ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$$(3x + 2y - 5)dx + (2x + 3y - 5)dy = 0$$ **[CUH–1979]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(3x + 2y - 5)dx + (2x + 3y - 5)dy = 0 \cdots (1)$$

এখানে $M = 3x + 2y - 5$ এবং $N = 2x + 3y - 5$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = 2 \quad \text{এবং} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2$$

যেহেতু $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ কাজেই (1) নং সমীকরণটি প্রকৃত [since $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ so the equation (1) is exact]

এইক্ষেত্রে [In this case]

$$\int_{y\ \text{ধ্রুবক}} Mdx + \int [N \text{ এর } x \text{ বর্জিত পদ}]\, dy = c_1$$

$$\text{বা} \int_{y\ \text{ধ্রুবক}} (3x + 2y - 5)dx + \int (3y - 5)dy = c_1$$

$$\text{বা } 3\int xdx + 2y\int dx - 5\int dx + 3\int ydy - 5\int dy = c_1$$

$$\text{বা } 3\frac{x^2}{2} + 2yx - 5x + 3\frac{y^2}{2} - 5y = c_1$$

$$\text{বা } 3x^2 + 4xy - 10x + 3y^2 - 10y = 2c_1$$

$$\text{বা } 3x^2 + 4xy + 3y^2 - 10x - 10y = c.$$

উদাহরণ–2(i) ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$$(x^3 + 3xy^2)dx + (y^3 + 3x^2y)dy = 0.$$ **[CUH-19**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(x^3 + 3xy^2)dx + (y^3 + 3x^2y)dy = 0 \cdots (1)$$

এখানে $M = x^3 + 3xy^2$ এবং $N = y^3 + 3x^2y$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = 6xy \qquad \text{এবং } \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy$$

যেহেতু $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ কাজেই (1) নং সমীকরণ প্রকৃত [Since $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ equation (1) is exact.]

এইক্ষেত্রে [In this case]

$$\int_{y \text{ ধ্রুবক}} Mdx + \int (N \text{ এর } x \text{ বর্জিত পদ})\, dy = c_1$$

$$\text{বা } \int_{y \text{ ধ্রুবক}} (x^3 + 3xy^2)\, dx + \int y^3\, dy = c_1$$

$$\text{বা } \int x^3\, dx + 3y^2 \int x dx + \int y^3\, dy = c_1$$

$$\text{বা } \frac{x^4}{4} + 3y^2 \frac{x^2}{2} + \frac{y^4}{4} = c_1$$

$$\text{বা } x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = c.$$

উদাহরণ–2(ii) সমাধান কর [Solve] :

$$3x(xy - 2)\, dx + (x^3 + 2y)\, dy = 0.$$ **[NUH(NM)-200**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(3x^2y - 6x)\, dx + (x^3 + 2y)\, dy = 0 \cdots (1)$$

এখানে $M = 3x^2y - 6x$ এবং $N = x^3 + 2y$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 \qquad \text{এবং } \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2$$

যেহেতু $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, কাজেই (1) নং সমীকরণ প্রকৃত। [Since $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ equation (1) is exact.]

এইক্ষেত্রে [In this cas

$\int_{y \text{ ধ্রুবক}} M\, dx + \int (N$

বা $\int_{y \text{ ধ্রুবক}} (3x^2y - 6x$

বা $y \int 3x^2\, dx - \int 6x$

বা $x^3y - 3x^2 + y^2 = c$

উদাহরণ–3 ঃ সমাধান ক

$(1 + e^{x/y})\, dx + e^{x/y}\big(1$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ

$(1 + e^{x/y})\, dx +$

এখানে [Here] $M = 1 +$

$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = e^{x/y}\left(\frac{-x}{y^2}\right.$

বা $\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{xe^{x/y}}{y^2}$,

এবং $\frac{\partial N}{\partial x} = e^{x/y}\left(0 - \frac{1}{y}\right.$

বা $\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{e^{x/y}}{y} + \big(1$

বা $\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{e^{x/y}}{y} + \frac{e^{x/}}{y}$

বা $\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{xe^{x/y}}{y^2}$

যেহেতু $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ কা

equation (1) is exact]

এইক্ষেত্রে [In this case]

$$\int_{y \text{ ধ্রুবক}} M\,dx + \int (N \text{ এর } x \text{ বর্জিত পদ})\,dy = c_1$$

বা $\int_{y \text{ ধ্রুবক}} (3x^2y - 6x)\,dx + \int 2y\,dy = c_1$

বা $y\int 3x^2\,dx - \int 6x\,dx + \int 2y\,dy = c_1$

বা $x^3y - 3x^2 + y^2 = c_1$

উদাহরণ-3 ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$(1 + e^{x/y})\,dx + e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0.$ **[NUH-2008, NU(Pass)-2007]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(1 + e^{x/y})\,dx + e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0 \cdots (1)$$

এখানে [Here] $M = 1 + e^{x/y}$ এবং $N = e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)$,

$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = e^{x/y}\left(\frac{-x}{y^2}\right)$

বা $\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{xe^{x/y}}{y^2}$.

এবং $\frac{\partial N}{\partial x} = e^{x/y}\left(0 - \frac{1}{y}\right) + \left(1 - \frac{x}{y}\right)e^{x/y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right)$

বা $\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{e^{x/y}}{y} + \left(1 - \frac{x}{y}\right)e^{x/y}\cdot\frac{1}{y}$

বা $\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{e^{x/y}}{y} + \frac{e^{x/y}}{y} - \frac{xe^{x/y}}{y^2}$

বা $\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{xe^{x/y}}{y^2}$

যেহেতু $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ কাজেই (1) নং সমীকরণ প্রকৃত [Since $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ so equation (1) is exact]

এইক্ষেত্রে [In this case]

$$\int_{y\ \text{ধ্রুবক}} M dx + \int (N \text{ এর } x \text{ বর্জিত পদ})\, dy = c$$

বা $$\int_{y\ \text{ধ্রুবক}} (1 + e^{x/y})\, dx + \int 0\, dy = c$$

বা $$\int dx + \int_{y\ \text{ধ্রুবক}} e^{x/y}\, dx = c$$

বা $$x + \frac{e^{x/y}}{1/y} = c$$

বা $$x + ye^{x/y} = c.$$

উদাহরণ–4 ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$$(x^2y - 2xy^2)\, dx - (x^3 - 3x^2y)\, dy = 0.$$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(x^2y - 2xy^2)dx - (x^3 - 3x^2y)\, dy = 0 \cdots (1)$$

এখানে $M = x^2y - 2xy^2$ এবং $N = -(x^3 - 3x^2y)$

$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = x^2 - 4xy$ এবং $N = 3x^2y - x^3$

$$\therefore \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy - 3x^2.$$

যেহেতু $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ কাজেই (1) নং প্রকৃত নহে, কিন্তু সমীকরণটি সমমাত্রিক [since $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ so equation (1) is not exact, but the equation is homogeneous]

এখানে $Mx + Ny = (x^2y - 2xy^2)\, x + (3x^2y - x^3)\, y$,

বা $Mx + Ny = x^3y - 2x^2y^2 + 3x^2y^2 - x^3y$

বা $Mx + Ny = x^2y^2 \neq 0.$

$\therefore$ ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক [Integrating factor]

$$\text{I. F.} = \frac{1}{Mx + Ny} = \frac{1}{x^2\, y^2}.$$

এখন (1) নং কে $\frac{1}{x^2y^2}$ দ্বারা গুণ করিলে সমীকরণটি প্রকৃত হইবে [Now multiplying equation (1) by $\frac{1}{x^2y^2}$ then the equation will be exact]

$$\frac{(x^2y - 2xy^2)dx}{x^2\, y^2} - \frac{(x^3 - 3x^2y)dy}{x^2y^2} = 0$$

বা $$\left(\frac{1}{y} - \frac{2}{x}\right) dx - \left(\frac{x}{y^2} - \frac{3}{y}\right) dy = 0$$

বা $\left(\frac{1}{y} - \frac{2}{x}\right) dx + \left(\frac{3}{y} - \frac{x}{y^2}\right) dy = 0.$ ইহা প্রকৃত [It is exact]

এখানে $M = \frac{1}{y} - \frac{2}{x}$ এবং $N = \frac{3}{y} - \frac{x}{y^2}$.

$$\therefore \int_{y\ \text{ধ্রুবক}} M dx + \int (N \text{ এর } x \text{ বর্জিত পদ})\, dy = c$$

বা $$\int_{y\ \text{ধ্রুবক}} \left(\frac{1}{y} - \frac{2}{x}\right) dx + \int \frac{3}{y}\, dy = c$$

বা $$\frac{1}{y}\int dx - 2\int \frac{dx}{x} + 3\int \frac{dy}{y} = c$$

বা $$\frac{x}{y} - 2\ln x + 3\ln y = c.$$

উদাহরণ–5 ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$(1 + xy)y\, dx + (1 - xy)x\, dy = 0.$ **[NUH–1987, 2007, 2011, NUH(NM)–2008, NU(Pass)–2008, DUH–1989]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(1 + xy)y\, dx + (1 - xy)x\, dy = 0 \cdots (1)$$

এখানে $M = (1 + xy)y$ এবং $N = (1 - xy)x$

বা $M = y + xy^2$ এবং $N = x - x^2y$

$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2xy$ এবং $\frac{\partial N}{\partial x} = 1 - 2xy.$

যেহেতু $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ কাজেই (1) নং সমীকরণ প্রকৃত নহে। কিন্তু সমীকরণটি $f(xy)y\, dx + \varphi(xy)x\, dy = 0$ আকারের। [since $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ so equation (1) is not exact. But the equation is of the form $f(xy)y\, dx + \varphi(xy)x\, dy = 0$]

$\therefore Mx - Ny = (y + xy^2)x - (x - x^2y)y$

বা $Mx - Ny = xy + x^2y^2 - xy + x^2y^2$

বা $Mx - Ny = 2x^2y^2 \neq 0$.

$\therefore$ ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক I. F. $= \dfrac{1}{Mx - Ny}$

বা I. F. $= \dfrac{1}{2x^2y^2}$.

(1) নং কে $\dfrac{1}{2x^2y^2}$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই [Multiplying (1) by $\frac{1}{2x^2y^2}$ we get]

$$\frac{(1+xy)y}{2x^2y^2}dx + \frac{(1-xy)x}{2x^2y^2}dy = 0$$

বা $\left(\dfrac{1+xy}{2x^2y}\right)dx + \left(\dfrac{1-xy}{2xy^2}\right)dy = 0$

বা $\left(\dfrac{1}{x^2y} + \dfrac{1}{x}\right)dx + \left(\dfrac{1}{xy^2} - \dfrac{1}{y}\right)dy = 0$ ইহা প্রকৃত [It is exact]

এখানে[Here] $M = \dfrac{1}{x^2y} + \dfrac{1}{x}$ এবং $N = \dfrac{1}{xy^2} - \dfrac{1}{y}$.

$\therefore \int_{y \text{ ধ্রুবক}} M\,dx + \int$(N এর x বর্জিত পদ)dy = c

বা $\int_{y \text{ ধ্রুবক}} \left(\dfrac{1}{x^2y} + \dfrac{1}{x}\right)dx + \int\left(-\dfrac{1}{y}\right)dy = c$

বা $\dfrac{1}{y}\int\dfrac{dx}{x^2} + \int\dfrac{dx}{x} - \int\dfrac{dy}{y} = c$

বা $\dfrac{1}{y}\left(-\dfrac{1}{x}\right) + \ln x - \ln y = c$

$\therefore -\dfrac{1}{xy} + \ln x - \ln y = c.$

উদাহরণ–6 ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$$(12y + 4y^3 + 6x^2)dx + 3(x + xy^2)dy = 0.$$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(12y + 4y^3 + 6x^2)dx + 3(x + xy^2)dy = 0, \cdots (1)$$

এখানে [Here] $M = 12y + 4y^3 + 6x^2$ এবং $N = 3x(1 + y^2)$

$\therefore \dfrac{\partial M}{\partial y} = 12 + 12y^2$ এবং $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 3(1 + y^2)$.

যেহেতু $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$ কাজেই (1) নং সমীকরণ প্রকৃত নহে [since $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$ so equation (1) is not exact]

এখন [Now] $\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x} = (12 + 12y^2) - (3 + 3y^2)$

বা $\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x} = 9(1 + y^2)$

$\therefore \dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right) = \dfrac{9(1+y^2)}{3x(1+y^2)}$

বা $\dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right) = \dfrac{3}{x} = f(x)$

$\therefore$ I. F. $= e^{\int\frac{3}{x}dx} = e^{3\ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$,

(1) নং কে x^3 দ্বারা গুন করিয়া পাই [Multiplying (1) by x^3 we get]

$$(12y + 4y^3 + 6x^2)\,x^3\,dx + 3(x + xy^2)x^3\,dy = 0$$

বা $(12x^3y + 4x^3y^3 + 6x^5)dx + 3(x^4 + x^4y^2)dy = 0$ ইহা প্রকৃত [It is exact]

এখানে [Here] $M = 12x^3y + 4x^3y^3 + 6x^5$ এবং $N = 3(x^4 + x^4y^2)$.

$\therefore \int_{y \text{ ধ্রুবক}} M dx + \int$(N এর x বর্জিত পদ) dy = c

বা $\int_{y \text{ ধ্রুবক}} (12x^3y + 4x^3y^3 + 6x^5)dx + \int 0\,dy = c$

বা $12y\int x^3dx + 4y^3\int x^3dx + 6\int x^5\,dx = c$

বা $12y\dfrac{x^4}{4} + 4y^3\dfrac{x^4}{4} + 6\dfrac{x^6}{6} = c$

$\therefore 3x^4y + x^4y^3 + x^6 = c.$

উদাহরণ–7 ঃ সমাধান কর [Solve]

$$y\ln y\,dx + (x - \ln y)dy = 0.$$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ[Given equation is]

$$y\ln y\,dx + (x - \ln y)dy = 0 \cdots (1)$$

এখানে [Here] $M = y\ln y$ এবং $N = x - \ln y$

$\therefore \dfrac{\partial M}{\partial y} = y.\dfrac{1}{y} + 1.\ln y$ এবং $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 1.$

বা $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 1 + \ln y$

যেহেতু $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ কাজেই (1) নং সমীকরণ প্রকৃত নহে [Since $\frac{\partial M}{\partial y} \neq$ equation (1) is not exact]

এখন [Now] $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 1 - 1 - \ln y$

বা $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = -\ln y$

$$\therefore \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{-\ln y}{y \ln y}$$

বা $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = -\frac{1}{y} = f(y)$

$$\therefore \text{I. F.} = e^{-\int \frac{dy}{y}} = e^{-\ln y} = e^{\ln y^{-1}} = \frac{1}{y}.$$

(1) নং কে $\frac{1}{y}$ দ্বারা গুন করিয়া পাই [Multiplying (1) by $\frac{1}{y}$ we get]

$$\left(\frac{y \ln y}{y}\right) dx + \left(\frac{x - \ln y}{y}\right) dy = 0$$

বা $\ln y \, dx + \left(\frac{x}{y} - \frac{\ln y}{y}\right) dy = 0$

এখানে [Here] $M = \ln y$ এবং $N = \frac{x}{y} - \frac{\ln y}{y}$

$\therefore \int_{y \text{ ধ্রুবক}} M dx + \int (N$ এর x বর্জিত পদ$)\, dy = c$

বা $\int_{y \text{ ধ্রুবক}} \ln y \, dx - \int \frac{\ln y}{y} dy = c$

বা $\ln y \int dx - \int \ln y \, d(\ln y) = c$

$\therefore x \ln y - \frac{1}{2} (\ln y)^2 = c.$

উদাহরণ–8 ঃ $(4xy + 3y^2 - x)\, dx + x(x + 2y)\, dy = 0$ সমীকরণটি স করিতে একটি ইনটিগ্রেটিং ফ্যাক্টর নির্ণয় কর। [Find an integrating fact solve $(4xy + 3y^2 - x)\, dx + x(x + 2y)\, dy = 0$.] [NUH-2

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(4xy + 3y^2 - x)\, dx + x(x + 2y)\, dy = 0 \cdots (1)$$

এখানে [Here] $M = 4xy + 3y^2 - x$ এবং $N = x(x + 2y)$

$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = 4x + 6y$ এবং $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 2y$

যেহেতু $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ কাজেই (1) নং প্রকৃত নহে। [Since $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ so equation (1) is not exact.]

এখন [Now] $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 4x + 6y - 2x - 2y = 2x + 4y = 2(x + 2y)$

$$\therefore \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{2(x + 2y)}{x(x + 2y)} = \frac{2}{x}$$

$$\therefore \text{I. F.} = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2. \text{ (Ans)}$$

প্রশ্নমালা [EXERCISE]–2(4)

সমাধান কর [Solve] ঃ

1(i). $(12x + 5y - 9)dx + (5x + 2y - 4)dy = 0$

(ii). $(ax + hy + g)dx + (hx + by + f)dy = 0$

(iii). $(2x + 3y - 5)dy + (3x + 2y - 5)dx = 0$ **[CUH–1977, DUH–1978]**

(iv). $(y - x + 1)dx + (x + y + 5)dy = 0$ **[CUH–1979]**

(v). $(y - x)dx + (x + y)dy = 0$ **[CUH–1972]**

(vi). $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$ **[RUH–1979]**

(vii). $(y + x + 5)dx = (y - x + 1)dy$ **[DUH–1979]**

(viii). $(2x + 3y + 4)dx + (3x + 4y + 5)dy = 0$ **[RUH–1982]**

(ix). $(4x + 3y + 1)dx + (3x + 2y + 1)dy = 0$ **[RUH–1982, 1984, 1998]**

(x). $(2x + y - 1)dy - (x - 2y + 5)dx = 0$ **[RUH–1981]**

(xi). $(2x + y + 3)dx + (x - 2y + 9)dy = 0$. **[RUS–1990]**

2(i). $(x^2 - ay)dx + (y^2 - ax)dy = 0$ **[DUH–1984]**

(ii). $(x^2 - 2xy - y^2)dx - (x + y)^2 dy = 0$

(iii). $(x^3 + 3xy^2)\, dx + (3x^2y + y^3)dy = 0$ **[NUH(NM)–2006]**

(iv). $(y^4 + 4x^3y + 3x)dx + (x^4 + 4xy^3 + y + 1)dy = 0$

এখানে (4) নং সমীকরণটি α এবং β এর একটি সমমাত্রিক ডিফারেনসিয়াল সমীকর
কাজেই $\beta = v\alpha$ ধরিয়া (4) নং সমীকরণ সমাধান করিতে হয়।

যেহেতু (4) নং এর সমাধানে α, β এর সম্পর্ক থাকিবে, কাজেই $\alpha = x - h$ এ
$\beta = y - k$ স্থাপন করিলে সমাধানটি x, y এর সম্পর্ক হইবে।

[Here the equation (4) is a homogeneous equation in α, β, s
equation (4) can be solved by putting $\beta = v\alpha$.

Since in the solution of (4), there will be relations of α, β, s
putting $\alpha = x - h$ and $\beta = y - k$ then there will be relations of x, y
the solution of (4)]

2–3.2 ঃ 2-3.1 এ আমাদের আছে [In 2-3.1 we have]

$$h = \frac{bc_1 - b_1c}{ab_1 - a_1b} \text{ এবং } k = \frac{ca_1 - c_1a}{ab_1 - a_1b}.$$

যদি h এবং k অসীম হয় অর্থাৎ h এবং k এর হর শুন্য হয় যেমন [If h and k ar
infinite, that is denominator of h and k are zero, that is]

$$ab_1 - a_1b = 0$$

$$\text{বা } ab_1 = a_1b$$

$$\text{বা } \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \text{ হয়}$$

তবে 2–3.1 এর নিয়ম প্রযোজ্য নয়। এইক্ষেত্রে $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = m$ ধরিয়া ডিফারেনসিয়া
সমীকরণ সমাধান করিতে হয়। [Then the rule 2-3.1 is not applicable
In this case differential equation can be solved by puttin
$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = m$]

বিশেষ ক্ষেত্র [Particular case] ঃ

যদি ডিফারেনসিয়াল সমীকরণটি এই আকারে থাকে [If the differentia
equation is of this form].

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1} \ \ldots (1) \text{ যেখান [where] } \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}.$$

তবে ধরি [then we put] $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = m$

$$\text{বা } a = a_1m \text{ এবং } b = b_1m$$

এখন a, b এর মান (1) নং এ বসাই [Now putting the values of a and b in (1)]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1mx + b_1my + c}{a_1x + b_1y + c_1}$$

$$\text{বা } \frac{dy}{dx} = \frac{m(a_1x + b_1y) + c}{a_1x + b_1y + c_1} \ \ldots (2)$$

ধরি [we put] $a_1x + b_1y = v$

তবে [then] $a_1 + b_1\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$

$$\text{বা } b_1\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - a_1$$

$$\text{বা } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b_1}\left(\frac{dv}{dx} - a_1\right) \ldots (3)$$

(2) নং এবং (3) নং হইতে পাই [From (2) and (3) we get]

$$\frac{1}{b_1}\left(\frac{dv}{dx} - a_1\right) = \frac{mv + c}{v + c_1}$$

$$\text{বা } \frac{dv}{dx} - a_1 = \frac{b_1(mv + c)}{v + c_1}$$

অতঃপর চলক পৃথক করার পর ইনটিগ্রেট করিলে সমাধান পাওয়া যায়। [Then after variables seperable, solution is obtained by integration.]

উদাহরণমালা [EXAMPLES]

উদাহরণ–1 ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y - 2}{3x + y - 3}$.

[NU(Pass)–2007, DUH–1985]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y - 2}{3x + y - 3} \ \ldots (1) \text{ এখানে } \frac{2}{3} \neq \frac{1}{1}$$

ধরি $x = \alpha + h$ এবং $y = \beta + k$ যখন h, k অবাধ ধ্রুবক।

[We put $x = \alpha + h$ and $y = \beta + k$ when h, k are arbitrary constants]

$\therefore$ $dx = d\alpha$ এবং [and] $dy = d\beta$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d\beta}{d\alpha} \ \ldots (2)$$

(1) নং এবং (2) নং হইতে পাই [From (1) and (2) we get]

$$\frac{d\beta}{d\alpha}=\frac{2(\alpha+h)+\beta+k-2}{3(\alpha+h)+\beta+k-3}$$

বা $$\frac{d\beta}{d\alpha}=\frac{2\alpha+\beta+2h+k-2}{3\alpha+\beta+3h+k-3}\quad\cdots(3)$$

এখানে h এবং k কে এমনভাবে নির্ধারন করা হইয়াছে, যেন [Here h and k chosen such that]

$$2h+k-2=0$$

এবং $$3h+k-3=0.$$

$$\therefore \frac{h}{-3+2}=\frac{k}{-6+6}=\frac{1}{2-3}$$

বা $$\frac{h}{-1}=\frac{k}{0}=\frac{1}{-1}$$

$$\Rightarrow h=1 \text{ এবং } k=0$$

অতঃপর (3) নং হইতে পাই [Then from (3) we get]

$$\frac{d\beta}{d\alpha}=\frac{2\alpha+\beta}{3\alpha+\beta}\cdots(4)$$

ধরি [we put] $\beta=v\alpha$ তবে [then] $\frac{d\beta}{d\alpha}=v+\alpha\frac{dv}{d\alpha}\cdots(5)$

(5) নং হইতে β এবং $\frac{d\beta}{d\alpha}$ এর মান (4) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [From putting the values of β and $\frac{d\beta}{d\alpha}$ in (4) we get]

$$v+\alpha\frac{dv}{d\alpha}=\frac{2\alpha+v\alpha}{3\alpha+v\alpha}$$

বা $$\alpha\frac{dv}{d\alpha}=\frac{2+v}{3+v}-v$$

বা $$\alpha\frac{dv}{d\alpha}=\frac{2+v-3v-v^2}{3+v}$$

বা $$\alpha\frac{dv}{d\alpha}=\frac{-(v^2+2v-2)}{v+3}$$

বা $$\frac{(v+3)\,dv}{v^2+2v-2}=-\frac{d\alpha}{\alpha}$$

বা $$\frac{\left\{\frac{1}{2}(2v+2)+2\right\}dv}{v^2+2v-2}+\frac{d\alpha}{\alpha}=0$$

উভয় পক্ষকে ইনটিগ্রেট করি [Integrating both sides]

i, e. $$\frac{1}{2}\int\frac{(2v+2)\,dv}{v^2+2v-2}+2\int\frac{dv}{v^2+2v-2}+\int\frac{d\alpha}{\alpha}=0$$

বা $$\frac{1}{2}\int\frac{(2v+2)\,dv}{v^2+2v-2}+2\int\frac{dv}{(v+1)^2-(\sqrt{3})^2}+\int\frac{d\alpha}{\alpha}=0$$

বা $$\frac{1}{2}\ln(v^2+2v-2)+\frac{2}{2\sqrt{3}}\ln\frac{v+1-\sqrt{3}}{v+1+\sqrt{3}}+\ln\alpha=\frac{1}{2}c$$

বা $$\ln(v^2+2v-2)+\ln\alpha^2+\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\frac{v+1-\sqrt{3}}{v+1+\sqrt{3}}=c$$

বা $$\ln\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}+\frac{2\beta}{\alpha}-2\right)\alpha^2+\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left(\frac{\beta/\alpha+1-\sqrt{3}}{\beta/\alpha+1+\sqrt{3}}\right)=c$$

বা $$\ln(\beta^2+2\alpha\beta-2\alpha^2)+\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left\{\frac{\beta+(1-\sqrt{3})\alpha}{\beta+(1+\sqrt{3})\alpha}\right\}=c$$

যেহেতু $x=\alpha+1$ এবং $y=\beta+0$, কাজেই $\alpha=x-1$ এবং $\beta=y$ উপরের সমীকরণে স্থাপন করিয়া পাই [Since $x=\alpha+1$ and $y=\beta+0$ so putting $\alpha=x-1$ and $\beta=y$ in the above equation we get]

$$\ln\{y^2+2y(x-1)-2(x-1)^2\}+\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left\{\frac{y+(1-\sqrt{3})(x-1)}{y+(1+\sqrt{3})(x-1)}\right\}=c.$$

উদাহরণ–2(i) ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$$(x+y+1)\,dx-(2x+2y+1)\,dy=0$$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(x+y+1)\,dx=(2x+2y+1)\,dy$$

বা $$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+1}{2x+2y+1}$$

বা $$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+1}{2(x+y)+1}\cdots(1)$$

ধরি [we put] $x+y=v$, তবে [then]

$$1+\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$$

বা $$\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}-1\cdots(2)$$

(1) নং এবং (2) নং হইতে পাই [From (1) and (2) we get]

$$\frac{dv}{dx}-1=\frac{v+1}{2v+1}$$

বা $\frac{dv}{dx}=1+\frac{v+1}{2v+1}$

বা $\frac{dv}{dx}=\frac{3v+2}{2v+1}$

বা $\frac{(2v+1)\,dv}{3v+2}=dx$

বা $\frac{\left\{\frac{2}{3}(3v+2)-\frac{1}{3}\right\}dv}{3v+2}=dx$

বা $\left\{\frac{2}{3}-\frac{1}{3(3v+2)}\right\}dv=dx$

উভয় পক্ষকে ইনটিগ্রেট করি [Integrating both sides]

$$\frac{2}{3}\int dv-\frac{1}{3}\int\frac{dv}{3v+2}=\int dx$$

বা $\frac{2}{3}\int dv-\frac{1}{9}\int\frac{3dv}{3v+2}=\int dx$

বা $\frac{2v}{3}-\frac{1}{9}\ln(3v+2)=x+\frac{1}{9}c$

বা $6v-\ln(3v+2)=9x+c$

বা $6(x+y)-\ln(3x+3y+2)=9x+c$

বা $6y-3x-\ln(3x+3y+2)=c.$

উদাহরণ-2(ii). সমাধান কর [Solve] :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6x-2y-7}{3x-y+4}.$$ **[NUH-2006]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2(3x-y)-7}{3x-y+4}\cdots(1)$$

ধরি [We put] $3x-y=v$ তবে [then]

$$3-\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx},\ \text{বা } 3-\frac{dv}{dx}=\frac{dy}{dx}\cdots(2)$$

(1) নং এবং (2) নং হইতে পাই [From (1) and (2) we get]

$$3-\frac{dv}{dx}=\frac{2v-7}{v+4}$$

বা $3-\frac{2v-7}{v+4}=\frac{dv}{dx}$

বা $\frac{3v+12-2v+7}{v+4}=\frac{dv}{dx}$

বা $\frac{dv}{dx}=\frac{v+19}{v+4}$

বা $\frac{(v+4)\,dv}{v+19}=dx$

বা $\frac{\{(v+19)-15\}\,dv}{v+19}=dx$

বা $\left(1-\frac{15}{v+19}\right)dv=dx$

ইহাকে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating this we get]

$$v-15\ln(v+19)=x+c$$

বা $3x-y-15\ln(3x-y+19)=x+c$

$\therefore 2x-y-15\ln(3x-y+19)=c.$

উদাহরণ-2(iii). সমাধান কর [Solve] :

$$(2x+y+1)\,dx+(4x+2y-1)\,dy=0.$$ **[NUH-2009]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(2x+y+1)\,dx+(4x+2y-1)\,dy=0$$

বা $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+y+1}{4x+2y-1}$

বা $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+y+1}{2(2x+y)-1}\cdots(1)$

ধরি [We put] $2x+y=v$ তবে [then]

$$2+\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$$

বা $\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}-2\cdots(2)$

(1) নং এবং (2) নং হইতে পাই [From (1) and (2) we get]

$$\frac{dv}{dx} - 2 = -\frac{v+1}{2v-1}$$

বা $\frac{dv}{dx} = 2 - \frac{v+1}{2v-1}$

বা $\frac{dv}{dx} = \frac{4v-2-v-1}{2v-1}$

বা $\frac{dv}{dx} = \frac{3(v-1)}{2v-1}$

বা $\frac{(2v-1)\,dv}{v-1} = 3\,dx$

বা $\frac{\{2(v-1)+1\}\,dv}{v-1} = 3\,dx$

$$\left(2 + \frac{1}{v-1}\right) dv = 3\,dx$$

ইহাকে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating this we get]

$$2v + \ln(v-1) = 3x + c$$

বা $2(2x+y) + \ln(2x+y-1) = 3x + c$

বা $x + 2y + \ln(2x+y-1) = c.$

প্রশ্নমালা [EXERCISE]–2(3)

সমাধান কর [Solve] ঃ

1(i). $(y - x + 1)dx = (y + x + 5)dy$

(ii). $(y + x - 5)dy = (y - x + 1)dx$

(iii). $(x - 3y + 4)dy + (7y - 5x)dx = 0$

(iv). $(4x - y + 7)dx - (2x + y - 1)dy = 0$

(v). $(6x - 5y + 4)dy - (2x - y + 1)dx = 0$

(vi). $(x + 2y - 3)dx - (2x + y - 3)dy = 0$

(vii). $(2y - x - 4)dx = (y - 3x + 3)dy$

(viii). $(2x + 9y - 20)dx = (6x + 2y - 10)dy$

(ix). $(12x + 21y - 9)dx + (47x + 40y + 7)dy = 0$

(x). $(4x + 3y + 1)dx + (3x + 2y + 1)dy = 0$

(xi). $(2x - 5y + 3)dx - (2x + 4y - 6)dy = 0$

(xii). $(3x - 7y - 3)dy = (3y - 7x + 7)dx$

(xiii). $(2x + y + 3)dy - (x + 2y + 3)dx = 0.$

(xiv). $(x + y - 3)dx = (3x - y - 1)dy$ **[RUS–1991]**

2(i). $(2x - 2y + 5)dy = (x - y + 3)dx$

(ii). $(3x - 4y - 2)dx = (3x - 4y - 3)dy$

(iii). $(x + y + 1)dx = (2x + 2y + 1)dy$

(iv). $(x - y + 3)dx = (2x - 2y + 5)dy$

(v). $(2x - 6y + 3)dx - (x - 3y - 1)dy = 0$

(vi). $(4x + 6y + 5)dx = (3y + 2x + 4)dy$

(vii). $(1 - 3x - 3y)dx = 2(x + y)dy$

(viii). $(4x + 2y + 1)dy = (2x + y + 3)dx$

(ix). $(3x + 2y - 1)dx - (3x + 2y + 1)dy = 0$

(x). $(6x - 4y + 1)dy = (3x - 2y + 1)dx.$

উত্তরমালা [ANSWERS]

1(i). $\ln(x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13) + 2\tan^{-1}\left(\frac{y+3}{x+2}\right) = c$

(ii). $\ln\{(y-2)^2 + (x-3)^2\} + 2\tan^{-1}\left(\frac{y-2}{x-3}\right) = c$

(iii). $(3y - 5x + 10)^2 = c(y - x + 1)$

(iv). $(x - y + 4)^3 (4x + y + 1)^2 = c$

(v). $(5y - 2x - 3)^4 = c(4y - 4x - 3)$

(vi). $(x - y)^3 = c\,(x + y - 2)$

দ্বিতীয় অধ্যায় [CHAPTER–2]
চতুর্থ পরিচ্ছেদ [SECTION–4]
প্রকৃত ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ
[Exact Differential Equation]

2-4.1 ঃ প্রকৃত ডিফারেনসিয়াল [Perfect differential] ঃ **[NUH–2011]**

মনে করি M এবং N উভয়েই x, y এর ফাংশন। যদি $f(x, y) = c$ সমীকরণকে অন্তরীকরণ করিলে $Mdx + Ndy = 0$ হয় তবে $Mdx + Ndy = 0$ কে প্রকৃত ডিফারেনসিয়াল বলা হয়।

[Let M and N both are functions of x, y. If $Mdx + Ndy = 0$ is obtained by differentiating $f(x, y) = c$ then $Mdx + Ndy = 0$ is called exact differential.]

উদাহরণ [Example] $xy = c \cdots (1)$

$$\Rightarrow d(xy) = 0$$

$$\Rightarrow xdy + ydx = 0 \cdots (2)$$

যেহেতু (1) নং কে অন্তরীকরণ করিলে (2) নং পাওয়া যায়, কাজেই (2) নং কে প্রকৃত ডিফারেনসিয়াল বলা হয়। [Since (2) is obtained by differentiating (1), so (2) is called exact differential]

2-4.2 ঃ প্রকৃত ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ [Exact differential equation] ঃ

যদি কোন ডিফারেনসিয়াল সমীকরণের প্রকৃত ডিফারেনসিয়াল থাকে তবে উহাকে প্রকৃত ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ বলা হয়। [If any differential equation has exact differential then this is called exact differential equation.]

2-4.3 ঃ উপপাদ্য ঃ $Mdx + Ndy = 0$ সমীকরণটি প্রকৃত হওয়ার প্রয়োজনীয় এবং যথেষ্ট শর্ত বর্ণনা ও প্রমাণ কর। [State and prove the necessary and sufficient condition for exactness of the differential equation $Mdx + Ndy = 0$]

[NUH–2006, 2009, 2011, 2012, NUH(NM)–2006, 2009

অথবা [or]

$Mdx + Ndy = 0$ সমীকরণটি প্রকৃত হইবে যদি এবং কেবল মাত্র যদি $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ হয়। [The differential equation $Mdx + Ndy = 0$ is exact if and only if $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.]

প্রয়োজনীয় শর্ত [Necessary Condition] ঃ

বর্ণনা ঃ যদি $Mdx + Ndy = 0$ সমীকরণটি প্রকৃত হয়, তবে $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ হইবে। [If the equation $Mdx + Ndy = 0$ is exact then $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.]

প্রমাণ ঃ মনে করি $Mdx + Ndy = 0 \cdots (1)$ সমীকরণটি প্রকৃত, অতএব ইহার প্রকৃত ডিফারেনসিয়াল আছে। মনেকরি ইহা df [Let the equation $Mdx + Ndy = 0 \cdots (1)$ is exact, so it has exact differential, let it is df]

$$\text{অর্থাৎ } df = Mdx + Ndy \cdots (2)$$

যেহেতু $f = f(x, y)$ কাজেই আংশিক অন্তরকের সূত্র হইতে পাই [since $f = f(x, y)$ from the theorem of total derivatives we get]

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$\text{বা } Mdx + Ndy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy, \text{ (2) নং দ্বারা [by (2)]}$$

উভয় পক্ষ হইতে dx এবং dy এর সহগ সমীকৃত করিয়া পাই [Equating coefficients of dx and dy from both sides we get]

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ এবং } N = \frac{\partial f}{\partial y} \cdots (3)$$

$$\text{এখন [Now] } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$$

$$\text{বা } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\text{বা } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}\text{ ; (3) নং দ্বারা।}$$

ইহাই প্রকৃত হওয়ার প্রয়োজনীয় শর্ত [This is the necessary condition of exactness.]

যথেষ্ট শর্ত [Sufficient condition] ঃ

বর্ণনা [Statement] ঃ যদি $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ হয় তবে $Mdx + Ndy = 0$ ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ প্রকৃত হইবে। [If $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ then the differential equation $Mdx + Ndy = 0$ is exact]

প্রমাণ ঃ মনে করি [Let] $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \cdots (4)$

ধরি [we put] $F = \int Mdx$. যখন y ধ্রুবক [where y is constant]

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = M \cdots (5)$$

$$\text{এখন [Now] } \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial M}{\partial y}\text{ ; (5) নং দ্বারা [by (5)]}$$

$$\text{বা } \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$\text{বা } \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}\text{, (4) নং দ্বারা।}$$

$$\text{বা } \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\text{বা } \frac{\partial}{\partial x}\left(N - \frac{\partial F}{\partial y}\right) = 0$$

$$\Rightarrow N - \frac{\partial F}{\partial y} = \varphi(y)\text{, যাহা x হইতে স্বাধীন [which is independent from x]}$$

$$\text{বা } N = \frac{\partial F}{\partial y} + \varphi(y) \cdots (6)$$

$$\text{এখন [Now] } Mdx + Ndy = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y} + \varphi(y)\right]dy$$

(5), (6) নং দ্বারা [by (5), (6)]

$$\text{বা } Mdx + Ndy = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \varphi(y)\,dy$$

$$= dF + \varphi(y)\,dy$$

$$= dF + d\int \varphi(y)\,dy$$

$$= d[F + \int \varphi(y)\,dy]$$

$$= df;\ \text{যখন [where] } f = F + \int \varphi(y)\,dy\,.$$

ইহাই প্রকৃত হওয়ার যথেষ্ট শর্ত [This is the sufficient condition for exactness.]

2-4.4 ঃ ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক [Integrating factor] ঃ [NUH-2

যে উৎপাদক দ্বারা কোন ডিফারেনসিয়াল সমীকরণকে গুন করিলে উহা ইনটিগ্রেশন হয়, সে উৎপাদককে ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক বলা হয়। উহাকে I. F. দ্বারা প্রকাশ করা হ differential equation is multiplied by a factor and then equation become integrable, such factor is called integra factor. It is denoted by I. F.]

2-4.5 ঃ উপপাদ্য ঃ যদি $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(x)$ হয় তবে Mdx + Ndy ডিফারেনসিয়াল সমীকরণের ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক $e^{\int f(x)\,dx}$ হইবে।

[If $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(x)$ then $e^{\int f(x)\,dx}$ will be the integra factor of the differential equation Mdx + Ndy = 0]

প্রমাণ ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$Mdx + Ndy = 0 \cdots (1)$$

যখন M এবং N উভয়েই x, y এর ফাংশন [where M and N both functions of x, y]

মনেকরি, (1) নং এর ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক F(x), তবে (1) নং কে F(x) দ্বারা করিলে ইনটিগ্রেশন যোগ্য সমীকরণ পাই [Let F(x) be the integrating factor (1) then multiplying (1) by F(x) we get integrable equation]

$$FM\,dx + FN\,dy = 0 \cdots (2)$$ যখন [when] F = F(x)

যেহেতু (2) নং সমীকরণ প্রকৃত, কাজেই [since equation (2) is exact so]

$$\frac{\partial}{\partial y}(FM)=\frac{\partial}{\partial x}(FN)$$

$$\text{বা } F\frac{\partial M}{\partial y}=F\frac{\partial N}{\partial x}+N\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\text{বা } F\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=N\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\text{বা } \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\text{বা } f(x)=\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial x},\quad \text{যেহেতু } \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(x).$$

$$\text{বা } f(x)\,\partial x=\frac{\partial F}{F}$$

উভয় পক্ষকে ইনটিগ্রেট করি [Integrating both sides]

$$\int f(x)\,dx=\int\frac{dF}{F}$$

$$\text{বা } \ln F=\int f(x)\,dx$$

$$\text{বা } \ln F=\ln e^{\int f(x)\,dx}$$

$$\Rightarrow F=e^{\int f(x)\,dx}$$

ইহাই নির্ণেয় ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক [This is the required integrating factor]

2-4.6 ঃ উপপাদ্য ঃ যদি $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=f(y)$ হয় তবে Mdx + Ndy = 0 ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণের ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক $e^{\int f(y)\,dy}$ হইবে।

[If $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=f(y)$ then $e^{\int f(y)\,dy}$ will be the integrating factor of the differential equation Mdx + Ndy = 0]

প্রমাণ ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$Mdx + Ndy = 0 \cdots (1)$$

যখন M এবং N উভয়েই x, y এর ফাংশন [when M and N both are functions of x, y]

মনেকরি, (1) নং এর ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক F(y), তবে (1) নং কে F(y) দ্বারা গুন করিলে ইনটিগ্রেশন যোগ্য সমীকরণ পাই [Let F(y) be the integrating factor of (1) then multiplying (1) by F(y), we get integrable equation]

$$FM\,dx + FN\,dy = 0 \cdots (2)$$ যখন [when] F = F(y).

যেহেতু (2) নং সমীকরণ প্রকৃত কাজেই [since the equation (2) is an exact, so]

$$\frac{\partial}{\partial y}(FM)=\frac{\partial}{\partial x}(FN)$$

$$\text{বা } F\frac{\partial M}{\partial y}+M\frac{\partial F}{\partial y}=F\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\text{বা } M\frac{\partial F}{\partial y}=F\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

$$\text{বা } \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

বা $\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial y} = f(y)$; যেহেতু [since] $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = f(y)$.

বা $\frac{\partial F}{F} = f(y)\,\partial y$

উভয় পক্ষকে ইনটিগ্রেটিং করি [Integrating both sides]

$$\int \frac{dF}{F} = \int f(y)\,dy$$

বা $\ln F = \int f(y)\,dy$

বা $\ln F = \ln e^{\int f(y)\,dy}$

$\Rightarrow F = e^{\int f(y)\,dy}$

ইহাই নির্ণেয় ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক। [This is the required integrati
factor]

2-4.7 ঃ কার্য্য পদ্ধতি [Working rule] ঃ [NUH-20

$Mdx + Ndy = 0$ ডিফারেনসিয়াল সমীকরণকে সমাধান করার নিয়ম নিম্নে দে
হইল। এখানে dx এর গুনিতক [বা সহগ] M এবং dy এর গুনিতক [বা সহগ] N.

নিয়ম-1 ঃ যদি $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ হয়, তবে $Mdx + Ndy = 0$ সমীকরণটি প্রকৃত [Exa
হইবে। এইক্ষেত্রে $\int_{y\ \text{ধ্রুবক}} Mdx + \int (N \text{ এর } x \text{ বর্জিত পদ})\,dy = c$.

অর্থাৎ M এর y কে ধ্রুবক ধরিয়া x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট করিতে হয় এবং N
কেবলমাত্র x বর্জিত পদগুলিকে y এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট করিতে হয়। অতঃপর উহাদে
যোগ করিয়া যোগফলেরর সমান ধ্রুবক লিখিলে সমাধান পাওয়া যায়।

নিয়ম-2 ঃ যদি $Mdx + Ndy = 0$ সমীকরণটি প্রকৃত [Exact] না হয়, অ
$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$. কিন্তু M, N উভয়েই সমমাত্রিক এবং $Mx + Ny \neq 0$, তবে প্রদত্ত সমীকর
ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক $I.F = \frac{1}{Mx + Ny}$ দ্বারা গুণ করিলে প্রকৃত হইবে অর্থাৎ ইনটিগ্র
যোগ্য হইবে। অতঃপর নিয়ম–1 অনুযায়ী সমাধান করিতে হইবে।

নিয়ম-3 ঃ যদি ডিফারেনসিয়াল সমীকরণটি $f(xy)y\,dx + \varphi(xy)x\,dy = 0$
আকারে থাকে এবং ইহা প্রকৃত নয় অর্থাৎ $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$. কিন্তু $Mx - Ny \neq 0$ তবে প্র
সমীকরণকে $I.F. = \frac{1}{Mx - Ny}$ দ্বারা গুন করিলে প্রকৃত হইবে। অতঃপর নিয়ম-1
অনুযায়ী সমাধান করিতে হইবে।

নিয়ম-4 ঃ যদি $Mdx + Ndy = 0$ ডিফারেনসিয়াল সমীকরণটি প্রকৃত না হয় অর্থাৎ $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$. কিন্তু $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ কেবলমাত্র x এর ফাংশন হয়, অর্থাৎ $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x)$ হয়, তবে $I.F. = e^{\int f(x)dx}$ দ্বারা প্রদত্ত সমীকরণকে গুন করিলে প্রকৃত হইবে। অতঃপর নিয়ম–1 ঃ অনুযায়ী সমাধান করিতে হইবে।

নিয়ম-5 ঃ যদি $Mdx + Ndy = 0$ ডিফারেনসিয়াল সমীকরণটি প্রকৃত না হয় অর্থাৎ $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$. কিন্তু $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ কেবলমাত্র y এর ফাংশন হয়, অর্থাৎ $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = f(y)$ হয়, তবে $I.F. = e^{\int f(y)dy}$ দ্বারা প্রদত্ত সমীকরণকে গুন করিলে প্রকৃত হইবে। অতঃপর নিয়ম–1 ঃ অনুযায়ী সমাধান করিতে হইবে।

উদাহরণমালা [EXAMPLES]

উদাহরণ-1 ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$$(3x + 2y - 5)dx + (2x + 3y - 5)dy = 0$$ [CUH-1979]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(3x + 2y - 5)dx + (2x + 3y - 5)dy = 0 \cdots (1)$$

এখানে $M = 3x + 2y - 5$ এবং $N = 2x + 3y - 5$

$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = 2$ এবং $\frac{\partial N}{\partial x} = 2$

যেহেতু $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ কাজেই (1) নং সমীকরণটি প্রকৃত [since $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ so the equation (1) is exact]

এইক্ষেত্রে [In this case]

$\int_{y\ \text{ধ্রুবক}} Mdx + \int [N \text{ এর } x \text{ বর্জিত পদ}]\,dy = c_1$

বা $\int_{y\ \text{ধ্রুবক}} (3x + 2y - 5)dx + \int (3y - 5)dy = c_1$

বা $3\int xdx + 2y\int dx - 5\int dx + 3\int ydy - 5\int dy = c_1$

বা $3\frac{x^2}{2} + 2yx - 5x + 3\frac{y^2}{2} - 5y = c_1$

বা $3x^2 + 4xy - 10x + 3y^2 - 10y = 2c_1$

বা $3x^2 + 4xy + 3y^2 - 10x - 10y = c.$

উদাহরণ-2(i) ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$(x^3 + 3xy^2)dx + (y^3 + 3x^2y)dy = 0.$ **[CUH-19**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(x^3 + 3xy^2)dx + (y^3 + 3x^2y)dy = 0 \cdots (1)$$

এখানে $M = x^3 + 3xy^2$ এবং $N = y^3 + 3x^2y$

$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = 6xy$ এবং $\frac{\partial N}{\partial x} = 6xy$

যেহেতু $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ কাজেই (1) নং সমীকরণ প্রকৃত [Since $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ equation (1) is exact.]

এইক্ষেত্রে [In this case]

$$\int_{y \text{ ধ্রুবক}} M dx + \int (N \text{ এর } x \text{ বর্জিত পদ})\, dy = c_1$$

বা $\int_{y \text{ ধ্রুবক}} (x^3 + 3xy^2)\, dx + \int y^3\, dy = c_1$

বা $\int x^3\, dx + 3y^2 \int x dx + \int y^3\, dy = c_1$

বা $\frac{x^4}{4} + 3y^2 \frac{x^2}{2} + \frac{y^4}{4} = c_1$

বা $x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = c.$

উদাহরণ-2(ii) সমাধান কর [Solve] :

$3x(xy - 2)\, dx + (x^3 + 2y)\, dy = 0.$ **[NUH(NM)-200**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(3x^2y - 6x)\, dx + (x^3 + 2y)\, dy = 0 \cdots (1)$$

এখানে $M = 3x^2y - 6x$ এবং $N = x^3 + 2y$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2$ এবং $\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2$

যেহেতু $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, কাজেই (1) নং সমীকরণ প্রকৃত। [Since $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ equation (1) is exact.]

এইক্ষেত্রে [In this case]

$$\int_{y \text{ ধ্রুবক}} M\, dx + \int (N \text{ এর } x \text{ বর্জিত পদ})\, dy = c_1$$

বা $\int_{y \text{ ধ্রুবক}} (3x^2y - 6x)\, dx + \int 2y\, dy = c_1$

বা $y \int 3x^2\, dx - \int 6x\, dx + \int 2y\, dy = c_1$

বা $x^3y - 3x^2 + y^2 = c_1$

উদাহরণ-3 ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$(1 + e^{x/y})\, dx + e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0.$ **[NUH-2008, NU(Pass)-2007]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(1 + e^{x/y})\, dx + e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0 \cdots (1)$$

এখানে [Here] $M = 1 + e^{x/y}$ এবং $N = e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)$.

$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = e^{x/y}\left(\frac{-x}{y^2}\right)$

বা $\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{xe^{x/y}}{y^2}$,

এবং $\frac{\partial N}{\partial x} = e^{x/y}\left(0 - \frac{1}{y}\right) + \left(1 - \frac{x}{y}\right) e^{x/y} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right)$

বা $\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{e^{x/y}}{y} + \left(1 - \frac{x}{y}\right) e^{x/y} \cdot \frac{1}{y}$

বা $\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{e^{x/y}}{y} + \frac{e^{x/y}}{y} - \frac{xe^{x/y}}{y^2}$

বা $\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{xe^{x/y}}{y^2}$

যেহেতু $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ কাজেই (1) নং সমীকরণ প্রকৃত [Since $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ so equation (1) is exact]

এইক্ষেত্রে [In this case]

$$\int_{y\ \text{ধ্রুবক}} M dx + \int (N \text{ এর } x \text{ বর্জিত পদ})\, dy = c$$

বা $\int_{y\ \text{ধ্রুবক}} (1 + e^{x/y})\, dx + \int 0\, dy = c$

বা $\int dx + \int_{y\ \text{ধ্রুবক}} e^{x/y}\, dx = c$

বা $x + \frac{e^{x/y}}{1/y} = c$

বা $x + ye^{x/y} = c.$

উদাহরণ–4 : সমাধান কর [Solve] :

$$(x^2y - 2xy^2)\, dx - (x^3 - 3x^2y)\, dy = 0.$$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(x^2y - 2xy^2)dx - (x^3 - 3x^2y)\, dy = 0 \cdots (1)$$

এখানে $M = x^2y - 2xy^2$ এবং $N = -(x^3 - 3x^2y)$

$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = x^2 - 4xy$ এবং $N = 3x^2y - x^3$

$$\therefore \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy - 3x^2 .$$

যেহেতু $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ কাজেই (1) নং প্রকৃত নহে, কিন্তু সমীকরণটি সমমাত্রিক [since $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ so equation (1) is not exact, but the equation is homogeneous]

এখানে $Mx + Ny = (x^2y - 2xy^2)\, x + (3x^2y - x^3)\, y$,

বা $Mx + Ny = x^3y - 2x^2y^2 + 3x^2y^2 - x^3y$

বা $Mx + Ny = x^2y^2 \neq 0.$

$\therefore$ ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক [Integrating factor]

$$\text{I. F.} = \frac{1}{Mx + Ny} = \frac{1}{x^2\, y^2}.$$

এখন (1) নং কে $\frac{1}{x^2y^2}$ দ্বারা গুণ করিলে সমীকরণটি প্রকৃত হইবে [Now multiplying equation (1) by $\frac{1}{x^2y^2}$ then the equation will be exact]

$$\frac{(x^2y - 2xy^2)dx}{x^2\, y^2} - \frac{(x^3 - 3x^2y)dy}{x^2y^2} = 0$$

বা $\left(\frac{1}{y} - \frac{2}{x}\right) dx - \left(\frac{x}{y^2} - \frac{3}{y}\right) dy = 0$

বা $\left(\frac{1}{y} - \frac{2}{x}\right) dx + \left(\frac{3}{y} - \frac{x}{y^2}\right) dy = 0.$ ইহা প্রকৃত [It is exact]

এখানে $M = \frac{1}{y} - \frac{2}{x}$ এবং $N = \frac{3}{y} - \frac{x}{y^2}.$

$\therefore \int_{y\ \text{ধ্রুবক}} M dx + \int (N \text{ এর } x \text{ বর্জিত পদ})\, dy = c$

বা $\int_{y\ \text{ধ্রুবক}} \left(\frac{1}{y} - \frac{2}{x}\right) dx + \int \frac{3}{y}\, dy = c$

বা $\frac{1}{y} \int dx - 2 \int \frac{dx}{x} + 3 \int \frac{dy}{y} = c$

বা $\frac{x}{y} - 2\ln x + 3\ln y = c.$

উদাহরণ–5 : সমাধান কর [Solve] :

$(1 + xy)y\, dx + (1 - xy)x\, dy = 0.$ **[NUH–1987, 2007, 2011, NUH(NM)–2008, NU(Pass)–2008, DUH–1989]**

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(1 + xy)y\, dx + (1 - xy)x\, dy = 0 \cdots (1)$$

এখানে $M = (1 + xy)y$ এবং $N = (1 - xy)x$

বা $M = y + xy^2$ এবং $N = x - x^2y$ V.V.I

$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2xy$ এবং $\frac{\partial N}{\partial x} = 1 - 2xy.$

যেহেতু $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ কাজেই (1) নং সমীকরণ প্রকৃত নহে। কিন্তু সমীকরণটি $f(xy)y\, dx + \varphi(xy)x\, dy = 0$ আকারের। [since $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ so equation (1) is not exact. But the equation is of the form $f(xy)y\, dx + \varphi(xy)x\, dy = 0$]

$\therefore\ Mx - Ny = (y + xy^2)x - (x - x^2y)y$

বা $Mx - Ny = xy + x^2y^2 - xy + x^2y^2$

বা $Mx - Ny = 2x^2y^2 \neq 0 .$

$\therefore$ ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক $I.F. = \dfrac{1}{Mx - Ny}$

বা $I.F. = \dfrac{1}{2x^2y^2}$.

(1) নং কে $\dfrac{1}{2x^2y^2}$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই [Multiplying (1) by we get]

$$\frac{(1+xy)y}{2x^2y^2}\,dx + \frac{(1-xy)x}{2x^2y^2}\,dy = 0$$

বা $\left(\dfrac{1+xy}{2x^2y}\right)dx + \left(\dfrac{1-xy}{2xy^2}\right)dy = 0$

বা $\left(\dfrac{1}{x^2y} + \dfrac{1}{x}\right)dx + \left(\dfrac{1}{xy^2} - \dfrac{1}{y}\right)dy = 0$ ইহা প্রকৃত [It is exact]

এখানে[Here] $M = \dfrac{1}{x^2y} + \dfrac{1}{x}$ এবং $N = \dfrac{1}{xy^2} - \dfrac{1}{y}$.

$\therefore \int_{y\ \text{ধ্রুবক}} M\,dx + \int (N$ এর x বর্জিত পদ$)dy = c$

বা $\int_{y\ \text{ধ্রুবক}} \left(\dfrac{1}{x^2y} + \dfrac{1}{x}\right)dx + \int\left(-\dfrac{1}{y}\right)dy = c$

বা $\dfrac{1}{y}\int \dfrac{dx}{x^2} + \int \dfrac{dx}{x} - \int \dfrac{dy}{y} = c$

বা $\dfrac{1}{y}\left(-\dfrac{1}{x}\right) + \ln x - \ln y = c$

$\therefore -\dfrac{1}{xy} + \ln x - \ln y = c.$

উদাহরণ–6 ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$$(12y + 4y^3 + 6x^2)dx + 3(x + xy^2)dy = 0.$$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(12y + 4y^3 + 6x^2)dx + 3(x + xy^2)dy = 0, \cdots (1)$$

এখানে [Here] $M = 12y + 4y^3 + 6x^2$ এবং $N = 3x(1 + y^2)$

$\therefore \dfrac{\partial M}{\partial y} = 12 + 12y^2$ এবং $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 3(1 + y^2)$.

যেহেতু $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$ কাজেই (1) নং সমীকরণ প্রকৃত নহে [since $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$ equation (1) is not exact]

এখন [Now] $\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x} = (12 + 12y^2) - (3 + 3y^2)$

বা $\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x} = 9(1 + y^2)$

$\therefore \dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right) = \dfrac{9(1+y^2)}{3x(1+y^2)}$

বা $\dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right) = \dfrac{3}{x} = f(x)$

$\therefore I.F. = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln x} = e^{\ln x^3} = x^3.$

(1) নং কে x^3 দ্বারা গুন করিয়া পাই [Multiplying (1) by x^3 we get]

$$(12y + 4y^3 + 6x^2)\,x^3\,dx + 3(x + xy^2)x^3\,dy = 0$$

বা $(12x^3y + 4x^3y^3 + 6x^5)dx + 3(x^4 + x^4y^2)dy = 0$ ইহা প্রকৃত [It is exact]

এখানে [Here] $M = 12x^3y + 4x^3y^3 + 6x^5$ এবং $N = 3(x^4 + x^4y^2)$.

$\therefore \int_{y\ \text{ধ্রুবক}} M dx + \int (N$ এর x বর্জিত পদ$)\,dy = c$

বা $\int_{y\ \text{ধ্রুবক}} (12x^3y + 4x^3y^3 + 6x^5)dx + \int 0\,dy = c$

বা $12y\int x^3dx + 4y^3\int x^3dx + 6\int x^5\,dx = c$

বা $12y\dfrac{x^4}{4} + 4y^3\dfrac{x^4}{4} + 6\dfrac{x^6}{6} = c$

$\therefore 3x^4y + x^4y^3 + x^6 = c.$

উদাহরণ–7 ঃ সমাধান কর [Solve]

$$y\ln y\,dx + (x - \ln y)dy = 0.$$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ[Given equation is]

$$y\ln y\,dx + (x - \ln y)dy = 0 \cdots (1)$$

এখানে [Here] $M = y\ln y$ এবং $N = x - \ln y$

$\therefore \dfrac{\partial M}{\partial y} = y.\dfrac{1}{y} + 1.\ln y$ এবং $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 1.$

বা $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 1 + \ln y$

যেহেতু $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ কাজেই (1) নং সমীকরণ প্রকৃত নহে [Since $\frac{\partial M}{\partial y} \neq$
equation (1) is not exact]

এখন [Now] $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 1 - 1 - \ln y$

বা $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = -\ln y$

$$\therefore \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{-\ln y}{y \ln y}$$

বা $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = -\frac{1}{y} = f(y)$

$$\therefore \text{I. F.} = e^{-\int \frac{dy}{y}} = e^{-\ln y} = e^{\ln y^{-1}} = \frac{1}{y}.$$

(1) নং কে $\frac{1}{y}$ দ্বারা গুন করিয়া পাই [Multiplying (1) by $\frac{1}{y}$ we get]

$$\left(\frac{y \ln y}{y}\right) dx + \left(\frac{x - \ln y}{y}\right) dy = 0$$

বা $\ln y \, dx + \left(\frac{x}{y} - \frac{\ln y}{y}\right) dy = 0$

এখানে [Here] $M = \ln y$ এবং $N = \frac{x}{y} - \frac{\ln y}{y}$

$\therefore \int_{y \text{ ধ্রুবক}} M dx + \int (N \text{ এর } x \text{ বর্জিত পদ})\, dy = c$

বা $\int_{y \text{ ধ্রুবক}} \ln y \, dx - \int \frac{\ln y}{y} dy = c$

বা $\ln y \int dx - \int \ln y \, d(\ln y) = c$

$\therefore x \ln y - \frac{1}{2} (\ln y)^2 = c.$

উদাহরণ–8 ঃ $(4xy + 3y^2 - x)\, dx + x(x + 2y)\, dy = 0$ সমীকরণটি সমাধান করিতে একটি ইনটিগ্রেটিং ফ্যাক্টর নির্ণয় কর। [Find an integrating fa[illegible] solve $(4xy + 3y^2 - x)\, dx + x(x + 2y)\, dy = 0$.] [NUH-

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(4xy + 3y^2 - x)\, dx + x(x + 2y)\, dy = 0 \cdots (1)$$

এখানে [Here] $M = 4xy + 3y^2 - x$ এবং $N = x(x + 2y)$

$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = 4x + 6y$ এবং $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 2y$

যেহেতু $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ কাজেই (1) নং প্রকৃত নহে। [Since $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ so equation (1) is not exact.]

এখন [Now] $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 4x + 6y - 2x - 2y = 2x + 4y = 2(x + 2y)$

$$\therefore \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{2(x + 2y)}{x(x + 2y)} = \frac{2}{x}$$

$\therefore \text{I. F.} = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$. (Ans)

প্রশ্নমালা [EXERCISE]–2(4)

সমাধান কর [Solve] ঃ

1(i). $(12x + 5y - 9)dx + (5x + 2y - 4)dy = 0$

(ii). $(ax + hy + g)dx + (hx + by + f)dy = 0$

(iii). $(2x + 3y - 5)dy + (3x + 2y - 5)dx = 0$ [CUH–1977, DUH–1978]

(iv). $(y - x + 1)dx + (x + y + 5)dy = 0$ [CUH–1979]

(v). $(y - x)dx + (x + y)dy = 0$ [CUH–1972]

(vi). $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$ [RUH–1979]

(vii). $(y + x + 5)dx = (y - x + 1)dy$ [DUH–1979]

(viii). $(2x + 3y + 4)dx + (3x + 4y + 5)dy = 0$ [RUH–1982]

(ix). $(4x + 3y + 1)dx + (3x + 2y + 1)dy = 0$ [RUH–1982, 1984, 1998]

(x). $(2x + y - 1)dy - (x - 2y + 5)dx = 0$ [RUH–1981]

(xi). $(2x + y + 3)dx + (x - 2y + 9)dy = 0$. [RUS–1990]

2(i). $(x^2 - ay)dx + (y^2 - ax)dy = 0$ [DUH–1984]

(ii). $(x^2 - 2xy - y^2)dx - (x + y)^2 dy = 0$

(iii). $(x^3 + 3xy^2)\, dx + (3x^2y + y^3)dy = 0$ [NUH(NM)–2006]

(iv). $(y^4 + 4x^3y + 3x)dx + (x^4 + 4xy^3 + y + 1)dy = 0$

দ্বিতীয় অধ্যায় [CHAPTER–2]
পঞ্চম পরিচ্ছেদ [SECTION–5]
রৈখিক ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ
[Linear Differential Equation]

2-5.1 ঃ রৈখিক ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ [Linear differential equation] ঃ

যদি P এবং Q কেবলমাত্র x এর ফাংশন অথবা ধ্রুবক হয়, তবে $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ এই আকারের ডিফারেনসিয়াল সমীকরণকে প্রথম ক্রম রৈখিক ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ বলা হয়। এই সমীকরণকে $e^{\int Pdx}$ দ্বারা গুন করিয়া সমাধান করিতে হয়।

[If P and Q are only functions of x or constants then the differential equation of the form $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ is called first order linear differential equation. To solve this equation multiply by $e^{\int Pdx}$.

2-5.2 ঃ উপপাদ্য ঃ $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ ডিফারেনসিয়াল সমীকরণের সাধারণ সমাধানের একটি সূত্র নির্ণয় কর যেখানে P এবং Q কেবলমাত্র x এর ফাংশন অথবা ধ্রুবক।

[Find a rule of general solution of differential equation $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ where P and Q are only functions of x or constants]

[NUH–2012]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \cdots (1)$$

মনে করি, (1) নং সমীকরণের ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক R. কাজেই (1) নং কে R দ্বারা গুন করিয়া পাই [Let R be the integrating factor of (1), so multiplying (1) by R we get]

$$R\frac{dy}{dx} + PRy = QR \cdots (2)$$

এখানে R কে এমনভাবে নির্ধারন করা হইয়াছে যেন [Here we choose R such that]

(2) নং এর বামপক্ষ $= \frac{d}{dx}(yR)$ হয়

[Left hand side of (2) $= \frac{d}{dx}(yR)$]

$$\text{বা } R\frac{dy}{dx} + PRy = R\frac{dy}{dx} + y\frac{dR}{dx}$$

$$\text{বা } PRy = y\frac{dR}{dx}$$

$$\text{বা } PR = \frac{dR}{dx}$$

$$\text{বা } Pdx = \frac{dR}{R}$$

উভয় পক্ষকে ইনটিগ্রেটিং করি অর্থাৎ [Integrating both sides, i. e.]

$$\int \frac{dR}{R} = \int P\,dx$$

$$\text{বা } \ln R = \int P\,dx$$

$$\text{বা } \ln R = \ln e^{\int P dx}$$

$$\text{বা } R = e^{\int P dx}.$$

$\therefore$ (1) নং সমীকরণের ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক $e^{\int P\,dx}$ [$\therefore$ Integrating factor is $e^{\int P\,dx}$]

এখন (1) নং কে $e^{\int P\,dx}$ দ্বারা গুন করিয়া পাই [Now multiplying both of (1) by $e^{\int P\,dx}$ we get]

$$e^{\int P dx}\frac{dy}{dx} + Py\,e^{\int P dx} = Q\,e^{\int P dx}$$

$$\text{বা } \frac{d}{dx}[y\,e^{\int P dx}] = Q\,e^{\int P dx}$$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেটিং করিয়া পাই [Integrating both w. r. to x we get]

$$y\,e^{\int P dx} = \int Q e^{\int P dx}\,dx + c.$$

ইহাই নির্ণেয় সমাধান [This is the required solution]

2-5.3 ঃ অনুসিদ্ধান্ত ঃ যদি ডিফারেনসিয়াল সমীকরণটি $\frac{dx}{dy} + P_1x = Q$ আকারে থাকে যখন P_1 এবং Q_1 কেবলমাত্র y এর ফাংশন অথবা ধ্রুবক হ এইক্ষেত্রে ডিফারেনসিয়াল সমীকরণের ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক $e^{\int P_1\,dy}$. এবং ইহার স

$$x e^{\int P_1\,dy} = \int Q_1\,e^{\int P_1\,dy}\,dy + c.$$

[**Cor :** If the differential equation of the form $\frac{dx}{dy} + P_1x$ where P_1 and Q_1 are only functions of y or constants, then in case the integrating factor of the differential equation is e and its solution is $x e^{\int P_1\,dy} = \int Q_1\,e^{\int P_1\,dy}\,dy + c.$]

2-5.4 ঃ বার্নোলীর সমীকরণ [Bernoulli's equation] ঃ

[NUH–2006, 2010, NUH(NM)–2007]

যদি P এবং Q কেবলমাত্র x এর ফাংশন অথবা ধ্রুবক হয় তবে $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n;\ n \neq 1$ এই আকারের ডিফারেনসিয়াল সমীকরণকে বার্নোলীর সমীকরণ বলা হয়। এই সমীকরণকে y^n দ্বারা ভাগ করিয়া অতি সহজেই রৈখিক সমীকরণে রূপান্তরিত করা যায়।

[If P and Q are only functions of x or constants, then the differential equation of the form $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n;\ n \neq 1$ is called Bernoulli's equation. Dividing this equation by y^n, it can be easily reduced to linear differential equation]

2-5.5 ঃ উপপাদ্য ঃ $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n;\ n \neq 1$ বার্নোলীর সমীকরণের সাধারণ সমাধান বাহির কর যেখানে P এবং Q কেবলমাত্র x এর ফাংশন অথবা ধ্রুবক।

[Find the general solution of Bernoulli's equation $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n;\ n \neq 1$ where P and Q are only functions of x or constants.]

[NUH–2005, 2008, 2010]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$$

উভয় পক্ষকে y^n দ্বারা ভাগ করিয়া পাই [Dividing both sides by y^n we get]

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{y^{n-1}}P = Q$$

$$\text{বা } y^{-n}\frac{dy}{dx} + y^{-n+1}P = Q \cdots (1)$$

ধরি [we put] $y^{-n+1} = v$ তবে [then]

$$(-n+1)y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

$$\text{বা } y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-n)}\frac{dv}{dx} \cdots (2)$$

(1) নং এবং (2) নং হইতে পাই [From (1) and (2) we get]

$$\frac{1}{(1-n)}\frac{dv}{dx} + Pv = Q \quad \text{বা } \frac{dv}{dx} + (1-n)Pv = (1-n)Q \cdots (3)$$

ইহা রৈখিক সমীকরণ [It is a linear equation] I. F. $= e^{\int (1-n)P dx}$.

(3) নং এর উভয় পক্ষকে $e^{\int(1-n)P\,dx}$ দ্বারা গুন করিয়া পাই [Multiplying b
sides of (3) by $e^{\int(1-n)P\,dx}$ we get]

$$e^{\int(1-n)Pdx}\frac{dv}{dx}+(1-n)Pv\,e^{\int(1-n)Pdx}=(1-n)Q\,e^{\int(1-n)Pdx}$$

বা $\frac{d}{dx}\left[ve^{\int(1-n)Pdx}\right]=(1-n)\,Qe^{\int(1-n)Pdx}$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেটিং করিয়া পাই [Integrating this w. r. to x
get]

$$ve^{\int(1-n)Pdx}=\int(1-n)Q\,e^{\int(1-n)Pdx}\,dx+c.$$

ইহাই নির্ণেয় সমাধান [This is the required solution]

2-5.6 ঃ কার্য্য পদ্ধতি [Working rule] ঃ

(i). প্রথমে সমীকরণকে $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ আকারে সাজাইতে হইবে। এখানে $\frac{dy}{dx}$
সহগ 1 [এক] এবং মধ্যপদ Py আকারে থাকিবে।

(ii). মধ্য পদ y এর সহগ P দিয়া ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক I. F. তৈরী করিতে হ
যেমন I. F. = $e^{\int Pdx}$.

(iii). এখন প্রদত্ত সমীকরণকে ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক $e^{\int Pdx}$ দ্বারা গুণ করার পর x
সাপেক্ষে ইনটিগ্রেটিং করিলে সমাধান পাওয়া যায়।

যেমন ঃ $e^{\int Pdx}\frac{dy}{dx}+Py\,e^{\int Pdx}=Qe^{\int Pdx}\ \ldots(1)$

বা $\frac{d}{dx}\left[ye^{\int Pdx}\right]=Qe^{\int Pdx}\ \ldots(2)$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেটিং করিয়া পাই [Integrating this w. r. to
we get]

$$y\,e^{\int Pdx}=\int Qe^{\int Pdx}\,dx+c$$

ইহাই নির্ণেয় সমাধান [This is the required solution]

নোট ঃ প্রদত্ত সমীকরণকে ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক I. F. দ্বারা গুন করার সময় (1) নং
পরিবর্তে (2) নং সমীকরণ লিখিব। কারণ (2) নং এর বামপক্ষকে অন্তরীকরণ করিলে (1)
এর বামপক্ষ পাওয়া যায়।

উদাহরণমালা [EXAMPLES]

উদাহরণ-1 ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

(i) $(1-x^2)\frac{dy}{dx}-xy=1$ [DUH–1981]

(ii) $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+y=\tan^{-1}x$ [NUH–2010, DUH–1985]

(iii) $(2+y^2)dx-(xy+2y+y^3)dy=0$ [DUH–1982]

(iv) $y\,dx+(xy^2+x-y)\,dy=0.$ [NUH–2011]

সমাধান–(i) ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(1-x^2)\frac{dy}{dx}-xy=1$$

বা $\frac{dy}{dx}-\frac{xy}{1-x^2}=\frac{1}{1-x^2}\ \cdots(1)$

∴ ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক [Integrating factor] I. F = $e^{-\int\frac{xdx}{1-x^2}}$

বা I. F = $e^{\frac{1}{2}\int\frac{-2xdx}{1-x^2}}=e^{\frac{1}{2}\ln(1-x^2)}=e^{\ln(1-x^2)^{1/2}}$

বা I. F. = $(1-x^2)^{1/2}$.

(1) নং এর উভয় পক্ষকে $\sqrt{1-x^2}$ দ্বারা গুন করি [Mutiplying both sides of
(1) by $\sqrt{1-x^2}$]

$$\sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dx}-\frac{xy\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$$

বা $\sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dx}-\frac{xy}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

বা $\frac{d}{dx}\left[y\sqrt{1-x^2}\right]=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেটিং করিয়া পাই [Integrating this w. r. to x
we get]

$$y\sqrt{1-x^2}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+c$$

বা $y\sqrt{1-x^2}=\sin^{-1}x+c.$

সমাধান-(ii) ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx}+y=\tan^{-1}x$$

বা $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{1+x^2}=\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\cdots(1)$ M.V.I

$\therefore$ I. F. $=e^{\int\frac{dx}{1+x^2}}=e^{\tan^{-1}x}$

(1) নং এর উভয় পক্ষকে $e^{\tan^{-1}x}$ দ্বারা গুন করিয়া পাই [Multiplying both sides of (1) by $e^{\tan^{-1}x}$ we get]

$$\frac{d}{dx}[y\,e^{\tan^{-1}x}]=\frac{\tan^{-1}x.\ e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}$$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেটিং করি [Integrating this w. r. to x]

$$ye^{\tan^{-1}x}=\int\frac{\tan^{-1}x.\ e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}dx\cdots(2)$$

ডানপক্ষে ধরি [In R. H. side we put] $\tan^{-1}x=z$

তবে [then] $\frac{dx}{1+x^2}=dz$

$\therefore$ (2) $\Rightarrow y\,e^{\tan^{-1}x}=\int ze^z\,dz$

বা $ye^{\tan^{-1}x}=z\int e^z\,dz-\int\left\{\frac{dz}{dz}\int e^z\,dz\right\}dz$

বা $ye^{\tan^{-1}x}=ze^z-\int 1e^z\,dz$

বা $ye^{\tan^{-1}x}=ze^z-e^z+c$

বা $ye^{\tan^{-1}x}=(z-1)e^z+c$

বা $ye^{\tan^{-1}x}=(\tan^{-1}x-1)\,e^{\tan^{-1}x}+c$

$\therefore\ y=\tan^{-1}x-1+ce^{-\tan^{-1}x}$. not

সমাধান-(iii) ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(2+y^2)dx=(xy+2y+y^3)dy$$

বা $\frac{dx}{dy}=\frac{xy+2y+y^3}{2+y^2}$

বা $\frac{dx}{dy}=\frac{xy}{2+y^2}+\frac{y(2+y^2)}{2+y^2}$

বা $\frac{dx}{dy}-\frac{yx}{2+y^2}=y\cdots(1)$

$\therefore$ I. F. $=e^{-\int\frac{ydy}{2+y^2}}=e^{-\frac{1}{2}\int\frac{2ydy}{2+y^2}}=e^{-\frac{1}{2}\ln(2+y^2)}$

বা I. F. $=e^{\ln(2+y^2)^{-1/2}}=(2+y^2)^{-1/2}$

বা I. F. $=\frac{1}{\sqrt{2+y^2}}$

(1) নং এর উভয় পক্ষকে $\frac{1}{\sqrt{2+y^2}}$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই [Multiplying both sides of (1) by $\frac{1}{\sqrt{2+y^2}}$ we get]

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{x}{\sqrt{2+y^2}}\right]=\frac{y}{\sqrt{2+y^2}}$$

ইহাকে y এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেটিং করি [Integrating this w. r. to y]

$$\frac{x}{\sqrt{2+y^2}}=\int\frac{y\,dy}{\sqrt{2+y^2}}$$

বা $\frac{x}{\sqrt{2+y^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{2y\,dy}{\sqrt{2+y^2}}$

বা $\frac{x}{\sqrt{2+y^2}}=\frac{1}{2}.2\sqrt{2+y^2}+c$

$\therefore x=2+y^2+c\sqrt{2+y^2}$.

সমাধান-1(iv) ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$y\,dx=(y-x-xy^2)\,dy$$

বা $\frac{dx}{dy}=\frac{y-x-xy^2}{y}=1-\frac{x}{y}-xy$

বা $\frac{dx}{dy}=1-x\left(\frac{1}{y}+y\right)$

বা $\frac{dx}{dy}+\left(y+\frac{1}{y}\right)x=1\cdots(1)$

I. F. $=e^{\int(y+1/y)dy}=e^{y^2/2+\ln y}=e^{y^2/2}\,e^{\ln y}$

$=ye^{y^2/2}$

এখন (1) $\times\,ye^{y^2/2}\Rightarrow ye^{y^2/2}\frac{dx}{dy}+\left(y+\frac{1}{y}\right)xye^{y^2/2}=ye^{y^2/2}$

$$\Rightarrow\frac{d}{dy}(xye^{y^2/2})=ye^{y^2/2}$$

ইহাকে y এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট করি [Integrating this w. r. to y]

$$xye^{y^2/2} = \int ye^{y^2/2}\,dy$$

বা $xye^{y^2/2} = \int e^{y^2/2}\,d(y^2/2)$

বা $xye^{y^2/2} = e^{y^2/2} + c$, যেখানে c অবাধ ধ্রুবক।

বা $xy = 1 + ce^{-y^2/2}$.

উদাহরণ-2(i) ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}\sin 2y = x^3\cos^2 y$$ **[NUH(NM)-2005, RUH-1**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}\sin 2y = x^3\cos^2 y$$

বা $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}2\sin y\cos y = x^3\cos^2 y$

বা $\frac{1}{\cos^2 y}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}\frac{2\sin y\cos y}{\cos^2 y} = x^3$

বা $\sec^2 y\frac{dy}{dx} + \frac{2\tan y}{x} = x^3 \cdots (1)$

ধরি [we put] $\tan y = t$ তবে [then] $\sec^2 y\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$

$\therefore (1) \Rightarrow \frac{dt}{dx} + \frac{2t}{x} = x^3 \cdots (2)$

$\therefore$ I. F. $= e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$

(2) নং এর উভয় পক্ষকে x^2 দ্বারা গুন করিয়া পাই [Multiplying both sides of (2) by x^2 we get]

$$\frac{d}{dx}[tx^2] = x^5$$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেটিং করিয়া পাই [Integrating this w. r. to x we get]

$$tx^2 = \frac{x^6}{6} + \frac{c}{6}$$

বা $x^2\tan y = \frac{x^6}{6} + \frac{c}{6}$

$\therefore\ 6x^2\tan y = x^6 + c.$

উদাহরণ-2(ii) ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ $\frac{dy}{dx} + y = y^2e^x$.

[NUH-2009, NU(Pass)-2007, DUH-1982, 1988]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{dy}{dx} + y = y^2e^x$$

বা $\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{y} = e^x \cdots (1)$

ধরি [we put] $\frac{1}{y} = z$ তবে [then] $\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = -\frac{dz}{dx} \cdots (2)$

$\therefore (1) \Rightarrow -\frac{dz}{dx} + z = e^x$

বা $\frac{dz}{dx} - z = -e^x \cdots (3)$

$\therefore$ I. F. $= e^{-\int 1\,dx} = e^{-x}$

(3) নং এর উভয় পক্ষকে e^{-x} দ্বারা গুন করিয়া পাই [Multiplying both sides of (2) by e^{-x} we get]

$$\frac{d}{dx}[ze^{-x}] = -e^x.e^{-x}$$

বা $\frac{d}{dx}[ze^{-x}] = -1$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেটিং করিয়া পাই [Integrating this w. r. to x we get]

$$ze^{-x} = -x + c$$

বা $\frac{1}{y}.e^{-x} = -x + c$

বা $\frac{1}{ye^x} + x = c$

বা $1 + xye^x = cye^x$.

উদাহরণ-2(iii). সমাধান কর [Solve] :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}.$$ **[NU(Pass)-2008]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}$$

বা $\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{y}\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \cdots (1)$

ধরি [We put] $\frac{1}{y} = z$ তবে [then] $-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$ ··· (2)

(1) নং এবং (2) নং হইতে পাই [From (1) and (2) we get]

$$-\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x} = \frac{1}{x^2}$$

বা $\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = -\frac{1}{x^2}$ ··· (3)

$$\text{I. F.} = e^{-\int\frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

(3) নং এর উভয় পক্ষকে $\frac{1}{x}$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই [Multiplying both sides of (3) we get]

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{z}{x}\right] = -\frac{1}{x^3}$$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating this w. r. to x, we get]

$$\frac{z}{x} = \frac{1}{2x^2} + c$$

বা $\frac{1}{xy} = \frac{1}{2x^2} + c.$

প্রশ্নমালা [EXERCISE]–2(5)

সমাধান কর [Solve] ঃ

(i). $\frac{dy}{dx} + 2xy = e^{-x^2}$ [RUH-19

(ii). $\cos^2 x\frac{dy}{dx} + y = \tan x$ [CUH-1977, 1980, 19

(iii). $(1 + y^2)\,dx = (\tan^{-1}y - x)dy$ [NUH-2007, NUH(NM)-20

(iv). $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$ [CUH-19

(v). $\frac{dy}{dx} + y\cot x = 2\cos x$ [RUH-19

(vi). $\frac{dy}{dx} + y\sec x = \cos x$ [CUH-19

(vii). $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x^2$ [NUH-2008, CUH-19

(viii). $\frac{dy}{dx} + 2xy = x$ [CUH-1980, 19

(ix). $\frac{dy}{dx} + y\tan x = \sec x$ [NUH-2010, DUH-1974]

(x). $\frac{dy}{dx} + y = x$ [CUH-1981]

(xi). $\frac{dy}{dx} + \frac{(1-2x)y}{x^2} = 1$ [CUH-1982, 1985]

(xii). $\frac{dy}{dx} - y\cot x = \operatorname{cosec} x$

(xiii). $x(x-1)\frac{dy}{dx} - y = x^2(x-1)^2$

(xiv). $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x\ln x} = \frac{2}{x}$

(xv). $x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2\ln x$

(xvi). $(x^3 - x)\frac{dy}{dx} - (3x^2 - 1)y = x^5 - 2x^3 + x$

(xvii). $(1 + x)\frac{dy}{dx} + 3y = \frac{1 + x + x^2}{(1 + x)^3}$

(xviii). $x\frac{dy}{dx} + 2y = \frac{dy}{dx} + 4$

(xix). $\frac{dy}{dx} - 2y\cos x = -2\sin 2x$

(xx). $y\ln y\,dx + (x - \ln y)\,dy = 0$

(xxi). $(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} + xy = x^2$ [DUH-1983]

(xxii). $(x + 2y^3)\frac{dy}{dx} = y$

(xxiii). $(3xy - x^2)dx + x^2\,dy = 0$

(xxiv). $x\frac{dy}{dx} - 2y = x^2 + \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$

(xxv). $(1 + y^2)dx + (x - e^{-\tan^{-1}y})\,dy = 0$ [CUS-1989, 1992]

(xxvi). $x\frac{dy}{dx} - 2y = (x - 2)e^x$ [JUS-1996]

(xxvii). $x\frac{dy}{dx} + (x - 2)y = 3x^3 e^{-x}, x > 0$ [DUS-1992]

দ্বিতীয় অধ্যায় [CHAPTER–2]

অষ্টম পরিচ্ছেদ [SECTION–8]

প্রথম ক্রমের ডিফারেনসিয়াল সমীকরণের মডেলিং

[Modeling with first order differential equation]

2-8.1. এই অধ্যায়ে আমরা প্রথম ক্রমের ডিফারেনসিয়াল সমীকরণের মডেলিং এর সাধারণ ধারণা সম্পর্কে আলোচনা করিব এবং কতিপয় গুরুত্বপূর্ণ মডেলিং এর অনুসন্ধান করিব যাহা জনসংখ্যার বৃদ্ধি বা হ্রাসে প্রয়োগ করা হইবে। [বেকটেরিয়া, মেডিসিন এবং বাস্তববিদ্যার ক্ষেত্রেও অনুরূপ নিয়ম।]

এই তত্ত্বকে গাণিতিক মডেলে অনুবাদ করিতে হইবে। মনেকরি t সময়ে $y = y(t)$ দ্বারা জনসমষ্ঠি নির্দেশ করে, তবে সময়ের সাপেক্ষে জনসমষ্টির বৃদ্ধিহার $\frac{dy}{dt}$. ধরি জনসমষ্টির বৃদ্ধিহার সমানুপাতিক হয় জনসমষ্টির সাথে,

অর্থাৎ $\frac{dy}{dt} \propto y$

$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = ky$ যখন $k > 0$, যেহেতু জনসংখ্যা বৃদ্ধিপ্রাপ্ত।

যদি কোন নির্দিষ্ট সময়ে জনসমষ্টি জানা থাকে, ধরি $t = 0$ সময়ে জনসমষ্টি $y = y_0$, অর্থাৎ $y(0) = y_0$.

$\therefore$ আদিমান সমস্যা $\frac{dy}{dt} = ky$, $y(0) = y_0$ কে সমাধান করিয়অ $y(t)$ এর জন্য একটি সাধারণ সূত্র পাওয়া যায়।

[In this section, we will discuss the general idea of modeling with first order differential equation and we will investigate some important models, that can be applied to population growth and decay. [same as bacteria, medicine and ecology.]

To translate this principle into mathematical model, let $y = y(t)$ denotes the population at time t, then the rate of increase of the population with respect to time is $\frac{dy}{dt}$, so the assumption the rate of growth is proportional to the population that is $\frac{dy}{dt} \propto y$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = ky, \text{ where } k \text{ is a positive constant.}$$

Thus if the population is known at definite time, say $y =$ time $t = 0$.

Then the general formula for $y(t)$ can be obtained by so the initial value problem $\frac{dy}{dt} = ky,\ y(0) = y_0$.]

2-8.2. নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রানুযায়ী, শীতলীকরণ বস্তুর তাপমাত্রার পরিবর্তন সমানুপাতিক হয় বস্তুটির তাপ এবং বাতাসের তাপের পার্থক্যের সাথে।

এই তত্ত্বকে গাণিতিক মডেলে অনুবাদ করিতে হইবে। মনেকরি t সময়ে $y = y(t)$ শীতলীকরণ বস্তুর তাপমাত্রা নির্দেশ করে, তবে সময়ের সাপেক্ষে শীতলীকরণ বস্তুর তাপ পরিবর্তনের হার $\frac{dy}{dt}$.

মনেকরি t সময়ে বস্তুটির তাপমাত্রা T এবং বাতাসের তাপমাত্রা 290^0C

$\therefore$ বস্তু ও বাতাসের তাপমাত্রার পার্থক্য $= T - 290^0C$

যেহেতু শীতলীকরণ বস্তুর তাপমাত্রার পরিবর্তনের হার সমানুপাতিক হয় বস্তু বাতাসের তাপমাত্রার পার্থক্যের সাথে

অর্থাৎ $\frac{dy}{dt} \propto T - 290^0C$

$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = -k(T - 290)$; যেহেতু তাপমাত্রা হ্রাস পায়।

[By the Newton's second law of cooling, the rate of change temperature of a cooling object proportional to the difference between the temperature of the object and temperature of surrounding air.

To translate this into a mathematical model, let $y =$ denotes the temperature of the cooling object at time t, then rate of change of y with respect to time is $\frac{dy}{dt}$.

Let T be the temperature of the object and 290^0C be temperature of surrounding air.

$\therefore$ Change of temperature of the object and the air $= T - 290^0$

Since the rate of change of temperature of the cooling body proportional to the difference between the temperature of object and the surrounding air.

that is $\frac{dy}{dt} \propto T - 290^0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = -k(T - 290)$, Since temperature decreases.

উদাহরণমালা [EXAMPLES]

উদাহরণ-1. কোন নির্দিষ্ট সময়ে জনসংখ্যার বৃদ্ধিহার ঐ সময়ের জনসমষ্টির সহিত সমানুপাতিক। জনসংখ্যা 50 বছরে দ্বিগুন হইলে, কত বছরে উহা তিনগুন হইবে?

[The population of a community is known to increase at a rate proportional to the number of people present at time t. If the population has doubled in 50 years, how long will it take to triple?] **[NUH–2005, 2008, 2010, NUH(NM)–2008]**

সমাধান ঃ মনেকরি t সময়ে জনসংখ্যা y, তাহা হইলে জনসংখ্যার বৃদ্ধিহার $\frac{dy}{dt}$.

Let at time t, the number of people is y, then the rate of increase of people is $\frac{dy}{dt}$.]

যেহেতু [Since] $\frac{dy}{dt} \propto y$

$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = ky$, যেখানে $k > 0$, যেহেতু জনসংখ্যা বৃদ্ধি প্রাপ্ত।

বা $\frac{dy}{y} = k\,dt \cdots (1)$

মনেকরি যখন $t = 0$ তখন $y = y_0$ [Let when $t = 0$ then $y = y_0$]

দেওয়া আছে যখন $t = 50$ তখন $y = 2y_0$ [Given that when $t = 50$ then $y = 2y_0$]

এখন t এবং y এর সীমা লইয়া (1) নং কে ইনটিগ্রেট করি [Now integrating (1) by taking limits of t and y]

i, e. $\int_{y_0}^{2y_0} \frac{dy}{y} = k \int_0^{50} dt$

বা $[ln y]_{y_0}^{2y_0} = k\,[t]_0^{50}$

বা $ln\, 2y_0 - ln\, y_0 = k(50 - 0)$

বা $ln \frac{2y_0}{y_0} = 50k$

বা $50k = ln\, 2$

$\therefore k = \frac{ln\, 2}{50} \cdots (4)$

মনেকরি $t = t_1$ সময়ে জনসংখ্যা $y = 3y_0$ হইবে [Let at time $t = t_1$ the population will be $y = 3y_0$]

আবার যখন $t = 0$ তখন $y = y_0$ [Again when $t = 0$ then $y = y_0$]

আবার t এবং y এর সীমা লাইয়া (1) নং কে ইনটিগ্রেট করি [Again integrating (1) by taking limits of t and y]

i. e. $\int_{y_0}^{3y_0} \frac{dy}{y} = k\int_0^{t_1} dt$

বা $[\ln y]_{y_0}^{3y_0} = k[t]_0^{t_1}$

বা $\ln 3y_0 - \ln y_0 = k(t_1 - 0)$

বা $\ln \frac{3y_0}{y_0} = kt_1$, বা $kt_1 = \ln 3$

বা $t_1 = \frac{\ln 3}{k} = \frac{\ln 3}{(\ln 2)/50}$

বা $t_1 = \frac{50 \ln 3}{\ln 2} \approx 79$ বছর প্রায়।

প্রায় 79 বছর পর জনসংখ্যা তিনগুন হইবে।

উদাহরণ–2 একটি জনসংখ্যা N, $\frac{dN}{dt} = KN$ নিয়মে বৃদ্ধি পায় যেখানে K একটি ধনাত্মক ধ্রুবক। সময় t বছরে পরিমাপ করা হইল, জনসংখ্যা তিনগুন হওয়ার সময় নির্ণয় কর। $\lim_{t\to\infty} N(t)$ নির্ণয় কর।

[A population N grows according to the law $\frac{dN}{dt} = KN$, where K is a positive constant. Determine how long it takes the population to triple in size, where the time t is measured in years. Find $\lim_{t\to\infty} N(t)$.] **[NUH–2006, 2009, NUH(NM)–2009]**

সমাধান ঃ প্রথম অংশ **[Part–1]** : দেওয়া আছে [Given that]

$$\frac{dN}{dt} = KN$$

বা $\frac{dN}{N} = K\,dt \cdots (1)$

মনেকরি $t = 0$ সময়ে জনসংখ্যা $N = N_0$ ছিল; ধরি $t = T$ সময়ে জনসংখ্যা $N = 3N_0$ হইবে এবং $T = ?$ [Let at time $t = 0$, the population was $N = N_0$ and at time $t = T$, the population will be $N = 3N_0$ and $T = ?$]

(1) নং কে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating (1) we get]

$$\int_{N_0}^{3N_0} \frac{dN}{N} = K\int_0^T dt$$

বা $[\ln N]_{N_0}^{3N_0} = K[t]_0^T$

বা $\ln 3N_0 - \ln N_0 = K(T - 0)$

বা $\ln \frac{3N_0}{N_0} = KT$, বা $KT = \ln 3$

$\Rightarrow T = \frac{\ln 3}{K}$ বছর পর জনসংখ্যা তিনগুণ হইবে।

দ্বিতীয় অংশ ঃ (1) নং কে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating (1) we get]

$$\ln N = Kt + \ln c$$

বা $\ln \frac{N}{c} = Kt$

বা $\frac{N}{c} = e^{Kt}$

বা $N = ce^{Kt} \cdots (2)$

মনেকরি $t = 0$ সময়ে জনসংখ্যা ছিল $N = N_0$ [Let at time $t = 0$ the population was $N = N_0$]

এখন (2) নং এ $t = 0$ এবং $N = N_0$ বসাইয়া পাই [Now putting $t = 0$ and $N = N_0$ in (2) we get]

$$N_0 = ce^0 \Rightarrow c = N_0.$$

$(2) \Rightarrow N(t) = N_0 e^{Kt}$

$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} N(t) = N_0 \lim_{t\to\infty} e^{Kt} = N_0 e^{\infty}$

$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} N(t) = \infty$

সুতরাং অনন্ত সময় পরে জনসংখ্যা অসীম হইবে।

উদাহরণ–3. কোন স্থানের জীবানুর বৃদ্ধিহার ঐ সময়ে জীবানুর সংখ্যার সহিত সমানুপাতিক। প্রাথমিক অবস্থায় জীবানুর সংখ্যা x এবং একঘন্টা পরে উহার সংখ্যা $\frac{3x}{2}$ হইলে কত সময়ে উহা তিনগুন হইবে?

[In a certain bacteria culture the rate of increase in the number of bacteria is proportional to the number present. If initial number of bacteria is x and the number is $\frac{3x}{2}$ after one hour, how long will it take to triple?]

সমাধান ঃ মনেকরি t সময়ে জীবানুর সংখ্যা y, তাহা হইলে জীবানুর বৃদ্ধিহার $\frac{dy}{dt}$.

[Let at time t, the number of bacteria is y then the rate of increase of bacteria is $\frac{dy}{dt}$]

Since $\frac{dy}{dt} \propto y$

$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = Ky$ যখন $K > 0$ যেহেতু জীবানু বৃদ্ধিপ্রাপ্ত।

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = K\,dt \cdots (1)$$

দেওয়া আছে $t = 0$ সময়ে জীবানুর সংখ্যা x এবং $t = 1$ সময়ে জীবানুর সংখ্যা $\frac{3x}{2}$.

[Given that number of bacteria is x at time $t = 0$ and the number is $\frac{3x}{2}$ at time $t = 1$.]

এখন t এবং y এর সীমা লাইয়া (1) নং কে ইনটিগ্রেট করি [Now integrating (1) by taking limits of t and y]

i, e. $\int_x^{3x/2} \frac{dy}{y} = K\int_0^1 dt$

বা $[\ln y]_x^{3x/2} = K\,[t]_0^1$

বা $\ln\frac{3x}{2} - \ln x = K(1-0)$

বা $\ln\left(\frac{3x/2}{x}\right) = K \Rightarrow K = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \cdots (2)$

মনেকরি $t = T$ সময়ে জীবানুর সংখ্যা $y = 3x$ হইবে [Let at time $t = T$ the number of bacteria will be $y = 3x$]

আবার t এবং y এর সীমা লইয়া (1) নং কে ইনটিগ্রেট করি [Again integrating (1) by taking limits of t and y]

$$\int_x^{3x} \frac{dy}{y} = K\int_0^T dt$$

বা $[\ln y]_x^{3x} = K(T-0)$, বা $\ln 3x - \ln x = KT$

বা $KT = \ln\frac{3x}{x}$, বা $T = \frac{\ln 3}{K}$, বা $T = \frac{\ln 3}{\ln(3/2)} = 2.71$ ঘন্টা। by (2)

উদাহরণ–4. কোন জীবানু চাষে জীবানুর বৃদ্ধির হার ঐ সময়ের জীবানু সংখ্যার সমানুপাতিক। যদি 3 ঘন্টা পরে উহার সংখ্যা 400 এবং 10 ঘন্টা পরে 2000 হয়, তাহা হইলে প্রাথমিক অবস্থায় উহার সংখ্যা কত ছিল?

[In a certain bacteria culture the rate of increase in the number of bacteria is proportional to the number present. If that number is 400 after 3 hour and 2000 after 10 hour, then find the number initially present?]

[NUH(NM)–2006]

সমাধান ঃ মনেকরি t ঘন্টা পরে জীবানুর সংখ্যা y, তবে জীবানুর বৃদ্ধির হার = $\frac{dy}{dt}$.

[Let y be the number of bacteria after t hour, then the rate of increase of bacteria = $\frac{dy}{dt}$]

যেহেতু [Since] $\frac{dy}{dt} \propto y$

$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = Ky$, যখন K ধ্রুবক।

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = K\,dt \cdots (1)$$

যখন $t = 3$ তখন $y = 400$ [when $t = 3$ then $y = 400$]

যখন $t = 10$ তখন $y = 2000$ [when $t = 10$ then $y = 2000$]

এখন t এবং y এর সীমা লইয়া (1) নং কে ইনটিগ্রেট করি [Now integrating (1) by taking limits of t and y]

i, e. $\int_{400}^{2000} \frac{dy}{y} = K\int_3^{10} dt$

বা $[\ln y]_{400}^{2000} = K\,[t]_3^{10}$

বা $\ln 2000 - \ln 400 = K(10-3)$

বা $7K = \ln\frac{2000}{400}$, বা $7K = \ln 5 \cdots (2)$

মনেকরি যখন $t = 0$ তখন জীবানুর সংখ্যা $y = x$ এবং যখন $t = 3$ তখন $y = 400$

[Let when $t = 0$ then number of bacteria $y = x$ and when t = 3 then $y = 400$]

আবার t এবং y এর সীমা লইয়া (1) নং কে ইনটিগ্রেট করি

$$\int_x^{400} \frac{dy}{y} = K \int_0^3 dt$$

বা $[\ln y]_x^{400} = K\,[t]_0^3$

বা $\ln \frac{400}{x} = 3K$, বা $\frac{400}{x} = e^{3K}$

বা $\frac{x}{400} = e^{-3K}$, বা $x = 400e^{-3K} = 400(e^{7k})^{-3/7}$

বা $x = 400(e^{\ln 5})^{-3/7}$ (2) নং দ্বারা।

বা $x = 400(5)^{-3/7} = \frac{400}{5^{3/7}} = \frac{400}{(5)^{.43}}$;

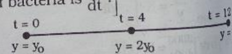
বা $x = \frac{400}{1.997} \approx \frac{400}{2} = 200$

প্রথামিক অবস্থায় জীবানুর সংখ্যা ছিল 200.

উদাহরণ–5. কোন জীবানু চাষে জীবানুর বৃদ্ধিহার ঐ সময়ের জীবানুর স সমানুপাতিক। 4 ঘন্টায় উহার সংখ্যা দ্বিগুণ হইলে 12 ঘন্টা পর উহার সংখ্যা কত হইবে 3 ঘন্টা পরে উহার সংখ্যা 10^4 এবং 5 ঘন্টা পরে উহার সংখ্যা 4×10^4 হয়, তাহ প্রাথমিক অবস্থায় উহার সংখ্যা কত ছিল?

[In a certain bacteria culture, the rate of increase in number of bacteria is proportional to the number present. If number double in 4 hour, how many will be present in 12 hour the number 10^4 in 3 hour and 4×10^4 in 5 hour, then find number initially present?]

সমাধান ঃ প্রথম অংশ [Part–1] : মনেকরি t ঘন্টা পরে জীবানুর সংখ্যা y হইলে জীবানুর বৃদ্ধিহার $\frac{dy}{dt}$. [Let y be the number of bacteria after t then the rate of increase of bacteria is $\frac{dy}{dt}$.]



যেহেতু [Since] $\frac{dy}{dt} \propto y$

$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = Ky$, যখন $K > 0$ এবং যেহেতু জীবানু বৃদ্ধিপ্রাপ্ত।

$\Rightarrow \frac{dy}{y} = K\,dt \cdots (1)$

(1) নং কে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating (1) we get]

$$\ln y = Kt + \ln c$$

$$\Rightarrow \ln \frac{y}{c} = Kt$$

$$\Rightarrow \frac{y}{c} = e^{Kt}$$

$$\Rightarrow y = ce^{Kt} \cdots (2)$$

মনেকরি যখন $t = 0$ তখন $y = y_0$; এখন (2) নং এ $t = 0$ এবং $y = y_0$ বসাইয়া পাই [Let when $t = 0$ then $y = y_0$; Now putting $t = 0$ and $y = y_0$ in (2) we get]

$$y_0 = ce^0 \Rightarrow c = y_0$$

$\therefore (2) \Rightarrow y = y_0 e^{Kt} \cdots (3)$

যখন $t = 4$ তখন $y = 2y_0$, এখন t এবং y এর মান (3) নং এ বসাইয়া পাই [When $t = 4$ then $y = 2y_0$; Now putting the values of t and y in (3) we get]

$$2y_0 = y_0 e^{4K} \Rightarrow e^{4K} = 2 \cdots (4)$$

মনেকরি যখন $t = 12$ তখন জীবানুর সংখ্যা $y = y_1$ [Let when $t = 12$ then the number of bacteria $y = y_1$]

$\therefore (3) \Rightarrow y_1 = y_0 e^{12K}$

$\Rightarrow y_1 = y_0 (e^{4K})^3 = y_0 (2)^3$; (4) নং দ্বারা।

$\Rightarrow y_1 = 8y_0$

সুতরাং 12 ঘন্টা পর জীবানুর সংখ্যা 8 গুণ হইবে।

দ্বিতীয় অংশ [Part–2] :

যখন $t = 3$ তখন $y = 10^4$ [when $t = 3$ then $y = 10^4$]

যখন $t = 5$ তখন $y = 4 \times 10^4$ [when $t = 5$ then $y = 4 \times 10^4$]

এখন t এবং y এর সীমা লইয়া (1) নং কে ইনটিগ্রেট করি [Integrating (1) by taking the limits of t and y]

$$\int_{10^4}^{4\times 10^4} \frac{dy}{y} = K \int_3^5 dt$$

$$\Rightarrow [\ln y]_{10^4}^{4\times 10^4} = K\,[t]_3^5$$

$$\Rightarrow \ln 4 \times 10^4 - \ln 10^4 = K(5-3)$$

$$\Rightarrow 2K = \ln \frac{4 \times 10^4}{10^4} \Rightarrow 2K = \ln 4 = \ln 2^2$$

$$\Rightarrow 2K = 2\ln 2 \Rightarrow K = \ln 2 \cdots (5)$$

প্রাথমিক অবস্থায় অর্থাৎ যখন $t = 0$ তখন জীবানুর সংখ্যা $y = y_0$ এবং $y_0 = ?$

আবার যখন $t = 3$ তখন $y = 10^4$; এখন t এবং y এর সীমা লইয়া (1) নং কে ইনটিগ্রেট করি

$$\int_{y_0}^{10^4} \frac{dy}{y} = K \int_0^3 dt$$

বা $[ln y]_{y_4}^{10^4} = K [t]_0^3$

বা $ln\, 10^4 - ln\, y_0 = 3K$, বা $ln \frac{10^4}{y_0} = 3K$

বা $\frac{10^4}{y_0} = e^{3K}$, বা $\frac{y_0}{10^4} = e^{-3K}$

বা $y_0 = 10^4 (e^{K})^{-3} = 10^4 (e^{ln 2})^{-3}$; by (5)

বা $y_0 = 10^4 (2)^{-3} = \frac{100 \times 100}{2^2 \times 2} = 25 \times 50$

$\Rightarrow y_0 = 1250$

প্রাথমিক অবস্থায় জীবানুর সংখ্যা ছিল 1250 [Initially the number of bacteria was 1250.

উদাহরণ-6. তেজস্ক্রিয় কণার একটি প্রদত্ত নমুনায় তেজস্ক্রিয় কণার পরিক্ষয়ের হার উক্ত সময়ে কণা সংখ্যার সমানুপাতিক। 1500 বৎসর পর নমুনাটির তেজস্ক্রিয় কণার পরিমান অর্ধি সংখ্যায় অর্ধেক লোপ পায়। 4500 বৎসর পর তেজস্ক্রিয় কণার শতকরা কত অংশ অবশি থাকিবে? কত বৎসর পর কণার সংখ্যা এক দশমাংশ হইবে। **[NUH–2011]**

[The rate at which radioactive nuclei decay is proportional to the number of such nuclei that are present in a given sample. Half of the original number of radioactive nuclei have undergone disintegration in a period of 1500 years. What percentage of the original radioactive nuclei will remain after 4500 years? In how many years will only one tenth of the original number remain?]

সমাধান ঃ মনেকরি t সময়ে তেজস্ক্রিয় পদার্থের পরিমান y. তবে তেজস্ক্রিয়তার হ্রাসের হার $\frac{dy}{dt}$. [Let at time t, quantity of nuclei is y, then the rate of radioactive nuclei decay is $\frac{dy}{dt}$.]

যেহেতু [Since] $\frac{dy}{dt} \propto y$

$\therefore \frac{dy}{dt} = -Ky$ যেহেতু তেজস্ক্রিয়তা হ্রাস পায় এবং $K > 0$

বা $\frac{dy}{y} = -K\, dt \cdots (1)$

ইহাকে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating this we get]

$ln\, y = -Kt + ln\, c$

বা $ln \frac{y}{c} = -Kt$

বা $\frac{y}{c} = e^{-Kt}$

বা $y = ce^{-Kt} \cdots (2)$

মনেকরি প্রাথমিক অবস্থায় অর্থাৎ যখন $t = 0$ তখন $y = y_0$. এখন (2) নং এ $t = 0$ এবং $y = y_0$ স্থাপন করি [Let initially, i, e. when $t = 0$ then $y = y_0$. Now putting $t = 0$ and $y = y_0$ in (2)]

$y_0 = ce^0 \Rightarrow c = y_0$

$\therefore (2) \Rightarrow y = y_0 e^{-Kt} \cdots (3)$

যখন $t = 1500$ তখন $y = \frac{y_0}{2}$ [when $t = 1500$ then $y = \frac{y_0}{2}$]

এখন t এবং y এর মান (3) নং এ বসাই [Now putting the values of t and y in (3)]

$\frac{y_0}{2} = y_0 e^{-1500K} \Rightarrow e^{-1500K} = \frac{1}{2} \cdots (4)$

বা $e^{1500K} = 2 \Rightarrow 1500K = ln\, 2 \cdots (4*)$

এখন (3) নং এ $t = 4500$ স্থাপন করি [Now putting $t = 4500$ in (3)]

$y = y_0 e^{-4500K}$

বা $y = y_0 (e^{-1500K})^3 = y_0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{y_0}{8}$

সুতরাং 4500 বছর পরে মূল তেজস্ক্রিয় কণার $\frac{1}{8}$ অংশ অর্থাৎ 12.50% অবশিষ্ট থাকিবে।

দ্বিতীয় অংশ ঃ মনেকরি t_1 বৎসর পর কণার সংখ্যা $y = \frac{y_0}{10}$ হইবে। [Let after t_1 years, the number of nuclei will be $y = \frac{y_0}{10}$.]

$(3) \Rightarrow \frac{y_0}{10} = y_0 e^{-Kt_1}$ বা $e^{Kt_1} = 10$

বা $Kt_1 = ln\, 10 \Rightarrow t_1 = \frac{ln 10}{K} = \frac{1500\, ln 10}{1500K}$

$\Rightarrow t_1 = \frac{1500\, ln 10}{ln 2} = \frac{3453.877}{0.693}$, by 4(*)

$\Rightarrow t_1 = 4984$ বছর প্রায়।

উদাহরণ–7. কোন পদার্থের তেজস্ক্রিয়তার হ্রাসের হার পদার্থের পরিমাপের সহিত সমানুপাতিক এবং 6 ঘন্টা পরে পদার্থটির পরিমাপ 3% কমিয়া যায়। প্রাথমিক অবস্থায় পদার্থের পরিমান 100 গ্রাম হইলে 24 ঘন্টা পর পদার্থের পরিমান নির্ণয় কর। কত সময়ে পদার্থের অর্ধেক হ্রাস পাইবে?

[The rate at which radioactive nuclei decay is proportional to the quantity of the nuclei, 3% of original nuclei have undergone disintegration is a period of 6 hour. If initial quantity of nuclei is 100 gm then find the quantity of nuclei after 24 hour. In how many times, half of the original nuclei lost?]

সমাধান ঃ মনেকরি t সময়ে তেজস্ক্রিয় পদার্থের পরিমান y, তবে তেজস্ক্রিয় হ্রাসের হার $\frac{dy}{dt}$. [Let at time t, quantity of nuclei is y, then the rate of radioacteve nuclei decay is $\frac{dy}{dt}$.]

যেহেতু [Since] $\frac{dy}{dt} \propto y$

$\therefore \frac{dy}{dt} = -Ky$, যেহেতু তেজস্ক্রিয়তা হ্রাস পায় এবং $K > 0$

বা $\frac{dy}{y} = -K\,dt \cdots (1)$

ইহাকে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating this we get]

$$\ln y = -Kt + \ln c$$

বা $\ln \frac{y}{c} = -Kt$

বা $\frac{y}{c} = e^{-Kt}$

বা $y = ce^{-Kt} \cdots (2)$

যখন $t = 0$ তখন $y = 100$ [when $t = 0$ then $y = 100$]

এখন (2) নং এ $t = 0$ এবং $y = 100$ স্থাপন করি [Now putting $t = 0$ and $y = 100$ in (2)]

$100 = ce^0 \Rightarrow c = 100$

$\therefore (2) \Rightarrow y = 100\,e^{-Kt} \cdots (3)$

যখন $t = 6$ তখন $y = 100 - 100 \times \frac{3}{100} = 97$

যখন $t = 0$ তখন $y = 100$

এখন t এবং y এর সীমা লাইয়া (1) নং কে ইনটিগ্রেট করি [Integrating (1) by taking limits of t and y]

$$\int_{100}^{97} \frac{dy}{y} = -K \int_0^6 dt$$

বা $[\ln y]_{100}^{97} = -K\,[t]_0^6$

বা $\ln 97 - \ln 100 = -K(6-0)$

বা $\ln \frac{97}{100} = -6K \cdots (4)$

$\Rightarrow 6K = \ln \frac{100}{97} = \ln(1.03092) = 0.03045 \cdots (5)$

মনে করি যখন $t = 24$ তখন $y = x$ [Let when $t = 24$ then $y = x$]

$\therefore (2) \Rightarrow x = 100\,e^{-24K}$

$\Rightarrow x = 100(e^{-6K})^4 = 100(e^{\ln(97/100)})^4$; by (4)

$\Rightarrow x = 100\left(\frac{97}{100}\right)^4 = 100\left(\frac{97}{100}\right)\left(\frac{97}{100}\right)^3$

$\Rightarrow x = 97\,(0.912673) = 88.53$ গ্রাম।

দ্বিতীয় অংশ ঃ মনেকরি $t = t_1$ সময়ে পদার্থের পরিমান $y = 50$ তবে [Let at time $t = t_1$, the quantity of nuclei $y = 50$ then]

$(3) \Rightarrow 50 = 100\,e^{-Kt_1}$

$\Rightarrow e^{Kt_1} = 2$

$\Rightarrow Kt_1 = \ln 2$

$\Rightarrow t_1 = \frac{\ln 2}{K} = \frac{6 \ln 2}{6K} = \frac{4.15888}{0.03045}$; by (5)

$\Rightarrow t_1 = 138.58$ ঘন্টা।

উদাহরণ–8(i) যখন বাতাসের তাপমাত্রা 290^0C, তখন একটি বস্তু 10 মিনিটে 370^0C হইতে 330^0C শীতল হয়। 40 মিনিট পরে উহার তাপমাত্রা কত হইবে?

[A body cools from 370^0C to 330^0C in 10 minute in air which is maintained to 290^0C. What is the temperature after 40 minute?]

সমাধান ঃ মনেকরি t সময়ে বস্তুটির তাপমাত্রা T^0C এবং বাতাসের তাপমাত্রা 290^0C.

বস্তু ও বাতাসের তাপমাত্রার পার্থক্য $= T - 290^0C$

বস্তুর তাপমাত্রার পরিবর্তনের হার $= \frac{dT}{dt}$.

[Let at time t, temperature of the body be T^0C and temperatu[re] of air is 290^0C. Difference between the temperature of the bo[dy] and the air $= T - 290^0C$.

$\therefore$ Rate of change of temperature of the body $= \frac{dT}{dt}$.]

$$\therefore \frac{dT}{dt} \propto T - 290$$

$\Rightarrow \frac{dT}{dt} = -K(T - 290)$ যখন $K > 0$, যেহেতু তাপমাত্রা হ্রাস পায়

$$\Rightarrow \frac{dT}{T - 290} = -K\,dt \cdots (1)$$

যখন $t = 0$ তখন $T = 370$ [when $t = 0$ then $T = 370$

যখন $t = 10$ তখন $T = 330$ [When $t = 10$ then $T = 330$]

এখন t এবং T এর সীমা লইয়া (1) নং কে ইনটিগ্রেট করি [Now integrating by taking limits of t and T]

i, e. $\int_{370}^{330} \frac{dT}{T - 290} = -K \int_0^{10} dt$

বা $[ln(T - 290)]_{370}^{330} = -K\,[t]_0^{10}$

বা $ln\,40 - ln\,80 = -10K$

বা $10K = ln\,80 - ln\,40 = ln\,\frac{80}{40}$

$$\Rightarrow 10K = ln\,2 \cdots (2)$$

যখন $t = 0$ তখন $T = 370^0C$ [When $t = 0$ then $T = 370^0$]

মনেকরি 40 মিনিট পরে বস্তুটির তাপমাত্রা x হইবে। [Let the temperature the body will be x after 40 minute]

এখন t এবং T এর সীমা লইয়া (1) নং কে ইনটিগ্রেট করি [Now integrating by taking limits of t and T]

i, e. $\int_{370}^{x} \frac{dT}{T - 290} = -K \int_0^{40} dt$

$$\Rightarrow [ln(T - 290)]_{370}^{x} = -K\,[t]_0^{40}$$

$$\Rightarrow ln(x - 290) - ln\,80 = -40K$$

$\Rightarrow ln\,\frac{x - 290}{80} = -4(10K) = -4\,ln\,2$; by (2)

$$\Rightarrow ln\,\frac{x - 290}{80} = ln\,2^{-4} = ln\left(\frac{1}{2^4}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x - 290}{80} = \frac{1}{2^4}$$

$$\Rightarrow x - 290 = \frac{80}{16}$$

$$\Rightarrow x = 290 + 5$$

$$\Rightarrow x = 295^0C.$$

উদাহরণ-৪(ii) : বাতাসের তাপমাত্রা যখন $20^\circ C$ তখন কোনো বস্তুর তাপমাত্রা 10 মিনিটে ঠান্ডা হইয়া $100^\circ C$ হইতে $60^\circ C$ হয়। 40 মিনিট পর বস্তুটির তাপমাত্রা নির্ণয় কর।

[If, when the temperature of the air is $20^\circ C$, a certain substance cools from $100^\circ C$ to $60^\circ C$ in 10 minutes, find the temperature after 40 minutes.] **[NUH–2012]**

সমাধান ঃ মনেকরি t সময়ে বস্তুটির তাপমাত্রা $T^\circ C$ এবং বাতাসের তাপমাত্রা $20^\circ C$.

বস্তু ও বাতাসের তাপমাত্রার পার্থক্য $= T - 20^\circ C$

বস্তুর তাপমাত্রার পরিবর্তনের হার $= \frac{dT}{dt}$.

$$\therefore \frac{dT}{dt} \propto T - 20$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} = -k(T - 20)$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{T - 20} = -k\,dt \cdots (1)$$

যখন $t = 0$ তখন $T = 100^\circ$ এবং যখন $t = 10$ তখন $T = 60^\circ$

এখন t এবং T এর সীমা লইয়া (1) নয় কে ইনটিগ্রেট করি,

$$\int_{100}^{60} \frac{dT}{T - 20} = -k \int_0^{10} dt$$

$$[ln(T - 20)]_{100}^{60} = -k\,[t]_0^{10}$$

$$\Rightarrow ln\,40 - ln\,80 = -10k$$

$$\Rightarrow 10k = ln\,80 - ln\,40 = ln\,\frac{80}{40}$$

$$\Rightarrow 10k = ln\,2 \cdots (2)$$

যখন $t = 0$ তখন $t = 100$. মনেকরি $t = 40$ মিনিট পর বস্তুটির তাপমাত্রা $T = x$ হইবে। এখন t এবং T এর সীমা লইয়া (1) নং কে ইনটিগ্রেট করি।

$$\int_{100}^{x} \frac{dT}{T-20} = -k \int_{0}^{40} dt$$

$$\Rightarrow [\ln(T-20)]_{100}^{x} = -k\,[t]_{0}^{40}$$

$$\Rightarrow \ln(x-20) - \ln 80 = -40k = -4(10k)$$

$$\Rightarrow \ln\frac{x-20}{80} = -4\ln 2 = \ln 2^{-4} = \ln\left(\frac{1}{2^4}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x-20}{80} = \frac{1}{2^4}$$

$$\Rightarrow x - 20 = \frac{80}{16}$$

$$\Rightarrow x = 20 + 5$$

$$\Rightarrow x = 25^{\circ}C.$$

উদাহরণ-9. বাতাসের তাপমাত্রা 290^0C হইলে একটি বস্তু 10 মিনিটে 370^0C হইতে 330^0C শীতল হয়। কখন ইহার তাপমাত্রা 295^0C হইবে?

[A body cools from 370^0C to 330^0C in 10 minute in air which is maintained to 290^0C. When will the temperature of the body by 295^0C?]

সমাধান ঃ মনেকরি t সময়ে বস্তুটির তাপমাত্রা T^0C এবং বাতাসের তাপমাত্রা 290^0C. বস্তু ও বাতাসের তাপমাত্রার পার্থক্য $= T - 290$ এবং বস্তুর তাপমাত্রার পরিবর্তণের হার $= \frac{dT}{dt}$.

যেহেতু $\frac{dT}{dt} \propto T - 290$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} = -K(T-290)$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{T-290} = -K\,dt \cdots (1)$$

যখন $t = 0$ তখন $T = 370$ এবং যখন $t = 10$ তখন $T = 330$

এখন t এবং T এর সীমা লইয়া (1) নং কে ইনটিগ্রেট করি

i, e. $\int_{370}^{330} \frac{dT}{T-290} = -K\int_{0}^{10} dt$

বা $[\ln(T-290)]_{370}^{330} = -K\,[t]_{0}^{10}$

বা $\ln 40 - \ln 80 = -10K$

বা $10K = \ln 80 - \ln 40 = \ln\frac{80}{40}$

$\Rightarrow 10K = \ln 2 = 0.693 \cdots (2)$

যখন $t = 0$ তখন $T = 370$

মনেকরি $t = t_1$ সময়ে $T = 295^0C$ হইবে।

এখন t এবং T এর সীমা লইয়া (1) নং কে ইনটিগ্রেট করি

$$\int_{370}^{295} \frac{dT}{T-290} = -K\int_{0}^{t_1} dt$$

বা $[\ln(T-290)]_{370}^{295} = -K\,[t]_{0}^{t_1}$

বা $\ln 5 - \ln 80 = -Kt_1$

বা $Kt_1 = \ln 80 - \ln 5 = \ln\frac{80}{5} = \ln 16$

বা $t_1 = \frac{\ln 16}{K} = \frac{10\ln 16}{10K} = \frac{27.725}{0.693} \approx 40$, by (2)

$\Rightarrow t_1 = 40$ মিনিট পরে $T = 295^0C$ হইবে।

উদাহরণ-10. বাতাসের তাপমাত্রা 300^0C এবং বস্তুটির তাপমাত্রা 15 মিনিটে 370^0C হইতে 340^0C শীতল হয়। বস্তুটির তাপমাত্রা কখন 310^0C হইবে?

[A body cools from 370^0C to 340^0C in 15 minute in air which is maintained to 300^0C. When will the temperature of the body be 310^0C.]

সমাধান ঃ মনেকরি t সময়ে বস্তুটির তাপমাত্রা T^0C এবং বাতাসের তাপমাত্রা 300^0C.

$\therefore$ বস্তু ও বাতাসের তাপমাত্রার পার্থক্য $= T - 300$

এবং বস্তুর তাপমাত্রার পরিবর্তনের হার $= \frac{dT}{dt}$.

[Let at time t, temperature of the body be T^0C and temperature of the air be 300^0C. Difference between the temperature of the body and the air $= T - 300$.

$\therefore$ Rate of change of temperature of the body $= \frac{dT}{dt}$.]

যেহেতু [Since] $\frac{dT}{dt} \propto T - 300$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} = -K(T-300),\ \text{যখন } K > 0,\ \text{যেহেতু তাপমাত্রা হ্রাস পায়।}$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{T-300} = -K\,dt \cdots (1)$$

যখন $t = 0$ তখন $T = 370^0C$ [When $t = 0$ then $T = 370^0C$]

যখন $t = 15$ তখন $T = 340^0C$ [When $t = 15$ then $T = 340^0C$]

এখন t এবং T এর সীমা লইয়া (1) নং কে ইনটিগ্রেট করি [Now integrating by taking limits of t and T]

$$\int_{370}^{340} \frac{dT}{T-300} = -K\int_0^{15} dt$$

বা $[ln(T-300)]_{370}^{340} = -K\,[t]_0^{15}$

বা $ln\,40 - ln\,70 = -15K$

বা $15K = ln\,70 - ln\,40 = ln\frac{70}{40} = ln\frac{7}{4} = 0.5596 \cdots (2)$

যখন $t = 0$ তখন $T = 370^0C$ [When $t = 0$ then $T = 370^0C$]

মনেকরি $t = t_1$ সময়ে বস্তুটির তাপমাত্রা 310^0C হইবে। [Let at time $t = t_1$ the temperature of the body will be 310^0C.]

যখন t এবং T এর সীমা লইয়া (1) নং কে ইনটিগ্রেট করি [Now integrating by taking limits of t and T.]

$$\int_{370}^{310} \frac{dT}{T-300} = -K\int_0^{t_1} dt$$

বা $[ln(T-300)]_{370}^{310} = -K\,[t]_0^{t_1}$

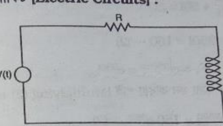
বা $ln\,10 - ln\,70 = -Kt_1$, বা $Kt_1 = ln70 - ln10$

বা $Kt_1 = ln\frac{70}{10}$, বা $Kt_1 = ln\,7$

বা $t_1 = \frac{ln\,7}{K} = \frac{15\,ln\,7}{15K} = \frac{29.1886}{0.5596} \approx 52$ মিনিট; by (2)

$\therefore$ 52 মিনিট পরে বস্তুর তাপমাত্রা 310^0C হইবে।

2-8.3. বৈদ্যুতিক সার্কিট [Electric Circuits] :



বিদ্যুৎ I(t) এম্পিয়ার সার্কিট দিয়া প্রবাহিত হয়, যেখানে I(t) নিম্নের ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ সিদ্ধ করে। [Current of I(t) amperes flows through the circuit where I(t) satisfies the following differential equation]

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V(t) \cdots (1)$$

এখানে (1) নং সমীকরণকে বৈদ্যুতিক সার্কিট ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ বলা হয়। [Here the equation (1) is called the Electric circuit differential equation]

যেখানে L = হেনরী আবেশ [Where inductive L = Henry]

রোধ R = ওহম [Resistance R = ohms]

V(t) = ভোল্টেজ [V(t) = Volts]

বিদ্যুৎ I(t) = এম্পিয়ার, যাহা সময় t এর ফাংশন।

[Current I(t) = ampere, which is function of time t.]

উদাহরণ-11. 30 ভোল্টের বৈদ্যুতিক শক্তি 0.2 হেনরী আবেশ ও 50 ওহম রোধ সম্বলিত সার্কিট ধারায় প্রয়োগ করা হইল। যদি I(0) = 0 হয়, তবে বিদ্যুৎ I(t) নির্ণয় কর। অনেক সময় পর বিদ্যুৎ নির্ণয় কর।

[A 30 Volt electromotive force is applied to an LR series circuit in which the inductance is 0.2 henry and the resistance is 50 ohms. Find the current I(t) if I(0) = 0. determine the current after a long time] **[NUH(NM)-2006]**

সমাধান ঃ বৈদ্যুতিক সার্কিট ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ হইল [Electric circuit differential equation is]

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V(t) \cdots (1)$$

যেখানে $L = 0.2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, $R = 50$ এবং $V(t) = 30$

$$\therefore (1) \Rightarrow \frac{1}{5}\frac{dI}{dt} + 50I = 30$$

$$\text{বা } \frac{dI}{dt} + 250I = 150 \cdots (2)$$

এখানে [Here] I. F. $= e^{\int 250\, dt} = e^{250t}$

(2) নং কে e^{250t} দ্বারা গুন করিয়া পাই [Multiplying (2) by e^{250t}, we get]

$$\frac{d}{dt}(Ie^{250t}) = 150\, e^{250t} \cdots (3)$$

এখন $t = 0$ হইতে $t = t$ সীমা লইয়া (3) নং কে t এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট ক
[Integrating (3) w. r. to t by taking limits of t from 0 to t]

$$\left[I(t)e^{250t}\right]_0^t = 150 \int_0^t e^{250t}\, dt$$

$$\text{বা } I(t)\, e^{250t} - I(0) = 150 \left[\frac{e^{250t}}{250}\right]_0^t$$

$$\text{বা } I(t)\, e^{250t} - 0 = \frac{150}{250}\, [e^{250t} - e^0]; \text{ যেহেতু } I(0) = 0$$

$$\text{বা } I(t) \cdot e^{250t} = \frac{3}{5}[e^{250t} - 1]$$

$$\text{বা } I(t) = \frac{3}{5}[1 - e^{-250t}]$$

দ্বিতীয় অংশ : $\lim\limits_{t\to\infty} I(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{3}{5}[1 - e^{-250t}]$

$$= \frac{3}{5}[1 - 0] = \frac{3}{5}.$$

উদাহরণ–12. 12 ভোল্টের বৈদ্যুতিক শক্তি $\frac{1}{3}$ হেনরী আবেশ, 10 ওহম রোধ সম্বলি সার্কিট ধারায় প্রয়োগ করা হয়, যদি $f(0) = 0$ হয়, তবে $f(t)$ নির্ণয় কর। অনেক সময় প বিদ্যুৎ কত হইবে?

[A 12 Volt electromotive force is applied to an LR series circu in which the inductance is $\frac{1}{3}$ henry, the resistance is 10 Ohms Find the current $f(t)$ if $f(0) = 0$. Determine the current after a lon time.]

সমাধান : বৈদ্যুতিক সার্কিট ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ হইল [Electric circu differential equations is]

$$L\frac{df}{dt} + Rf = V(t) \cdots (1)$$

যেখানে [where] $L = \frac{1}{3}$, $R = 10$ এবং $V(t) = 12$

$$\therefore (1) \Rightarrow \frac{1}{3}\frac{df}{dt} + 10f = 12$$

$$\text{বা } \frac{df}{dt} + 30f = 36 \cdots (2)$$

$$\text{I. F.} = e^{\int 30 dt} = e^{30t}$$

(2) নং কে e^{30t} দ্বারা গুন করিয়া পাই [Multiplying (2) by e^{30t} we get]

$$\frac{d}{dt}[fe^{30t}] = 36e^{30t} \cdots (3)$$

এখন $t = 0$ হইতে $t = t$ পর্যন্ত সীমা লইয়া (3) নং কে t এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট করি
[Integrating (3) w. r. to t by taking limits from $t = 0$ to $t = t$]

$$\left[f(t)e^{30t}\right]_0^t = 36 \int_0^t e^{30t}\, dt$$

$$\text{বা } f(t)\, e^{30t} - f(0) = 36 \left[\frac{e^{30t}}{30}\right]_0^t$$

$$\text{বা } f(t)\, e^{30t} - 0 = \frac{6}{5}[e^{30t} - 1]; \text{ যেহেতু } f(0) = 0$$

$$\text{বা } f(t) = \frac{6}{5}[1 - e^{-30t}].$$

দ্বিতীয় অংশ : $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{6}{5}[1 - e^{-30t}]$

$$= \frac{6}{5}[1 - 0] = \frac{6}{5}.$$

2-8.4. মিশ্রন সমস্যা [Mixing problem] :

মনে করি কোন ট্যাংকে ধারণকৃত নির্দিষ্ট পরিমান পানিতে নির্দিষ্ট পরিমান লবন দ্রবীভূত হয়। যদি নির্দিষ্ট পরিমান লবন মিশ্রিত পানি নির্দিষ্ট হারে ট্যাংকে প্রবেশ করে, তবে ট্যাংকের পানির উচ্চতা স্থির রাখার জন্য একই হারে ট্যাংক হইতে পানি বাহিরে সরিয়ে দেওয়া হয়। নির্দিষ্ট সময় পরে ট্যাংকে কি পরিমান লবন থাকিবে?

এই জাতীয় Problem সমাধানের জন্য নিম্নের নিয়ম অনুসরণ করিতে হইবে।

ধরি t সময় পরে ট্যাংকে লবনের পরিমান $y(t)$ তবে ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ

$$\frac{dy}{dt} = \text{প্রবেশের হার} - \text{বাহির হওয়ার হার} = [\text{Rate in} - \text{Rate out}]$$

ইহা সমাধান করিতে হইবে।

চতুর্থ অধ্যায় [CHAPTER–4]
ধ্রুবক সহগ বিশিষ্ট রৈখিক ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ
[Linear Differential Equation With Constant Coefficients]

4-1. ঃ যদি $p_0 \frac{d^ny}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + p_n y = 0$ ডিফারেনসিয়াল সমীকরণের n সংখ্যক অনির্ভরশীল সমাধান $e^{m_1x}, e^{m_2x}, e^{m_3x}, \cdots, e^{m_nx}$ হয়, তবে উহার সাধারণ সমাধান।

$$y = c_1 e^{m_1x} + c_2 e^{m_2x} + c_3 e^{m_3x} + \cdots + c_n e^{m_nx}$$

যখন $c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n$ অবাধ ধ্রুবক।

[If $e^{m_1x}, e^{m_2x}, e^{m_3x}, \cdots, e^{m_nx}$ be the n independent solutions of the differential equation $p_0 \frac{d^ny}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + p_n y = 0$ then its general solution is

$$y = c_1 e^{m_1x} + c_2 e^{m_2x} + c_3 e^{m_3x} + \cdots + c_n e^{m_nx}$$

where $c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n$ are arbitrary constants]

4-2 ঃ উপপাদ্য ঃ যদি $D^2y + p_1 Dy + p_2 y = 0$ ডিফারেনসিয়াল সমীকরণের দুইটি অনির্ভরশীল সমাধান $y = e^{m_1x}$ এবং $y = e^{m_2x}$ হয়, তবে উহার সাধারণ সমাধান $y = c_1 e^{m_1x} + c_2 e^{m_2x}$ যেখানে c_1, c_2 অবাধ ধ্রুবক এবং $D = \frac{d}{dx}$. [If the differential equation $D^2y + p_1 Dy + p_2y = 0$ has two independent solutions $y = e^{m_1x}$ and $y = e^{m_2x}$ then its general solution is $y = c_1 e^{m_1x} + c_2 e^{m_2x}$ where c_1, c_2 are arbitrary constants and $D = \frac{d}{dx}$.]

প্রমাণ ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$D^2y + p_1Dy + p_2y = 0 \cdots (1)$$

যেহেতু (1) এর সমাধান $y = e^{m_1x}$ এবং $y = e^{m_2x}$ কাজেই ইহারা (1) নং কে সিদ্ধ করিবে, অর্থাৎ [Since $y = e^{m_1x}$ and $y = e^{m_2x}$ be the solutions of (1), so they satisfy (1), that is]

$$D^2 e^{m_1x} + p_1 De^{m_1x} + p_2 e^{m_1x} = 0 \cdots (2)$$

এবং $D^2 e^{m_2x} + p_1 De^{m_2x} + p_2 e^{m_2x} = 0 \cdots (3)$

এখন [Now] $(2) \times c_1 + (3) \times c_2 \Rightarrow$

$$c_1 D^2 e^{m_1x} + c_1 p_1 De^{m_1x} + c_1 p_2 e^{m_1x} + c_2 D^2 e^{m_2x} + c_2 p_1 De^{m_2x} + c_2 p_2 e^{m_2x} = 0$$

বা $c_1 D^2 e^{m_1x} + c_2 D^2 e^{m_2x} + p_1(c_1 De^{m_1x} + c_2 De^{m_2x}) + p_2 (c_1 e^{m_1x} + c_2 e^{m_2x}) = 0$

বা $D^2 c_1 e^{m_1x} + D^2 c_2 e^{m_2x} + p_1 (Dc_1 e^{m_1x} + Dc_2 e^{m_2x}) + p_2 (c_1 e^{m_1x} + c_2 e^{m_2x}) = 0$

বা $D^2 (c_1 e^{m_1x} + c_2 e^{m_2x}) + p_1 D(c_1 e^{m_1x} + c_2 e^{m_2x}) + p_2 (c_1 e^{m_1x} + c_2 e^{m_2x}) = 0 \cdots (4)$

(4) নং হইতে দেখা যায় যে $c_1 e^{m_1x} + c_2 e^{m_2x}$ দ্বারা (1) নং সমীকরণ সিদ্ধ হয়, কাজেই (1) নং এর সাধারণ সমাধান $y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}$. [From (4) we see that the equation (1) is satisfied by $c_1 e^{m_1x} + c_2 e^{m_2x}$. so general solution of (1) is $y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}$.]

নোট ঃ অনুরূপভাবে তৃতীয় এবং চতুর্থ ক্রমের ক্ষেত্রেও উপপাদ্যটি প্রমাণ করা যায়। [Similarly the theorem is proved in the case of third and fourth order].

4-3 ঃ সহায়ক সমীকরণ [Auxiliary equation] ঃ

মনেকরি, ডিফারেনসিয়াল সমীকরণটি [Let the differential equation be]

$$D^2y + p_1 Dy + p_2y = 0 \cdots (1)$$

মনে করি, (1) নং এর সমাধান $y = e^{mx}$ কাজেই উহা (1) নং কে সিদ্ধ করিবে, অর্থাৎ [Let the solution of (1) be $y = e^{mx}$. so it will satisfy (1), that is]

$$D^2 e^{mx} + p_1 De^{mx} + p_2 e^{mx} = 0$$

বা $m^2e^{mx} + p_1 me^{mx} + p_2 e^{mx} = 0$

বা $(m^2 + p_1m + p_2) e^{mx} = 0$

যেহেতু $e^{mx} \neq 0$, কাজেই $m^2 + p_1m + p_2 = 0$. এই সমীকরণকে সহায়ক সমীকরণ বলা হয়। অর্থাৎ e^{mx} এর সহগ শুন্য ধরিলে সহায়ক সমীকরণ পাওয়া যায়। যেহেতু $m^2 + p_1m + p_2 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণ, কাজেই ইহার দুইটি মূল আছে। অর্থাৎ m এর দুইটি মান থাকিবে। [Since $e^{mx} \neq 0$ so $m^2 + p_1m + p_2 = 0$ this equation is called Auxiliary equation. That is equating to zero the coefficient of e^{mx} to obtain Auxiliary equation. Since $m^2 + p_1m + p_2 = 0$ is quadratic equation. so it has two roots. That is m has two values.]

4-4 ঃ নিম্নের তিনটি অবস্থা স্মরণ রাখা প্রয়োজন [Following three cases should be remember] ঃ

প্রথম অবস্থা [Case–I] ঃ মনে করি, মূলগুলি বাস্তব এবং অসমান

যদি $m = \alpha, \beta$ হয় তবে উহার সাধারণ সমাধান $y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x}$

যদি $m = 2, -3$ হয়, তবে $y = c_1 e^{2x} + c_2e^{-3x}$

Let the roots are real and unequal.

If $m = \alpha, \beta$ then its general solution is $y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x}$

If $m = 2, -3$ then $y = c_1 e^{2x} + c_2e^{-3x}$.]

দ্বিতীয় অবস্থা [Case–II] ঃ মনেকরি, মূলগুলি বাস্তব এবং সমান। [Let the roots are real and equal.]

যদি $m = \alpha, \alpha$ হয়, তবে উহার সাধারণ সমাধান $y = (c_1 + c_2x) e^{\alpha x}$ [If $m = \alpha, \alpha$ then its general solution is $y = (c_1 + c_2x) e^{\alpha x}$]

প্রমাণ ঃ মনেকরি, ডিফারেনসিয়াল সমীকরণের মূলদ্বয় α, α তবে সমীকরণকে নিম্নরূপে লিখা যায় [Let α, α be the roots of differential equation, then the differential equation can be written in the following form]

$$(D - \alpha)(D - \alpha) y = 0 \text{ যখন [when] } D = \frac{d}{dx}$$

বা $D^2y - 2\alpha Dy + \alpha^2y = 0 \cdots (1)$

মনেকরি (1) নং এর সম্ভাব্য সমাধান [Let the trial solution of (1) be]

$$y = e^{\alpha x} v \cdots (2)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{\alpha x}\frac{dv}{dx} + v\alpha e^{\alpha x}$$

এবং $\dfrac{d^2y}{dx^2} = e^{\alpha x}\dfrac{d^2v}{dx^2} + \alpha e^{\alpha x}\dfrac{dv}{dx} + \alpha e^{\alpha x}\dfrac{dv}{dx} + v\alpha^2 e^{\alpha x}$

এখন $y, \dfrac{dy}{dx}$ এবং $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ এর মান (1) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [Now putting the values of $y, \dfrac{dy}{dx}$ and $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ in (1) we get]

$$e^{\alpha x}\frac{d^2v}{dx^2} + 2\alpha e^{\alpha x}\frac{dv}{dx} + v\alpha^2e^{\alpha x} - 2\alpha\left(e^{\alpha x}\frac{dv}{dx} + v\alpha e^{\alpha x}\right) + \alpha^2 e^{\alpha x}v = 0$$

বা $e^{\alpha x}\dfrac{d^2v}{dx^2} = 0$

বা $\dfrac{d^2v}{dx^2} = 0$, যেহেতু [Since] $e^{\alpha x} \neq 0$.

বা $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dv}{dx}\right) = 0$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating this w. r. to x we get]

$$\frac{dv}{dx} = c_2$$ যখন c_2 অবাধ ধ্রুবক [where c_2 is an arbitrary constant]

আবার ইহাকে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Again integrating this w. r. to x we get]

$$v = c_1 + c_2 x$$

বা $\frac{y}{e^{\alpha x}} = c_1 + c_2 x$; (2) নং দ্বারা [by (2)]

বা $y = (c_1 + c_2 x)\, e^{\alpha x}$

তৃতীয় অবস্থা [Case–III] ঃ মনে করি, মূলগুলি অবাস্তব [Let the roots are imaginary]

যদি $m = \alpha \pm i\beta$ হয় তবে $y = e^{\alpha x}[c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x]$

[If $m = \alpha \pm i\beta$, then $y = e^{\alpha x}[c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x]$

প্রমাণ ঃ যদি $m = \alpha \pm i\beta$ হয়, অর্থাৎ $m = \alpha + i\beta, \alpha - i\beta$ হয়, তবে

[If $m = \alpha \pm i\beta$ that is $m = \alpha + i\beta, \alpha - i\beta$ then]

$y = a e^{(\alpha + i\beta)x} + b e^{(\alpha - i\beta)x}$; যখন a, b অবাধ ধ্রুবক। [Where a, b, are arbitrary constants]

বা $y = a e^{\alpha x} e^{i\beta x} + b e^{\alpha x} e^{-i\beta x}$

$= e^{\alpha x}[a(\cos\beta x + i\sin\beta x) + b(\cos\beta x - i\sin\beta x)]$

বা $y = e^{\alpha x}[(a + b)\cos\beta x + (ai - bi)\sin\beta x]$

বা $y = e^{\alpha x}[c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x]$; যখন $c_1 = a + b$ এবং $c_2 = ai - bi$

নোট–1 ঃ যদি $m = -1 \pm 2i$ হয়, তবে $y = e^{-x}[c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x]$

যদি $m = \pm 3i$ হয়, তবে $y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$

নোট–2 ঃ (i). $x = x_0$ হইলে যদি $y = y_0$ হয়, তবে ইহাকে $y(x_0) = y_0$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(ii). $x = x_0$ হইলে যদি $\frac{dy}{dx} = k$ হয়, তবে ইহাকে $y'(x_0) = k$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণমালা [EXAMPLES]

উদাহরণ-1(i) ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$$2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + y = 0.$$ [DUH–1979]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + y = 0 \cdots (1)$$

মনেকরি (1) নং এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of (1) then]

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx} \text{ এবং } \frac{d^2y}{dx^2} = m^2 e^{mx}$$

এখন $y, \frac{dy}{dx}$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2}$ এর মান (1) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [Now putting the values of $y, \frac{dy}{dx}$ and $\frac{d^2y}{dx^2}$ in (1) we get]

$$2m^2 e^{mx} - 3me^{mx} + e^{mx} = 0$$

বা $(2m^2 - 3m + 1)\, e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [Auxiliary equation is]

$2m^2 - 3m + 1 = 0$ যেহেতু $e^{mx} \neq 0$

বা $2m^2 - 2m - m + 1 = 0$

বা $2m(m - 1) - 1(m - 1) = 0$

বা $(2m - 1)(m - 1) = 0$

$\Rightarrow m = \frac{1}{2}, 1$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$y = c_1 e^{x/2} + c_2 e^{x}$; যখন c_1, c_2 অবাধ ধ্রুবক [where c_1, c_2 are arbitrary constants.]

উদাহরণ-1(ii) সমাধান কর [Solve] :

$$(D^2 + 6D + 25)y = 0.$$ [NUH–2005]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(D^2 + 6D + 25)y = 0 \cdots (1)$$

মনেকরি (1) নং এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of (1) then]

$$Dy = me^{mx} \text{ এবং } D^2y = m^2 e^{mx}$$

এখন y, Dy এবং D^2y এর মান (1) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [Now putting the values of y, Dy and D^2y in (1) we get]

$$m^2 e^{mx} + 6me^{mx} + 25e^{mx} = 0$$

বা $(m^2 + 6m + 25)\, e^{mx} = 0$

সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$m^2 + 6m + 25 = 0$ যেহেতু $e^{mx} \neq 0$

$$\therefore m = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 100}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{64i^2}}{2}$$

$$= \frac{-6 \pm 8i}{2} = -3 \pm 4i$$

∴ সাধারণ সমাধান [G. S. is]

$$y = e^{-3x}\,[c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x],$$

যখন c_1, c_2 অবাধ ধ্রুবক। [where c_1, c_2 are arbitrary constants]

উদাহরণ–1(iii). সমাধান কর [Solve] :

$$(D^3 - 5D^2 + 7D - 3)\, y = 0$$ **[NUH(NM)–2004]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(D^3 - 5D^2 + 7D - 3)y = 0 \cdots (1)$$

মনেকরি (1) নং এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of (1) then]

$$(1) \Rightarrow (m^3 - 5m^2 + 7m - 3)\, e^{mx} = 0$$

সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$m^3 - 5m^2 + 7m - 3 = 0$ যেহেতু $e^{mx} \neq 0$

বা $m^2(m-1) - 4m(m-1) + 3(m-1) = 0$

বা $(m-1)(m^2 - 4m + 3) = 0$

বা $(m-1)(m-1)(m-3) = 0$

$\therefore m = 1, 1, 3$

সাধারণ সমাধান [G. S. is]

$y = (c_1 + c_2x)\, e^x + c_3 e^{3x}$ যেখানে c_1, c_2, c_3 অবাধ ধ্রুবক।

উদাহরণ–2(i) ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 12y = 0.$$ **[RUH–1980, 1981]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 12y = 0 \cdots (1)$$

মনেকরি, (1) নং এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of (1) then]

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx},\ \frac{d^2y}{dx^2} = m^2e^{mx} \text{ এবং } \frac{d^3y}{dx^3} = m^3 e^{mx}$$

এখন y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ এবং $\frac{d^3y}{dx^3}$ এর মান (1) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [Now putting the values of y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ and $\frac{d^3y}{dx^3}$ in (1) we get]

$$(m^3 - m^2 - 8m + 12)\, e^{mx} = 0,$$

∴ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$m^3 - m^2 - 8m + 12 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

বা $m^2(m-2) + m(m-2) - 6(m-2) = 0$

বা $(m-2)(m^2 + m - 6) = 0$

বা $(m-2)(m+3)(m-2) = 0$

$\Rightarrow m = 2, 2, -3$

∴ সাধারণ সমাধান[G. S. is]

$$y = (c_1 + c_2x)\, e^{2x} + c_3e^{-3x}.$$

উদাহরণ–2(ii) ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$$(D^4 + 2D^2 - 3)y = 0.$$ **[NUH–2010]**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে [Given that]

$$(D^4 + 2D^2 - 3)y = 0 \cdots (1)$$

মনেকরি (1) নং এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of (1) then]

$$Dy = me^{mx},\ D^2y = m^2 e^{mx} \text{ এবং } D^4y = m^4 e^{mx}$$

$$\therefore (1) \Rightarrow (m^4 + 2m^2 - 3)\, e^{mx} = 0$$

সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$$m^4 + 2m^2 - 3 = 0 \text{ যেহেতু } e^{mx} \neq 0$$

বা $m^3(m-1) + m^2(m-1) + 3m(m-1) + 3(m-1) = 0$

বা $(m-1)(m^3 + m^2 + 3m + 3) = 0$

বা $(m-1)[m^2(m+1) + 3(m+1)] = 0$

বা $(m-1)(m+1)(m^2+3) = 0$

$\therefore m - 1 = 0$, or $m + 1 = 0$, or $m^2 + 3 = 0$

$\Rightarrow m = 1, m = -1, m^2 = -3 = 3i^2 \Rightarrow m = \pm i\sqrt{3}$

$\therefore$ সাধারণ সমধান [General solution is]

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos\sqrt{3}x + c_4 \sin\sqrt{3}x.$$

যেখানে c_1, c_2, c_3 এবং c_4 অবাধ ধ্রুবক। [where c_1, c_2, c_3 and c_4 a arbitrary constants]

উদাহরণ–3 ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ **[DUH–198**

$$5\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 3y = 0.$$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$5\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 3y = 0 \cdots (1)$$

মনেকরি, (1) নং এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a tri solution of (1) then]

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx} \text{ এবং } \frac{d^2y}{dx^2} = m^2 e^{mx}$$

এখন $y, \frac{dy}{dx}$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2}$ এর মান (1) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [Now putting th values of $y, \frac{dy}{dx}$ and $\frac{d^2y}{dx^2}$ in (1) we get]

$$(5m^2 - 2m + 3) e^{mx} = 0$$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$$5m^2 - 2m + 3 = 0 \text{ যেহেতু [since] } e^{mx} \neq 0$$

$$\text{বা } m = \frac{2 \pm \sqrt{4-60}}{10} = \frac{2 \pm \sqrt{-56}}{10} = \frac{2 \pm \sqrt{56i^2}}{10}$$

$$\text{বা } m = \frac{2 \pm 2i\sqrt{14}}{10} = \frac{1}{5} \pm \frac{i\sqrt{14}}{5}$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = e^{x/5}\left[c_1 \cos\frac{\sqrt{14}}{5}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{14}}{5}x\right].$$

উদাহরণ 4(i) $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ এর বিশেষ সমাধান বাহির কর, যখন $y(0) = 0$ এবং $y'(0) = 1$.

[Find the particular solution of $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ when $y(0) = 0$ and $y'(0) = 1$] **[DUH–1980]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \cdots (1)$$

মনেকরি, (1) নং এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of (1) then]

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx} \text{ এবং } \frac{d^2y}{dx^2} = m^2 e^{mx}$$

এখন $y, \frac{dy}{dx}$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2}$ এর মান (1) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [Now putting the values of $y, \frac{dy}{dx}$ and $\frac{d^2y}{dx^2}$ in (1) we get]

$$(m^2 + 3m + 2) e^{mx} = 0$$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$$m^2 + 3m + 2 = 0, \text{ যেহেতু [since] } e^{mx} \neq 0$$

বা $(m+1)(m+2) = 0$

$\Rightarrow m = -1, -2$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} \cdots (2)$$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই [Differentiating this w. r. to x we get]

$$y'(x) = -c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-2x} \cdots (3)$$

(2) নং এবং (3) নং এ পর্যায়ক্রমে $x = 0$ বসাইয়া পাই [Putting $x = 0$ in (2) and (3) successively we get]

$$y(0) = c_1 + c_2$$

বা $0 = c_1 + c_2$; যেহেতু [since] $y(0) = 0$.

বা $c_1 = -c_2 \cdots (4)$

এবং $y'(0) = -c_1 - 2c_2$

বা $1 = -c_1 - 2c_2$; যেহেতু [since] $y'(0) = 1$

বা $1 = c_2 - 2c_2$, (4) নং দ্বারা [by (4)]

বা $c_2 = -1$

$\therefore (4) \Rightarrow c_1 = -(-1)$

বা $c_1 = 1$

এখন c_1, c_2 এর মান (2) নং এ বসাইয়া পাই [Now putting the values of c_1, c_2 in (2) we get]

$$y = e^{-x} - e^{-2x}$$

ইহাই নির্ণেয় বিশেষ সমাধান [This is the required particular solution]

উদাহরণ–4(ii) ঃ $\frac{d^2s}{dt^2} + 8\frac{ds}{dt} + 25s = 0$ এর বিশেষ সমাধান বাহির কর যখ $s(0) = 4$ এবং $s'(0) = -16$.

[Find the particular solution of $\frac{d^2s}{dt^2} + 8\frac{ds}{dt} + 25s = 0$ when $s(0) = 4$ and $s'(0) = -16$.] **[CUH-197**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 8\frac{ds}{dt} + 25s = 0 \cdots (1)$$

মনেকরি (1) নং এর সম্ভাব্য সমাধান $s = e^{mt}$ তবে [Let $s = e^{mt}$ be a trial solution of (1) then]

$$\frac{ds}{dt} = me^{mt} \text{ এবং } \frac{d^2s}{dt^2} = m^2e^{mt}$$

এখন s, $\frac{ds}{dt}$ এবং $\frac{d^2s}{dt^2}$ এর মান (1) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [Now putting the values of s, $\frac{ds}{dt}$ and $\frac{d^2s}{dt^2}$ in (1) we get]

$$(m^2 + 8m + 25)\, e^{mt} = 0$$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$m^2 + 8m + 25 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mt} \neq 0$.

$$\therefore\ m = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 100}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{36\, i^2}}{2}$$

বা $m = \frac{-8 \pm 6i}{2} = -4 \pm 3i$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$s(t) = e^{-4t}\,[c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t] \cdots (2)$$

$$s'(t) = -4e^{-4t}\,[c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t]$$
$$+ e^{-4t}\,[-3c_1 \sin 3t + 3c_2 \cos 3t] \cdots (3)$$

(2) নং এবং (3) নং এ পর্যায়ক্রমে $t = 0$ স্থাপন করিয়া পাই [Putting $t = 0$ in (2) and (3) successively we get]

$s(0) = e^0\,[c_1 + 0]$

বা $4 = c_1 \cdots (4)$ যেহেতু [since] $s(0) = 4$

এবং $s'(0) = -4e^0\,[c_1 + 0] + e^0\,[0 + 3c_2]$

বা $-16 = -4c_1 + 3c_2$; যেহেতু [since] $s'(0) = -16$

বা $-16 = -4(4) + 3c_2$; (4) নং দ্বারা [by (4)]

বা $c_2 = 0$

এখন c_1 এবং c_2 এর মান (2) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [Now putting the values of c_1 and c_2 in (2) we get]

$s(t) = e^{-4t}\,[4 \cos 3t + 0]$

বা $s(t) = 4e^{-4t} \cos 3t$.

ইহাই নির্ণেয় বিশেষ সমাধান [This is the required particular solution]

প্রশ্নমালা [EXERCISE]–4

সমাধান কর [Solve] ঃ

1(i). $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

(ii). $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + y = 0$ **[DUH-1973]**

(iii). $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ **[DUH-1973]**

(iv). $(D^2 + D - 6)y = 0$ **[CUH-1981]**

(v). $(D^2 - 5D + 6)\, y = 0$

পঞ্চম অধ্যায় [CHAPTER–5]

প্রথম পরিচ্ছেদ [SECTION–1]

রৈখিক ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ যাহার ডানপক্ষ শুন্য নয়

[Linear Differential Equation With Right Hand Side is Non-zero]

5-1.1 ঃ ডিফারেনসিয়াল অপারেটর এবং ইহার বিপরীত অপারেটর গুলো স্বরণ রাখা প্রয়োজন [Differential operator and its inverse operators should be remember]

(i). $\frac{d}{dx}$ কে D প্রতীক দ্বারা, $\frac{d^2}{dx^2}$ কে D^2 প্রতীক দ্বারা এবং $\frac{d^3}{dx^3}$ কে D^3 প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এইভাবে আরও অগ্রসর হওয়া যায়।

অর্থাৎ $\frac{d}{dx} = D; \frac{d^2}{dx^2} = D^2; \frac{d^3}{dx^3} = D^3, \cdots, \frac{d^n}{dx^n} = D^n.$

(ii). $D^3 x^3 = D^2 (Dx^3) = D. D (3x^2) = D(3.2x) = 3.2.1$

বা $D^3x^3 = 3!$

$\Rightarrow D^4 x^3 = 0$

অনুরুপভাবে [Similarly] $D^n x^n = n! \Rightarrow D^{n+1} x^n = 0.$

(iii). বিপরীত অপারেটর [Inverse operator] ঃ

$\frac{1}{D}$ কে $\int dx$ এবং $\frac{1}{D} x$ কে $\int x\, dx$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়,

[Denote $\frac{1}{D}$ by $\int dx$ and $\frac{1}{D} x$ by $\int x dx$]

অর্থাৎ [that is] $\frac{1}{D} = \int dx$ এবং $\frac{1}{D} x = \int x\, dx$

$\therefore$ নোট ঃ $\frac{1}{D} f(x) = \int f(x) dx$

এখন [Now] $\frac{1}{D} = \int dx = x$

$$\frac{1}{D^2} = \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{D} = \frac{1}{D} x = \int x\, dx = \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{1}{D^3} = \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{D^2} = \frac{1}{D} \cdot \frac{x^2}{2} = \int \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^3}{2.3} = \frac{x^3}{3!}$$

$$\frac{1}{D^4} = \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{D^3} = \frac{1}{D} \cdot \frac{x^3}{3!} = \int \frac{x^3}{3!} dx = \frac{x^4}{4!}$$

অনুরুপভাবে [similarly] $\frac{1}{D^n} = \frac{x^n}{n!}$

আবার $\frac{1}{D^2}x = \frac{1}{D}\cdot\frac{1}{D}x = \frac{1}{D}\int x\,dx = \frac{1}{D}\frac{x^2}{2} = \int\frac{x^2}{2}dx$

$\Rightarrow \frac{1}{D^2}x = \frac{x^3}{6}$ এবং $\frac{1}{D^3}x = \frac{1}{D}\cdot\frac{1}{D^2}x = \frac{1}{D}\cdot\frac{x^3}{6} = \int\frac{x^3}{6}dx = \frac{x^4}{24}$.

5-1.2 ঃ রৈখিক ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ [Linear differenti equation] ঃ

$D^n y + p_1 D^{n-1}y + p_2 D^{n-2}y + \cdots + p_n y = R(x)$ এই আকারের সমীকর n তম ক্রমের রৈখিক ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ বলা হয় যখন $R(x)$ কেবলমাত্র x ফাংশন এবং $p_1, P_2, \cdots, p_n$ ধ্রুবক। [A differential equation of the fo $D^n y + p_1 D^{n-1}y + p_2 D^{n-2}y + \cdots + p_n y = R(x)$ is called n-th order line differential equation, when $R(x)$ is only function of x a $p_1, p_2, \cdots, p_n$ are constants.]

5-1.3 ঃ উপপাদ্য ঃ $(D^2 + p_1D + p_2)y = R(x)$ এর সাধারণ সমাধান নি [Determine general solution of $(D^2 + p_1D + p_2)y = R(x)$] ঃ

বর্ণনা **[Statement]** ঃ যদি $(D^2 + p_1D + p_2)y = 0$ এর সম্পূর্ণ সমাধান y = এবং $(D^2 + p_1D + p_2)y = R(x)$ এর বিশেষ সমাধান $y = v$ হয়, তবে $(D^2 + p_1D + p$ $y = R(x)$ এর সাধারণ সমাধান $y = u + v$.

[If $y = u$ is the complete solution of $(D^2 + p_1D + p_2)y = 0$ an $y = v$ is the particular solution of $(D^2 + p_1D + p_2)y = R(x)$ th $y = u + v$ is the general solution of $(D^2 + p_1D + p_2)y = R(x)$.]

প্রমাণ ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(D^2 + p_1D + p_2)y = R(x) \cdots (1)$$

$$(D^2 + p_1D + p_2)y = 0 \cdots (2)$$

যেহেতু (2) এর সম্পর্ণ সমাধান $y = u$ কাজেই (2) নং $y = u$ কর্তৃক সিদ্ধ হইবে। অ [Since the complete solution of (2) is $y = u$, so (2) is satisfied $y = u$, that is]

$$(D^2 + p_1D + p_2)\,u = 0 \cdots (3)$$

আবার যেহেতু (1) নং এর বিশেষ সমাধান $y = v$, কাজেই (1) নং ও $y = v$ কর্তৃক সি হইবে। [Again since $y = v$ is the particular solution of (1), so (1) satisfied by v]

$$(D^2 + p_1D + p_2)v = R(x) \cdots (4)$$

এখন (3) নং এবং (4) নং কে যোগ করিয়া পাই [Now adding (3) and (4) we get]

$$(D^2 + p_1D + p_2)(u + v) = R(x)$$

ইহা হইতে দেখা যায় যে $y = u + v$ দ্বারা (1) নং সমীকরণ সিদ্ধ হয়। সুতরাং (1) নং এর সাধারণ সমাধান $y = u + v$. কারণ ইহা দুইটি অবাধ ধ্রুবক ধারণ করে। [From this we see that the equation (1) is satisfied by $y = u + v$. Hence the general solution of (1) is $y = u + v$ because it contains two arbitrary constants]

সাধারণ সমাধান $y = u + v$ এর u কে সম্পূরক ফাংশন বলা হয়, ইহাকে y_c দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং v কে বিশেষ ইনটিগ্র্যাল বলা হয়, ইহাকে y_p দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$\therefore$ সাধারণ সমাধান $y = y_c + y_p$

[u is called complementary function of general solution $y = u + v$, it is denoted by y_c and v is called particular integral of $y = u + v$, it is denoted by y_p.

[General solution is $y = y_c + y_p$]

নোট ঃ y_c এবং y_p প্রতীক ব্যবহার করা হইবে।

5-1.4 ঃ বিশেষ ইনটিগ্র্যাল নির্ণয় [Determination of particular integral] ঃ

বর্ণনা ঃ যদি $f(D)\,y = R(x)$ এর বিশেষ ইনিটগ্র্যাল $\frac{1}{f(D)}R(x)$ এবং ইহাকে y_p দ্বারা প্রকাশ করা হয়, তবে $y_p = \frac{1}{f(D)}R(x)$.

[If $\frac{1}{f(D)}R(x)$ be the particular integral of $f(D)y = R(x)$ and it is denoted by y_p then $y_p = \frac{1}{f(D)}R(x)$]

প্রমাণ ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$f(D)\,y = R(x) \cdots (1)$$

$\frac{1}{f(D)}R(x)$ অবশ্যই (1) নং এর সমাধান হইবে যদি ইহা (1) নং কে সিদ্ধ করে। ইহার জন্য (1) নং এ y এর স্থলে $\frac{1}{f(D)}R(x)$ স্থাপন করি।

[$\frac{1}{f(D)}R(x)$ must be a solution of (1) if it satisfies (1). For th
substitating $\frac{1}{f(D)}R(x)$ in place of y in (1)]

$$f(D)\cdot\frac{1}{f(D)}R(x) = R(x)$$

বা $R(x) = R(x)$ ইহা সত্য [it is true]

$\therefore$ (1) নং এর বিশেষ ইনটিগ্র্যাল [Particular integral of (1)]

$$= \frac{1}{f(D)}R(x)$$

অর্থাৎ $y_p = \frac{1}{f(D)}R(x)$

5-1.5 ঃ বিশেষ ইনটিগ্র্যাল নির্ণয়ের সাধারণ পদ্ধতি [Determinati general method of particular integral] ঃ

উপপাদ্য ঃ যদি R(x) কেবলমাত্র x এর ফাংশন হয় তবে [If R(x) is the o function of x then]

$$\frac{1}{D-\alpha}R(x) = e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}R(x)\,dx.$$

প্রমাণ ঃ ধরি [We put] $y = \frac{1}{D-\alpha}R(x) \cdots (1)$

উভয় পক্ষকে $D-\alpha$ দ্বারা অপারেট করি [Operating both sides by D-

$$(D-\alpha)y = R(x)$$

বা $\frac{dy}{dx} - \alpha y = R(x) \cdots (2)$

ইহা রৈখিক ডিফাঃ সমীকরণ, যাহার ইনটিগ্রেটিং উৎপাদক [This a lin differential equation, whose integrating factor is]

$$I.F. = e^{-\int \alpha\,dx}$$

বা $I.F. = e^{-\alpha x}$

(2) নং এর উভয় পক্ষকে $e^{-\alpha x}$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই [Multiplying both s of (2) by $e^{-\alpha x}$ we get]

$$\frac{d}{dx}[ye^{-\alpha x}] = e^{-\alpha x}R(x)$$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating this w. r. to x we get]

$$ye^{-\alpha x} = \int e^{-\alpha x}R(x)\,dx$$

বা $y = e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}R(x)\,dx$

বা $\frac{1}{D-\alpha}R(x) = e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}R(x)\,dx$; (1) নং দ্বারা [by (1)]

অনুসিদ্ধান্ত **[Cor]** ঃ $\frac{1}{D+\alpha}R(x) = e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}R(x)\,dx.$

নোট ঃ যখন R(x) = secax, cosecax, tanax এবং cotax দেওয়া থাকিবে তখন উপরের সূত্র প্রয়োগ করিতে হইবে। [When given that R(x) = secax, cosecax, tanax and cotax then the above formula will be used]

5-1.6 ঃ নিম্নে বর্ণিত সূত্রগুলি স্মরণ রাখা প্রয়োজন [Following formulee should be remember] ঃ

(i). $(1-D)^{-1} = 1 + D + D^2 + D^3 + \cdots$

(ii). $(1+D)^{-1} = 1 - D + D^2 - D^3 + \cdots$

(iii). $(1-D)^{-2} = 1 + 2D + 3D^2 + 4D^3 + \cdots$

(iv). $(1+D)^{-2} = 1 - 2D + 3D^2 - 4D^3 + \cdots$.

5-1.7 ঃ নিয়ম ঃ যদি $y_p = \frac{1}{f(D)}R(x)$ এবং $R(x) = x^m$ হয়, অর্থাৎ $y_p = \frac{1}{f(D)}x^m$ হয়, তবে $[f(D)]^{-1}$ কে দ্বিপদ রাশির বিস্তৃতির সাহায্যে D^m পর্যন্ত বিস্তৃত করিয়া অপারেট করিলে y_p এর মান পাওয়া যায়।

যেমন ঃ $y_p = \frac{1}{D-\alpha}x^m$

$$= \frac{1}{-\alpha\left(1-\frac{D}{\alpha}\right)}x^m$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{D}{\alpha}\right)^{-1}x^m$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\left[1 + \frac{D}{\alpha} + \frac{D^2}{\alpha^2} + \cdots + \frac{D^m}{\alpha^m} + \cdots\right]x^m$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\left[x^m + \frac{mx^{m-1}}{\alpha} + \frac{m(m-1)x^{m-2}}{\alpha^2} + \cdots + \frac{m!}{\alpha^m} + 0\right].$$

উদাহরণমালা [EXAMPLES]

উদাহরণ-1(i) : সমাধান কর [Solve] : $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 5x^2$ [CUH-1984]

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ Given equation is]

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 5x^2 \cdots (1)$$

মনেকরি $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0 \cdots (2)$ then]

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx} \text{ এবং } \frac{d^2y}{dx^2} = m^2e^{mx}$$

$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 + 9)\, e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$$m^2 + 9 = 0, \text{ যেহেতু [since] } e^{mx} \neq 0$$

বা $m^2 = -9 = 9i^2$

$\Rightarrow m = \pm 3i$

$\therefore y_c = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$

এখন (1) নং কে নিম্নরূপে লিখা যায় [Now (1) can be written in the following form]

$$(D^2 + 9)\, y = 5x^2$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{D^2 + 9} 5x^2$$

$$= \frac{1}{9(1 + D^2/9)} 5x^2$$

$$= \frac{1}{9}\left[1 + \frac{D^2}{9}\right]^{-1} 5x^2$$

$$= \frac{1}{9}\left[1 - \frac{D^2}{9} + \cdots\right] 5x^2$$

$$= \frac{1}{9}\left[5x^2 - \frac{1}{9} D^2(5x^2) + 0\right]$$

$$= \frac{1}{9}\left[5x^2 - \frac{5.2}{9}\right]$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

$$\therefore y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{1}{9}\left(5x^2 - \frac{10}{9}\right).$$

N.D.S

উদাহরণ-1(ii). সমাধান রক [Solve] :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 1 + x + x^2$$ [DUH-1975]

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 1 + x + x^2 \cdots (1)$$

মনেকরি $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0 \cdots (2)$ then]

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx} \text{ এবং } \frac{d^2y}{dx^2} = m^2e^{mx}$$

$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 - 6m + 9)e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$$m^2 - 6m + 9 = 0 \text{ যেহেতু [since] } e^{mx} \neq 0$$

বা $(m - 3)^2 = 0$

বা $m = 3, 3$

$\therefore y_c = (c_1 + c_2x)\, e^{3x}.$

এখন (1) নং কে নিম্নরূপে লিখা যায় [Now equation (1) can be written in the following form]

$$(D^2 - 6D + 9)y = 1 + x + x^2$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{D^2 - 6D + 9}(1 + x + x^2)$$

$$= \frac{1}{(3 - D)^2}(1 + x + x^2)$$

$$= \frac{1}{9(1 - D/3)^2}(1 + x + x^2)$$

$$= \frac{1}{9}\left(1 - \frac{D}{3}\right)^{-2}(1 + x + x^2)$$

$$\text{বা } y_p = \frac{1}{9}\left[1 + \frac{2D}{3} + 3\frac{D^2}{9} + \cdots\right](1 + x + x^2)$$

$$= \frac{1}{9}\left[1(1 + x + x^2) + \frac{2}{3}D(1 + x + x^2) + \frac{1}{3}D^2(1 + x + x^2) + 0\right]$$

$$= \frac{1}{9}\left[1 + x + x^2 + \frac{2}{3}(1 + 2x) + \frac{1}{3}(2)\right]$$

$$= \frac{1}{9}\left[x^2 + \frac{7x}{3} + \frac{7}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{27}[3x^2 + 7x + 7]$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [G. S. is]

$$y = y_c + y_p$$

$$\therefore y = (c_1 + c_2x)e^{3x} + \frac{1}{27}(3x^2 + 7x + 7).$$

উদাহরণ–1(iii). সমাধান কর [Solve] :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^2$$ **[NU(Pass)–2008]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^2 \cdots (1)$$

মনেকরি $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে

[Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \cdots (2)$ then]

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx} \text{ এবং } \frac{d^2y}{dx^2} = m^2 e^{mx}$$

$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 - 3m + 2)e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$m^2 - 3m + 2 = 0$ যেহেতু $e^{mx} \neq 0$

বা $(m - 1)(m - 2) = 0$

$\therefore m = 1, 2$

$\therefore y_c = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

এখন (1) নং কে নিম্নরূপে লিখা যায় [Now (1) can be written in the following form]

$$(D^2 - 3D + 2)y = 4x^2$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{D^2 - 3D + 2}4x^2$$

$$= \frac{1}{2\left[1 - \frac{3D}{2} + \frac{D^2}{2}\right]}4x^2$$

$$= \frac{1}{2\left[1 - \left(\frac{3D}{2} - \frac{D^2}{2}\right)\right]^1}4x^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{3D}{2} - \frac{D^2}{2}\right)\right]^{-1}4x^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{3D}{2} - \frac{D^2}{2}\right) + \left(\frac{3D}{2} - \frac{D^2}{2}\right)^2 + \cdots\right]4x^2$$

$$= \frac{4}{2}\left[1 + \frac{3D}{2} - \frac{D^2}{2} + \frac{9D^2}{4} - \frac{3D^3}{2} + \cdots\right]x^2$$

$$= 2\left[x^2 + \frac{3}{2}(2x) + \left(\frac{9}{4} - \frac{1}{2}\right)(2) - 0\right]$$

$$= 2\left[x^2 + 3x + \frac{7}{2}\right] = 2x^2 + 6x + 7.$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [G. S. is]

$$y = y_c + y_p$$

$$\therefore y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + 2x^2 + 6x + 7.$$

উদাহরণ–1(iv). সমাধান কর [Solve] :

$$2\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 2y = x^2$$ **[NUH(NM)–2004]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$2\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \cdots (1)$$

মনেকরি $2\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে

[Let $y = e^{mx}$ be a trial solution $2\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \cdots (2)$ then]

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx} \text{ এবং } \frac{d^2y}{dx^2} = m^2 e^{mx}$$

$\therefore (2) \Rightarrow (2m^2 + 5m + 2)\, e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$2m^2 + 5m + 2 = 0$ যেহেতু $e^{mx} \neq 0$

বা $2m^2 + 4m + m + 2 = 0$.

বা $2m(m + 2) + 1\,(m + 2) = 0$

বা $(2m + 1)\,(m + 2) = 0$

$\therefore m = -\frac{1}{2}, -2$

$\therefore y_c = c_1 e^{-x/2} + c_2 e^{-2x}$.

(1) নং হইতে পাই [From (1) we get]

$$(2D^2 + 5D + 2)y = x^2$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{2D^2 + 5D + 2} x^2$$

$$= \frac{1}{2\left[1 + \frac{5D}{2} + D^2\right]} x^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{5D}{2} + D^2\right)\right]^{-1} x^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{5D}{2} + D^2\right) + \left(\frac{5D}{2} + D^2\right)^2 - \cdots\right] x^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{5D}{2} - D^2 + \frac{25D^2}{4} + 5D^3 + \cdots\right] x^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{5D}{2} + \frac{21D^2}{4} + 5D^3 + \cdots\right] x^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2 - \frac{5}{2}(2x) + \frac{21}{4}(2) + 0\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2 - 5x + \frac{21}{2}\right]$$

সাধারণ সমাধান [G. S. is]

$$y = y_c + y_p$$

$$\therefore y = c_1 e^{-x/2} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{2}\left(x^2 - 5x + \frac{21}{2}\right).$$

উদাহরণ–2 ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$$(D^2 + a^2)y = \sec ax$$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(D^2 + a^2)\, y = \sec ax \cdots (1)$$

মনেকরি $(D^2 + a^2)\, y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $(D^2 + a^2)\, y = 0 \cdots (2)$ then]

$Dy = me^{mx}$ এবং $D^2y = m^2e^{mx}$

$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 + a^2)\, e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$m^2 + a^2 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

বা $m^2 = -a^2$

বা $m^2 = i^2a^2$

বা $m = \pm ia$

$\therefore y_c = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax$

(1) নং হইতে পাই [From (1) we get]

$$y_p = \frac{1}{D^2 + a^2} \sec ax$$

$$= \frac{1}{(D - ia)\,(D + ia)} \sec ax$$

$$= \frac{1}{2ia}\left[\frac{1}{D - ia} - \frac{1}{D + ia}\right] \sec ax$$

$$= \frac{1}{2ia}\left[\frac{1}{D - ia} \sec ax - \frac{1}{D + ia} \sec ax\right] \cdots (3)$$

এখন [Now] $\frac{1}{D - ia} \sec ax = e^{iax} \int e^{-iax} \sec ax\, dx$

$$= e^{iax} \int (\cos ax - i \sin ax) \frac{1}{\cos ax} dx$$

$$= e^{iax} \int (1 - i \tan ax)\, dx$$

$$= e^{iax}\left[x + \frac{i}{a} \ln(\cos ax)\right] \cdots (4)$$

এখন i এর স্থলে –i স্থাপন করিয়া পাই [Now substituting –i for i we get]

$$\frac{1}{D + ia} \sec ax = e^{-iax}\left[x - \frac{i}{a} \ln(\cos ax)\right] \cdots (5)$$

এখন (3), (4) এবং (5) নং হইতে পাই [From (3), (4) and (5) we get]

$$y_p = \frac{1}{2ia}\left[e^{iax}\left\{x + \frac{i}{a}\ln(\cos ax)\right\} - e^{-iax}\left\{x - \frac{i}{a}\ln(\cos ax)\right\}\right]$$

$$= \frac{x(e^{iax} - e^{-iax})}{2ia} + \frac{1}{a^2}\frac{(e^{iax} + e^{-iax})}{2}\ln(\cos ax)$$

$$= \frac{x}{a}\sin ax + \frac{1}{a^2}\cos ax.\ \ln(\cos ax).$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

$$\therefore y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax + \left(\frac{x}{a}\right)\sin ax + \left(\frac{1}{a^2}\right)\cos ax.\ \ln(\cos ax)].$$

উদাহরণ–3 ঃ $\frac{d^2y}{dx^2} - 9y = 3x$ এর বিশেষ সমাধান বাহির কর, যখন $y(0) = 0$ এবং $y'(0) = 0$. [Find the particular solution of $\frac{d^2y}{dx^2} - 9y = 3x$ when $y(0) = 0$ and $y'(0) = 0$]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 9y = 3x \cdots (1)$$

[ধরি] $\frac{d^2y}{dx^2} - 9y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be [a] solution of $\frac{d^2y}{dx^2} - 9y = 0 \cdots (2)$ then]

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx} \text{ এবং } \frac{d^2y}{dx^2} = m^2e^{mx}$$

$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 - 9)\, e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$m^2 - 9 = 0$, যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$.

বা $(m + 3)(m - 3) = 0$

বা $m = -3, 3$

$\therefore y_c = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x}$,

(1) নং হইতে পাই [From (1) we get]

$(D^2 - 9)\, y = 3x$

$$\therefore y_p = \frac{1}{D^2 - 9}3x$$

$$\text{বা } y_p = \frac{1}{-9(1 - D^2/9)}3x$$

$$= -\frac{1}{9}\left(1 - \frac{D^2}{9}\right)^{-1}3x$$

$$= -\frac{1}{3}\left[1 + \frac{D^2}{9} + \cdots\right]x$$

$$= -\frac{1}{3}[x + 0] = -\frac{x}{3}$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$y(x) = y_c + y_p$

বা $y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x} - \frac{x}{3} \cdots (3)$

$\therefore y'(x) = -3c_1 e^{-3x} + 3c_2 e^{3x} - \frac{1}{3} \cdots (4)$

(3) নং এবং (4) নং এ পর্যায়ক্রমে $x = 0$ বসাইয়া পাই [Putting $x = 0$ in (3) and (4) successively we get]

$y(0) = c_1 + c_2 - 0$

বা $0 = c_1 + c_2$; যেহেতু [since] $y(0) = 0$

বা $c_1 = -c_2 \cdots (5)$

এবং $y'(0) = -3c_1 + 3c_2 - \frac{1}{3}$

বা $0 = -3c_1 + 3c_2 - \frac{1}{3}$; যেহেতু [since] $y'(0) = 0$

বা $0 = -3(-c_2) + 3c_2 - \frac{1}{3}$; (5) নং দ্বারা।

বা $6c_2 = \frac{1}{3}$

বা $c_2 = \frac{1}{18}$

$\therefore (5) \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{18}$

এখন c_1 এবং c_2 এর মান (3) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [Now putting the values of c_1 and c_2 in (3) we get]

$$y(x) = \frac{1}{18}(e^{3x} - e^{-3x}) - \frac{x}{3}$$

ইহাই নির্ণেয় বিশেষ সমাধান [This is the required particular solution].

5-2.4 ঃ অনুসিদ্ধান্ত [Cor] ঃ

যদি $f'(a) = 0$ এবং $f''(a) \neq 0$ তবে [If $f'(a) = 0$ and $f''(a) \neq 0$ then]

$\frac{1}{f(D)} e^{ax} = x^2 . \frac{1}{f''(D)} e^{ax}$. এইভাবে আরো অগ্রসর হওয়া যায়। [and so on]

i. e. $\frac{1}{f(D)} e^{ax} = x^2 \frac{1}{f''(D)} e^{ax}$ যদি [if] $f''(a) \neq 0$.

এবং $\frac{1}{f(D)} e^{ax} = x^3 \frac{1}{f'''(D)} e^{ax}$ যদি [if] $f'''(a) \neq 0$.

5-2.5 ঃ নিয়ম–1 (i) ঃ যদি $y_p = \frac{1}{f(D)} e^{ax}$ এই আকারে থাকে, তবে D এর স্থ
বসাইলে সমাধান পাওয়া যায়, যখন $f(a) \neq 0$.

অর্থাৎ $y_p = \frac{1}{f(D)} e^{ax}$

$= \frac{1}{f(a)} e^{ax}$ যদি [if] $f(a) \neq 0$.

(ii). যদি $y_p = \frac{1}{f(D)}$

$= \frac{1}{f(D)} e^{0x}$; যেহেতু $e^{0x} = 1$

$= \frac{1}{f(0)} e^{0x}$ যদি $f(0) \neq 0$.

যেমন $y_p = \frac{1}{D^2 - 5D + 6}$

$= \frac{1}{D^2 - 5D + 6} e^{0x}$; যেহেতু $e^{0x} = 1$

$= \frac{1}{0 - 0 + 6} e^{0x}$

$= \frac{1}{6}$.

নিয়ম–2 ঃ (i). যদি $f(a) = 0$ হয়, তবে নিয়ম–1 প্রযোজ্য নহে।

এইক্ষেত্রে $y_p = \frac{1}{f(D)} e^{ax}$

$= x . \frac{1}{f'(D)} e^{ax}$ যদি $f(a) = 0$ এবং $f'(a) \neq 0$.

$= x \frac{1}{f'(a)} e^{ax}$ যদি $f'(a) \neq 0$.

(ii). যদি $y_p = \frac{1}{f(D)} e^{ax}$ যদি $f(a) = 0$,

$= x \frac{1}{f'(D)} e^{ax}$ যদি $f'(a) = 0$

$= x^2 \frac{1}{f''(D)} e^{ax}$

$= x^2 \frac{1}{f''(a)} e^{ax}$ যদি $f''(a) \neq 0$.

উদাহরণমালা [EXAMPLES]

উদাহরণ-**1(i)** ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{5x}$$ **[NU(Pass)–2006, DUH–1981]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{5x} \cdots (1)$$

মনেকরি $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \cdots (2)$ then]

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx} \text{ এবং } \frac{d^2y}{dx^2} = m^2e^{mx}$$

$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 - 3m + 2) e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$m^2 - 3m + 2 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$.

বা $(m - 1)(m - 2) = 0 \Rightarrow m = 1, 2$.

$\therefore y_c = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

(1) নং কে নিম্নরূপে লিখা যায় [(1) can be written in the following form]

$(D^2 - 3D + 2) y = e^{5x}$

$\Rightarrow y_p = \frac{1}{D^2 - 3D + 2} e^{5x}$ 5

$= \frac{1}{5^2 - 3.5 + 2} e^{5x}$

$= \frac{1}{12} e^{5x}$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

$$\therefore y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{12} e^{5x}.$$

উদাহরণ-1(ii) সাধান কর [Solve] :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 5y = 2e^x + 10e^{5x}.$$ [NUH(NM)-20..]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 5y = 2e^x + 10e^{5x} \cdots (1)$$

মনেকরি $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 5y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান e^{mx} তবে

[Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 5y = 0 \cdots (2)$ then]

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx} \text{ এবং } \frac{d^2y}{dx^2} = m^2 e^{mx}$$

$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 + 6m + 5)\, e^{mx} = 0$

সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$$m^2 + 6m + 5 = 0 \text{ যেহেতু } e^{mx} \neq 0$$

বা $(m + 1)(m + 5) = 0$

$\therefore m = -1, -5$

$\therefore y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-5x}$

(1) নং হইতে পাই [From (1) we get]

$$(D^2 + 6D + 5)y = 2e^x + 10e^{5x}$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{D^2 + 6D + 5}(2e^x + 10e^{5x})$$

$$= \frac{1}{D^2 + 6D + 5} 2e^x + \frac{1}{D^2 + 6D + 5} 10e^{5x}$$

$$= \frac{1}{1^2 + 6(1) + 5} 2e^x + \frac{1}{5^2 + 6(5) + 5} 10e^{5x}$$

$$= \frac{1}{6} e^x + \frac{1}{6} e^{5x}$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [G. S. is]

$$y = y_c + y_p$$

$$\therefore y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-5x} + \frac{1}{6} e^x + e^{5x}.$$

উদাহরণ–2 ঃ সমাধান কর [Solve] $(D^2 - a^2)y = e^{ax}$ [DUH-1981]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(D^2 - a^2)\, y = e^{ax} \cdots (1)$$

মনেকরি $(D^2 - a^2)y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $(D^2 - a^2)y = 0 \cdots (2)$ then]

$$Dy = me^{mx} \text{ এবং } D^2y = m^2 e^{mx}$$

$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 - a^2)\, e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$$m^2 - a^2 = 0 \text{ যেহেতু [since] } e^{mx} \neq 0$$

বা $(m + a)(m - a) = 0 \Rightarrow m = -a, a$

$\therefore y_c = c_1 e^{-ax} + c_2 e^{ax}$

এখন (1) নং হইতে পাই [From (1) we get]

$$y_p = \frac{1}{D^2 - a^2} e^{ax}, \text{ যেহেতু [since] } f(a) = 0$$

$$= x\frac{1}{2D} e^{ax}$$

$$= \frac{xe^{ax}}{2a}$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

$$\therefore y = c_1 e^{-ax} + c_2 e^{ax} + \frac{xe^{ax}}{2a}.$$

উদাহরণ–3 ঃ সমাধান কর [solve] ঃ

$$\frac{d^3y}{dx^3} + y = 3 + e^{-x} + 5e^{2x}.$$ [CUH-1984]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{d^3y}{dx^3} + y = 3 + e^{-x} + 5e^{2x} \cdots (1)$$

মনেকরি $\frac{d^3y}{dx^3} + y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $\frac{d^3y}{dx^3} + y = 0 \cdots (2)$ then]

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx}, \frac{d^2y}{dx^2} = m^2e^{mx} \text{ এবং } \frac{d^3y}{dx^3} = m^3e^{mx}$$

$\therefore (2) \Rightarrow (m^3+1)\, e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$m^3 + 1 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

বা $(m+1)(m^2 - m + 1) = 0$

$\therefore m + 1 = 0$ অথবা $m^2 - m + 1 = 0$

$\therefore m = -1$ অথবা $m = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{3i^2}}{2}$

বা $m = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore y_c = e^{x/2}\left[c_1 \cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right] + c_3 e^{-x},$$

এখন (1) নং কে নিম্নরূপে লিখা যায় [Now (1) can be written in the following form]

$$(D^3+1)y = 3 + e^{-x} + 5e^{2x}$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{D^3+1}(3 + e^{-x} + 5e^{2x})$$

$$= \frac{1}{D^3+1}3 + \frac{1}{D^3+1}e^{-x} + \frac{1}{D^3+1}5e^{2x}$$

বা $y_p = \dfrac{1}{D^3+1}3e^{0x} + x.\dfrac{1}{3D^2}e^{-x} + \dfrac{1}{2^3+1}5e^{2x}$

$$= \frac{1}{0+1}3e^{0x} + x.\frac{1}{3(-1)^2}e^{-x} + \frac{5}{9}e^{2x}$$

$$= 3 + \frac{xe^{-x}}{3} + \frac{5}{9}e^{2x}$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

$$\therefore y = e^{x/2}\left[c_1 \cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right] + c_3 e^{-x} + 3 + \frac{xe^{-x}}{3} + \frac{5}{9}e^{2x}.$$

প্রশ্নমালা [EXERCISE]–5(2)

সমাধান কর [Solve] ঃ

1(i). $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = e^{3x}$ [DU-197

(ii). $(D^2 + 2D + 2)y = 2e^{-x}$ [DU-197

(iii). $(D^2 + D)\,y = e^x$ [DU-197

(iv). $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2k\dfrac{dy}{dx} + k^2y = e^x,\ k \neq 1$ [DUH–1986]

(v). $(D^3 - 9D^2 + 26D - 24)y = e^x$ [CUH–1978]

2(i). $(D^2 - 2D + 1)y = e^x$

(ii). $(D^2 - 9)\,y = e^{3x}$

(iii). $(D^2 + 4D + 3)y = e^{-3x}$

(iv). $(D^2 - 3D + 2)\,y = e^x$

(v). $(D^2 - 4D)\,y = 5$

(vi). $(D^3 + 3D^2 + 3D + 1)\,y = e^{-x}$ [JUS–1996]

(vii). $(D^3 - 2D^2 - 5D + 6)\,y = e^{3x}$.

3(i). $(D^2 + 4)y = e^x + x^2$ [NUH(NM)–2009]

(ii). $(D^2 - 1)\,y = e^x + 2e^{3x} + e^{5x}$

(iii). $(D^2 - 9D + 18)\,y = \cosh 3x\,;\ \left[\cosh 3x = \dfrac{1}{2}(e^{3x} + e^{-3x})\right]$

(iv). $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + y = e^x + e^{-x}$ [DUH–1985]

(v). $(D^2 + 4D + 4)y = e^{2x} + e^{-2x}$

(vi). $(D^2 + 4D + 4)y = 2\sinh 2x$

(vii). $(D^3 + 8)y = 5e^{3x} - 7e^{-2x}$

(viii). $(D^3 - D)y = e^x + e^{-x}$ [NUH–2010]

(ix). $(2D^3 - 3D^2 + 1)\,y = e^x + 1$.

4(i). সমাধান কর ঃ $(D^2 - 3D + 2)y = e^x$ যখন $y(0) = 3$ এবং $y'(0) = 3$

[Solve : $(D^2 - 3D + 2)y = e^x$ when $y(0) = 3$ and $y'(0) = 3$]

[NUH–2012, NU(Pass)–2006]

(ii). সমাধান কর ঃ $(D^2 - 1)\,y = 2$ যেখানে $y(2) = -1$ এবং $y'(2) = 3$.

[Solve : $(D^2 - 1)\,y = 2$ where $y(2) = -1$ and $y'(2) = 3$]

[DUH–1986]

উত্তরমালা [ANSWERS]

1(i). $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \dfrac{1}{2}e^{3x}$

(ii). $y = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + 2e^{-x}$

(iii). $y = c_1 + c_2 e^{-x} + \dfrac{1}{2}e^x$

(iv). $y = (c_1 + c_2 x)\,e^{kx} + \dfrac{e^x}{(1-k)^2};\ k \neq 1$

(v). $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{4x} - \frac{1}{6} e^x$

2(i). $y = \left(c_1 + c_2 x + \frac{1}{2} x^2\right) e^x$

(ii). $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{6} x e^{3x}$

(iii). $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} - \frac{1}{2} x e^{-3x}$

(iv). $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - x e^x$

(v). $y = c_1 + c_2 e^{4x} - \frac{5x}{4}$

(vi). $y = \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \frac{1}{6} x^3\right) e^{-x}$

(vii). $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + \frac{1}{10} x e^{3x}$

3(i). $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{5} e^x + \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)$

(ii). $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{1}{2} x e^x + \frac{1}{4} e^{3x} + \frac{1}{24} e^{5x}$

(iii). $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{6x} - \frac{1}{6} x e^{3x} + \frac{1}{108} e^{-3x}$

(iv). $y = (c_1 + c_2 x) e^{-x} + \frac{1}{4} e^x + \frac{1}{2} x^2 e^{-x}$

(v). $y = (c_1 + c_2 x) e^{-2x} + \frac{e^{2x}}{16} + \frac{1}{2} x^2 e^{-2x}$

(vi). $y = (c_1 + c_2 x) e^{-2x} + \frac{e^{2x}}{16} - \frac{1}{2} x^2 e^{-2x}$

(vii). $y = e^x [c_1 \cos\sqrt{3}x + c_2 \sin\sqrt{3}x] + c_3 e^{-2x} + \frac{1}{7} e^{3x} - \frac{7}{12} x e^{-2x}$

(viii). $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + \frac{x}{2}(e^x + e^{-x})$

(ix). $y = (c_1 + c_2 x) e^x + c_3 e^{-x/2} + \frac{1}{6} x^2 e^x + 1$

4(i). $y = 2e^x + e^{2x} - x e^x$

(ii). $y = -e^2 e^{-x} + 2e^{-2} e^x - 2.$

———x———

217

পঞ্চম অধ্যায় [CHAPTER–5]

তৃতীয় পরিচ্ছেদ [SECTION–3]

ডানপক্ষ $R(x) = \sin ax$ অথবা $\cos ax$ হইলে বিশেষ ইনটিগ্র্যাল $y_p = \frac{1}{f(D^2)} \sin ax$ এবং $y_p = \frac{1}{f(D^2)} \cos ax$ নির্ণয় পদ্ধতি ঃ

5-3.1 ঃ পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণের সাহায্যে আমরা দেখাইতে পারি [By successive differentiation we can show that]

$$D \sin ax = a \cos ax$$
$$\Rightarrow D^2 \sin ax = -a^2 \sin ax$$
$$\Rightarrow D^3 \sin ax = -a^3 \cos ax$$
$$\Rightarrow D^4 \sin ax = a^4 \sin ax$$
$$\Rightarrow (D^2)^2 \sin ax = (-a^2)^2 \sin ax$$

অনুরূপভাবে [Similarly] $(D^2)^n \sin ax = (-a^2)^n \sin ax$

এবং $D \cos ax = -a \sin ax$

$$\Rightarrow D^2 \cos ax = -a^2 \cos ax$$
$$\Rightarrow D^3 \cos ax = a^3 \sin ax$$
$$\Rightarrow D^4 \cos ax = a^4 \cos ax$$
$$\Rightarrow (D^2)^2 \cos ax = (-a^2)^2 \cos ax$$

অনুরূপভাবে [similarly] $(D^2)^n \cos ax = (-a^2)^n \cos ax$

সুতরাং [Hence] $f(D^2) \sin ax = f(-a^2) \sin ax$

এবং [and] $f(D^2) \cos ax = f(-a^2) \cos ax.$

নোট ঃ উপরের বামপক্ষে D^2 এর স্থলে $-a^2$ স্থাপন করিলে ডানপক্ষ পাওয়া যায়। কিন্তু D এর পরিবর্তে কোনকিছু [anything] স্থাপন করা যায় না। কারণ $D = \pm ia$, ইহা কাল্পনিক।

5-3.2 ঃ উপপাদ্য ঃ যদি $f(-a^2) \neq 0$ তবে $\frac{1}{f(D^2)} \sin ax = \frac{1}{f(-a^2)} \sin ax.$

প্রমাণ ঃ আমরা জানি [we know]

$$f(D^2) \sin ax = f(-a^2) \sin ax$$

উভয় পক্ষকে $\frac{1}{f(D^2)}$ দ্বারা অপারেট করিয়া পাই [Operating both sides by $\frac{1}{f(D^2)}$ we get]

$$\frac{1}{f(D^2)} f(D^2) \sin ax = \frac{1}{f(D^2)} f(-a^2) \sin ax$$

বা $\sin ax = f(-a^2) \frac{1}{f(D^2)} \sin ax$

বা $\frac{\sin ax}{f(-a^2)} = \frac{1}{f(D^2)} \sin ax$ যদি [if] $f(-a^2) \neq 0$.

$\therefore \frac{1}{f(D^2)} \sin ax = \frac{\sin ax}{f(-a^2)}$ যদি [if] $f(-a^2) \neq 0$. প্রমাণিত।

5-3.3 ঃ উপপাদ্য ঃ যদি [if] $f(-a^2) = 0$ এবং [and] $f'(-a^2) \neq 0$

তবে [then] $\frac{1}{f(D^2)} \cos ax = x \frac{1}{f'(D^2)} \cos ax$

এবং (and) $\frac{1}{f(D^2)} \sin ax = x \frac{1}{f'(D^2)} \sin ax$.

প্রমাণ ঃ যদি $f(-a^2) = 0$ হয়, তবে $f(D^2)$ এর একটি উৎপাদক $D^2 + a^2$. [If $f(-a^2)$ 0 = 0 then $D^2 + a^2$ is a factor of $f(D^2)$]

মনেকরি [Let] $f(D^2) = (D^2 + a^2) \varphi(D^2) \cdots (1)$ যখন [when] $\varphi(-a^2) \neq 0$.

এখন [Now] $\frac{1}{f(D^2)} [\cos ax + i \sin ax] = \frac{1}{f(D^2)} e^{iax}$

বা $\frac{1}{f(D^2)} [\cos ax + i \sin ax] = x \frac{1}{f'(D^2)} e^{iax}$; উপপাদ্য 5-2.3 দ্বারা।

বা $\frac{1}{f(D^2)} [\cos ax + i \sin ax] = x \frac{1}{f'(D^2)} [\cos ax + i \sin ax]$

উভয় পক্ষ হইতে বাস্তব এবং অবাস্তব অংশ সমীকৃত করিয়া পাই [Equating real and imaginary parts from both sides we get]

$$\frac{1}{f(D^2)} \cos ax = x \frac{1}{f'(D^2)} \cos ax, \text{ যদি [if] } f'(-a^2) \neq 0$$

এবং $\frac{1}{f(D^2)} \sin ax = x \frac{1}{f'(D^2)} \sin ax$, যদি [if] $f'(-a^2) \neq 0$. প্রমাণিত

5-3.4 ঃ অনুসিদ্ধান্ত **[Cor]** ঃ যদি $f(-a^2) = f'(-a^2) = 0$ এবং $f''(-a^2) \neq 0$

তবে $\frac{1}{f(D^2)} \cos ax = x^2 \frac{1}{f''(D^2)} \cos ax$, যখন [when] $f''(-a^2) \neq 0$

এবং $\frac{1}{f(D^2)} \sin ax = x^2 \frac{1}{f''(D^2)} \sin ax$ যখন [when] $f''(-a^2) \neq 0$.

5-3.5 ঃ নিয়ম–**1** ঃ (i). যদি বিশেষ ইনটিগ্র্যাল $y_p = \frac{1}{f(D^2)} \sin ax$, অথবা $y_p = \frac{1}{f(D^2)} \cos ax$ এই আকারে থাকে, তবে D^2 এর স্থলে $-a^2$ স্থাপন করিলে সমাধান পাওয়া যায় যখন $f(-a^2) \neq 0$.

যেমন $y_p = \frac{1}{D^2 + 1} \sin 2x$

$= \frac{1}{-2^2 + 1} \sin 2x$

$= -\frac{1}{3} \sin 2x$

(ii). যদি $y_p = \frac{1}{D + \alpha} \sin ax$ তবে নিম্নে বর্ণিত নিয়মে অগ্রসর হইতে হইবে।

অর্থাৎ $y_p = \frac{1}{D + \alpha} \sin ax$

$= \frac{(D - \alpha)}{(D - \alpha)(D + \alpha)} \sin ax$

$= \frac{(D - \alpha)}{D^2 - \alpha^2} \sin ax$

$= \frac{(D - \alpha)}{-a^2 - \alpha^2} \sin ax$

$= \frac{D\sin ax - \alpha \sin ax}{-(a^2 + \alpha^2)}$

$= \frac{a\cos ax - \alpha \sin ax}{-(a^2 + \alpha^2)}$.

নিয়ম–**2** ঃ (i). যদি $f(-a^2) = 0$ হয়, তবে নিয়ম –1 প্রযোজ্য নহে। এইক্ষেত্রে নিম্নে বর্ণিত পদ্ধতিতে সমাধান করিতে হইবে।

$y_p = \frac{1}{f(D^2)} \sin ax$, যদি [if] $f(-a^2) = 0$

$= x \frac{1}{f'(D^2)} \sin ax$,

$= x \frac{1}{f'(-a^2)} \sin ax$ যদি [if] $f'(-a^2) \neq 0$.

(ii). $y_p = \frac{1}{f(D^2)} \sin ax$, যদি [if] $f(-a^2) = 0$

$= x \frac{1}{f'(D^2)} \sin ax$ যদি [if] $f'(-a^2) = 0$,

$= x^2 \frac{1}{f''(D^2)} \sin ax$

$= x^2 \frac{1}{f''(-a^2)} \sin ax$, যদি [if] $f''(-a^2) \neq 0$.

উদাহরণমালা [EXAMPLES]

উদাহরণ-1(i) ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$(D^2 + 4)y = \sin 2x \sin x.$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$(D^2 + 4)y = \sin 2x \sin x \cdots (1)$

মনেকরি $(D^2 + 4)y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $(D^2 + 4)y = 0 \cdots (2)$ then]

তবে $Dy = me^{mx}$ এবং $D^2y = m^2 e^{mx}$

$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 + 4)\, e^{mx} = 0$

সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 + 4 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

বা $m^2 = -4$

বা $m^2 = 4i^2$

বা $m = \pm 2i$

$\therefore y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

এখন (1) নং হইতে পাই [From (1) we get]

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 4} \sin 2x \sin x$$

$$= \frac{1}{D^2 + 4} \frac{1}{2} [\cos(2x - x) - \cos(2x + x)]$$

$$= \frac{1}{D^2 + 4} \frac{1}{2} [\cos x - \cos 3x]$$

$$= \frac{1}{2(D^2 + 4)} \cos x - \frac{1}{2(D^2 + 4)} \cos 3x$$

$$= \frac{1}{2(-1^2 + 4)} \cos x - \frac{1}{2(-3^2 + 4)} \cos 3x$$

$$= \frac{1}{6} \cos x + \frac{1}{10} \cos 3x.$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

বা $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{6} \cos x + \frac{1}{10} \cos 3x.$

উদাহরণ-1(ii) ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$(D^2 - 3D + 4)y = \cos(4x + 5).$ **[CUH-1976]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$(D^2 - 3D + 4)y = \cos(4x + 5) \cdots (1)$

মনেকরি $(D^2 - 3D + 4)y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial soluton of $(D^2 - 3D + 4)y = 0 \cdots (2)$ then]

$Dy = me^{mx}$ এবং $D^2y = m^2 e^{mx}$.

$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 - 3m + 4)\, e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 - 3m + 4 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

$$\therefore m = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{7i^2}}{2}$$

বা $m = \frac{3 \pm i\sqrt{7}}{2} = \frac{3}{2} \pm \frac{i\sqrt{7}}{2}$

$$\therefore y_c = e^{3x/2}\left[c_1 \cos \frac{\sqrt{7}x}{2} + c_2 \sin \frac{\sqrt{7}x}{2}\right]$$

(1) নং হইতে পাই [From (1) we get]

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 3D + 4} \cos(4x + 5)$$

$$= \frac{1}{-4^2 - 3D + 4} \cos(4x + 5)$$

$$= \frac{1}{-3(D + 4)} \cos(4x + 5)$$

$$= \frac{(D - 4)}{-3(D - 4)(D + 4)} \cos(4x + 5)$$

$$= \frac{(D - 4) \cos(4x + 5)}{-3(D^2 - 16)}$$

$$= \frac{(D - 4) \cos(4x + 5)}{-3(-4^2 - 16)}$$

$$= \frac{1}{96} [D\cos(4x + 5) - 4\cos(4x + 5)]$$

$$= \frac{1}{96} [-4 \sin(4x + 5) - 4 \cos(4x + 5)]$$

$$= \frac{-1}{24} [\sin(4x + 5) + \cos(4x + 5)]$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

$$\therefore y = e^{3x/2}\left[c_1 \cos\frac{\sqrt{7}x}{2} + c_2 \sin\frac{\sqrt{7}x}{2}\right] - \frac{1}{24}[\sin(4x+5) + \cos(4x+5)]$$

উদাহরণ-2(i) ঃ সমাধান কর [Solve] [NUH-2007]

$$(D^2 + a^2)y = \cos ax.$$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(D^2 + a^2)y = \cos ax \cdots (1)$$

মনেকরি, $(D^2 + a^2)y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $(D^2 + a^2)y = 0 \cdots (2)$ then]

$$Dy = me^{mx} \text{ এবং } D^2y = m^2 e^{mx}$$

$$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 + a^2)\, e^{mx} = 0$$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 + a^2 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$.

$$\text{বা } m^2 = -a^2$$

$$\text{বা } m^2 = i^2 a^2$$

$$\text{বা } m = \pm ia$$

$$\therefore y_c = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax$$

এখন (1) নং হইতে পাই [From (1) we get]

$$y_p = \frac{1}{D^2 + a^2}\cos ax \quad \text{যেহেতু [since] } f(-a^2) = 0.$$

$$\boxed{= x.\frac{1}{2D}\cos ax}$$

$$= \frac{x}{2}\int \cos ax\, dx$$

$$\text{বা } y_p = \frac{x}{2}\cdot\frac{\sin ax}{a}$$

$$= \frac{x \sin ax}{2a}$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

$$\text{বা } y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax + \frac{x}{2a}\, x \sin ax.$$

উদাহরণ-2(ii) সমাধান কর [Solve] :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cos^2 x$$ [NUH(NM)-2008]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cos^2 x \cdots (1)$$

মনেকরি $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে

[Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \cdots (2)$ then]

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx} \text{ এবং } \frac{d^2y}{dx^2} = m^2 e^{mx}$$

$$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 + 1)\, e^{mx} = 0$$

সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$m^2 + 1 = 0$ যেহেতু $e^{mx} \neq 0$

বা $m^2 = -1 = i^2 \Rightarrow m = \pm i$

$$\therefore y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

(1) নং হইতে পাই [From (1) we get]

$$(D^2 + 1)y = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{D^2 + 1}\cdot\frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

$$= \frac{1}{1 + D^2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{D^2 + 1}\cdot\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$= \frac{1}{1 + D^2}\cdot\frac{1}{2}e^{0x} + \frac{1}{-2^2 + 1}\cdot\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$= \frac{1}{1 + 0}\cdot\frac{1}{2}e^{0x} - \frac{1}{6}\cos 2x$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{6}$$

$$= \frac{1}{6}[3 - \cos 2x]$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [G. S. is]

$$y = y_c + y_p$$

$$\therefore y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{6}[3 - \cos 2x].$$

উদাহরণ–2(iii). সমাধান কর [Solve] : [NUH(NM)–200]

$$(D^2 + 2D + 2)y = 10 \sin 4x$$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(D^2 + 2D + 2)y = 10 \sin 4x \cdots (1)$$

মনেকরি $(D^2 + 2D + 2)y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $(D^2 + 2D + 2)y = 0 \cdots (2)$ then]

$$Dy = me^{mx} \text{ এবং } D^2y = m^2 e^{mx}$$

$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 + 2m + 2)\, e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$$m^2 + 2m + 2 = 0 \text{ যেহেতু } e^{mx} \neq 0$$

$$\therefore m = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

$\therefore y_c = e^{-x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x).$

(1) নং হইতে পাই [From (1) we get]

$$\therefore y_p = \frac{1}{D^2 + 2D + 2} 10 \sin 4x$$

$$= \frac{1}{-4^2 + 2D + 2} 10 \sin 4x$$

$$= \frac{1}{2D - 14} 10 \sin 4x$$

$$= \frac{1}{D - 7} 5 \sin 4x$$

$$= \frac{(D+7)}{D^2 - 49} 5 \sin 4x$$

$$= \frac{5(D+7) \sin 4x}{-4^2 - 49} = \frac{5[4 \cos 4x + 7 \sin 4x]}{-65}$$

$$= -\frac{1}{13} [4 \cos 4x + 7 \sin 4x]$$

সাধারণ সমাধান [G. S. is]

$$y = y_c + y_p$$

$$\therefore y = e^{-x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x) - \frac{1}{13} (4 \cos 4x + 7 \sin 4x).$$

উদাহরণ–3(i) ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$$(D^3 - 3D^2 + 4D - 2)y = e^x + \cos x$$

[NUH–2004, 2010, 2011, NUH(NM)–2007]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(D^3 - 3D^2 + 4D - 2)y = e^x + \cos x \cdots (1)$$

মনেকরি $(D^3 - 3D^2 + 4D - 2)\, y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $(D^3 - 3D^2 + 4D - 2)\, y = 0 \cdots (2)$ then]

$Dy = me^{mx}$, $D^2y = m^2 e^{mx}$ এবং [and] $D^3y = m^3 e^{mx}$.

$\therefore (2) \Rightarrow (m^3 - 3m^2 + 4m - 2)\, e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$$m^3 - 3m^2 + 4m - 2 = 0, \text{ যেহেতু [since] } e^{mx} \neq 0$$

বা $m^2 (m-1) - 2m(m-1) + 2(m-1) = 0$

বা $(m-1)(m^2 - 2m + 2) = 0$

$\therefore m - 1 = 0$ অথবা $m^2 - 2m + 2 = 0$

$\therefore m = 1$ অথবা $m = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4i^2}}{2}$

বা $m = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i.$

$\therefore y_c = e^x [c_1 \cos x + c_2 \sin x] + c_3 e^x,$

এখন (1) নং হইতে পাই [From (1) we get]

$$y_p = \frac{1}{D^3 - 3D^2 + 4D - 2} [e^x + \cos x]$$

$$= \frac{1}{D^3 - 3D^2 + 4D - 2} e^x + \frac{1}{D^2 D - 3D^2 + 4D - 2} \cos x$$

$$= x \frac{1}{3D^2 - 6D + 4} e^x + \frac{1}{(-1^2)\, D - 3\,(-1^2) + 4D - 2} \cos x$$

$$= x \frac{1}{3.1^2 - 6.1 + 4} e^x + \frac{1}{3D + 1} \cos x$$

$$= xe^x + \frac{(3D-1)}{9D^2 - 1} \cos x$$

$$= xe^x + \frac{(3D-1) \cos x}{9(-1^2) - 1}$$

$$= xe^x - \frac{1}{10} [3D \cos x - \cos x]$$

$= xe^x - \frac{1}{10}[-3\sin x - \cos x]$

$= xe^x + \frac{1}{10}[3\sin x + \cos x]$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$y = y_c + y_p$

$\therefore y = e^x[c_1 \cos x + c_2 \sin x] + c_3 e^x + xe^x + \frac{1}{10}[3\sin x + \cos x]$.

উদাহরণ–3(ii). সমাধান কর [Solve] : [NU(Pass)-20..]

$$(D^2 - 2D + 1)y = x + \sin x.$$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

মনেকরি $(D^2 - 2D + 1)y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে

[Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $(D^2 - 2D + 1)y = 0 \cdots (2)$ then]

$Dy = me^{mx}$ এবং $D^2y = m^2 e^{mx}$

$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 - 2m + 1)\, e^{mx} = 0$

সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$m^2 - 2m + 1 = 0$ যেহেতু $e^{mx} \neq 0$

বা $(m-1)^2 = 0 \Rightarrow m = 1, 1.$

$\therefore y_c = (c_1 + c_2 x)\, e^x$

(1) নং হইতে পাই [From (1) we get]

$\therefore y_p = \frac{1}{D^2 - 2D + 1}(x + \sin x)$

$= \frac{1}{D^2 - 2D + 1}x + \frac{1}{D^2 - 2D + 1}\sin x$

$= \frac{1}{(1-D)^2}x + \frac{1}{-1^2 - 2D + 1}\sin x$

$= (1-D)^{-2}x - \frac{1}{2D}\sin x$

$= (1 + 2D + 3D^2 + \cdots)x - \frac{1}{2}\int \sin x\, dx$

$= [x + 2(1) + 0] + \frac{\cos x}{2}$

$= x + 2 + \frac{\cos x}{2}$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [G. S. is]

$y = y_c + y_p$

$\therefore y = (c_1 + c_2 x)\, e^x + x + 2 + \frac{\cos x}{2}$.

উদাহরণ–3(iii). সমাধান কর [Solve] :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = e^x - \sin x$$ [NUH–2003]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = e^x - \sin x \cdots (1)$

মনেকরি $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে

[Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0 \cdots (2)$ then]

$\frac{dy}{dx} = me^{mx}$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2} = m^2 e^{mx}$

$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 - 4)\, e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$m^2 - 4 = 0$ যেহেতু $e^{mx} \neq 0$

$(m + 2)(m - 2) = 0 \Rightarrow m = -2, 2$

$\therefore y_c = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}$.

(1) নং হইতে পাই [From (1) we get]

$(D^2 - 4)y = e^x - \sin x$

$\therefore y_p = \frac{1}{D^2 - 4}(e^x - \sin x)$

$= \frac{1}{D^2 - 4}e^x - \frac{1}{D^2 - 4}\sin x$

$= \frac{1}{1^2 - 4}e^x - \frac{1}{-1^2 - 4}\sin x$

$= -\frac{1}{3}e^x + \frac{1}{5}\sin x$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [G. S. is]

$y = y_c + y_p$

$\therefore y = c_1 e^{-2x} + c\, e^{2x} - \frac{e^x}{3} + \frac{\sin x}{5}$.

পঞ্চম অধ্যায় [CHAPTER–5]
চতুর্থ পরিচ্ছেদ [SECTION–4]

ডানপক্ষ $R(x) = e^{ax}V$ হইলে বিশেষ ইনটিগ্র্যাল নির্ণয়ের পদ্ধতি যখন v = sinax, অথবা cosax, অথবা x^m. [Determine method of particular intgral when R. H. S. $R(x) = e^{ax}V$ where V = sinax, or cosax, or x^m]

নিয়ম–1 ঃ যদি $y_p = \frac{1}{f(D)} e^{ax}V$ এই আকারে থাকে, তবে e^{ax} কে $\frac{1}{f(D)}$ এর ডান হইতে বামে আনিতে হয় এবং D এর স্থলে D + a লিখিতে হয়। অতঃপর পূর্বে উল্লেখিত নিয়মে সমাধান করিতে হয়।

যেমন $y_p = \frac{1}{f(D)} e^{ax} V$

$$= e^{ax} \frac{1}{f(D+a)} V$$; পূর্বে উল্লেখিত নিয়মে সমাধান করিতে হইবে।

নিয়ম–2 ঃ যদি $y_p = \frac{1}{f(D)} x^n \cos ax$, অথবা $y_p = \frac{1}{f(D)} x^n \sin ax$ $(n \geq 1)$ এই আকারে থাকে, তবে $X = \frac{1}{f(D)} x^n \cos ax$

$Y = \frac{1}{f(D)} x^n \sin ax$ ধরিতে হয় এবং

$$X + iY = \frac{1}{f(D)} x^n (\cos ax + i\sin ax)$$

$$= \frac{1}{f(D)} x^n e^{iax}$$

$$= e^{iax} \frac{1}{f(D+ia)} x^n$$; নিয়ম–1 দ্বারা।

অতঃপর পূর্বের নিয়মে সমাধান করিয়া উভয় পক্ষ হইতে বাস্তব এবং অবাস্তব অংশ সমীকৃত করিতে হয়।

নিয়ম–3 ঃ যদি $y_p = \frac{1}{f(D)} xv$ এই আকারে থাকে, তবে

$$y_p = \frac{1}{f(D)} xv$$

$$= x. \frac{1}{f(D)} v - \frac{f'(D)}{[f(D)]^2} v.$$

উদাহরণমালা [EXAMPLES]

উদাহরণ–1(i) ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ $(D^2 - 9)y = 2x\, e^{3x}$. **[JUS–1996]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(D^2 - 9)y = 2x\, e^{3x} \cdots (1)$$

মনেকরি $(D^2 - 9)y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $(D^2 - 9)y = 0 \cdots (2)$ then]

$Dy = me^{mx}$ এবং $D^2y = m^2e^{mx}$

$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 - 9)e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 - 9 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

বা $(m+3)(m-3) = 0$

বা $m = -3, 3.$

$$\therefore y_c = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x}$$

(1) নং হইতে পাই [From (1) we get]

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 9} 2x\, e^{3x}$$

$$= e^{3x} \frac{1}{(D+3)^2 - 9} 2x$$

$$= e^{3x} \frac{1}{D^2 + 6D} 2x$$

$$= e^{3x} \frac{1}{6D(1 + D/6)} 2x$$

$$= e^{3x} \frac{1}{6D} \left(1 + \frac{D}{6}\right)^{-1} 2x$$

$$= e^{3x} \frac{1}{6D} \left[1 - \frac{D}{6} + \frac{D^2}{36} - \cdots\right] 2x$$

$$= \frac{e^{3x}}{6} \cdot \frac{1}{D} \left[2x - \frac{1}{6} D(2x) + 0\right]$$

$$= \frac{e^{3x}}{6} \cdot \frac{1}{D} \left[2x - \frac{1}{6} \cdot 2\right]$$

$$= \frac{e^{3x}}{6} \int \left(2x - \frac{1}{3}\right) dx$$

বা $y_p = \frac{e^{3x}}{6}\left[x^2 - \frac{x}{3}\right]$

$= \frac{e^{3x}}{18}(3x^2 - x)$.

∴ সাধারন সমাধান [General solution is]

$y = y_c + y_p$

বা $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{18} e^{3x}(3x^2 - x)$.

উদাহরণ–1(ii) ঃ সমাধান কর [Solve] : $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = x^2 e^{2x}$.

[NUH–2009, NUH(NM)–2009, DUH–1984]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = x^2 e^{2x} \cdots (1)$$

মনেকরি $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0 \cdots (2)$ then]

$\frac{dy}{dx} = me^{mx}$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2} = m^2 e^{mx}$

$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 - 4m + 4)\, e^{mx} = 0$

∴ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 - 4m + 4 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

বা $(m - 2)^2 = 0$

বা $m = 2, 2$.

$\therefore y_c = (c_1 + c_2 x)\, e^{2x}$

(1) নং কে নিম্নরূপে লিখা যায় [(1) can be written in the following form]

$(D^2 - 4D + 4)\, y = x^2 e^{2x}$

$\therefore y_p = \frac{1}{D^2 - 4D + 4} x^2 e^{2x}$

$= \frac{1}{(D-2)^2} x^2 e^{2x}$

$= e^{2x} \frac{1}{(D + 2 - 2)^2} x^2$

বা $y_p = e^{2x} \frac{1}{D^2} x^2$

$= e^{2x} \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{D} x^2$

$= e^{2x} \frac{1}{D} \int x^2\, dx$

$= e^{2x} \cdot \frac{1}{D} \cdot \frac{x^3}{3}$

$= e^{2x} \int \frac{x^3}{3}\, dx$

$= \frac{1}{12} x^4 e^{2x}$.

∴ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$y = y_c + y_p$

$\therefore y = (c_1 + c_2 x)\, e^{2x} + \frac{1}{12} x^4 e^{2x}$.

উদাহরণ–1(iii) ঃ সমাধান কর [Solve] :

$(D^2 + 1)y = e^x x^2 - e^x$. **[NU(Pass)–2009]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(D^2 + 1)y = e^x x^2 - e^x \cdots (1)$$

মনেকরি $(D^2 + 1)\, y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে

[Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $(D^2 + 1)\, y = 0 \cdots (2)$ then]

$Dy = me^{mx}$ এবং $D^2 y = m^2 e^{mx}$

$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 + 1)\, e^{mx} = 0$

∴ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$m^2 + 1 = 0$ যেহেতু $e^{mx} \neq 0$

বা $m^2 = -1 = i^2 \Rightarrow m = \pm i$

$\therefore y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

(1) নং হইতে পাই [From (1) we get]

$\therefore y_p = \frac{1}{D^2 + 1}(e^x x^2 - e^x$

$= \frac{1}{D^2 + 1} e^x x^2 - \frac{1}{D^2 + 1} e^x$

ষষ্ঠ অধ্যায় [CHAPTER–6]

চলক সহগ বিশিষ্ট রৈখিক সমমাত্রিক সমীকরণ

[Linear Homogeneous Equation With Variable Coefficients]

6-1 ঃ কসি অয়লার সমীকরণ [Cauchy Euler equation] ঃ

যদি $p_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + p_2 x^{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + p_n y = R(x)$ সমীকরণটির $p_0, p_1, p_2, \cdots p_n$ ধ্রুবক এবং $R(x)$ ধ্রুবক অথবা x এর ফাংশন হয়, তবে উক্ত সমীকরণকে চলক সহগ বিশিষ্ট রৈখিক সমমাত্রিক সমীকরণ বলা হয়। ইহাকে কসি অয়লার সমীকরণও বলা হয়।

[An equation of the form $p_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + p_2 x^{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + p_n y = R(x)$ is called linear homogeneous equation with variable coefficients where $p_0, p_1, p_2, \cdots p_n$ are constants and $R(x)$ is constant or a function of x. This equation is also called couchy Euler equation.]

6-2 ঃ কার্য্য পদ্ধতি [Working rule] ঃ কসি অয়লার সমীকরণকে সমাধানের জন্য প্রথমে $x = e^z$, অথবা $z = \ln x$ ধরিয়া সরলীকরণ করিলে ইহা ধ্রুবক সহগ বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণে রুপান্তরিত হয়। অতঃপর পূর্বের অধ্যায়ে উল্লেখিত নিয়মে সমাধান করার পর z এর মান স্থাপন করিতে হয়।

6-3 ঃ ধরি $x = e^z$ তবে $z = \ln x$ [we put $x = e^z$ then $z = \ln x$]

$$\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdots (1)$$

এখন [Now] $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$

বা $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{1}{x} \cdots (2)$; (1) নং দ্বারা [by (1)]

বা $x \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}$

বা $x \frac{dy}{dx} = Dy$ যখন $D = \frac{d}{dz}$.

আবার $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$

বা $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x} \frac{dy}{dz}\right]$; (2) নং দ্বারা [by (2)]

বা $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x} \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right) - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dz}$

বা $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x} \frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right) \frac{dz}{dx} - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dz}$

বা $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x} \frac{d^2 y}{dz^2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dz}$

বা $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\left[\frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right]$

বা $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}$

বা $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = D^2 y - Dy$

বা $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = D(D-1)y$

অনুরুপভাবে [similarly] $x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} = D(D-1)(D-2)y$.

... ...

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} = D(D-1)(D-2) \cdots \{(D-(n-1)\}y$$

যদি ইহাদের মান কসি অয়লার সমীকরণে স্থাপন করা হয়, তবে উহা ধ্রুবক সহগ বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণে রুপান্তরিত হয়। [If putting these values in cauchy Euler equation then it transform into linear equation with constant coefficients.]

6.4 ঃ একটি ২য় ক্রমের কসি অয়লার সমীকরণকে ধ্রুবক সহগবিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণে রূপান্তর কর।

[A second order Cauchy-Euler differential equation transfer into a linear equation with constant coefficients] **[NUH–2012]**

সমাধান ঃ মনেকরি [Let] $P_0 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + P_1 x \frac{dy}{dx} + y = R(x) \cdots (1)$

একটি ২য় ক্রমের কসি অয়লার ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ যেখানে P_0, P_1 ধ্রুবক। [be a second order Cauchy-Euler differential equation where P_0, P_1 constants]

ধরি $x = e^z$ তবে $z = \ln x$ [We put $x = e^z$ then $z = \ln x$]

$\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdots (2)$

এখন [Now] $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}$

বা $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{1}{x} \cdots (3)$; (2) নং দ্বারা।

বা $x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}$

বা $x\frac{dy}{dx} = Dy$ যখন $D = \frac{d}{dz}$

আবার, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$

বা $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}\right]$, (3) নং দ্বারা।

বা $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right) - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}$

বা $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}$

বা $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dz^2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}$

বা $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}$

বা $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = D^2y - Dy$

$(1) \Rightarrow P_0(D^2y - Dy) + P_1 Dy + y = R(e^z)$

$\Rightarrow P_0 D^2y + (P_1 - P_0) Dy + y = R(e^z)$.

ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ [Which is the required equation]

উদাহরণমালা [EXAMPLES]

উদাহরণ-1(i) ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 3x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$ [DUH–1984]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 3x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \cdots (1)$$

ধরি $x = e^z$ তবে $z = \ln x$ কাজেই $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdots (2)$

[we put $x = e^z$ then $z = \ln x$, so $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdots (2)$]

এখন [Now] $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$

বা $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{1}{x} \cdots (3)$; (2) নং দ্বারা [by (2)]

বা $x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}$

বা $x\frac{dy}{dx} = Dy$, যখন $D = \frac{d}{dz}$

আবার (Again) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$

বা $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}\right]$, (3) নং দ্বারা [by (3)]

বা $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right) - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}$

বা $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}$

বা $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dz^2}\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}$; (2) নং দ্বারা [by (2)]

বা $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\left[\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right]$

বা $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = D^2y - Dy$

বা $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় [Similarly it can be prove that]

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} = D(D-1)(D-2)y.$$

এখন ইহাদের মান (1) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [Putting these values in (1) we get]

$$D(D-1)(D-2)y + 3D(D-1)y - 2Dy + 2y = 0$$

বা $(D^3 - 3D^2 + 2D + 3D^2 - 3D - 2D + 2)y = 0$

বা $(D^3 - 3D + 2)y = 0 \cdots (4)$

মনেকরি (4) নং এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mz}$ তবে [Let $y = e^{mz}$ be a trial solution of (4) then]

$Dy = me^{mz}$, $D^2y = m^2e^{mz}$ এবং $D^3y = m^3e^{mz}$

$\therefore (4) \Rightarrow (m^3 - 3m + 2)\, e^{mz} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$m^3 - 3m + 2 = 0$, যেহেতু [since] $e^{mz} \neq 0$

বা $m^2(m-1) + m(m-1) - 2(m-1) = 0$

বা $(m-1)(m^2 + m - 2) = 0$

বা $(m-1)(m-1)(m+2) = 0$

$\therefore m = 1, 1, -2$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = (c_1 + c_2z)\, e^z + c_3\, e^{-2z}$$

বা $y = [c_1 + c_2\, ln x]x + \frac{c_3}{x^2}$.

উদাহরণ–1(ii) ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$$(1+2x)^2\frac{d^2y}{dx^2} - 6(1+2x)\frac{dy}{dx} + 16y = 8(1+2x)^2.$$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(1+2x)^2\frac{d^2y}{dx^2} - 6(1+2x)\frac{dy}{dx} + 16y = 8(1+2x)^2 \cdots (1)$$

ধরি $1 + 2x = e^z$ তবে $z = ln(1+2x)$ কাজেই $\frac{dz}{dx} = \frac{2}{1+2x} \cdots (2)$

[we put $1 + 2x = e^z$ then $z = ln(1+2x)$ so $\frac{dz}{dx} = \frac{2}{1+2x} \cdots (2)$]

এখন [Now] $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$

বা $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{2}{(1+2x)} \cdots (3)$; (2) নং দ্বারা [by (2)]

বা $(1+2x)\frac{dy}{dx} = 2\frac{dy}{dz}$

বা $(1+2x)\frac{dy}{dx} = 2\,Dy$ যখন [when] $D = \frac{d}{dz}$.

আবার [Again] $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$

বা $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{2}{(1+2x)}\frac{dy}{dz}\right]$; (3) নং দ্বারা [by (3)]

বা $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{1+2x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right) - \frac{2^2}{(1+2x)^2}\frac{dy}{dz}$

বা $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{1+2x}\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx} - \frac{2^2}{(1+2x)^2}\frac{dy}{dz}$

বা $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{1+2x}\frac{d^2y}{dz^2}\cdot\frac{2}{(1+2x)} - \frac{2^2}{(1+2x)^2}\frac{dy}{dz}$; (2) নং দ্বারা।

বা $(1+2x)^2\frac{d^2y}{dx^2} = 4\frac{d^2y}{dz^2} - 4\frac{dy}{dz}$

বা $(1+2x)^2\frac{d^2y}{dx^2} = 4D(D-1)y$

এখন ইহাদের মান (1) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [Now putting these values in (1) we get]

$$4D(D-1)y - 6.2Dy + 16y = 8(e^z)^2$$

বা $(D^2 - D - 3D + 4)\,y = 2e^{2z}$

বা $(D^2 - 4D + 4)\,y = 2e^{2z} \cdots (4)$

মনেকরি $(D^2 - 4D + 4)y = 0 \cdots (5)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mz}$ তবে [Let $y = e^{mz}$ be a trial solution of $(D^2 - 4D + 4)y = 0 \cdots (5)$ then]

$Dy = me^{mz}$ এবং $D^2y = m^2\,e^{mz}$.

$\therefore (5) \Rightarrow (m^2 - 4m + 4)\, e^{mz} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 - 4m + 4 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mz} \neq 0$.

বা $(m-2)(m-2) = 0 \Rightarrow m = 2, 2$

$\therefore y_c = (c_1 + c_2 z)\, e^{2z}$

বা $y_c = [c_1 + c_2\, ln(1+2x)]\,(1+2x)^2$.

(4) নং হইতে পাই [From (4) we get]

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 4D + 4} 2e^{2z};\ \text{যেহেতু [since] } f(2) = 0$$

$$= z\frac{1}{2D-4} 2e^{2z};\ \text{যেহেতু [since] } f'(2) = 0$$

$$= z^2 \frac{1}{2-0} 2e^{2z}$$

$$= z^2 e^{2z}$$

$$= (1+2x)^2 \{ln(1+2x)\}^2.$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$y = y_c + y_p$

$\therefore y = [c_1 + c_2\, ln(1+2x)]\,(1+2x)^2 + (1+2x)^2 \{ln(1+2x)\}^2$.

উদাহরণ-2(i) : সমাধান কর [Solve] :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 4y = x + x^2\, lnx$$ **[NUH(NM)-2006, DUH-1988]**

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 4y = x + x^2 lnx \cdots (1)$$

ধরি $x = e^z$ তবে $z = lnx$ কাজেই $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdots (2)$

[we put $x = e^z$ then $z = lnx$ so $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdots (2)$]

এখন [Now] $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}$

বা $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{1}{x} \cdots (3)$; (2) নং দ্বারা [by (2)]

বা $x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}$

বা $x\frac{dy}{dx} = Dy$ যখন [when] $D = \frac{d}{dz}$

আবার [Again] $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$

বা $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}\right]$; (3) নং দ্বারা [by (3)]

বা $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right) - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}$

বা $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}$

বা $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dz^2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}$; (3) নং দ্বারা [by (3)]

বা $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}$

বা $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = D^2y - Dy$

বা $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y$

$\therefore (1) \Rightarrow D(D-1)y - 3Dy + 4y = e^z + (e^z)^2 z$

বা $(D^2 - D - 3D + 4)y = e^z + ze^{2z}$

বা $(D^2 - 4D + 4)y = e^z + ze^{2z} \cdots (4)$

মনেকরি $(D^2 - 4D + 4)y = 0 \cdots (5)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mz}$ তবে [Let $y = e^{mz}$ be a trial solution of $(D^2 - 4D + 4)y = 0 \cdots (5)$ then]

$Dy = me^{mz}$ এবং $D^2y = m^2e^{mz}$

$\therefore (5) \Rightarrow (m^2 - 4m + 4)\, e^{mz} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$m^2 - 4m + 4 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mz} \neq 0$

বা $(m-2)^2 = 0 \Rightarrow m = 2, 2$

$\therefore y_c = (c_1 + c_2 z)\, e^{2z}$

বা $y_c = [c_1 + c_2\, lnx]\, x^2$

(4) নং হইতে পাই [From (4) we get]

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 4D + 4}[e^z + ze^{2z}]$$

$$= \frac{1}{(D-2)^2}e^z + \frac{1}{(D-2)^2}ze^{2z}$$

$$= \frac{1}{(1-2)^2}e^z + e^{2z}\frac{1}{(D+2-2)^2}z$$

বা $y_p = e^z + e^{2z} \cdot \frac{1}{D^2} z$

$= e^z + e^{2z} \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{D} z$

$= e^z + e^{2z} \frac{1}{D} \frac{z^2}{2}$

$= e^z + (e^z)^2 \frac{z^3}{6}$

$= x + \frac{1}{6} x^2 (lnx)^3.$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$y = y_c + y_p$

বা $y = [c_1 + c_2\, lnx]\, x^2 + x + \frac{1}{6} x^2 (lnx)^3.$

উদাহরণ-2(ii) ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 3x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = x + lnx.$$

[DUH–1985, DUS–1992]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 3x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = x + lnx \cdots (1)$$

ধরি $x = e^z$ তবে $z = lnx$ কাজেই $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdots (2)$

[we put $x = e^z$ then $z = lnx$ so $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdots (2)$]

এখন [Now] $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx}$

বা $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{1}{x} \cdots (3)$; (2) নং দ্বারা [by (2)]

বা $x \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}$

বা $x \frac{dy}{dx} = Dy$ যখন [when] $D = \frac{d}{dz}$

আবার [Again] $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$

বা $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x} \frac{dy}{dz}\right]$; (3) নং দ্বারা [by (3)]

বা $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x} \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right) - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dz}$

বা $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x} \frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right) \frac{dz}{dx} - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dz}$

বা $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x} \frac{d^2y}{dz^2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dz}$; (3) নং দ্বারা [by (3)]

বা $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}$

বা $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = D^2y - Dy$

বা $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y$

অনুরূপভাবে [Similarly] $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} = D(D-1)(D-2)y$

$\therefore (1) \Rightarrow D(D-1)(D-2)y + 3D(D-1)y + Dy + y = e^z + z$

বা $(D^3 - 3D^2 + 2D + 3D^2 - 3D + D + 1)y = e^z + z$

বা $(D^3 + 1)y = e^z + z \cdots (4)$

মনেকরি $(D^3 + 1)y = 0 \cdots (5)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mz}$ তবে [Let $y = e^{mz}$ be a trial solution of $(D^3 + 1)y = 0 \cdots (5)$]

$Dy = me^{mz}$, $D^2y = m^2e^{mz}$ এবং $D^3y = m^3e^{mz}$

$\therefore (5) \Rightarrow (m^3 + 1)\, e^{mz} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^3 + 1 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mz} \neq 0$

বা $(m+1)(m^2 - m + 1) = 0$

$\therefore m + 1 = 0$ বা $m^2 - m + 1 = 0$

$\Rightarrow m = -1,$ বা $m = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3i^2}}{2}$

বা $m = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$\therefore y_c = e^{z/2}\left[c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} z + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}z}{2}\right] + c_3 e^{-z}$

$= (e^z)^{1/2}\left[c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} z + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}z}{2}\right] + c_3 (e^z)^{-1}$

$= x^{1/2}\left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} lnx\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} lnx\right)\right] + c_3 x^{-1}$

(4) নং হইতে পাই [From (4) we get]

$$y_p = \frac{1}{D^3+1}[e^z + z]$$
$$= \frac{1}{D^3+1}e^z + \frac{1}{D^3+1}z$$
$$= \frac{1}{1^3+1}e^z + (1+D^3)^{-1}z$$
$$= \frac{1}{2}e^z + (1 - D^3 + D^6 - \cdots)z$$
$$= \frac{1}{2}e^z + (z - 0)$$
$$= \frac{1}{2}x + \ln x$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$
$$\therefore y = x^{1/2}\left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right] + \frac{c_3}{x} + \frac{x}{2} + \ln x.$$

উদাহরণ-3(i) ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = \cos(\ln x).$$ **[NUH-2012]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = \cos(\ln x) \cdots (1)$$

ধরি $x = e^z$ তবে $z = \ln x$ [We put $x = e^z$ then $z = \ln x$]

$$\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdots (2)$$

এখন [Now] $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$

বা $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{1}{x}$; (2) নং দ্বারা।

বা $x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}$

$\therefore x\frac{dy}{dx} = Dy$ যখন $D = \frac{d}{dz}$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় [Similarly it can be prove that]

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y$$

$\therefore (1) \Rightarrow D(D-1)y - 2Dy + 2y = \cos z.$

বা $(D^2 - D - 2D + 2)y = \cos z$

বা $(D^2 - 3D + 2)y = \cos z \cdots (3)$

মনেকরি $(D^2 - 3D + 2)y = 0 \cdots (4)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mz}$ তবে [Let $y = e^{mz}$ be a trial solution of $(D^2 - 3D + 2)y = 0 \cdots (4)$]

$$Dy = me^{mz},\ D^2 = m^2 e^{mz}$$

$\therefore (4) \Rightarrow (m^2 - 3m + 2)e^{mz} = 0$

সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 - 3m + 2 = 0$ যেহেতু $e^{mz} \neq 0$.

বা $(m-1)(m-2) = 0 \Rightarrow m = 1, 2$

$\therefore y_c = c_1 e^z + c_2 e^{2z}$

বা $y_c = c_1 x + c_2 x^2.$

(3) নং হইতে পাই [From (3) we get]

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 3D + 2}\cos z$$
$$= \frac{1}{-1^2 - 3D + 2}\cos z = \frac{1}{1 - 3D}\cos z$$
$$= \frac{(1+3D)}{1 - 9D^2}\cos z = \frac{(1+3D)\cos z}{1 - 9(-1^2)}$$
$$= \frac{1}{10}[\cos z - 3\sin z]$$
$$= \frac{1}{10}[\cos(\ln x) - 3\sin(\ln x)]$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

বা $y = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{1}{10}[\cos(\ln x) - 3\sin(\ln x)].$

উদাহরণ-3(ii) ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = \sin(\ln x^2)$$ **[CUH-1985]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = \sin(\ln x^2) \cdots (1)$$

ধরি $x = e^z$ তবে $z = \ln x$ কাজেই $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdots (2)$

[we put $x = e^z$ then $z = \ln x$ so $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdots (2)$]

এখন [Now] $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$

বা $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{1}{x}$; (2) নং দ্বারা [by (2)]

বা $x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}$

বা $x\frac{dy}{dx} = Dy$ যখন [when] $D = \frac{d}{dz}$.

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় [Similarly it can be prove that]

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y$$

$\therefore (1) \Rightarrow D(D-1)y + Dy + y = \sin\{\ln(e^z)^2\}$

বা $(D^2 - D + D + 1)y = \sin(\ln e^{2z})$

বা $(D^2 + 1)y = \sin(2z \ln e)$

বা $(D^2 + 1)y = \sin 2z \cdots (3)$.

মনেকরি $(D^2 + 1)y = 0 \cdots (4)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mz}$ তবে [Le
$y = e^{mz}$ be a trial solution of $(D^2 + 1)y = 0 \cdots (4)$]

$Dy = me^{mz}$, $D^2y = m^2e^{mz}$

$\therefore (4) \Rightarrow (m^2 + 1)e^{mz} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 + 1 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mz} \neq 0$

বা $m^2 = -1$

বা $m^2 = i^2$

বা $m = \pm i$

$\therefore y_c = c_1 \cos z + c_2 \sin z$

বা $y_c = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)$

(3) নং হইতে পাই [From (3) we get]

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 1}\sin 2z$$

$$= \frac{1}{-2^2 + 1}\sin 2z$$

$$= -\frac{1}{3}\sin(2\ln x)$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$y = y_c + y_p$

বা $y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x) - \frac{1}{3}\sin(2\ln x)$.

উদাহরণ 3(iii) ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = x + \sin x$ **[NUH–2004, DUH–1985]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = x + \sin x \cdots (1)$$

ধরি $x = e^z$ তবে $z = \ln x$ কাজেই $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdots (2)$

[we put $x = e^z$ then $z = \ln x$ so $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdots (2)$

এখন [Now] $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$

বা $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{1}{x}$; (2) নং দ্বারা [by (2)]

বা $x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}$

বা $x\frac{dy}{dx} = Dy$ যখন [when] $D = \frac{d}{dz}$.

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় [Similarly it can be prove that]

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y$$

$\therefore (1) \Rightarrow D(D-1)y + 4Dy + 2y = e^z + \sin e^z$

বা $(D^2 - D + 4D + 2)y = e^z + \sin e^z$

বা $(D^2 + 3D + 2)y = e^z + \sin e^z \cdots (3)$

মনেকরি $(D^2 + 3D + 2)y = 0 \cdots (4)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mz}$ তবে [Let $y = e^{mz}$ be a trial solution of $(D^2 + 3D + 2)y = 0 \cdots (4)$ then]

$Dy = me^{mz}$, $D^2y = m^2e^{mz}$

$\therefore (4) \Rightarrow (m^2 + 3m + 2)e^{mz} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 + 3m + 2 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mz} \neq 0$

বা $(m+1)(m+2) = 0 \Rightarrow m = -1, -2$

$$\therefore y_c = c_1 e^{-z} + c_2 e^{-2z}$$
$$= c_1 (e^z)^{-1} + c_2 (e^z)^{-2}$$
$$= c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2}$$

(3) নং হইতে পাই [From (3) we get]

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 3D + 2}[e^z + \sin e^z]$$

বা $y_p = \frac{1}{(D+2)(D+1)} e^z + \frac{1}{(D+2)(D+1)} \sin e^z$

$$= \frac{1}{(1+2)(1+1)} e^z + \frac{1}{D+2} \cdot \frac{1}{D+1} \sin e^z \cdots (5).$$

এখন [Now] $\frac{1}{D+1} \sin e^z = e^{-z} \int e^z \sin e^z \, dz$

বা $\frac{1}{D+1} \sin e^z = e^{-z} \int \sin e^z . d(e^z)$

বা $\frac{1}{D+1} \sin e^z = -e^{-z} \cos e^z$

উভয় পক্ষকে $\frac{1}{D+2}$ দ্বারা অপারেট করি [Operating both sides by $\frac{1}{D+2}$]

$$\frac{1}{D+2} \cdot \frac{1}{D+1} \sin e^z = -\frac{1}{D+2} e^{-z} \cos e^z.$$
$$= -e^{-2z} \int e^{2z} e^{-z} \cos e^z \, dz$$

$$\frac{1}{D+2} \cdot \frac{1}{D+1} \sin e^z = -e^{-2z} \int e^z \cos e^z \, dz$$
$$= -e^{-2z} \int \cos e^z \, d(e^z)$$
$$= -e^{-2z} \sin e^z$$

$$\therefore (5) \Rightarrow y_p = \frac{1}{6} e^z - (e^z)^{-2} \sin e^z$$
$$= \frac{x}{6} - x^{-2} \sin x \, ,$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$
$$\therefore y = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \frac{x}{6} - \frac{\sin x}{x^2}.$$

উদাহরণ-3(iv). সমাধান কর [Solve] :

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 2x \frac{dy}{dx} - 2y = x^2 \ln x + 3$$ **[NUH-2006, 2008]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 2x \frac{dy}{dx} - 2y = x^2 \ln x + 3 \cdots (1)$$

ধরি $x = e^z$ তবে $z = \ln x$ কাজেই $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdots (2)$

[We put $x = e^z$ then $z = \ln x$ so $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdots (2)$]

এখন [Now] $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}$

বা $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{1}{x} \cdots (3)$; by (2)

বা $x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}$

বা $x\frac{dy}{dx} = Dy$ যখন $D = \frac{d}{dz}$

আবার [Again] $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$

বা $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}\right]$; by (3)

বা $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right) - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}$

বা $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}$

বা $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dz^2}\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}$

বা $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} = D^2y - Dy$

বা $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y.$

অনুরূপভাবে [Similarly] $x^3\frac{d^3y}{dx^3} = D(D-1)(D-2)y$

$\therefore (1) \Rightarrow D(D-1)(D-2)y + 2Dy - 2y = (e^z)^2 z + 3$

বা $(D^3 - 3D^2 + 2D + 2D - 2)y = ze^{2z} + 3$

বা $(D^3 - 3D^2 + 4D - 2)y = ze^{2z} + 3 \cdots (4)$

মনেকরি $(D^3 - 3D^2 + 4D - 2)y = 0 \cdots (5)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mz}$ তবে

[Let $y = e^{mz}$ be a trial solution of $(D^3 - 3D^2 + 4D - 2)y = 0 \cdots (5)$ then]

$$Dy = me^{mz}, \; D^2y = m^2 e^{mz} \text{ এবং } D^3y = m^3 e^{mz}$$

$\therefore (5) \Rightarrow (m^3 - 3m^2 + 4m - 2)\, e^{mz} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$m^3 - 3m^2 + 4m - 2 = 0$ যেহেতু $e^{mz} \neq 0$

বা $m^2(m-1) - 2m(m-1) + 2(m-1) = 0$

বা $(m-1)(m^2 - 2m + 2) = 0$

$\therefore m - 1 = 0$ অথবা $m^2 - 2m + 2 = 0$

$\Rightarrow m = 1$, অথবা $m = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

$\therefore y_c = e^z(c_1 \cos z + c_2 \sin z) + c_3 e^z$

$= x[c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)] + c_3 x.$

(4) নং হইতে পাই [From (4) we get]

$$y_p = \frac{1}{D^3 - 3D^2 + 4D - 2}(ze^{2z} + 3)$$

$$= \frac{1}{D^3 - 3D^2 + 4D - 2} ze^{2z} + \frac{1}{D^3 - 3D^2 + 4D - 2} 3e^{0z}.$$

$$y_p = e^{2z} \frac{1}{(D+2)^3 - 3(D+2)^2 + 4(D+2) - 2} z + \frac{1}{0-2} 3e^{0z}$$

$$= e^{2z} \frac{1}{D^3 + 6D^2 + 12D + 8 - 3D^2 - 12D - 12 + 4D + 8 - 2} z - \frac{3}{2}$$

$$= e^{2z} \frac{1}{D^3 + 3D^2 + 4D - 6} z - \frac{3}{2}$$

$$= e^{2z} \frac{1}{-6\left(1 - \frac{4D}{6} - \frac{3D^2}{6} - \frac{D^3}{6}\right)} z - \frac{3}{2}$$

$$= -\frac{e^{2z}}{6}\left[1 - \left(\frac{2D}{3} + \frac{D^2}{2} + \frac{D^3}{6}\right)\right]^{-1} z - \frac{3}{2}$$

$$= -\frac{e^{2z}}{6}\left[1 + \left(\frac{2D}{3} + \frac{D^2}{2} + \frac{D^3}{6}\right) + \cdots\right] z - \frac{3}{2}$$

$$= -\frac{e^{2z}}{6}\left(z + \frac{2}{3} + 0\right) - \frac{3}{2}$$

$$= -\frac{x^2}{6}\left[\ln x + \frac{2}{3}\right] - \frac{3}{2}$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [G. S. is]

$y = y_c + y_p$

$\therefore y = x[c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)] - \frac{x^2}{6}\left(\ln x + \frac{2}{3}\right) - \frac{3}{2}.$

উদাহরণ-3(v) : কসি-অয়লার সমীকরণটি সমাধান কর [Solve the Cauchy-Euler equation] :

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} - 4x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 8x \frac{dy}{dx} - 8y = 4 \ln x. \quad \text{[NUH-2011]}$$

সমাধান : দেওয়া আছে [Given that]

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} - 4x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 8x \frac{dy}{dx} - 8y = 4 \ln x \cdots (1)$$

ধরি, $x = e^z$ তবে $z = \ln x$, কাজেই $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdots (2)$

[We put $x = e^z$ then $z = \ln x$, so $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdots (2)$]

এখন $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}$

বা $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{1}{x}$; by (2)

বা $x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}$

বা $x\frac{dy}{dx} = Dy$ যখন $\frac{d}{dz} = D$

অনুরূপভাবে $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y$

এবং $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} = D(D-1)(D-2)y$

$\therefore (1) \Rightarrow D(D-1)(D-2)y - 4D(D-1)y + 8Dy - 8y = 4z$

বা $(D^3 - 3D^2 + 2D - 4D^2 + 4D + 8D - 8)y = 4z$

বা $(D^3 - 7D^2 + 14D - 8)y = 4z \cdots (3)$

মনেকরি $(D^3 - 7D^2 + 14D - 8)y = 0 \cdots (4)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mz}$

[Let $y = e^{mz}$ be a trial solution of $(D^3 - 7D^2 + 14D - 8)y = 0 \cdots (4)$]

$\therefore (4) \Rightarrow (m^3 - 7m^2 + 14m - 8)\, e^{mz} = 0$

সহায়ক সমীকরণ [A. E. is]

$m^3 - 7m^2 + 14m - 8 = 0$ যেহেতু $e^{mz} \neq 0$

বা $m^2(m-1) - 6m(m-1) + 8(m-1) = 0$

বা $(m-1)(m^2 - 6m + 8) = 0$

বা $(m-1)(m-2)(m-4) = 0$

$\Rightarrow m = 1, 2, 4$

$\therefore y_c = c_1 e^z + c_2 e^{2z} + c_3 e^{4z}$ যেখানে c_1, c_2, c_3 অবাধ ধ্রুবক।

$= c_1 e^z + c_2 (e^z)^2 + c_3 (e^z)^4$

$= c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^4.$

(3) নং হইতে পাই [From (3) we get]

$$y_p = \frac{1}{D^3 - 7D^2 + 14D - 8} 4z$$

$$= \frac{1}{-8\left(1 - \frac{14D}{8} + \frac{7D^2}{8} - \frac{D^3}{8}\right)} 4z$$

$$= -\frac{1}{8}\left[1 - \left(\frac{7D}{4} - \frac{7D^2}{8} + \frac{D^3}{8}\right)\right]^{-1} 4z$$

$$y_p = -\frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{7D}{4} - \frac{7D^2}{8} + \frac{D^3}{8}\right) + \cdots\right] z$$

$$= -\frac{1}{2}\left[z + \frac{7}{4}(1) - 0\right]$$

$$= -\frac{1}{8}(4z + 7)$$

$$= -\frac{1}{8}(4 \ln x + 7)$$

সাধারণ সমাধান [G. S. is]

$y = y_c + y_p$

$\Rightarrow y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^4 - \frac{1}{8}(4 \ln x + 7).$

প্রশ্নমালা [EXERCISE]–6

সমাধান কর [Solve] ঃ

1(i). $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 6x \frac{dy}{dx} + 6y = 0$ [DUH–1980]

(ii). $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = 0$

(iii). $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = 4$

(iv). $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = 4x^3$

(v). $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{(1-x)^2}$

(vi). $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + y = 3x^2$

(vii). $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} - 4y = x^4$

(viii). $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} + 4y = 2x^2$

(ix). $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} + 4y = (x-1)^2$

(x). $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - 20y = (x+1)^2$

(xi). $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2y = 10\left(x + \frac{1}{x}\right)$

2(i). $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = \ln x$

[NUH(NM)–2007, 2010, 2012, CUH–1981, DUH–1986]

(ii). $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} = \ln x$

[NU(Pass)–2008, DUS–1988, DUH–1976]

(iii). $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = 12 \ln x$ **[CUH–1979]**

(iv). $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 6x \frac{dy}{dx} + 6y = (\ln x)^2$

(v). $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + 2y = x \ln x$

(vi). $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + 4y = 2x \ln x; x > 0$ **[DUS–1993]**

(vii). $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - 3y = x^2 \ln x$

(ii). দেখাও যে $y_3 - 2y_2 - y_1 + 2y = 0$ ডিফারেনসিয়াল সমীকরণের লিনি... অনির্ভরশীল সমাধান e^x, e^{-x}, e^{2x}.

(iii). দেখাও যে $0 < t < \infty$ এই ব্যবধিতে t^2 এবং $\frac{1}{t^2}$ যথাক্রমে $t^2y'' + ty' - 4y = 0$ সমীকরণের লিনিয়ারলি অনির্ভরশীল সমাধান। এই সমীকরণের সাধারন সমাধান নির্ণয় কর।

[DUH-198..]

4(i). e^x, xe^x ফাংশনের রণস্কিয়ান নির্ণয় কর। সুতরাং মন্তব্য কর, এই ফাংশনদ্বয় লিনিয়ারলি অনির্ভরশীল অথবা অনির্ভরশীল নয়।

যদি ইহারা অনির্ভরশীল হয় তবে ইহাদেরকে অনির্ভরশীল সমাধান বিবেচনা করিয়া একটি ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ গঠন কর।

(ii). দেখাও যে নিম্নলিখিত ফাংশনগুলো লিনিয়ারলি অনির্ভরশীল ঃ $e^x \cos x$, $e^x \sin x$. এই ফাংশনদ্বয়কে অনির্ভরশীল সমাধান ধরিয়া একটি ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ গঠন কর।

(iii). প্রমাণ কর যে $1, x, x^2$ ফাংশনগুলো লিনিয়ারলি অনির্ভরশীল। সুতরাং একটি ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ গটন কর যাহার মূলগুলো $1, x, x^2$.

(iv). দ্বিতীয় ক্রমের ডিফারেনসিয়াল সমীকরণের রণস্কিয়ান বলিতে কি বুঝ? লিনিয়ার ডিফারেনসিয়াল সমীকরণের লিনিয়ার নির্ভরশীলতা এবং লিনিয়ার অনির্ভরশীলতা স্থির করিতে [decide] কিভাবে ইহাদের ব্যবহার করা হয়।

উত্তরমালা [ANSWERS]

2(ii). লিনিয়ারলি অনির্ভরশীল।

3a(i). লিনিয়ারলি নির্ভরশীল। (ii). লিনিয়ারলি নির্ভরশীল।

(iii). লিনিয়ারলি নির্ভরশীল। (iv). লিনিয়ারলি অনির্ভরশীল।

(v). লিনিয়ারলি নির্ভরশীল। (vi). লিনিয়ারলি নির্ভরশীল।

(vii). লিনিয়ারলি অনির্ভরশীল। (viii). লিনিয়ারলি নির্ভরশীল।

(ix). লিনিয়ারলি অনির্ভরশীল। (x). লিনিয়ারলি অনির্ভরশীল।

4(i). $W(x) = e^{2x}$; লিনিয়ারলি অনির্ভরশীল। $y_2 - 2y_1 + y = 0$

(ii). $y_2 - 2y_1 + 2y = 0$

(iii). $y_3 = 0$.

——×——

চতুর্দশ অধ্যায় [CHAPTER-14]
পরামিতি বা পরিমিতি পরিবর্তন
[Variation of Parameter]

14-1. পরামিতি পরিবর্তন [Variation of Prameters] ঃ

যখন ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R(x)$ এর সম্পূরক সমাধান y_c জানা থাকে তখন y_c এর অবাধ ধ্রুবক গুলোকে স্বাধীন চলক x এর ফাংশনে পরিবর্তন করিয়া যে পদ্ধতিতে সাধারণ সমাধান নির্ণয় করা হয়, উহাকে পরামিতি পরিবর্তন বলা হয়।

[When the complementary function y_c of a differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R(x)$ is known. The method is used to find the general solution of differential equation by changing the arbitrary constants of y_c into independent variable x [i, e. funtion of x]. This method is known as variation of parameter.]

14-2. পরামিতি পরিবর্তন পদ্ধতির ব্যাখ্যা [Explain the method of variation of parameters.] ঃ [DUH-1982, 1983, 1984, 1987, 1989]

সমাধান ঃ দ্বিতীয় ক্রমের একটি ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ বিবেচনা করি [We consider a differential equation of order two]

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R(x) \cdots (1)$$

মনেকরি $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = u$ এবং $y = v$. [Let $y = u$ and $y = v$ be the trial solutions of $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$]

সুতরাং (1) নং এর সম্পূরক সমাধান [Hence complementary solution of (1) is]

$y_c = c_1u + c_2v$ যখন c_1 এবং c_2 অবাধ ধ্রুবক [when c_1, c_2 are arbitrary constants.]

যেহেতু (2) নং এর সমাধান $y = u$ এবং $y = v$ কাজেই u এবং v দ্বারা (2) নং সিদ্ধ হইবে [Since $y = u$ and $y = v$ are the solutions for (2), so (2) is satisfied by u and v.]

$$\therefore \frac{d^2u}{dx^2} + P\frac{du}{dx} + Qu = 0 \text{ এবং } \frac{d^2v}{dx^2} + P\frac{dv}{dx} + Qv = 0$$

i. e. $u_2 + Pu_1 + Qu = 0$ এবং $v_2 + Pv_1 + Qv = 0 \cdots (3)$

মনেকরি (1) নং এর সাধারণ সমাধান [Let the general solution of (1) be]

$$y = Au + Bv \cdots (4)$$

যখন A এবং B উভয়েই x এর ফাংশন [When both A and B are functions of x]

এখন (4) নং কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই [Differentiating (4) w. r. to x we get]

$$y_1 = Au_1 + A_1u + Bv_1 + B_1v \cdots (5)$$

এখানে A এবং B কে এমনভাবে নির্ধারন করা হইয়াছে যেন [Here A and B have chosen such that]

$$A_1u + B_1v = 0$$

বা $A_1u = -B_1v$

$$\therefore A_1 = \frac{-B_1v}{u} \cdots (6)$$

$$\therefore (5) \Rightarrow y_1 = Au_1 + Bv_1 \cdots (7)$$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই [Differentiating this w. r. to x we get]

$$y_2 = Au_2 + A_1u_1 + Bv_2 + B_1v_1 \cdots (8)$$

এখন (4), (7) এবং (8) নং হইতে y, y_1 এবং y_2 এর মান (1) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [From (4), (7) and (8) putting the values of y, y_1 and y_2 in (1) we get]

$$Au_2 + A_1u_1 + Bv_2 + B_1v_1 + P[Au_1 + Bv_1] + Q[Au + Bv] = R(x)$$

বা $A[u_2 + Pu_1 + Qu] + B[v_2 + Pv_1 + Qv] + A_1u_1 + B_1v_1 = R(x)$

বা $A(0) + B(0) + A_1u_1 + B_1v_1 = R(x)$; (3) নং দ্বারা [by (3)]

বা $A_1u_1 + B_1v_1 = R(x)$

বা $\frac{-B_1v}{u}u_1 + B_1v_1 = R(x)$, (6) নং দ্বারা।

বা $\frac{B_1}{u}[uv_1 - u_1v] = R(x)$

বা $B_1 = \frac{uR(x)}{uv_1 - u_1v} \cdots (9)$

এখন B_1 এর মান (6) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [Now putting the value of B_1 in (6) we get]

$$A_1 = -\frac{v}{u} \cdot \frac{uR(x)}{(uv_1 - u_1v)}$$

বা $A_1 = \frac{-vR(x)}{uv_1 - u_1v} \cdots (10)$

এখন (10) নং এবং (9) নং কে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট করিয়া যথাক্রমে পাই [Now integrating (10) and (9) w. r. to x we get respectively]

$$A = f(x) + a \text{ এবং } B = g(x) + b \text{ ধরি [say]}$$

এখন A এবং B এর মান (4) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [Now putting the values of A and B in (4) we get]

$$y = [f(x) + a]u + [g(x) + b]v$$

$$\therefore y = au + bv + uf(x) + vg(x)$$

এখানে a এবং b অবাধ ধ্রুবক [Here a, b are arbitrary constants]

ইহাই নির্ণেয় পরামিতি পরিবর্তন পদ্ধতি [This is the required method of variation of parameters].

উদাহরণমালা [EXAMPLES]

উদাহরণ-1(i) ঃ পরামিতি পরিবর্তন পদ্ধতিতে সমাধান কর ঃ [Solve by the method of variation of parameters.]

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 4\tan 2x$$ **[NUH-2005, 2010, NUH(NM)-2006, 2009, NU(Pass)-2007, 2009, DUH-1979, 1984, DUS-1983]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 4\tan 2x \cdots (1)$$

মনেকরি $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0 \cdots (2)$ then]

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx} \text{ এবং } \frac{d^2y}{dx^2} = m^2e^{mx}$$

$$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 + 4)e^{mx} = 0$$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 + 4 = 0$ যেহেতু [Since] $e^{mx} \neq 0$

বা $m^2 = -4 = 4i^2$

বা $m = \pm 2i$

$$\therefore y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

যেখানে c_1, c_2 ধ্রুবক [Where c_1, c_2 are constants.]

মনেকরি (1) নং এর সাধারণ সমাধান [Let the general solution of (1) be]

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x \cdots (3)$$

যখন A এবং B উভয়েই x এর ফাংশন। [When both A and B are functions of x.]

(3) নং কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করি [Differentiating (3) w. r. to x we get]

$$y_1 = -2A\sin 2x + A_1\cos 2x + 2B\cos 2x + B_1\sin 2x \cdots (4)$$

এখানে A এবং B কে এমনভাবে নির্ধারন করা হইয়াছে যেন [Here A and B have chosen such that]

$$A_1\cos 2x + B_1\sin 2x = 0$$

বা $A_1\cos 2x = -B_1\sin 2x$

বা $A_1 = -\dfrac{B_1\sin 2x}{\cos 2x} \cdots (5)$

$$\therefore (4) \Rightarrow y_1 = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই [Differentiating this w. r. to x we get]

$$y_2 = -4A\cos 2x - 2A_1\sin 2x - 4B\sin 2x + 2B_1\cos 2x \cdots (7)$$

এখন y, y_2 এর মান (1) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [Now putting the values of y, y_2 in (1) we get]

$$-4A\cos 2x - 2A_1\sin 2x - 4B\sin 2x + 2B_1\cos 2x + 4(A\cos 2x + B\sin 2x) = 4\tan 2x$$

বা $-2A_1\sin 2x + 2B_1\cos 2x = 4\tan 2x$

বা $-A_1\sin 2x + B_1\cos 2x = 2\tan 2x$

বা $\dfrac{B_1\sin 2x}{\cos 2x}\sin 2x + B_1\cos 2x = 2\tan 2x$; (5) নং দ্বারা।

বা $\dfrac{B_1}{\cos 2x}[\sin^2 2x + \cos^2 2x] = 2\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}$

বা $B_1 = 2\sin 2x \cdots (6)$

বা $\dfrac{dB}{dx} = 2\sin 2x$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating this w. r. to x we get]

$B = -\cos 2x + b$, যখন b অবাধ ধ্রুবক [When b is an arbitrary constant]

(6) নং হইতে B_1 এর মান (5) নং এ স্থাপন করি [Form (6) putting the value of B_1 in (5)]

$$A_1 = -2\sin 2x.\frac{\sin 2x}{\cos 2x}$$

বা $A_1 = \dfrac{-2(1-\cos^2 2x)}{\cos 2x}$

বা $\dfrac{dA}{dx} = = -2\sec 2x + 2\cos 2x$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating this w. r. to x we get]

$A = -\ln\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) + \sin 2x + a$, যখন a অবাধ ধ্রুবক [When a is an arbitrary constant].

এখন A এবং B এর মান (3) নং এ স্থাপন করি [Now putting the values of A and B in (3)]

$$y = \left[-\ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \sin 2x + a\right]\cos 2x + [-\cos 2x + b]\sin 2x$$

$$\therefore y = a\cos 2x + b\sin 2x - \cos 2x \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right).$$

উদাহরণ-1(ii) ঃ পরামিতি পরিবর্তন পদ্ধতি ব্যবহার করিয়া সমাধান কর। [Solve by the method of variation of parameters] :

$\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{cosec} x$ **[NU(Pass)–2008, DUH–1987, 1988]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{cosec} x \cdots (1)$$

মনেকরি $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \cdots (2)$ then]

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx} \text{ এবং } \frac{d^2y}{dx^2} = m^2 e^{mx}$$

$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 + 1) e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 + 1 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

$$\text{বা } m^2 = -1$$

$$\text{বা } m^2 = i^2$$

$$\text{বা } m = \pm i$$

$$\therefore y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

মনেকরি (1) নং এর সাধারন সমাধান [Let the general solution of (1) be]

$$y = A \cos x + B \sin x \cdots (3)$$

যখন A, B উভয়েই x এর ফাংশন [When both A and B are functions of x.]

(3) নং কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই [Differentiating (3) w. r. to x we get]

$$y_1 = -A \sin x + A_1 \cos x + B \cos x + B_1 \sin x \cdots (4)$$

এখানে A এবং B কে এমনভাবে নির্ধারন করা হইয়াছে যেন [Here A and B have chosen such that]

$$A_1 \cos x + B_1 \sin x = 0$$

$$\text{বা } A_1 \cos x = -B_1 \sin x$$

$$\text{বা } A_1 = \frac{-B_1 \sin x}{\cos x} \cdots (5)$$

$\therefore (4) \Rightarrow y_1 = -A \sin x + B \cos x$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই [Differentiating this w. r. to x we get]

$$y_2 = -A \cos x - A_1 \sin x - B \sin x + B_1 \cos x$$

এখন y এবং y_2 এর মান (1) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [Now putting the values of y and y_2 in (1) we get]

$$-A \cos x - A_1 \sin x - B \sin x + B_1 \cos x + A \cos x + B \sin x = \operatorname{cosec} x$$

$$\text{বা } -A_1 \sin x + B_1 \cos x = \operatorname{cosec} x$$

$$\text{বা } \frac{B_1 \sin x}{\cos x} . \sin x + B_1 \cos x = \operatorname{cosec} x$$

$$\text{বা } \frac{B_1}{\cos x} [\sin^2 x + \cos^2 x] = \frac{1}{\sin x}$$

$$\text{বা } B_1 = \frac{\cos x}{\sin x} \cdots (6)$$

$$\text{বা } \frac{dB}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating this w. r. to x we get]

$B = ln(\sin x) + b$; যখন b অবাধ ধ্রুবক [When b is arbitrary constant]

(6) নং হইতে B_1 এর মান (5) নং এ স্থাপন করি [From (6) putting the value of B_1 in (5)]

$$A_1 = -\frac{\cos x}{\sin x} . \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\text{বা } \frac{dA}{dx} = -1$$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating this w. r. to x we get]

$A = -x + a$, যখন a অবাধ ধ্রুবক।

এখন A এবং B এর মান (3) নং এ বসাইয়া পাই [Now putting the values of A and B in (3) we get]

$$y = (-x + a)\cos x + \{ln(\sin x) + b\}\sin x$$

$$\text{বা } y = a\cos x + b\sin x - x\cos x + \sin x. \, ln(\sin x).$$

উদাহরণ 1(iii) পরামিতি পরিবর্তন পদ্ধতিতে সমাধান কর [By the method of variation of parameters to solve]

$$(D^2 + 1)y = \sec x \tan x. \qquad \text{[NUH(NM)-2005]}$$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sec x \tan x \cdots (1)$$

মনেকরি $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে

[Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \cdots (2)$ then]

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx} \text{ এবং } \frac{d^2y}{dx^2} = m^2 e^{mx}$$

$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 + 1) e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 + 1 = 0$ যেহেতু [Since] $e^{mx} \neq 0$

$$\text{বা } m^2 = -1 = i^2 \Rightarrow m = \pm i$$

$$\therefore y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

যেখানে c_1, c_2 অবাধ ধ্রুবক। [where c_1, c_2 are arbitrary constants].

মনেকরি (1) নং এর সাধারণ সমাধান [Let the general solution of (1) be]

$$y = A \cos x + B \sin x \cdots (3)$$

যখন A এবং B উভয়েই x এর ফাংশন। [when both A and B are functions of x.]

(3) নং কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করি [Differentiating (3) w. r. to x we get]

$$y_1 = -A \sin x + A_1 \cos x + B \cos x + B_1 \sin x \cdots (4)$$

এখানে A এবং B কে এমনভাবে নির্ধারণ করা হইয়াছে যেন [Here A and B have chosen such that]

$$A_1 \cos x + B_1 \sin x = 0$$

$$\text{বা } A_1 \cos x = -B_1 \sin x$$

$$\text{বা } A_1 = -B_1 \frac{\sin x}{\cos x} \cdots (5)$$

$$\therefore (4) \Rightarrow y_1 = -A \sin x + B \cos x$$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই [Differentiating this w. r. to x we get]

$$y_2 = -A \cos x - A_1 \sin x - B \sin x + B_1 \cos x$$

এখন y, y_2 এর মান (1) নং এ বসাইয়া পাই [Now putting the values of y, y_2 in (1) we get]

$$-A \cos x - A_1 \sin x - B \sin x + B_1 \cos x + A \cos x + B \sin x = \sec x \tan x$$

$$\text{বা } -A_1 \sin x + B_1 \cos x = \sec x \tan x$$

$$\text{বা } B_1 \frac{\sin x}{\cos x} \sin x + B_1 \cos x = \sec x \tan x$$

$$\text{বা } \frac{B_1}{\cos x}(\sin^2 x + \cos^2 x) = \frac{\tan x}{\cos x}$$

$$\text{বা } \frac{dB}{dx} = \tan x \cdots (6)$$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating this w. r. to x we get]

$B = -\ln(\cos x) + b$, যখন b অবাধ ধ্রুবক। [when b is an arbitrary constant.]

(6) নং হইতে B_1 এর মান (5) নং এ স্থাপন করি [From (6) putting the value of B_1 in (5) we get]

$$A_1 = -\tan x \tan x = -\tan^2 x$$

$$\text{বা } \frac{dA}{dx} = -(\sec^2 x - 1) = -\sec^2 x + 1$$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrates this w. r. to x we get]

$$A = -\tan x + x + a$$

এখন A এবং B এর মান (3) নং এ বসাইয়া পাই [Now putting the values of A and B in (3) we get]

$$y = (x - \tan x + a) \cos x + (b - \ln(\cos x)) \sin x$$

$$y = a \cos x + b_1 \sin x + x \cos x - \sin x \ln(\cos x)$$

উদাহরণ-1(iv): পরামিতি পরিবর্তন পদ্ধতিতে সমাধান কর [By the method of variation of parameter to solve] :

$$(D^2 - 2D + 1)y = e^x \ln x. \qquad \textbf{[NUH–2006]}$$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(D^2 - 2D + 1)y = e^x \ln x \cdots (1)$$

মনেকরি $(D^2 - 2D + 1)y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে

[Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $(D^2 - 2D + 1)y = 0 \cdots (2)$ then]

$$Dy = me^{mx} \text{ এবং } D^2y = m^2 e^{mx}$$

$$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 - 2m + 1) e^{mx} = 0$$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 - 2m + 1 = 0$ যেহেতু $e^{mx} \neq 0$

$$\text{বা } (m-1)^2 = 0 \Rightarrow m = 1, 1$$

$$\therefore y_c = (c_1 + c_2 x) e^x$$

$$\text{বা } y_c = c_1 e^x + c_2 xe^x$$

মনেকরি (1) নং এর সাধারণ সমাধান [Let the general solution of (1) be]

$$y = Ae^x + Bxe^x \cdots (3)$$

যখন A এবং B উভয়েই x এর ফাংশন। [when both A and B are functions of x.]

(3) নং কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই [Differentiating (3) w. r. to x we get]

$$y_1 = Ae^x + A_1 e^x + B_1 xe^x + Be^x + Bxe^x \cdots (4)$$

এখানে A এবং B কে এমনভাবে নির্ধারণ করা হইয়াছে যেন [Here A and B are chosen such that]

$$A_1 e^x + B_1 xe^x = 0$$

$$\text{বা } A_1 = -B_1 x \cdots (5)$$

$$\therefore (4) \Rightarrow y_1 = Ae^x + Be^x + Bxe^x \cdots (6)$$

আবার ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই [Again differentiating this w. r. to x we get]

$$y_2 = A_1 e^x + Ae^x + B_1 e^x + Be^x + B_1 xe^x + Be^x + Bxe^x \cdots (7)$$

(3), (6) এবং (7) নং হইতে y, y_1 এবং y_2 এর মান (1) নং এ বসাইয়া পাই [From (3), (6) and (7) putting the values of y, y_1 and y_2 in (1) we get]

$$A_1 e^x + Ae^x + B_1 e^x + Be^x + B_1 xe^x + Be^x + Bxe^x - 2(Ae^x + Be^x + Bxe^x) + Ae^x + Bxe^x = e^x \ln x$$

$$\text{বা } A_1 e^x + B_1 e^x + B_1 xe^x = e^x \ln x.$$

$$\text{বা } -B_1 xe^x + B_1 e^x + B_1 xe^x = e^x \ln x$$

$$\text{বা } B_1 e^x = e^x \ln x$$

$$\text{বা } B_1 = \ln x \cdots (8)$$

$$\text{বা } \frac{dB}{dx} = \ln x$$

$$\Rightarrow \int dB = \int \ln x \, dx$$

$\Rightarrow B = x \ln x - x + b$, যখন b অবাধ ধ্রুবক।

এখন (8) নং হইতে B_1 এর মান (5) নং এ বসাইয়া পাই [Now from (8) putting the value of B_1 in (5) we get]

$$\frac{dA}{dx} = -x \ln x$$

$$\Rightarrow \int dA = -\int x \ln x \, dx$$

$$\Rightarrow A = -\left[\ln x \int x \, dx - \int \frac{1}{x} \frac{x^2}{2} dx\right]$$

$= -\frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} + a$, যখন a অবাধ ধ্রুবক।

এখন A ও B এর মান (3) নং এ বসাইয়া পাই [Now putting the values of A and B in (3) we get]

$$y = \left(a + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \ln x\right) e^x + (b - x + x \ln x) xe^x$$

$$= ae^x + bxe^x + \left(\frac{x^2}{4} - x\right)e^x + \left(-\frac{x^2}{2} + x^2\right) e^x \ln x$$

$$= ae^x + bxe^x - \frac{3x^2}{4} e^x + \frac{x^2}{2} e^x \ln x.$$

উদাহরণ–2 : পরামিতি পরিবর্তন পদ্ধতি প্রয়োগ করিয়া $\frac{d^2y}{dx^2} - y = \frac{2}{1 + e^x}$ এর সমাধান বাহির কর। [Apply the method of variation of parameter to solve $\frac{d^2y}{dx^2} - y = \frac{2}{1 + e^x}$.] **[DUH–1991]**

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = \frac{2}{1 + e^x} \cdots (1)$$

মনেকরি $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0 \cdots (2)$ then]

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx} \text{ এবং } \frac{d^2y}{dx^2} = m^2 e^{mx}$$

$$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 - 1) e^{mx} = 0$$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 - 1 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

$$\text{বা } (m + 1)(m - 1) = 0$$

$$\text{বা } m = -1, 1$$

$$\therefore y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^x$$

মনেকরি, (1) নং এর সাধারণ সমাধান [Let the general solution of (1) be]

$$y = Ae^{-x} + Be^x \cdots (3)$$

3(i). $y=\left(a+bx+\frac{1}{12x^3}\right)e^x$

(ii). $y=(a+bx-\ln x-1)e^{3x}$

(iii). $y=(a+bx)e^{-2x}-e^{-2x}\ln x$

(iv). $y=ae^{-x}+be^{-2x}-e^{-x}\ln x-e^{-2x}\int\frac{e^x\,dx}{x}$

(v). $y=\left(a+bx+\frac{1}{2x}\right)e^{-3x}$

(vi). $y=ax^{-1}+bx+e^x-x^{-1}e^x.$

4(i). $y=a+be^{2x}-\frac{1}{2}e^x\sin x$

(ii). $y=(a+bx)e^x+\frac{1}{4}[\sin^{-1}x+3x\sqrt{1-x^2}+2x^2\sin^{-1}x]e^x$

(iii). $y=(a+bx)e^{-x}+\frac{1}{4}(2\ln x-3)x^2e^{-x}$

(iv). $y=(a+bx)e^x+(x+2)\ln x+3+(x-2)e^x\int\frac{e^{-x}dx}{x}$

(v). $y=(a+bx)e^x+(\ln x)^2+2\ln x-2e^x\int\frac{e^{-x}dx}{x}$

$$+2(x-1)e^x\int\frac{e^{-x}\ln x}{x}dx$$

(vi). $y=e^{-2x}(a\cos x+b\sin x)+xe^{-2x}\sin x+e^{-2x}\sin x.\ln(\cos x).$

5(i). $y=ae^x+bx+1+x+x^2$

(ii) $y=ax+bx\,e^{2x}-\frac{x^2}{2}-\frac{x}{4}$

(iii). $y=a[\sqrt{1-x^2}+x\sin^{-1}x]+bx-\frac{x}{9}(1-x^2)^{3/2}$

(iv). $y=\frac{1}{1-x^2}[a\cos x+b\sin x+x]$

(v). $y=a(\sin x-\cos x)-\frac{1}{10}(\sin 2x-2\cos 2x)+be^{-x}$

(vi). $y=ae^{\sin x}+be^{2\sin x}-\frac{5}{4}-\frac{3\sin x}{2}-\frac{\sin^2 x}{2}.$

———×———

পঞ্চদশ অধ্যায় [CHAPTER–15]
অনির্ণেয় সহগ পদ্ধতি
[The method of Undetermined Coefficient]

15.1. এই অধ্যায়ে অনির্ণেয় সহগ পদ্ধতির সাহায্যে ডিফারেনসিয়াল সমীকরণের বিশেষ ইনটিগ্র্যাল y_p নির্ণয় করা হইবে। নিম্নের ডিফারেনসিয়াল সমীকরণটি বিবেচনা করি। [In this chapter, particular integral y_p of differential equation will be determined by the method of undetermined coefficient. We consider the following differential equation]

$$(D^n+P_1D^{n-1}+P_2D^{n-2}+\cdots+P_{n-1}D+P_n)y=R(x)$$

বা $F(D)y=R(x)\cdots(1)$

যখন [when] $F(D)=D^n+P_1D^{n-1}+P_2D^{n-2}+\cdots+P_{n-1}D+P_n$

$\therefore$ (1) নং এর সাধারন সমাধান [General solution of (1) is]

$$y=y_c+y_p$$

যখন $y_c=$ সম্পূরক ফাংশন [When y_c = complementary function]

এবং $y_p=$ বিশেষ ইনটিগ্র্যাল [and y_p = Particular integral]

নোট ঃ যেহেতু (1) নং এর একটি সমাধান y_p কাজেই y_p দ্বারা (1) নং সমীকরণ সিদ্ধ হয়। অর্থাৎ y এর স্থলে y_p স্থাপন করা যায়।

15.2. অনির্ণেয় সহগ ফাংশন [Undetermined Coefficient function]

$F(D)y=R(x)$ ডিফারেনসিয়াল সমীকরণের $R(x)$ কে অনির্ণেয় সহগ ফাংশন বলা হয়। [$R(x)$ of differential equation $F(D)y=R(x)$ is called undetermined coefficient function]

15.3. অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined Coefficient set]

অনির্ণেয় সহগ ফাংশন $R(x)$ এবং $R(x)$ এর পর্যায়ক্রমিক অন্তরক সহগের ধ্রুব সংখ্যার গুণিতক গুলো দ্বারা গঠিত সেটকে অনির্ণেয় সহগ সেট বলা হয়। অনির্ণেয় সহগ সেটকে S দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অনির্ণেয় সহগ সেট দ্বারা বিশেষ ইনটিগ্র্যাল y_p গঠন করা হয়। [The set consisting of undetermined coefficient function $R(x)$ and constant multiples of successive derivatives of $R(x)$ is called undetermined coefficient set. It is denoted by S. Particular integral y_p is formed by the undetermined coefficient set.]

উদাহরণ ঃ মনে করি [Let] $F(D)y = x^3$

এখানে অনির্ণেয় সহগ ফাংশন [Here undetemined coefficient func is]

$$R(x) = x^3$$

$$\therefore R'(x) = 3x^2$$

$$R''(x) = 6x$$

$$R'''(x) = 6$$

x^3 এবং ইহার পর্যায়ক্রমিক অন্তরক সহগের ধ্রুব সংখ্যার গুণিতক [x^3 and successive derivatives are constant multiples]

$$x^3, x^2, x, 1$$

x^3 এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of x^3 is]

$$S = \{x^3, x^2, x, 1\}.$$

অনুরূপভাবে x^2 এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Similarly undetermin coefficient set of x^2 is]

$$S = \{x^2, x, 1\}$$

এবং x^n এর অনির্ণেয় সহগ সেট [and undetermined coefficient set x^n is]

$$S = \{x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, \cdots, x^2, x, 1\}.$$

উদাহরণ–2 ঃ $F(D)y = \sin ax$

এখানে [Here] $R(x) = \sin ax$

$$R'(x) = a\cos ax$$

$$R''(x) = -a^2 \sin ax$$

$\therefore$ $\sin ax$ এবং ইহার পর্যায়ক্রমিক অন্তরক সহগের ধ্রুব সংখ্যার গুণিতক [sin and its successive derivatives are constant multiples]

$$\sin ax, \cos ax$$

$\therefore$ $\sin ax$ এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set sinax is]

$$S = \{\sin ax, \cos ax\}.$$

অনুরূপভাবে $\cos ax$ এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Similarly undetermin coefficient set of cosax is]

$$S = \{\sin ax, \cos ax\}.$$

উদাহরণ–3 ঃ $F(D)y = x^2 \cos ax$

এখানে [Here] $R(x) = x^2 \cos ax$

$$\therefore R'(x) = -ax^2 \sin ax + 2x \cos ax$$

$$R''(x) = -a(ax^2 \cos ax + 2x \sin ax) + 2(-ax \sin ax + \cos ax)$$

বা $R''(x) = -a^2 x^2 \cos ax - 4ax \sin ax + 2\cos ax$

$$R'''(x) = -a^2(-ax^2 \sin ax + 2x \cos ax) - 4a(ax \cos ax + \sin ax) - 2a\sin ax$$

বা $R'''(x) = a^3x^2 \sin ax - 6a^2 x\cos x - 6a\sin ax$

$\therefore x^2 \cos ax$ এবং ইহার পর্যায়ক্রমিক অন্তরক সহগের ধ্রুব সংখ্যার গুণিতক [$x^2 \cos ax$ and its successive derivatives are constant multiples]

$$x^2 \cos ax, x^2 \sin ax, x\cos ax, x\sin ax, \cos ax, \sin ax$$

$\therefore x^2 \cos ax$ এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of $x^2 \cos ax$ is]

$$S = \{x^2 \cos ax, x^2\sin ax, x\cos ax, x\sin ax, \cos ax, \sin ax\}$$

নোট ঃ $F(D)y = \sec ax$

যেহেতু secax কে পর্যায়ক্রমে অন্তরীকরণ কল্লিে ইহার পদের সংখ্যা সীমাহীন-ভাবে বাড়িতে থাকে, অর্থাৎ ইহার সংখ্যা অসীম। এইক্ষেত্রে অনির্ণেয় সহগ পদ্ধতি প্রযোজ্য নহে।

15.4. নিম্নে কতক গুলো প্রয়োজনীয় সহগ সেট উল্লেখ করা হইল। শিক্ষার্থীদেরকে এইগুলো স্বরণ রাখার জন্য উপদেশ দেওয়া হইল।

1. x^n এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of x^n is]

$$S = \{x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, \cdots, x^2, x, 1\}.$$

2. e^{ax} এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of e^{ax} is]

$$S = \{e^{ax}\}.$$

3. $x^n e^{ax}$ এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of $x^n e^{ax}$ is]

$$S = \{x^n e^{ax}, x^{n-1} e^{ax}, x^{n-2} e^{ax}, \cdots, xe^{ax}, e^{ax}\}.$$

4. $x^n \sin ax$ অথবা $x^n \cos ax$ এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of $x^n \sin ax$, or $x^n \cos ax$ is]

$$S = \{x^n \sin ax, x^n \cos ax, x^{n-1} \sin ax, x^{n-1} \cos ax, \cdots, x\sin ax, x\cos ax, \sin ax, \cos ax\}.$$

5. e^{ax} sinbx অথবা e^{ax} cosbx এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of e^{ax} sinbx or e^{ax} cosbx is]

$$S = \{e^{ax} \sin bx, e^{ax} \cos bx\}.$$

6. $x^n e^{ax}$ sinbx অথবা $x^n e^{ax}$ cosbx এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of $x^n e^{ax}$ sinbx or $x^n e^{ax}$ cosbx is]

$$S = \{x^n e^{ax} \sin bx, x^n e^{ax} \cos bx, x^{n-1} e^{ax} \sin bx, x^{n-1} e^{ax} \cos bx, \cdots, xe^{ax} \sin bx, xe^{ax} \cos bx, e^{ax} \sin bx, e^{ax} \cos bx\}$$

কার্য্য পদ্ধতি–1 : প্রদত্ত ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ $F(D)y = R(x) \cdots (1)$

এখানে $R(x) =$ অনির্ণেয় সহগ ফাংশন।

যদি $R(x)$ এর অনির্ণেয় সহগ সেট S হয় এবং S এর কোন উপাদান y_c তে না থাকে, তবে S এর উপাদান দ্বারা (1) নং এর বিশেষ ইনটিগ্র্যাল y_p গঠন করিতে হয়।

বিঃ দ্র : S এর যে সকল উপাদান y_c তে থাকে, সে সকল উপদান y_p তে না নিলে সরলীকরণ সহজ হয়।

কার্য্য পদ্ধতি–2 : প্রদত্ত ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ $F(D)y = R(x) \cdots (1)$

যখন $R(x) = A_1u_1 + A_2u_2 + \cdots + A_nu_n$ যেখানে $A_2, A_2, \cdots, A_n$ ধ্রুবক।

ধরি u_1 এর অনির্ণেয় সহগ সেট S_1

u_2 এর অনির্ণেয় সহগ সেট S_2

… … …

u_n এর অনির্ণেয় সহগ সেট S_n.

যদি $S_1, S_2, \cdots, S_n$ এর কোন দুইটি সেট অভেদ [identical] না হয় এবং S_1 অথবা $S_2, \cdots,$ অথবা S_n এর কোন উপাদন y_c তে না থাকে তবে $S_1, S_2, \cdots, S_n$ এর উপাদান দ্বারা (1) নং এর বিশেষ ইনটিগ্র্যাল y_p গঠন করিতে হয়।

কার্য্য পদ্ধতি–3 : প্রদত্ত ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ $F(D)y = R(x) \cdots (1)$

যখন $R(x) = A_1u_1 + A_2u_2 + \cdots + A_nu_n$ যেখানে $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ধ্রুবক।

ধরি u_1 এর অনির্ণেয় সহগ সেট S_1

u_2 এর অনির্ণেয় সহগ সেট S_2

… … …

u_n এর অনির্ণেয় সহগ সেট S_n.

যদি $S_1, S_2, \cdots, S_n$ এর কোন দুইটি সেট অভেদ [identical] হয়, তবে ইহাদের একটি সেট নিতে হয়। আর যদি একটি অপরটির উপসেট হয়, তবে উপসেটটিকে বাদ দিতে হয়।

যদি S_1 এর উপাদান y_c তে থাকে, তবে S_1 এর প্রত্যেক উপাদানকে x দ্বারা গুন করিলে সেটটি S_1' হয়। অতঃপর $S_1', S_2, \cdots, S_n$ এর উপাদান দ্বারা (1) নং এর বিশেষ ইনটিগ্র্যালy_p গঠন করিতে হয়।

কার্য্য পদ্ধতি–4 : প্রদত্ত ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ $F(D) = R(x) \cdots (1)$

যখন $R(x) = A_1u_1 + A_2u_2 + \cdots + A_nu_n$. যেখানে $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ধ্রুবক।

ধরি u_1 এর অনির্ণেয় সহগ সেট S_1

u_2 এর অনির্ণেয় সহগ সেট S_2

… … …

u_n এর অনির্ণেয় সহগ সেট S_n.

যদি $S_1, S_2, \cdots, S_n$ এর কোন দুইটি সেট অভেদ হয়, তবে ইহাদের একটিকে নিতে হয়; আর যদি একটি অপরটির উপসেট হয়, তবে উপসেটকে বাদ দিতে হয়। যদি S এর উপাদান y_c তে থাকে এবং $F(D) = 0$ এর দুইটি মূল সমান হয়, তবে S_1 এর প্রত্যেক উপাদানকে x^2 দ্বারা গুণ করিলে সেটটি S_1' হয়। অতঃপর $S_1', S_2, \cdots, S_n$ এর উপাদান দ্বারা (1) নং এর বিশেষ ইনটিগ্র্যাল y_p গঠন করিতে হয়।

উদাহরণমালা [EXAMPLES]

উদাহরণ–1(i) : অনির্ণেয় সহগ পদ্ধতির সাহায্যে সমাধান কর। [Solve by the method of undetermined coefficient]

$$(D^2 - 2D + 1)y = x \sin x$$

[NUH–1994, 2005, 2010, NUH(NM)–2006, 2009, NU(Pass)–2008]

সমাধান : প্রদত্ত ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ [Given differential equation is]

$$(D^2 - 2D + 1)y = x \sin x \cdots (1)$$

মনেকরি $(D^2 - 2D + 1)y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $(D^2 - 2D + 1)y = 0 \cdots (2)$ then]

$$(2) \Rightarrow (m^2 - 2m + 1)e^{mx} = 0$$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 - 2m + 1 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

বা $(m-1)(m-1) = 0$

বা $m = 1, 1$

$\therefore y_c = (c_1 + c_2x)e^x$. যখন c_1, c_2 অবাধ ধ্রুবক [where c_1, c_2 are arbitrary constants].

এখানে অনির্ণেয় সহগ ফাংশন [Here undetermined coefficient function is]

$$R(x) = x\sin x$$

$x\sin x$ এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of $x\sin x$ is]

$$S = \{x\sin x,\ x\cos x,\ \sin x,\ \cos x\}$$

$\therefore$ (1) নং এর বিশেষ ইনটিগ্র্যাল [$\therefore$ Particular integral of (1) is]

$$y_p = Ax\sin x + Bx\cos x + C\sin x + E\cos x \cdots (3)$$

$$\therefore y_p' = A\sin x + Ax\cos x + B\cos x - Bx\sin x + C\cos x - E\sin x$$

$$y_p'' = A\cos x + A\cos x - Ax\sin x - B\sin x - B\sin x - Bx\cos x - C\sin x - E\cos x$$

এখন (1) নং এ y, Dy, D^2y এর স্থলে যথাক্রমে y_p, y_p', y_p'' স্থাপন করিয়া পাই [Now in (1) we put y_p, y_p', y_p'' instead of y, Dy, D^2y respectively we get]

$$\begin{aligned}2A\cos x - Ax\sin x - 2B\sin x - Bx\cos x - C\cos x - E\cos x \\ - 2A\sin x - 2Ax\cos x - 2B\cos x + 2Bx\sin x - 2C\cos x \\ + 2E\sin x + Ax\sin x + Bx\cos x + C\sin x \\ + E\cos x = x\sin x\end{aligned}$$

বা $(2A - 2B - 2C)\cos x + (-2B - 2A + 2E)\sin x + 2Bx\sin x - 2Ax\cos x = x\sin x$

উভয় পক্ষ হইতে এক জাতীয় পদ গুলো সমীকৃত করিয়া পাই [Equating like terms from both sides we get]

$A = 0$, $2B = 1$, বা $B = \frac{1}{2}$

$2A - 2B - 2C = 0$

বা $0 - 1 - 2C = 0$

বা $C = -\frac{1}{2}$.

$-2B - 2A + 2E = 0$

বা $-1 - 0 + 2E = 0$

বা $E = \frac{1}{2}$

এখন A, B, C, E এর মান (3) নং এ বসাইয়া পাই [Now putting the values of A, B, C, E in (3) we get]

$$y_p = 0 + \frac{1}{2}x\cos x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$$

বা $y_p = \frac{1}{2}(1 + x)\cos x - \frac{1}{2}\sin x$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

বা $y = (c_1 + c_2x)e^x + \frac{1}{2}(1 + x)\cos x - \frac{1}{2}\sin x$.

উদাহরণ–1(ii) : অনির্ণেয় সহগ পদ্ধতির সাহায্যে সমাধান কর [Solve by the method of undetermined coefficient]

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^2$$

সমাধান : প্রদত্ত ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ [Given differential equation is]

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^2 \cdots (1)$$

মনেকরি $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে

[Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \cdots (2)$ then]

$(2) \Rightarrow (m^2 - 3m + 2)e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 - 3m + 2 = 0$ যেহেতু $e^{mx} \neq 0$

বা $(m - 1)(m - 2) = 0$

বা $m = 1, 2$

$\therefore y_c = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ যখন c_1, c_2 অবাধ ধ্রুবক [Where c_1, c_2 are arbitrary constants]

এখানে অনির্ণেয় সহগ ফাংশন [Here undetermined coefficient function is]

$$R(x) = 4x^2$$

x^2 এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of x^2 is]

$$S = \{x^2, x, 1\}.$$

$\therefore$ (1) নং এর বিশেষ ইনটিগ্র্যাল [$\therefore$ Particular integral of (1) is]

$$y_p = Ax^2 + Bx + C \cdots (3)$$

$\therefore y_p' = 2Ax + B$ এবং [and] $y_p'' = 2A$

এখানে (1) নং এ $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ এর স্থলে যথাক্রমে y_p, y_p', y_p'' স্থাপন করিয়া পাই [Now in (1) we put y_p, y_p', y_p'' instead of $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ respectively we get]

$$2A - 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = 4x^2$$

বা $2Ax^2 + (2B - 6A)x + 2A - 3B + 2C = 4x^2$

উভয় পক্ষ হইতে একজাতীয় পদগুলো সমীকৃত করিয়া পাই [Equating like terms from both sides we get]

$2A = 4$, বা $A = 2$.

$2B - 6A = 0$, বা $2B = 6.2$, বা $B = 6$

এবং $2A - 3B + 2C = 0$

বা $2.2 - 3.6 + 2C = 0$

বা $C = 7$

$\therefore$ এখন A, B, C এর মান (3) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [Now putting the values of A, B, C in (3) we get]

$$y_p = 2x^2 + 6x + 7$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

$$\therefore y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + 2x^2 + 6x + 7.$$

উদাহরণ–1(iii) : অনির্ণেয় সহগ পদ্ধতির সাহায্যে সমাধান কর [Solve by the method of undetermined coefficient]

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = e^x \sin x$$ [NUH-2009]

সমাধান : প্রদত্ত ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ [Given differential equation is]

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = e^x \sin x \cdots (1)$$

মনেকরি $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে

[Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = 0 \cdots (2)$ then]

$(2) \Rightarrow (m^2 - 2m)e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 - 2m = 0$, যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

বা $m(m - 2) = 0$

বা $m = 0, 2$

$\therefore y_c = c_1 + c_2 e^{2x}$ যখন c_1, c_2 অবাধ ধ্রুবক [when c_1, c_2 are arbitrary constants]

এখানে অনির্ণেয় সহগ ফাংশন $R(x) = e^x \sin x$

$\therefore$ অনির্ণেয় সহগ সেট [$\therefore$ Undetermined coefficient set is]

$$S = \{e^x \sin x, e^x \cos x\}$$

$\therefore$ (1) নং এর বিশেষ ইনটিগ্র্যাল [$\therefore$ Particular integral of (1) is]

$y_p = Ae^x \sin x + Be^x \cos x \cdots (3)$

$\therefore y_p' = A(e^x \sin x + e^x \cos x) + B(e^x \cos x - e^x \sin x)$

বা $y_p' = (A - B)e^x \sin x + (A + B)e^x \cos x$

$\therefore y_p'' = (A - B)\,[e^x \sin x + e^x \cos x) + (A + B)\,(e^x \cos x - e^x \sin x)$

$= (A - B - A - B)e^x \sin x + (A - B + A + B)e^x \cos x$

$= -2Be^x \sin x + 2Ae^x \cos x$

এখন (1) নং এ $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ এর স্থলে যথাক্রমে y_p, y_p', y_p'' স্থাপন করিয়া পাই [Now in (1) we put y_p, y_p', y_p'' instead of $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ respectively we get]

$$-2Be^x \sin x + 2Ae^x \cos x - 2(A - B)e^x \sin x - 2(A + B)e^x \cos x = e^x \sin x$$

বা $(-2B - 2A + 2B)e^x \sin x + (2A - 2A - 2B)e^x \cos x = e^x \sin x$

বা $-2Ae^x \sin x - 2Be^x \cos x = e^x \sin x$

উভয় পক্ষ হইতে একজাতীয় পদগুলো সমীকৃত করিয়া পাই [Equating like terms from both sides we get]

$-2A = 1$, বা $A = -\frac{1}{2}$

এবং $-2B = 0$, বা $B = 0$

এখন A এবং B এর মান (3) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [Now putting the values of A and B in (3) we get]

$$y_p = -\frac{1}{2} e^x \sin x$$

$\therefore$ সাধারন সমাধান [$\therefore$ General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

$$\therefore y = c_1 + c_2 e^{2x} - \frac{1}{2} e^x \sin x.$$

উদাহরণ–2(i) ঃ অনির্ণেয় সহগ পদ্ধতির সাহায্যে সমাধান কর। [Solve by the method of undetermined coefficient]

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = 6\sin 2x + 7\cos 2x$$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = 6\sin 2x + 7\cos 2x \cdots (1)$$

মনেকরি $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = 0 \cdots (2)$ then]

$$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 + 2m + 5)e^{mx} = 0$$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 + 2m + 5 = 0$, যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

$$\text{বা } m = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2}$$

$$= -1 \pm 2i$$

$$\therefore y_c = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

এখানে অনির্ণেয় সহগ ফাংশন [Here undetermined coefficient function is]

$$R(x) = 6\sin 2x + 7\cos 2x$$

$\sin 2x$ এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of $\sin 2x$ is]

$$S_1 = \{\sin 2x, \cos 2x\}$$

$\cos 2x$ এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of $\cos 2x$ is]

$$S_2 = \{\sin 2x, \cos 2x\}$$

যেহেতু S_1, S_2 অভেদ কাজেই একটি সেট নিলেই হইবে [Since S_1, S_2 are identical so we take one]

$$S_1 = \{\sin 2x, \cos 2x\}$$

$\therefore$ (1) এর বিশেষ ইনটিগ্র্যাল [$\therefore$ Particular integral of (1) is]

$$y_p = A\sin 2x + B\cos 2x \cdots (3)$$

$$\therefore y_p' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x$$

$$\therefore y_p'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x$$

এখন (1) নং এ y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ এর স্থলে যথাক্রমে y_p, y_p', y_p'' স্থাপন করিয়া পাই [Now in (1) we put y_p, y_p', y_p'' instead of y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ respectively we get]

$$-4A\sin 2x - 4B\cos 2x + 2(2A\cos 2x - 2B\sin 2x) + 5(A\sin 2x + B\cos 2x) = 6\sin 2x + 7\cos 2x$$

$$\text{বা } (-4A - 4B + 5A)\sin 2x + (-4B + 4A + 5B)\cos 2x = 6\sin 2x + 7\cos 2x$$

$$\text{বা } (A - 4B)\sin 2x + (4A + B)\cos 2x = 6\sin 2x + 7\cos 2x$$

উভয় পক্ষ হইতে এক জাতীয় পদ গুলো সমীকৃত করিয়া পাই [Equating like terms from both sides we get]

$$A - 4B = 6 \cdots (4) \text{ এবং } 4A + B = 7 \cdots (5)$$

$$(4) \Rightarrow A = 4B + 6 \cdots (6)$$

এখন (5) নং এবং (6) নং হইতে পাই [Now from (5) and (6) we get]

$$4(4B + 6) + B = 7$$

$$\text{বা } 17B = -17$$

$$\text{বা } B = -1$$

$$\therefore (6) \Rightarrow A = 4(-1) + 6$$

$$\text{বা } A = 2$$

এখন A এবং B এর মান (3) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [Now putting the values of A and B in (3) we get]

$$y_p = 2\sin 2x - \cos 2x$$

$\therefore$ সাধারন সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

$$\therefore y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + 2\sin 2x - \cos 2x.$$

উদাহরণ–2(ii) ঃ অনির্ণেয় সহগ পদ্ধতির সাহায্যে সমাধান কর। [Solve by the method of undetermined coefficient]

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^x - 10\sin x$$

[NUH–1997, 2007, NUH(NM)–2007, NU(Pass)–20

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^x - 10\sin x \cdots (1)$$

মনেকরি $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ হবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0 \cdots (2)$ then]

$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 - 2m - 3)e^{mx} = 0$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 - 2m - 3 = 0$, যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

বা $m^2 - 3m + m - 3 = 0$

বা $m(m-3) + 1(m-3) = 0$

বা $(m+1)(m-3) = 0 \Rightarrow m = -1, 3$

$\therefore y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$

এখানে অনির্ণেয় সহগ ফাংশন [Here undetermined coefficient function is]

$$R(x) = 2e^x - 10\sin x$$

e^x এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of e^x is]

$$S_1 = \{e^x\}$$

$\sin x$ এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of $\sin x$ is]

$$S_2 = \{\sin x, \cos x\}$$

$\therefore$ (1) নং এর বিশেষ ইনটিগ্র্যাল [$\therefore$ Particular integral of (1) is]

$y_p = Ae^x + B\sin x + C\cos x \cdots (3)$

$\therefore y_p' = Ae^x + B\cos x - C\sin x$

$y_p'' = Ae^x - B\sin x - C\cos x$

এখন (1) নং এ $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ এর স্থলে যথাক্রমে y_p, y_p', y_p'' স্থাপন করিয়া পাই [Now in (1) we put y_p, y_p', y_p'' instead of $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ respectively we get]

$Ae^x - B\sin x - C\cos x - 2(Ae^x + B\cos x - C\sin x)$

$\qquad -3(Ae^x + B\sin x + C\cos x) = 2e^x - 10\sin x$

বা $(A - 2A - 3A)e^x + (-B + 2C - 3B)\sin x + (-C - 2B - 3C)\cos x$

$\qquad = 2e^x - 10\sin x$

বা $-4Ae^x - (4B - 2C)\sin x - (2B + 4C)\cos x = 2e^x - 10\sin x$

উভয় পক্ষ হইতে একজাতীয় পদ গুলো সমীকৃত করিয়া পাই [Equating like terms from both sides we get]

$-4A = 2$, বা $A = -\frac{1}{2}$

$4B - 2C = 10 \cdots (4)$ এবং $2B + 4C = 0 \cdots (5)$

এখন [Now] $(4) - (5) \times 2 \Rightarrow 4B - 2C - 4B - 8C = 10$

বা $-10C = 10$

বা $C = -1$

$\therefore (5) \Rightarrow 2B = -4(-1)$, বা $B = 2$

এখন A, B এবং C এর মান (3) নং এ স্থাপন করিয়া পাই [Now putting the values of A, B and C in (3) we get]

$$y_p = -\frac{1}{2}e^x + 2\sin x - \cos x$$

$\therefore$ সাধারন সমাধান [General solution is]

$y = y_c + y_p$

$\therefore y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - \frac{1}{2}e^x + 2\sin x - \cos x.$

উদাহরণ–2(iii) ঃ অনির্ণেয় সহগ পদ্ধতিতে সমাধান কর [Solve by the method undetermined coefficient] :

$$(D^2 - 2D - 3)y = 2e^x + 20\sin x.$$ **[NUH–2012]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(D^2 - 2D - 3)y = 2e^x + 20\sin x \cdots (1)$$

মনেকরি $(D^2 - 2D - 3)y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$, তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $(D^2 - 2D - 3)y = 0 \cdots (2)$ then]

$$(2) \Rightarrow (m^2 - 2m - 3)e^{mx} = 0$$

সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 - 2m - 3 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$.

$$বা\ m^2 - 3m + m - 3 = 0$$

$$বা\ m(m-3) + 1(m-3) = 0$$

$$বা\ (m+1)(m-3) = 0 \Rightarrow m = -1, 3$$

$$\therefore y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$$

এখানে অনির্ণেয় সহগ ফাংশন [Here undetermined coefficient function is]

$$R(x) = 2e^x + 20 \sin x$$

e^x এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of e^x is]

$$s_1 = \{e^x\}$$

sinx এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of sinx is]

$$s_2 = \{\sin x, \cos x\}$$

$\therefore$ (1) নং এর বিশেষ ইনটিগ্র্যাল [$\therefore$ Particular integral of (1) is]

$$y_p = Ae^x + B \sin x + C \cos x \cdots (3)$$

$$\therefore y_p' = Ae^x + B \cos x - C \sin x$$

$$y_p'' = Ae^x - B \sin x - C \cos x$$

এখন (1) নং এ y, Dy, D^2y এর স্থলে যথাক্রমে y_p, y_p', y_p'' স্থাপন করিয়া পাই [Now in (1) we put y_p, y_p', y_p'' instead of y, Dy, D^2y respectively we get]

$$Ae^x - B \sin x - C \cos x - 2(Ae^x + B \cos x - C \sin x)$$
$$- 3(Ae^x + B \sin x + C \cos x) = 2e^x + 20 \sin x$$

$$বা\ (A - 2A - 3A)e^x + (-B + 2C - 3B) \sin x + (-C - 2B - 3C) \cos x$$
$$= 2e^x + 20 \sin x$$

$$বা\ -4Ae^x + (2C - 4B) \sin x - (2B + 4C) \cos x = 2e^x + 20 \sin x.$$

উভয় পক্ষ হইতে একজাতীয় পদগুলো সমীকৃত করিয়া পাই [Equating like terms from both sides we get]

$$-4A = 2 \Rightarrow A = -1/2.$$

$$-4B + 2C = 20,\ বা\ -2B + C = 10 \cdots (4)\ এবং\ 2B + 4C = 0 \cdots (5)$$

এখন $(4) + (5) \Rightarrow 5C = 10$ বা $C = 2$

$$(5) \Rightarrow 2B + 4(2) = 0,\ বা\ B = -4$$

এখন A, B, C এর মান (3) নং এ বসাই [Now putting the values of A, B, C in (3)]

$$y_p = -\frac{1}{2} e^x - 4 \sin x + 2 \cos x$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

$$\therefore y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - \frac{1}{2} e^x - 4 \sin x + 2 \cos x.$$

উদাহরণ–2(iv) : অনির্ণেয় সহগ পদ্ধতির সাহায্যে সমাধান কর। [Solve by the method of undetermined coefficient]

$$(D^2 - 2D + 3)y = x^3 + \sin x.$$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(D^2 - 2D + 3)y = x^3 + \sin x \cdots (1)$$

মনেকরি $(D^2 - 2D + 3)y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $(D^2 - 2D + 3)y = 0 \cdots (2)$ then]

$$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 - 2m + 3)e^{mx} = 0$$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 - 2m + 3 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

$$বা\ m = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4i^2.2}}{2} = \frac{2 \pm 2i\sqrt{2}}{2}$$

$$= 1 \pm i\sqrt{2}$$

$$\therefore y_c = e^x(c_1 \cos\sqrt{2}x + c_2 \sin\sqrt{2}x).$$

এখানে অনির্ণেয় সহগ ফাংশন [Here undetermined coefficient function is]

$$R(x) = x^3 + \sin x$$

x^3 এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of x^3 is]

$$S_1 = \{x^3, x^2, x, 1\}$$

sinx এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of sinx is]

$$S_2 = \{\sin x, \cos x\}$$

সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 - 2m - 3 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$.

$$\text{বা } m^2 - 3m + m - 3 = 0$$

$$\text{বা } m(m-3) + 1(m-3) = 0$$

$$\text{বা } (m+1)(m-3) = 0 \Rightarrow m = -1, 3$$

$$\therefore y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$$

এখানে অনির্ণেয় সহগ ফাংশন [Here undetermined coefficient function is]

$$R(x) = 2e^x + 20 \sin x$$

e^x এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of e^x is]

$$s_1 = \{e^x\}$$

$\sin x$ এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of $\sin x$ is]

$$s_2 = \{\sin x, \cos x\}$$

$\therefore$ (1) নং এর বিশেষ ইনটিগ্র্যাল [$\therefore$ Particular integral of (1) is]

$$y_p = Ae^x + B \sin x + C \cos x \cdots (3)$$

$$\therefore y_p' = Ae^x + B \cos x - C \sin x$$

$$y_p'' = Ae^x - B \sin x - C \cos x$$

এখন (1) নং এ y, Dy, D^2y এর স্থলে যথাক্রমে y_p, y_p', y_p'' স্থাপন করিয়া পাই [Now in (1) we put y_p, y_p', y_p'' instead of y, Dy, D^2y respectively we get]

$$Ae^x - B \sin x - C \cos x - 2(Ae^x + B \cos x - C \sin x) - 3(Ae^x + B \sin x + C \cos x) = 2e^x + 20 \sin x$$

$$\text{বা } (A - 2A - 3A)e^x + (-B + 2C - 3B)\sin x + (-C - 2B - 3C)\cos x = 2e^x + 20 \sin x$$

$$\text{বা } -4Ae^x + (2C - 4B)\sin x - (2B + 4C)\cos x = 2e^x + 20 \sin x.$$

উভয় পক্ষ হইতে একজাতীয় পদগুলো সমীকৃত করিয়া পাই [Equating like terms from both sides we get]

$$-4A = 2 \Rightarrow A = -1/2.$$

$$-4B + 2C = 20, \text{ বা } -2B + C = 10 \cdots (4) \text{ এবং } 2B + 4C = 0 \cdots (5)$$

এখন $(4) + (5) \Rightarrow 5C = 10$ বা $C = 2$

$$(5) \Rightarrow 2B + 4(2) = 0, \text{ বা } B = -4$$

এখন A, B, C এর মান (3) নং এ বসাই [Now putting the values of A, B, C in (3)]

$$y_p = -\frac{1}{2}e^x - 4 \sin x + 2 \cos x$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান [General solution is]

$$y = y_c + y_p$$

$$\therefore y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - \frac{1}{2}e^x - 4 \sin x + 2 \cos x.$$

উদাহরণ–2(iv) : অনির্ণেয় সহগ পদ্ধতির সাহায্যে সমাধান কর। [Solve by the method of undetermined coefficient]

$$(D^2 - 2D + 3)y = x^3 + \sin x.$$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$(D^2 - 2D + 3)y = x^3 + \sin x \cdots (1)$$

মনেকরি $(D^2 - 2D + 3)y = 0 \cdots (2)$ এর সম্ভাব্য সমাধান $y = e^{mx}$ তবে [Let $y = e^{mx}$ be a trial solution of $(D^2 - 2D + 3)y = 0 \cdots (2)$ then]

$$\therefore (2) \Rightarrow (m^2 - 2m + 3)e^{mx} = 0$$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $m^2 - 2m + 3 = 0$ যেহেতু [since] $e^{mx} \neq 0$

$$\text{বা } m = \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4i^2.2}}{2} = \frac{2 \pm 2i\sqrt{2}}{2}$$

$$= 1 \pm i\sqrt{2}$$

$$\therefore y_c = e^x(c_1 \cos\sqrt{2}x + c_2 \sin\sqrt{2}x).$$

এখানে অনির্ণেয় সহগ ফাংশন [Here undetermined coefficient function is]

$$R(x) = x^3 + \sin x$$

x^3 এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of x^3 is]

$$S_1 = \{x^3, x^2, x, 1\}$$

$\sin x$ এর অনির্ণেয় সহগ সেট [Undetermined coefficient set of $\sin x$ is]

$$S_2 = \{\sin x, \cos x\}$$