Funções Recursivas

Estrutura de Dados — QXD0010

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Prof. Atílio Gomes Luiz
gomes.atilio@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

1º semestre/2023

O que é recursão?

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- É um método de programação no qual uma função pode chamar a si mesma.
  - O termo é usado de maneira mais geral para descrever o processo de repetição de um objeto de um jeito similar ao que já fora mostrado

O que é recursão?

- É um método de programação no qual uma função pode chamar a si mesma.
  - O termo é usado de maneira mais geral para descrever o processo de repetição de um objeto de um jeito similar ao que já fora mostrado

- Por que precisamos aprender recursão?
  - Paradigma de programação poderoso
  - Nova maneira de pensar

O que é recursão?

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

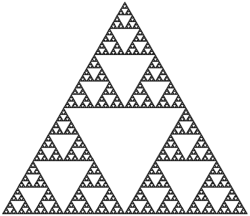
- É um método de programação no qual uma função pode chamar a si mesma.
    - O termo é usado de maneira mais geral para descrever o processo de repetição de um objeto de um jeito similar ao que já fora mostrado
- Por que precisamos aprender recursão?
    - Paradigma de programação poderoso
    - Nova maneira de pensar
- Muitas estruturas têm natureza recursiva:
    - Estruturas encadeadas
    - Fatorial, máximo divisor comum
    - Uma pasta que contém outras pastas e arquivos

Recursão

Bonecas russas Matrioska

Recursão

Bonecas russas Matrioska



Fractal: Triângulo de Sierpiński

Recursão

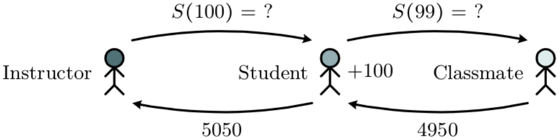
Brócolis Romanesco

Recursão

Brócolis Romanesco

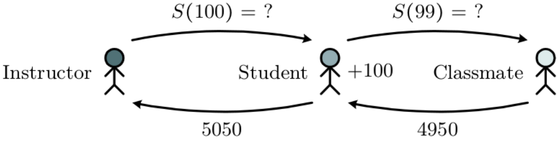
Efeito Droste

Problema: soma dos n primeiros inteiros positivos

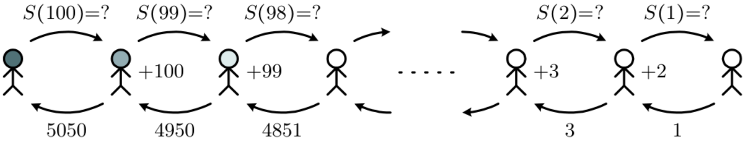


Experimento em uma sala onde o instrutor pede um estudante para adicionar os primeiros 100 inteiros positivos. A **função** $S(n)$ representa a soma dos n primeiros inteiros positivos.

Problema: soma dos n primeiros inteiros positivos



Experimento em uma sala onde o instrutor pede um estudante para adicionar os primeiros 100 inteiros positivos. A **função** $S(n)$ representa a soma dos n primeiros inteiros positivos.



Recursão

- É fácil ver que o problema da soma dos n primeiros inteiros positivos tem uma estrutura recursiva, representada pela função abaixo:

$$S(n) = n + S(n-1)$$

- Dizemos que problemas desse tipo têm estrutura recursiva.

Recursão

- É fácil ver que o problema da soma dos n primeiros inteiros positivos tem uma estrutura recursiva, representada pela função abaixo:

$$S(n) = n + S(n-1)$$

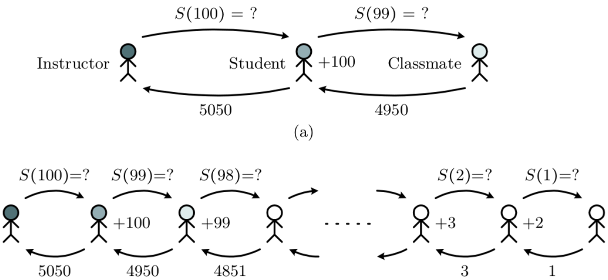
- Dizemos que problemas desse tipo têm estrutura recursiva.

Para resolver tal problema é natural aplicar o seguinte método:

```
Se a instância em questão é pequena,
   resolva-a diretamente (use força bruta se necessário)
Senão,
   reduza-a a uma instância menor do mesmo problema,
   aplique o método à instância menor
   e volte à instância original.
```

A aplicação deste método produz um algoritmo recursivo.

Problema: soma dos n primeiros inteiros positivos



Vamos produzir um algoritmo recursivo usando o método:

```
Se a instância em questão é pequena,
   resolva-a diretamente (use força bruta se necessário)
Senão,
   reduza-a a uma instância menor do mesmo problema,
   aplique o método à instância menor
   e volte à instância original.
```

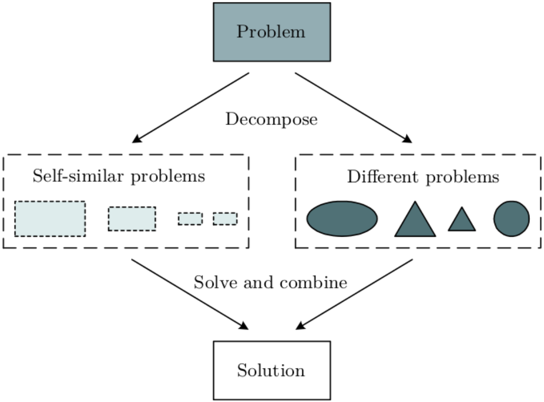
Elementos da recursividade

- Primeiro, definimos as soluções para casos básicos.

- Em seguida, tentamos reduzir o problema para instâncias menores do problema.
  - A fim de implementar esta etapa deve-se pensar em **como decompor o problema em subproblemas similares**.

- Finalmente, combinamos o resultado das instâncias menores para obter um resultado do problema original

Decomposição de Problemas Recursivos



Caso Base e Caso Geral

Uma função recursiva tem dois casos distintos:

- **Caso Base**: resolve instâncias pequenas diretamente
- **Caso Geral**:
  - reduz o problema para instâncias menores do mesmo problema
  - chama a função recursivamente
  - combina o resultado da computação dessas funções a fim de obter o resultado da instância original

Exercício

- Escreva uma função recursiva que calcule a soma dos n primeiros inteiros positivos, onde o inteiro positivo n é dado como entrada.
  - Não esqueça: para ser recursiva, a função deve chamar a sim mesma pelo menos uma vez.

- Dica: é sempre bom documentar a sua função antes de começar a escrevê-la.
  - Documentar é escrever um comentário acima da definição da função especificando qual é a entrada esperada pela função e qual é a saída prometida. O que a função de fato faz dada uma certa entrada de um certo tamanho.

Recursão — Fatorial de n

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- O fatorial de um inteiro não-negativo n é definido como:

$$n! = (n)(n-1)(n-2)\cdots(1)$$

  Convenção: $0! = 1$.

Recursão — Fatorial de n

- O fatorial de um inteiro não-negativo n é definido como:

$$n! = (n)(n-1)(n-2)\cdots(1)$$

  Convenção: $0! = 1$.

- Como calcular $n!$ recursivamente?

Recursão — Fatorial de n

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- O fatorial de um inteiro não-negativo n é definido como:

$$n! = (n)(n-1)(n-2)\cdots(1)$$

  Convenção: $0! = 1$.

- Como calcular $n!$ recursivamente?
  - Devemos inicialmente identificar um **caso de parada** e um **caso geral**.

Recursão — Fatorial de n

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- O fatorial de um inteiro não-negativo n é definido como:

$$n! = (n)(n-1)(n-2)\cdots(1)$$

  Convenção: $0! = 1$.

- Como calcular $n!$ recursivamente?
  - Devemos inicialmente identificar um **caso de parada** e um **caso geral**.

- Como $(n-1)! = (n-1)(n-2)\cdots 1$, temos que $n! = (n)(n-1)!$

Recursão — Fatorial de n

- O fatorial de um inteiro não-negativo n é definido como:

$$n! = (n)(n-1)(n-2)\cdots(1)$$

  Convenção: $0! = 1$.

- Como calcular $n!$ recursivamente?
  - Devemos inicialmente identificar um **caso de parada** e um **caso geral**.

- Como $(n-1)! = (n-1)(n-2)\cdots 1$, temos que $n! = (n)(n-1)!$

- Note que a forma de resolver $(n-1)!$ é a mesma para resolver $n!$

Recursão — Fatorial de n

Formalmente, podemos definir a função fatorial de n de forma recursiva como a seguir:

$$fat(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0; \\ n \cdot fat(n-1), & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

Recursão — Fatorial de n

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Formalmente, podemos definir a função fatorial de n de forma recursiva como a seguir:

$$fat(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0; \\ n \cdot fat(n-1), & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

- Esta definição estabelece um processo recursivo para calcular o fatorial de um inteiro não-negativo n.

Recursão — Fatorial de n

Formalmente, podemos definir a função fatorial de n de forma recursiva como a seguir:

$$fat(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0; \\ n \cdot fat(n-1), & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

- Esta definição estabelece um processo recursivo para calcular o fatorial de um inteiro não-negativo n.
- Caso trivial: $n = 0$. Neste caso, temos $n! = 0! = 1$.

Recursão — Fatorial de n

Formalmente, podemos definir a função fatorial de n de forma recursiva como a seguir:

$$fat(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0; \\ n \cdot fat(n-1), & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

- Esta definição estabelece um processo recursivo para calcular o fatorial de um inteiro não-negativo n.
- Caso trivial: $n = 0$. Neste caso, temos $n! = 0! = 1$.
- Caso geral: para $n \geq 1$, temos que $n! = n * (n-1)!$

Fatorial de n

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Atividade: Escreva uma função recursiva que calcula o fatorial de um inteiro n, $n \geq 0$.

Fatorial de n

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Atividade: Escreva uma função recursiva que calcula o fatorial de um inteiro n, $n \geq 0$.

```c
int fat(int n) {
```

Fatorial de n

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Atividade: Escreva uma função recursiva que calcula o fatorial de um inteiro n, $n \geq 0$.

```c
int fat(int n) {
```

Fatorial de n

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Atividade: Escreva uma função recursiva que calcula o fatorial de um inteiro n, $n \geq 0$.

```c
int fat(int n) {
  if (n == 0) /* caso base */
    return 1;
```

Fatorial de n

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Atividade: Escreva uma função recursiva que calcula o fatorial de um inteiro n, $n \geq 0$.

```c
int fat(int n) {
  if (n == 0) /* caso base */
    return 1;
  else /* caso geral */
    return n * fat(n-1); /* instancia menor */
}
```

Elemento máximo de um vetor

- Gostaríamos de determinar o valor de um elemento máximo de um vetor $v[0 \ldots n-1]$.

Elemento máximo de um vetor

- Gostaríamos de determinar o valor de um elemento máximo de um vetor $v[0 \ldots n-1]$.

- Para preparar o terreno, examinemos a seguinte solução iterativa para o problema:

Elemento máximo de um vetor

- Gostaríamos de determinar o valor de um elemento máximo de um vetor $v[0 \ldots n-1]$.

- Para preparar o terreno, examinemos a seguinte solução iterativa para o problema:

```c
int maximo (int n, int v[]) {
  int max = v[0];

  for (int i = 1; i < n; i++)
    if (max < v[i])
      max = v[i];

  return max;
}
```

Elemento máximo de um vetor

- Gostaríamos de determinar o valor de um elemento máximo de um vetor $v[0 \dots n-1]$.
- Para preparar o terreno, examinemos a seguinte solução iterativa para o problema:

```c
int maximo (int n, int v[]) {
  int max = v[0];

  for (int i = 1; i < n; i++)
    if (max < v[i])
      max = v[i];

  return max;
}
```

Como projetar uma solução recursiva? Quem é o caso de parada? Quem é o caso geral?

Elemento máximo de um vetor

Solução recursiva para o problema:

```
// Ao receber v e n >= 1, esta funcao devolve o valor de
// um elemento maximo do vetor v[0..n-1]
int maximoR (int n, int v[]) {
  if (n == 1)
    return v[0];
  else {
    int max;
    max = maximoR (n-1, v); // max eh o maximo de v[0..n-2]
    if (max > v[n-1])
      return max;
    else
      return v[n-1];
  }
}
```

Elemento máximo de um vetor

Solução recursiva para o problema:

```c
// Ao receber v e n >= 1, esta funcao devolve o valor de
// um elemento maximo do vetor v[0..n-1]
int maximoR (int n, int v[]) {
  if (n == 1)
    return v[0];
  else {
    int max;
    max = maximoR (n-1, v); // max eh o maximo de v[0..n-2]
    if (max > v[n-1])
      return max;
    else
      return v[n-1];
  }
}
```

Como convencer-nos e/ou convencermos outros de que nosso algoritmo recursivo está correto?

Análise de corretude de funções recursivas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Passo 1:** Escreva o que a função deve fazer.
  - Determine os parâmetros da função e o significado de cada um.
  - Sua função deve resolver um problema de tamanho n.

Análise de corretude de funções recursivas

- **Passo 1:** Escreva o que a função deve fazer.
  - Determine os parâmetros da função e o significado de cada um.
  - Sua função deve resolver um problema de tamanho n.

- **Passo 2:** Verifique se a função faz o que deveria quando n é pequeno.

Análise de corretude de funções recursivas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

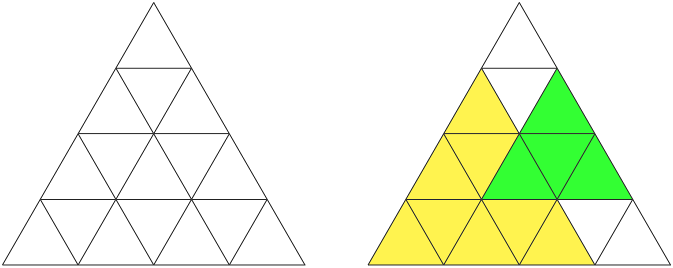
- **Passo 1:** Escreva o que a função deve fazer.
    - Determine os parâmetros da função e o significado de cada um.
    - Sua função deve resolver um problema de tamanho n.

- **Passo 2:** Verifique se a função faz o que deveria quando n é pequeno.

- **Passo 3:** Imagine que n é grande e suponha que a função fará o que dela se espera se no lugar de n tivermos um problema de tamanho menor que n. Sob esta hipótese, verifique que a função faz o que dela se espera.

Se as verificações das etapas 2 e 3 retornarem respostas positivas, então sua função recursiva está correta.

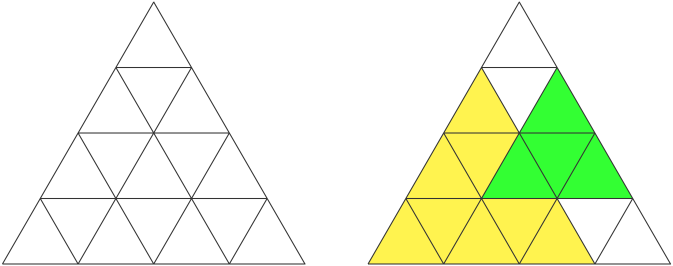
Problema dos Triângulos



Quantos triângulos em pé (tamanhos variados) podemos encontrar em uma grade de triângulos com altura n?

- No exemplo, a grade tem altura 4

Problema dos Triângulos

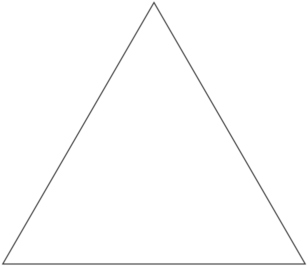


Quantos triângulos em pé (tamanhos variados) podemos encontrar em uma grade de triângulos com altura n?

- No exemplo, a grade tem altura 4

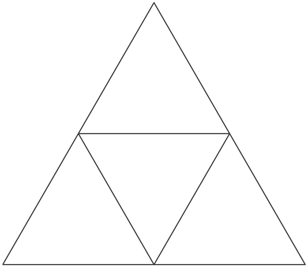
Vamos definir como $t(n)$ o número de triângulos para a altura n.

Triângulos



Para uma grade de altura $n = 1$, temos $t(1) = 1$ triângulo

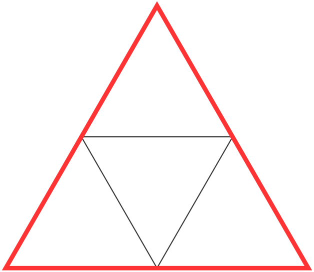
Triângulos



Para altura $n = 2$, temos $t(2) = 4$ triângulos:

- 2 com o vértice superior
- 2 outros triângulos

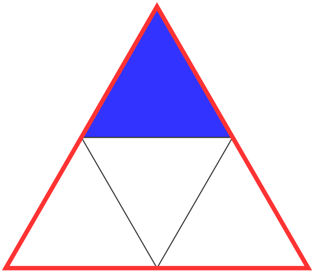
Triângulos



Para altura $n = 2$, temos $t(2) = 4$ triângulos:

- 2 com o vértice superior
- 2 outros triângulos

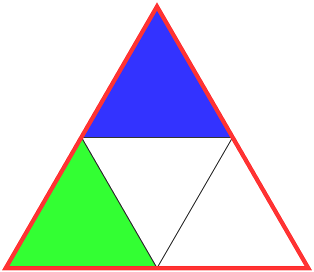
Triângulos



Para altura $n = 2$, temos $t(2) = 4$ triângulos:

- 2 com o vértice superior
- 2 outros triângulos

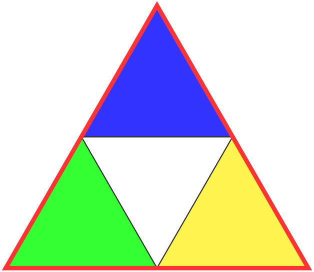
Triângulos



Para altura $n = 2$, temos $t(2) = 4$ triângulos:

- 2 com o vértice superior
- 2 outros triângulos

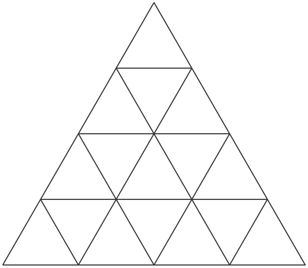
Triângulos



Para altura $n = 2$, temos $t(2) = 4$ triângulos:

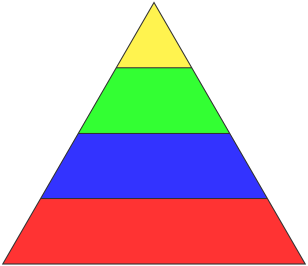
- 2 com o vértice superior
- 2 outros triângulos

Triângulos



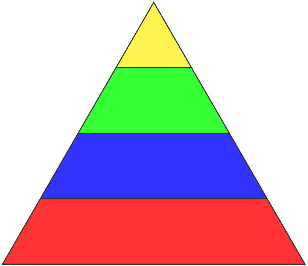
Podemos encontrar algum padrão para $n = 4$?

Triângulos



4 triângulos têm o vértice superior coincidente com o vértice superior do triângulo maior

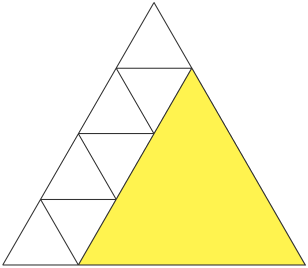
Triângulos



4 triângulos têm o vértice superior coincidente com o vértice superior do triângulo maior

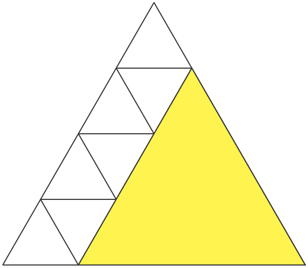
Além desses, quantos outros triângulos faltam?

Triângulos



Faltam os triângulos do lado direito e os do lado esquerdo

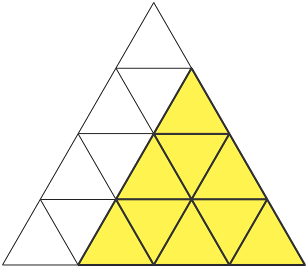
Triângulos



Faltam os triângulos do lado direito e os do lado esquerdo

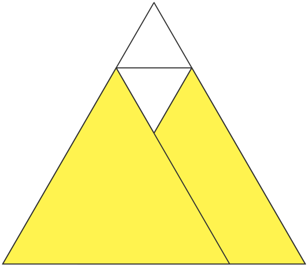
Mas como calcular o número de triângulos de um lado?

Triângulos



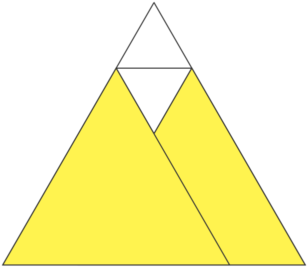
Recaímos no mesmo problema anterior mas agora para $n = 3$

Triângulos



Suponha que já sabemos: $t(1) = 1, t(2) = 4, t(3) = 10$

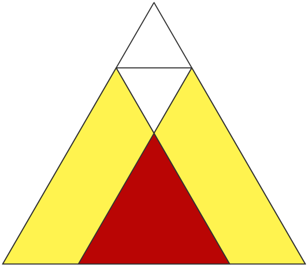
Triângulos



Suponha que já sabemos: $t(1) = 1, t(2) = 4, t(3) = 10$

Calculamos $t(4)$ somando os triângulos superiores aos os triângulos da esquerda e da direita

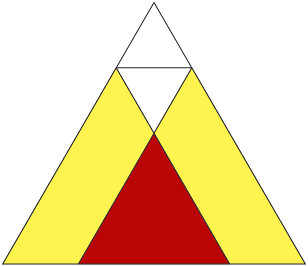
Triângulos



Suponha que já sabemos: $t(1) = 1, t(2) = 4, t(3) = 10$

Calculamos $t(4)$ somando os triângulos superiores aos os triângulos da esquerda e da direita e subtraindo a interseção

Triângulos

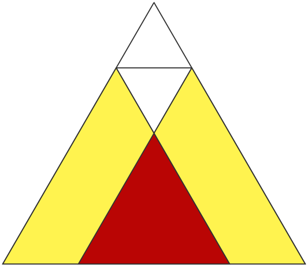


Suponha que já sabemos: $t(1) = 1, t(2) = 4, t(3) = 10$

Calculamos $t(4)$ somando os triângulos superiores aos os triângulos da esquerda e da direita e subtraindo a interseção

$t(4) =$

Triângulos

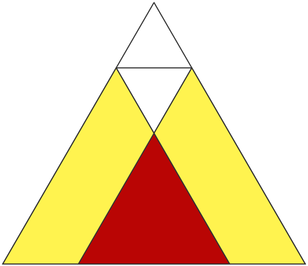


Suponha que já sabemos: $t(1) = 1, t(2) = 4, t(3) = 10$

Calculamos $t(4)$ somando os triângulos superiores aos os triângulos da esquerda e da direita e subtraindo a interseção

$t(4) = 4 + t(3) + t(3) - t(2)$

Triângulos

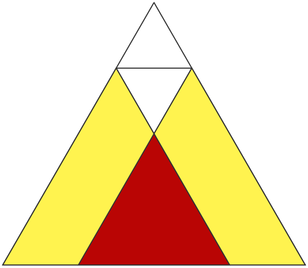


Suponha que já sabemos: $t(1) = 1, t(2) = 4, t(3) = 10$

Calculamos $t(4)$ somando os triângulos superiores aos os triângulos da esquerda e da direita e subtraindo a interseção

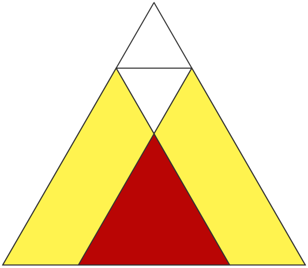
$t(4) = 4 + t(3) + t(3) - t(2) = 20$

Triângulos



E para calcular $t(n)$ para um n qualquer?

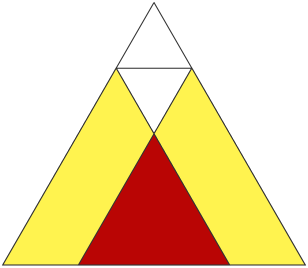
Triângulos



E para calcular $t(n)$ para um n qualquer?

- Se $n = 0$, então $t(n) = 0$

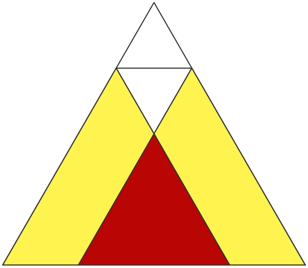
Triângulos



E para calcular $t(n)$ para um n qualquer?

- Se $n = 0$, então $t(n) = 0$
- Se $n = 1$, então $t(n) = 1$

Triângulos



E para calcular $t(n)$ para um n qualquer?

- Se $n = 0$, então $t(n) = 0$
- Se $n = 1$, então $t(n) = 1$
- Do contrário, $t(n) = n + 2 \cdot t(n-1) - t(n-2)$

Triângulos - código

Escreva uma função que calcule o número de triângulos em pé de uma grade de tamanho n

Triângulos - código

Escreva uma função que calcule o número de triângulos em pé de uma grade de tamanho n

```
int triangulos(int n) {
  if (n == 0)
    return 0;
  else if (n == 1)
    return 1;
  else
    return n + 2*triangulos(n-1) - triangulos(n-2);
}
```

Definições recursivas

Algumas operações matemáticas ou objetos matemáticos têm uma definição recursiva

- Ex: fatorial, sequência de Fibonacci, palíndromos, etc...

Definições recursivas

Algumas operações matemáticas ou objetos matemáticos têm uma definição recursiva

- Ex: fatorial, sequência de Fibonacci, palíndromos, etc...
- ou podem ser vistos do ponto de vista da recursão
  - multiplicação, divisão, exponenciação, etc...

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Definições recursivas

Algumas operações matemáticas ou objetos matemáticos têm uma definição recursiva

- Ex: fatorial, sequência de Fibonacci, palíndromos, etc...
- ou podem ser vistos do ponto de vista da recursão
  - multiplicação, divisão, exponenciação, etc...

Isso nos permite projetar algoritmos para lidar com essas operações/objetos

Definições recursivas

Algumas operações matemáticas ou objetos matemáticos têm uma definição recursiva

- Ex: fatorial, sequência de Fibonacci, palíndromos, etc...
- ou podem ser vistos do ponto de vista da recursão
  - multiplicação, divisão, exponenciação, etc...

Isso nos permite projetar algoritmos para lidar com essas operações/objetos

Ex: Exponenciação
Seja a é um número real e b é um número inteiro não-negativo

- Se $b = 0$, então $a^b = 1$
- Se $b > 0$, então $a^b = a \cdot a^{b-1}$

Definições recursivas

Algumas operações matemáticas ou objetos matemáticos têm uma definição recursiva

- Ex: fatorial, sequência de Fibonacci, palíndromos, etc...
- ou podem ser vistos do ponto de vista da recursão
  - multiplicação, divisão, exponenciação, etc...

Isso nos permite projetar algoritmos para lidar com essas operações/objetos

Ex: Exponenciação
Seja a é um número real e b é um número inteiro não-negativo

- Se $b = 0$, então $a^b = 1$
- Se $b > 0$, então $a^b = a \cdot a^{b-1}$

```
double potencia(double a, int b) {
  if (b == 0)
    return 1;
  else
    return a * potencia(a, b-1);
}
```

Palíndromos

Uma palavra é um palíndromo se ela é igual ao seu reverso

- Ex: ana, ovo, osso, radar

Palíndromos

Uma palavra é um palíndromo se ela é igual ao seu reverso

- Ex: ana, ovo, osso, radar

Definição matemática: uma palavra é palíndromo se:

- ou tem zero letras (palavra vazia)
- ou tem uma letra
- ou é da forma $\alpha p \alpha$ onde
  - α é uma letra
  - p é um palíndromo

Palíndromos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

```
/**
 * A função ehPalindromo retorna true se o parâmetro
 * palavra for um palíndromo; false, caso contrário.
 * A palavra é uma string que começa no índice ini
 * e termina no índice fim.
 */
bool ehPalindromo(string palavra, int ini, int fim) {
    if(ini >= fim)
        return true;
    return (palavra[ini] == palavra[fim]) &&
            ehPalindromo(palavra, ini+1, fim-1);
}
```

Palíndromos

```cpp
/**
 * A função ehPalindromo retorna true se o parâmetro
 * palavra for um palíndromo; false, caso contrário.
 * A palavra é uma string que começa no índice ini
 * e termina no índice fim.
 */
bool ehPalindromo(string palavra, int ini, int fim) {
    if(ini >= fim)
        return true;
    return (palavra[ini] == palavra[fim]) &&
            ehPalindromo(palavra, ini+1, fim-1);
}

int main() {
    string str = "sopapos";
    cout << boolalpha << ehPalindromo(str, 0, str.length()-1)
    << endl;
    return 0;
}
```

Exemplo: Inversão dos elementos de um vetor

1	2	3	4	5	6	7	8	9

$$\Downarrow$$

9	8	7	6	5	4	3	2	1

Exemplo: Inversão dos elementos de um vetor

1	2	3	4	5	6	7	8	9

$$\Downarrow$$

9	8	7	6	5	4	3	2	1

```
void inverter (int v[], int l, int r) {
```

Exemplo: Inversão dos elementos de um vetor

1	2	3	4	5	6	7	8	9

$$\Downarrow$$

9	8	7	6	5	4	3	2	1

```c
void inverter (int v[], int l, int r) {
  if (l < r) { // caso geral
    int aux = v[l];
    v[l] = v[r];
    v[r] = aux;
    inverter(v, l+1, r-1);
  }
}
```

Recursão versus Iteração

Comparando recursão e algoritmos iterativos

Normalmente algoritmos recursivos são:

- mais simples de entender
- menores e mais fáceis de programar
- mais "elegantes"

Comparando recursão e algoritmos iterativos

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Normalmente algoritmos recursivos são:

- mais simples de entender
- menores e mais fáceis de programar
- mais "elegantes"

Mas algumas vezes podem ser

- muito ineficientes (quando comparados a algoritmos iterativos para o mesmo problema)

Comparando recursão e algoritmos iterativos

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Normalmente algoritmos recursivos são:

- mais simples de entender
- menores e mais fáceis de programar
- mais "elegantes"

Mas algumas vezes podem ser

- muito ineficientes (quando comparados a algoritmos iterativos para o mesmo problema)

Estratégia ideal:

1. encontrar algoritmo recursivo para o problema
2. reescrevê-lo como um algoritmo iterativo

Sequência de Fibonacci

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Sequência: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

$$F(n) = \begin{cases} n, & \text{se } 0 \leq n \leq 1; \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{se } n > 2. \end{cases}$$

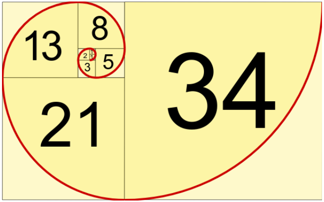
Sequência de Fibonacci

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Sequência: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

$$F(n) = \begin{cases} n, & \text{se } 0 \leq n \leq 1; \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{se } n > 2. \end{cases}$$

- Curiosidade: Ao transformar esses números em quadrados e dispô-los de maneira geométrica, é possível traçar uma espiral perfeita, que também aparece em diversos organismos vivos.



Fibonacci: recursivo vs. iterativo

Sequência de Fibonacci: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

Fibonacci: recursivo vs. iterativo

Sequência de Fibonacci: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

```
int fib_rec(int n) {
  if (n < 2)
    return n;
  else
    return fib_rec(n-2)+
    fib_rec(n-1);
}
```

Fibonacci: recursivo vs. iterativo

Sequência de Fibonacci: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, . . .

```c
int fib_rec(int n) {
  if (n < 2)
    return n;
  else
    return fib_rec(n-2)+
    fib_rec(n-1);
}
```

```c
int fib_iterativo(int n) {
  int ant, atual, prox, i;
  ant = 0;
  atual = 1;
  for (i = 2; i <= n; i++) {
    prox = ant + atual;
    ant = atual;
    atual = prox;
  }
  return (n > 0) ? atual : ant;
}
```

Fibonacci: recursivo vs. iterativo

Sequência de Fibonacci: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, . . .

```c
int fib_rec(int n) {
  if (n < 2)
    return n;
  else
    return fib_rec(n-2)+
    fib_rec(n-1);
}
```

```c
int fib_iterativo(int n) {
  int ant, atual, prox, i;
  ant = 0;
  atual = 1;
  for (i = 2; i <= n; i++) {
    prox = ant + atual;
    ant = atual;
    atual = prox;
  }
  return (n > 0) ? atual : ant;
}
```

Número de operações:

Fibonacci: recursivo vs. iterativo

Sequência de Fibonacci: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

```c
int fib_rec(int n) {
  if (n < 2)
    return n;
  else
    return fib_rec(n-2)+fib_rec(n-1);
}
```

```c
int fib_iterativo(int n) {
  int ant, atual, prox, i;
  ant = 0;
  atual = 1;
  for (i = 2; i <= n; i++) {
    prox = ant + atual;
    ant = atual;
    atual = prox;
  }
  return (n > 0) ? atual : ant;
}
```

Número de operações:

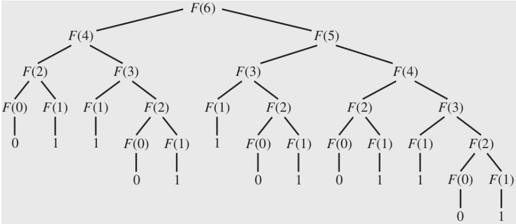
- iterativo: $\approx n$
- recursivo: aproximadamente 1.6^n

n	10	20	30	40	50	60
1.6^n	110	12089	1329227	146150163	16069380442	1,766847065×10^{12}

1 operação $\approx 1/10^6$ segundos
15 dias $\approx 1,29 \cdot 10^6$ segundos $\approx 1,29 \cdot 10^{12}$ operações.

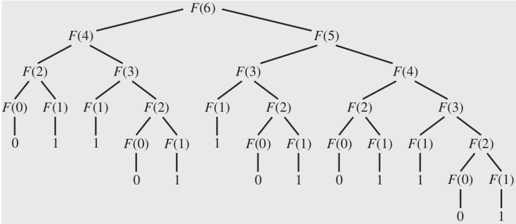
Fibonacci: recursivo vs. iterativo

Árvore de recursão para calcular $F(6)$. Note a quantidade de cálculos repetidos:



Fibonacci: recursivo vs. iterativo

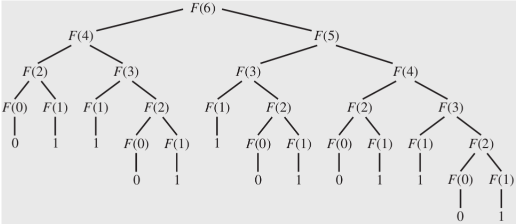
Árvore de recursão para calcular $F(6)$. Note a quantidade de cálculos repetidos:



- O número de chamadas à função recursiva `F(n)` cresce rapidamente mesmo para número bem pequenos da série.

Fibonacci: recursivo vs. iterativo

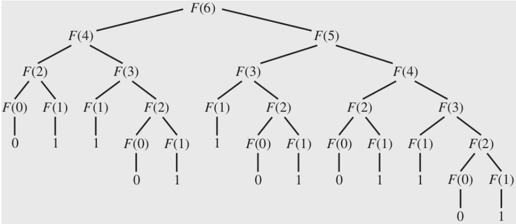
Árvore de recursão para calcular $F(6)$. Note a quantidade de cálculos repetidos:



- O número de chamadas à função recursiva `F(n)` cresce rapidamente mesmo para número bem pequenos da série.
- Por exemplo, o fibonacci de 30 exige aproximadamente $2.692.537$ chamadas à função.

Fibonacci: recursivo vs. iterativo

Árvore de recursão para calcular $F(6)$. Note a quantidade de cálculos repetidos:

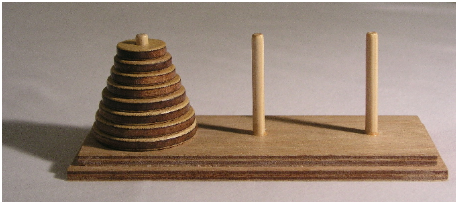


- O número de chamadas à função recursiva `F(n)` cresce rapidamente mesmo para número bem pequenos da série.
- Por exemplo, o fibonacci de 30 exige aproximadamente $2.692.537$ chamadas à função.
- Logo, é interessante evitar programas recursivos no estilo de fibonacci que resultam em uma 'explosão' exponencial de chamadas.

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

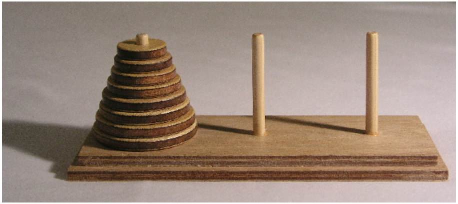
Torres de Hanoi

Torres de Hanói



A torre de Hanói é um brinquedo com três estacas A, B e C e discos de tamanhos diferentes, empilhados na estaca A em ordem decrescente de tamanho (da base para o topo).

Torres de Hanói

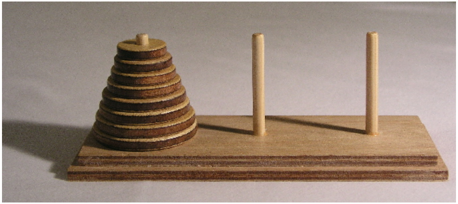


A torre de Hanói é um brinquedo com três estacas A, B e C e discos de tamanhos diferentes, empilhados na estaca A em ordem decrescente de tamanho (da base para o topo).

Objetivo do Jogo:

- mover todos os discos da estaca A para a estaca C

Torres de Hanói



A torre de Hanói é um brinquedo com três estacas A, B e C e discos de tamanhos diferentes, empilhados na estaca A em ordem decrescente de tamanho (da base para o topo).

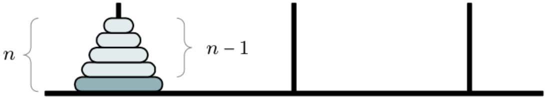
Objetivo do Jogo:

- mover todos os discos da estaca A para a estaca C

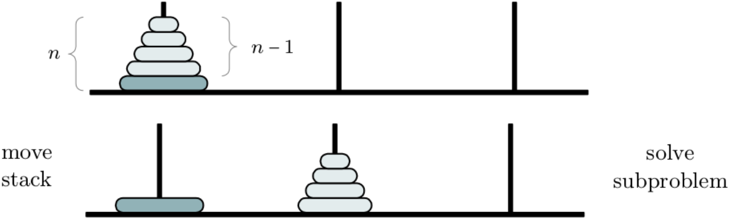
Regras:

- Apenas um disco pode ser movido de cada vez
- Um disco maior não pode ser colocado sobre um menor

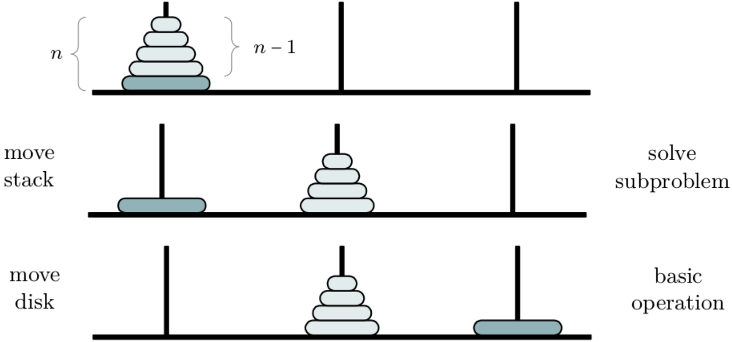
Torres de Hanói



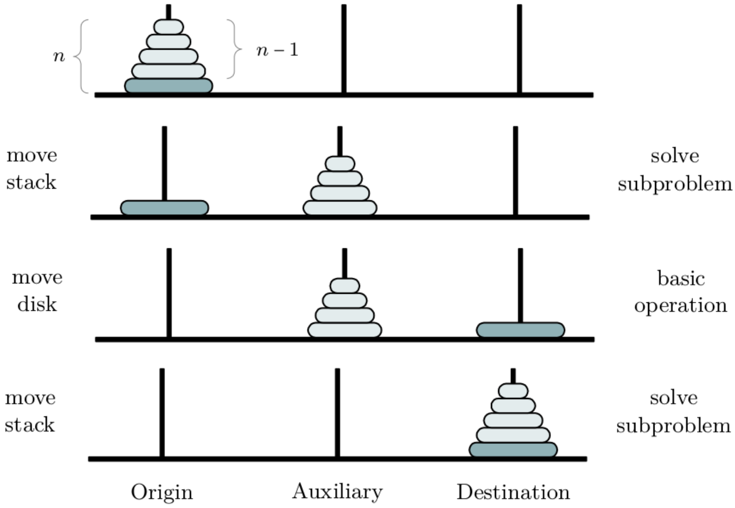
Torres de Hanói



Torres de Hanói



Torres de Hanói



Torres de Hanói

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

```
void hanoi(int n, char orig, char dest, char aux) {
  /* caso base: n == 0 - nao faz  nada */
  if (n > 0) {  /* caso geral */
    hanoi(n-1, orig, aux, dest);
    cout << "move " << orig << "para" << dest << "\n";
    hanoi(n-1, aux, dest, orig);
  }
}
```

Chamada da função: `hanoi(n, ‘a’, ‘c’, ‘b’);`

Exercícios

Exercício 1 — Soma dos positivos

- Escreva UMA função recursiva que calcule a soma dos elementos positivos do vetor de inteiros $A[0..n-1]$.
- O problema faz sentido quando $n = 0$? Quanto deve valer a soma neste caso?

Exercício 2 — Soma de dígitos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Escreva UMA função recursiva que calcule a soma dos dígitos decimais de um inteiro positivo.
- Por exemplo, a soma dos dígitos de `132` é `6`.

Exercício 3 - Max-Min

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Escreva UMA função recursiva que calcule a diferença entre o valor de um elemento máximo e o valor de um elemento mínimo de um vetor A com $n \geq 1$ elementos.

Exercício 4 - Triângulo das Somas

Dado um vetor de inteiros A, imprima um triângulo de números tal que:

- na base do triângulo estejam todos os elementos do vetor original;
- o número de elementos em cada nível acima da base é um a menos que no nível inferior;
- e cada elemento no i-ésimo nível é a soma de dois elementos consecutivos do nível inferior.

Exemplo:

`Input:` $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

`Output:`
48
20, 28
8, 12, 16
3, 5, 7, 9
1, 2, 3, 4, 5

Exercício 5 - Coeficientes Binomiais

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- O coeficiente binomial é uma relação estabelecida entre dois números naturais n e k, $n \geq k \geq 0$, indicada por:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Escreva uma função recursiva que calcule o coeficiente binomial de dois números inteiros não negativos n e k, $n \geq k$.

- Dica: Use a relação de Stifel:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Exercício 6 - Algoritmo de Euclides

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

A seguinte função, conhecida como algoritmo de Euclides, calcula o maior divisor comum dos inteiros positivos m e n.

```
euclides(int m, int n){
    int r;
    do {
        r = m % n;
        m = n;
        n = r;
    } while (r != 0);
    return m;
}
```

Escreva uma função recursiva equivalente.

Exercício 7 - Calculando $\lfloor \log_2 n \rfloor$

O **piso** de um número x é o único inteiro i tal que $i \leq x < i + 1$. O piso de x é denotado por $\lfloor x \rfloor$.

Escreva uma função recursiva que receba um inteiro positivo n e calcule $\lfloor \log_2 n \rfloor$, ou seja, o piso do logaritmo de n na base 2.

Segue uma amostra de valores:

n	15	16	31	32	63	64	127	128	255	256
$\lfloor \log_2 n \rfloor$	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8

FIM