

工業力学-演習問題 4.12

Issaimaru

2022 年 9 月 18 日

4.12 物体を同じ初速度の大きさ v_0 で投げるとき、水平到達距離を最大にするためには、水平面に対してどの方向に投げればよいかを求めよ。

(解答)

まず、物体を投げてから経過した時間を $t[s]$ とすると x 方向の移動速度は、物体を投げる角度 θ を用いて

$$v_x = v_0 \cos \theta \quad (1)$$

であるから、 x 方向の変位はこれを 0 から t までの定積分してやれば求まるので

$$x = \int_0^t v_x = v_0 t \cos \theta \quad (2)$$

同様に、 y 方向の移動速度は

$$v_y = v_0 \sin \theta - gt \quad (3)$$

であるから、 y 方向の変位は

$$y = \int_0^t v_y = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2 \quad (4)$$

と求めることができる。

ここで、地面に到達するときの y 方向の変位は 0 になるはずであるから、

$$v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \quad (5)$$

となるとき t が投げた物体が地面に落ちるまでの時間である ($t=0$ は投げる瞬間なので駄目)

これを解くと、

$$t = \frac{2v_0 \sin \theta}{g} \quad (6)$$

となるから、これを (2) 式の t に代入して

$$x = \frac{2v_0^2}{g} \sin \theta \cos \theta \quad (7)$$

という式が得られる。

求めたかったのはこの x が最大となるとき θ であるが、(7) 式の変数が $\sin \theta \cos \theta$ しかないこと

から、これが最大となるときの θ を求めればよい.

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{\sin 2\theta}{2} \tag{8}$$

であり、 $\frac{\sin 2\theta}{2}$ の最大値は 1 であるからこれが 1 になる θ を見つけてやると $\theta = \frac{\pi}{4}$ のときであるから、これが答えとなる.