Département Informatique - 4ème année

Rennes, le 5 novembre 2007

Logique

Tous documents autorisés

Durée : 1 heure 30 mn

Le sujet comporte 3 pages

1 Logique des propositions

On notera par une lettre minuscule une proposition atomique et par une lettre majuscule une proposition quelconque.

1.1 Valuation, table de vérité, équivalence sémantique, conséquence valide

Question 1
Les propositions P_1 et P_2 suivantes sont-elles des tautologies? Si c'est le cas, le démontrer et sinon, donner une valuation mettant la propriété en défaut.

$$P_1 : (\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$$

$$P_2 : (\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

Question 2
La proposition C est-elle conséquence valide de l'ensemble de propositions $\mathcal{H}$? Si c'est le cas, le démontrer et sinon, donner une valuation mettant la propriété en défaut.

$$C : (\neg p \Rightarrow \neg q) \wedge ((p \wedge r) \Rightarrow \neg q)$$

$$\mathcal{H} = \{p \Rightarrow (q \vee r), (r \wedge \neg p) \Rightarrow (\neg q \wedge \neg p)\}$$

1.2 Systèmes formels pour le langage $\mathcal{P}$ des propositions

1.2.1 Notre premier système formel $SF1$

On rappelle que

- Le langage de $SF1$ est le langage des propositions $\mathcal{P}_{\Rightarrow,\neg}$ limité aux connecteurs $\Rightarrow, \neg$
- Il y a 3 axiomes $S1, S2, S3$
  1. $S1 : A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
  2. $S2 : (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
  3. $S3 : (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
- Une règle d'inférence R
  R : Règle de modus ponens :
  $\{P, P \Rightarrow Q\} \vdash Q$

On désire montrer que les axiomes A_1, A_2, A_3 du système formel SFL de Lukasiewicz sont des théorèmes pour $SF1$.

1. $A1 : (P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$
2. $A2 : (\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow P$
3. $A3 : P \Rightarrow (\neg P \Rightarrow Q)$

Question 3
Montrer que A_1 est un théorème pour $SF1$. Pour cela, on pourra appliquer 3 fois le théorème syntaxique de la déduction puis présenter une démonstration par $SF1$.

Question 4
Montrer que A_2 est un théorème pour $SF1$ en présentant une démonstration par $SF1$.

Question 5
Montrer que A_3 est un théorème pour $SF1$. Pour cela, on pourra appliquer 2 fois le théorème syntaxique de la déduction puis présenter une démonstration par $SF1$.

Question 6
Sachant que le système formel SFL est défini par

- son langage des propositions $\mathcal{P}_{\Rightarrow,\neg}$ limité aux connecteurs $\Rightarrow, \neg$
- ses 3 axiomes $A1, A2, A3$ de Lukasiewicz

- sa règle d'inférence R : Règle de modus ponens :
  $\{P, P \Rightarrow Q\} \vdash Q$

et que ses 3 axiomes sont des théorèmes de $SF1$, quelle propriété connue de $SF1$ possède aussi SFL?

1.2.2 Le système formel de Robinson : La résolution notée SFR

Question 7
Montrer par SFR que de $\{p \Rightarrow q, (p \Rightarrow q) \Rightarrow r\}$, on déduit r.

Question 8
Plus généralement, peut-on démontrer le modus ponens par SFR?
$\{P, P \Rightarrow Q\} \vdash Q$ pour $P, Q \in \mathcal{P}_{\Rightarrow,\neg}$
Justifier votre réponse sans faire une démonstration technique.

2 Logique des prédicats

On souhaite démontrer par la Résolution notée SFR que la formule F est une tautologie.

$F : (\exists x \exists y (R(x,y)) \wedge \forall x \forall y (R(x,y) \Rightarrow R(y,x)) \wedge \forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \Rightarrow R(x,z))) \Rightarrow (\exists x R(x,x))$

- R étant 1 symbole de prédicat binaire,
- x, y, z étant des symboles de variables,

Question 9
On remarque que F ne vérifie pas la syntaxe des formules bien formées.
Renommer les variables pour qu'elles soient différentes pour chaque quantification. On obtient alors la formule F'.
Démontrer alors par SFR que F' est une tautologie en détaillant toutes les étapes.

Question 10
Donner une interprétation de cette formule F'. Est-ce un modèle?