Vendredi 16 octobre 2009

Logique

Durée : 1h 30
Documents autorisés
Le sujet comporte 3 pages

1 Langage des propositions

1.1 Table de vérité (2 points)

Rappel de l'axiome $A2$ du système formel SF_1 :

$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$

Question 1.1

Montrer que l'axiome $A2$ du système formel SF_1 est une tautologie.

1.2 Système formel SF_R (4 points)

Nous avons vu en cours que le système formel SF_R ne permet de démontrer aucun théorème. Cependant SF_R est complet pour la réfutation. Il devient alors possible, en utilisant SF_R, de contrôler qu'une proposition P est une tautologie, i.e de contrôler $\models P$.

Question 1.2

Indiquer comment utiliser SF_R pour contrôler qu'une proposition P est une tautologie.

Question 1.3

Montrer que l'axiome A2 du système formel SF_1 est une tautologie en suivant pas à pas la démarche que vous venez de proposer.

1.3 Système formel Coupure (8 points)

Nous nous intéressons au sous-ensemble, noté $\mathcal{S}$, des propositions de la forme :

$$(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n) \Rightarrow (b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_m)$$

dans laquelle a_i et b_i sont des propositions atomiques.

$(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n)$ est dite prémisse.
$(b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_m)$ est dite conclusion.

$\triangle$ note la prémisse vide.
$\triangledown$ note la conclusion vide.
Par convention, (mais c'est somme toute assez logique !) toute valuation est réalisation de $\triangle$ et est réfutation de $\triangledown$.

Pour $\mathcal{S}$ nous proposons un système formel sans axiome.

1.3.1 Règle de coupure

Nous proposons la règle d'inférence (dite **règle de coupure**) :

$$\{C, D\} \vdash_{cut} E$$

qui signifie :
- si $C = (a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n) \Rightarrow (b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_m)$ a été démontré,
- si $D = (c_1 \wedge c_2 \wedge \cdots \wedge c_p) \Rightarrow (d_1 \vee d_2 \vee \cdots \vee d_q)$ a été démontré,
- si $\exists i \in [1, m]$ et $\exists j \in [1, p]$ tels que $b_i = c_j$

alors la règle d'inférence produit :
$E = (a_1 \wedge \cdots \wedge a_n \wedge c_1 \wedge \cdots \wedge c_{j-1} \wedge c_{j+1} \cdots \wedge c_p) \Rightarrow (b_1 \vee \cdots \vee b_{i-1} \vee b_{i+1} \cdots \vee b_m \vee d_1 \vee \cdots \vee d_q)$

Exemple :

$$\mathcal{D} : \left| \begin{array}{l} \ldots \\ C = (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \Rightarrow (p_4 \vee p_5) \\ \ldots \\ D = (p_6 \wedge p_4) \Rightarrow (p_7 \vee p_8) \\ \ldots \\ E = (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_6) \Rightarrow (p_5 \vee p_7 \vee p_8) \quad \text{par coupure sur } C \text{ et } D \end{array} \right.$$

Question 1.4

Démontrer que si E se déduit par coupure de C et D, alors $\{C, D\} \models E$.

Une réponse possible

Une façon simple de répondre consiste à se rapprocher de résultats vus en cours.

1. Les propositions P utilisées dans notre système formel sont toutes de la forme :

$$P : Premisse \Rightarrow Conclusion$$

avec $Premisse$: $(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n)$ et $Conclusion$: $(b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_m)$ Cela signifie qu'elles sont sémantiquement équivalentes à :

$$P \approx \neg Premisse \vee Conclusion$$

La prémisse étant une conjonction de prop. atom, si on distribue la négation sur cette prémisse on obtient une disjonction de négation de propositions atomiques. Et donc :

$$P \approx \neg a_1 \vee \neg a_2 \vee \cdots \vee \neg a_n \vee b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_m$$

C'est une clause !

2. La règle de Coupure est identique à la Résolution.

$$C : Premisse1 \Rightarrow Conclusion1$$

$$D : Premisse2 \Rightarrow Conclusion2$$

C et D peuvent alimenter la règle d'inférence Coupure si la même prop. atom. apparaît dans $Conclusion1$ et $Premisse2$. Or si nous écrivons C et D sous forme de clauses C' et D', cela revient à dire que C' doit contenir une prop. atom. et D' doit contenir son opposée.
C'est exactement la condition d'application de la Résolution.
Qui plus est la proposition produite par Coupure est exactement la résolvante de la Résolution.

En cours on a montré que si on mettait 2 clauses en entrée de la Résolution on produisait nécessairement une conséquence valide de ces deux clauses.

Une autre réponse possible

$C = (a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n) \Rightarrow (b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_m)$
$D = (c_1 \wedge c_2 \wedge \cdots \wedge c_p) \Rightarrow (d_1 \vee d_2 \vee \cdots \vee d_q)$
$\exists i \in [1, m]$ et $\exists j \in [1, p]$ tels que $b_i = c_j$
$E = (a_1 \wedge \cdots \wedge a_n \wedge c_1 \wedge \cdots \wedge c_{j-1} \wedge c_{j+1} \cdots \wedge c_p) \Rightarrow (b_1 \vee \cdots \vee b_{i-1} \vee b_{i+1} \cdots \vee b_m \vee d_1 \vee \cdots \vee d_q)$
Soit v une réalisation quelconque de C et D
On distingue 2 cas :

1. $v(b_i = 1)$
cela impose $v(b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_m) = 1$
qui impose, d'après la t. v. de $\Rightarrow$, $v(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n) = 1$ (i)
or $b_i = c_j$, donc $v(c_j = 1)$.
On distingue à nouveau 2 cas :
   (a) $\exists k \in [1, p], k \neq j, v(c_k) = 0$
   cela impose $v(a_1 \wedge \cdots \wedge a_n \wedge c_1 \wedge \cdots \wedge c_{j-1} \wedge c_{j+1} \cdots \wedge c_p) = 0$ puisque c_k appartient à cette grande conjonction,
   qui impose $v(E) = 1$ d'après la t. v. de $\Rightarrow$
   CQFD.

(b) $\forall k \in [1, p], k \neq j, v(c_k) = 1$
cela impose $v(c_1 \wedge c_2 \wedge \cdots \wedge c_p) = 1$ (ii)
qui impose $v(d_1 \vee d_2 \vee \cdots \vee d_q) = 1$ d'après la t. v. de $\Rightarrow$ (iii)
donc, en regroupant (i) et (ii) on a $v(a_1 \wedge \cdots \wedge a_n \wedge c_1 \wedge \cdots \wedge c_{j-1} \wedge c_{j+1} \cdots \wedge c_p) = 1$
pour avoir $v(E) = 1$ la t. v. de $\Rightarrow$ impose $v(b_1 \vee \cdots \vee b_{i-1} \vee b_{i+1} \cdots \vee b_m \vee d_1 \vee \cdots \vee d_q) = 1$
c'est bien la cas puisque (iii) : $v(d_1 \vee d_2 \vee \cdots \vee d_q) = 1$
CQFD

2. $v(b_i = 0)$ i.e. $v(c_j = 0)$
On distingue à nouveau 2 cas :
(a) $v(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n) = 0$
cela impose $v(a_1 \wedge \cdots \wedge a_n \wedge c_1 \wedge \cdots \wedge c_{j-1} \wedge c_{j+1} \cdots \wedge c_p) = 0$
et donc $v(E) = 1$ d'après la t. v. de $\Rightarrow$.
CQFD
(b) $v(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n) = 1$
cela impose $v(b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_m) = 1$ d'après la t. v. de $\Rightarrow$
or $v(b_i = 0)$,
donc $\exists k \in [1, m], k \neq i, v(b_k) = 1$
et par conséquent $v(b_1 \vee \cdots \vee b_{i-1} \vee b_{i+1} \cdots \vee b_m \vee d_1 \vee \cdots \vee d_q) = 1$
et connaissant la t. v. de $\Rightarrow$ on déduit $v(E) = 1$
CQFD

Question 1.5

Que dire d'une proposition $P \in \mathcal{S}$ qui contient la même proposition atomique a en prémisse et en conclusion ?

Une réponse possible

P est une tautologie. Là encore si on revient aux clauses cela signifie qu'on a une proposition atomique et sa négation dans la clause $P' \approx P$. Or $v(a \vee \neg a) = 1 \forall v$ et P' étant une disjonction : $\forall v, v(P') = 1$.

1.3.2 Règle de simplification

Nous proposons une seconde règle d'inférence (dite **règle de simplification**) :

$$P \Rightarrow C \vdash_{simp} P' \Rightarrow C'$$

La prémisse P' est la prémisse P dans laquelle chaque proposition atomique n'est conservée qu'en un seul exemplaire.
Idem pour C' vis à vis de C.

Soit $\Gamma \subset \mathcal{S}$ un ensemble de propositions et $C \in \mathcal{S}$.

Définition 1.1

*Une **démonstration par coupure** de C à partir de Γ est une suite de propositions de $\mathcal{S}$, $(P_1, \ldots, P_n = C)$ telle que :*

– $P_i \in \Gamma$ *ou*

– *P_i se déduit de P_j par **simplification** ($j < i$) ou*
– *P_i se déduit de P_j et P_k par **coupure** ($j, k < i$*

Définition 1.2

*Une **réfutation par coupure** de Γ est une démonstration par coupure de $\triangle \Rightarrow \bigtriangledown$ à partir de Γ*

Question 1.6

Rédiger une réfutation par coupure de $\{(A \wedge B) \Rightarrow C, A \Rightarrow B, (B \wedge C) \Rightarrow \bigtriangledown, \triangle \Rightarrow A\}$

Une réponse possible

$P1 : A \Rightarrow B$	hypo
$P2 : (A \wedge B) \Rightarrow C$	hypo
$P3 : A \Rightarrow C$	Coupure et Simplification $P1$ et $P2$
$P4 : (B \wedge C) \Rightarrow \bigtriangledown$	hypo
$P5 : (A \wedge B) \Rightarrow \bigtriangledown$	Coupure $P4$ et $P3$
$P6 : A \Rightarrow \bigtriangledown$	Coupure et Simplification $P1$ et $P5$
$P7 : \triangle \Rightarrow A$	hypo
$P8 : \triangle \Rightarrow \bigtriangledown$	Coupure $P6$ et $P7$

2 Langage des prédicats

2.1 Unification (2 points)

Soient les formules :
$F = P(f(7,4,g(1,2)), g(h(u),u))$ et
$G = P(u, g(v, f(x,y,z)))$
dans lesquelles les variables sont : u, v, x, y et z.

Question 2.1

Trouver un unificateur de F et G

2.2 Système formel Résolution (4 points)

Question 2.2

Montrer, en utilisant SF_R que :

$$\{\exists x \forall y (P(x) \wedge (Q(y) \Rightarrow S(x,y))), \forall x \forall y (\neg P(x) \vee \neg R(y) \vee \neg S(x,y))\} \models \forall y (Q(y) \Rightarrow \neg R(y))$$