Correction du DS de 2007-2008

Question 1 :

$P1 : (\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
La question est ouverte, passons donc par la table de vérité :

p	q	$(p \vee q)$	$(q \Rightarrow p)$	$\neg(p \vee q)$	$\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg q$	$P1$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1

$P1$ n'est pas une tautologie car la valuation v telle que $v(p) = 0$ et $v(q) = 1$ impose $v(P1) = 0$.

$P2 : (\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
La question est ouverte, passons donc par la table de vérité :

p	q	$\neg p \Rightarrow \neg q$	$p \Rightarrow q$	$P2$
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

$P2$ n'est pas non plus une tautologie car la valuation v telle que $v(p) = 1$ et $v(q) = 0$ impose $v(P2) = 0$.

Question 2 :
$H1 : p \Rightarrow (q \vee r)$
$H2 : (r \wedge \neg p) \Rightarrow (\neg q \wedge \neg p)$

$C : (\neg p \Rightarrow \neg q) \wedge ((p \wedge r) \Rightarrow \neg q)$
On peut relativement facilement trouver une valuation v telle que $v(H1) = 1$, $v(H2) = 1$ et $v(C) = 0$, ce qui indique que C n'est pas conséquence valide de $\{H1, H2\}$.

$v(C) = 0$ en particulier quand $v(p) = 0$ et $v(q) = 1$, ceci indépendamment de $v(r)$

quand $v(p) = 0$ et $v(q) = 1$ alors $v(H1) = 1$ d'après la t. de v. de $\Rightarrow$ et ceci toujours indépendamment de $v(r)$

quand $v(p) = 0$ et $v(q) = 1$ alors $v(\neg q \wedge \neg p) = 0$,
d'après la table de vérité de $\Rightarrow$ il faut donc $v(r \wedge \neg p) = 0$,ce qui impose $v(r) = 1$

La valuation v telle que $v(p) = 0$, $v(q) = 1$ et $v(r) = 1$ indique donc que C n'est pas conséquence valide de $\{H1, H2\}$.

Question 3 :
L'axiome A_1 de Lukasiewicz : $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$

Est-ce un théorème pour SF_1 ?

	$\vdash (P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$	
$P \Rightarrow Q$	$\vdash (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$	T. Synt. D.
$P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow R$	$\vdash P \Rightarrow R$	T. Synt. D.
$P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow R, P$	$\vdash R$	T. Synt. D.
et la démonstration :		
1 :	P	Hypothèse
2 :	$P \Rightarrow Q$	Hypothèse
3 :	Q	Modus Ponens
4 :	$Q \Rightarrow R$	Hypothèse
5 :	R	Modus Ponens

Question 4 :
L'axiome A_2 de Lukasiewicz : $(\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow P$

Est-ce un théorème pour SF_1 ?

1 :	$((\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow (\neg P \Rightarrow P)) \Rightarrow (((\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow \neg P) \Rightarrow ((\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow P))$	Axiome 2
2 :	$((\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow (\neg P \Rightarrow P))$	cf cours démo de
3 :	$((\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow \neg P) \Rightarrow ((\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow P)$	Modus Ponens
4 :	$((\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow \neg P)$	Axiome 1
5 :	$(\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow P$	Modus Ponens

Question 5 :

L'axiome A_3 de Lukasiewicz : $P \Rightarrow (\neg P \Rightarrow Q)$
Est-ce un théorème pour SF_1 ?

	$\vdash P \Rightarrow (\neg P \Rightarrow Q)$	
P	$\vdash (\neg P \Rightarrow Q)$	T. Synt. D.
$P, \neg P$	$\vdash Q$	T. Synt. D.
et la démonstration :		
1 :	$\neg P \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$	Axiome 1
2 :	$\neg P$	Hypothèse
3 :	$\neg Q \Rightarrow \neg P$	Modus Ponens
4 :	$(\neg Q \Rightarrow \neg P) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$	Axiome 3
5 :	$P \Rightarrow Q$	Modus Ponens
6 :	P	Hypothèse
7 :	Q	Modus Ponens

Question 6 :

SF_1 est sain. Ceci signifie que les théorèmes produits pae SF_1 sont des tautologies. Les axiomes de SFL étant des théorèmes de SF_1 ce sont donc des tautologies puisque SF_1 est sain. Et le modus ponens étant la règles d'inférence de SFL il produira une tautologie à partir de deux tautologies (vu en cours).
SFL est donc sain.

Question 7 :

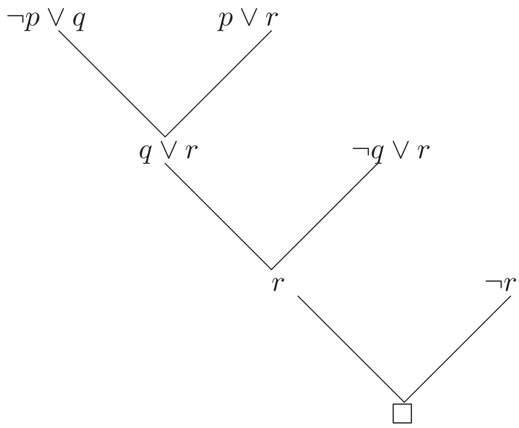
$H1 : p \Rightarrow q$
$\mathcal{C}_1 : \{\neg p \vee q\}$

$H2 : (p \Rightarrow q) \Rightarrow r$
$H2 : \neg(\neg p \vee q) \vee r$
$H2 : (p \wedge \neg q) \vee r$
$\mathcal{C}_2 : \{p \vee r, \neg q \vee r\}$

$C : r$
$\neg C : \neg r$
$\mathcal{C}_3 : \{\neg r\}$

donc il reste à montrer :

$\{\neg p \vee q, p \vee r, \neg q \vee r, \neg r\} \vdash \Box$



Question 8 :

$P, P \Rightarrow Q \vdash_{SF_R} Q$
$P, \neg P \vee Q \vdash_{SF_R} Q$
or P est une clause de la forme $l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_n$
$\neg P$ s'écrit $\neg l_1 \wedge \neg l_2 \wedge \cdots \wedge \neg l_n$
$\neg P \vee Q$ s'écrit alors$(\neg l_1 \wedge \neg l_2 \wedge \cdots \wedge \neg l_n) \vee Q$ ou encore :
$(\neg l_1 \vee Q) \wedge (\neg l_2 \vee Q) \wedge \cdots \wedge (\neg l_n \vee Q)$
et est donc logiquement équivalent à l'ensemble de clauses :
$\{\neg l_1 \vee Q, \neg l_2 \vee Q, \ldots, \neg l_n \vee Q\}$

Il faut finalement montrer :

$$l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_n, \neg l_1 \vee Q, \neg l_2 \vee Q, \ldots, \neg l_n \vee Q \vdash Q$$

En partant de $l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_n$ et $\neg l_1 \vee Q$ nous produisons la résolvante sans l_1 : $l_2 \vee \cdots \vee l_n \vee Q$
Nous pouvons ensuite de la même façon éliminer l_2, et en reproduisant n fois la Résolution sur la dernière résolvante obtenue nous obtiendrons la clause Q.

Question 9 :

$F : (\exists x \exists y (R(x,y)) \wedge \forall x \forall y (R(x,y) \Rightarrow R(y,x)) \wedge \forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \Rightarrow R(x,z))) \Rightarrow (\exists x R(x,x))$

Il nous faut renommer les variables.

F' : $(\exists x \exists y(R(x,y)) \wedge \forall x_1 \forall y_1(R(x_1,y_1) \Rightarrow R(y_1,x_1)) \wedge \forall x_2 \forall y_2 \forall z_2((R(x_2,y_2) \wedge R(y_2,z_2)) \Rightarrow R(x_2,z_2))) \Rightarrow (\exists x_3 R(x_3,x_3))$

Pour montrer que F' est une tautologie (i.e. $\vdash F'$) il faut procéder de manière habituelle avec SF_R :

1. ajouter $\neg F'$ aux hypothèses (il n'y en a pas)
2. appliquer à $\neg F'$ les transformations de façons à aboutir à un ensemble de clauses
3. inférer la clause $\square$

Clarifions tout d'abord cette immense formule :

$F' \approx A \wedge B \wedge C \Rightarrow D$
en notant :
$A : \exists x \exists y R(x,y)$
$B : \forall x_1 \forall y_1 (R(x_1,y_1) \Rightarrow R(y_1,x_1))$
$C : \forall x_2 \forall y_2 \forall z_2((R(x_2,y_2) \wedge R(y_2,z_2)) \Rightarrow R(x_2,z_2))$
$D : \exists x_3 R(x_3,x_3)$

$$\begin{aligned}
\neg F' &\approx \neg(A \wedge B \wedge C \Rightarrow D) \\
\neg F' &\approx \neg(\neg(A \wedge B \wedge C) \vee D) \\
\neg F' &\approx (A \wedge B \wedge C) \wedge \neg D
\end{aligned}$$

or :

$$
\begin{array}{rcl}
A & \approx & \{R(a,b)\} \\
\\
B & \approx & \forall x_1 \forall y_1 (\neg R(x_1,y_1) \vee R(y_1,x_1)) \\
B & \approx & \neg R(x_1,y_1) \vee R(y_1,x_1) \\
B & \approx & \{\neg R(x_1,y_1) \vee R(y_1,x_1)\} \\
\\
C & \approx & \forall x_2 \forall y_2 \forall z_2 ((R(x_2,y_2) \wedge R(y_2,z_2)) \Rightarrow R(x_2,z_2)) \\
C & \approx & \forall x_2 \forall y_2 \forall z_2 (\neg (R(x_2,y_2) \wedge R(y_2,z_2)) \vee R(x_2,z_2)) \\
C & \approx & \forall x_2 \forall y_2 \forall z_2 (\neg R(x_2,y_2) \vee \neg R(y_2,z_2) \vee R(x_2,z_2)) \\
C & \approx & \neg R(x_2,y_2) \vee \neg R(y_2,z_2) \vee R(x_2,z_2) \\
C & \approx & \{\neg R(x_2,y_2) \vee \neg R(y_2,z_2) \vee R(x_2,z_2)\} \\
\\
\neg D & \approx & \neg(\exists x_3 R(x_3,x_3)) \\
\neg D & \approx & \forall x_3 \neg R(x_3,x_3) \\
\neg D & \approx & \neg R(x_3,x_3) \\
\neg D & \approx & \{\neg R(x_3,x_3)\}
\end{array}
$$

et finalement :

$$\neg F' : \{R(a,b), \neg R(x_1,y_1) \vee R(y_1,x_1), \neg R(x_2,y_2) \vee \neg R(y_2,z_2) \vee R(x_2,z_2), \neg R(x_3,x_3)\}$$

Il reste donc à essayer d'inférer la clause vide.

$R(a, b)$ $\quad\quad$ $\neg R(x_2, y_2) \vee \neg R(y_2, z_2) \vee R(x_2, z_2)$

$\{< x_2, a >, < y_2, b >\}$

$\neg R(b, z_2) \vee R(a, z_2)$ $\quad\quad$ $\neg R(x_1, y_1) \vee R(y_1, x_1)$

$\{< y_1, b >, < x_1, z_2 >\}$

$R(a, b)$ $\quad\quad$ $\neg R(a, z_2) \vee R(b, z_2)$

$\{< z_2, b >\}$

$R(b, b)$ $\quad\quad$ $\neg R(x_3, x_3)$

$\{< x_3, b \}\}$

$\square$

Correction du DS de 2008-2009

Question 1 :
$A \approx B$ ssi $\forall v, v(A) = v(B)$
Il suffit alors de passer par la table de vérité :

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Les seules lignes où $A \approx B$ sont telles que $v(A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A) = 1$, donc si $A \approx B$ alors $v(A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A)$ est une tautologie.

Question 2 :

Si $v(A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A)$ est une tautologie, i.e. si $\forall v, v(A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A) = 1$ alors, d'après la table de vérité de $\wedge$ on a forcément $v(A \Rightarrow B) = 1$ et $v(B \Rightarrow A) = 1$. Et d'après la table de vérité précédente on a

– soit $v(A) = v(B) = 0$
– soit $v(A) = v(B) = 1$

c'est-à-dire $A \approx B$.

Question 3 :

Sens $\longrightarrow$
$\mathcal{E}$ est contradictoire.
Supposons que $\mathcal{E} - T$ ne soit pas contradictoire, i.e. que $\mathcal{E} - T$ soit satisfaisable,
alors $\exists v_i, \forall A \in \mathcal{E} - T, v_i(A) = 1$.
Donc si on rajoute une tautologie T à $\mathcal{E} - T$, la même valuation v_i est telle que $\forall A \in \mathcal{E}, v_i(A) = 1$. Ce qui signifie que $\mathcal{E}$ est satisfaisable. Ce qui est faux.

Sens $\longleftarrow$
$\mathcal{E} - T$ est contradictoire.
A fortiori, tout ensemble le contenant est aussi contradictoire !

Question 4 :

Sens $\longrightarrow$
$\mathcal{E}$ est contradictoire.
Supposons que $\mathcal{E} - \{B\}$ ne soit pas contradictoire, i.e. que $\mathcal{E} - \{B\}$ soit satisfaisable,
alors $\exists v_i, \forall A \in \mathcal{E} - \{B\}, v_i(A) = 1$.
On a donc $v_i(A) = 1$ et $v_i(A \Rightarrow B) = 1$. Par conséquent, d'après la table de vérité de $\Rightarrow$, on a $v_i(B) = 1$. Donc si on rajoute B à $\mathcal{E} - \{B\}$, la même valuation v_i est telle que $\forall A \in \mathcal{E}, v_i(A) = 1$. Ce qui signifie que $\mathcal{E}$ est satisfaisable. Ce qui est faux.

Sens $\longleftarrow$
$\mathcal{E} - \{B\}$ est contradictoire.
A fortiori, tout ensemble le contenant est aussi contradictoire !

Question 5 :

$A'_3 = (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow A)$ est une tautologie.
Pour montrer cela on peut dresser la table de vérité de A'_3

A	B	$\neg A \Rightarrow \neg B$	$\neg A \Rightarrow B$	$(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow A$	A'_3
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

On constate que $\forall v, v(A'_3) = 1$ ce qui signifie que A'_3 est une tautologie.

Connaissant SF_1 on sait que SF'_1 est **sain**, puisque la règle d'inférence est la même, et qu'elle ne peut produire, à partir de deux tautologie, qu'une nouvelle tautologie.

Question 6 :

$P1 = (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow A)$ Axiome
$P2 = (\neg A \Rightarrow \neg B)$ hypothèse
$P3 = (\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow A$ modus ponens $P1$ et $P2$
$P4 = \neg A \Rightarrow B$ hypothèse
$P5 = A$ modus ponens $P3$ et $P4$

Question 7 :

Montrer
$$\vdash (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$

Cela revient à montrer, en utilisant deux fois le théorème syntaxique de la déduction :

$$\neg A \Rightarrow \neg B, B \vdash A$$

D'où la démonstration :
$P1 = (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow A)$ Axiome A'3
$P2 = (\neg A \Rightarrow \neg B)$ hypothèse
$P3 = (\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow A$ modus ponens $P1$ et $P2$
$P4 = B \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$ Axiome A1
$P5 = B$ hypothèse
$P6 = (\neg A \Rightarrow B)$ modus ponens $P4$ et $P5$
$P7 = A$ modus ponens $P3$ et $P6$

Question 8 :

Montrer
$$\vdash (\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow P$$

$P1 = (\neg P \Rightarrow \neg P) \Rightarrow ((\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow P)$ Axiome A'3
$P2 = (\neg P \Rightarrow \neg P)$ fait en TD
$P3 = (\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow P$ modus ponens $P1$ et $P2$

Question 9 :

$F1 = \forall x((\exists y P(x,y)) \Rightarrow P(x, f(x)))$
$F2 = \forall x \exists y P(x,y)$
$F3 = \exists x P(f(f(x)), x)$
$G = \exists x \exists y \exists z (P(x,y) \wedge P(y,z) \wedge P(z,x))$

Montrer $\{F1, F2, F3\} \vdash G$

Pour $F1$:
$\forall x(\neg(\exists y P(x,y)) \vee P(x, f(x)))$

$\forall x((\forall y \neg P(x,y)) \vee P(x,f(x)))$
$\forall x \forall y \neg P(x,y)) \vee P(x,f(x))$

$$\neg P(x,y) \vee P(x,f(x))$$

Pour $F2$:

$$P(x,g(x))$$

Pour $F3$:

$$P(f(f(a)),a)$$

Pour $\neg G$:

$\neg(\exists x \exists y \exists z(P(x,y) \wedge P(y,z) \wedge P(z,x)))$
$\forall x \forall y \forall z \neg(P(x,y) \wedge P(y,z) \wedge P(z,x)))$
$\forall x \forall y \forall z \neg P(x,y) \vee \neg P(y,z) \vee \neg P(z,x)))$

$$\neg P(x,y) \vee \neg P(y,z) \vee \neg P(z,x)$$

En renommant les variables dans les clauses, SF_R va démarrer la Résolution avec :

$\{\neg P(x,y) \vee P(x,f(x)), P(z,g(z)), P(f(f(a)),a), \neg P(u,v) \vee \neg P(v,w) \vee \neg P(w,u)$

$\neg P(x,y)) \vee P(x,f(x)) \qquad \neg P(u,v) \vee \neg P(v,w) \vee \neg P(w,u)$

$\{< u, x >, < v, f(x) >\}$

$\neg P(x,y) \vee \neg P(f(x),w) \vee \neg P(w,x) \qquad P(z,g(z))$

$\{< x, z >, < y, g(z) >\}$

$P(f(f(a)),a) \qquad \neg P(f(z),w) \vee \neg P(w,z)$

$\{< z, f(a) >, < w, a >\}$

$P(a,f(a)) \qquad \neg P(x,y)) \vee P(x,f(x))$

$\{< x, a >\}$

$P(z,g(z)) \qquad P(a,y)$

$\{< z, a >, < y, g(a) >\}$

$\square$