Département Informatique - 4ème année

Rennes, le 6 novembre 2008

Logique

Tous documents autorisés

Durée : 1 heure 30 mn

Le sujet comporte 3 pages

Le barême est indicatif

1 Questions de sémantique en logique des propositions (6 points)

1.1 Quel rapport entre équivalence sémantique et double implication?

Question 1
Etant données 2 propositions A et B équivalentes sémantiquement, quelle propriété remarquable (P) possède la proposition C suivante?

$$C : (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

Justifier votre réponse.
Réciproquement, si C de la forme $C : (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, possède la propriété (P), alors A et B sont-elles équivalentes sémantiquement? Justifier.

1.2 Réflexions sur la déduction

Soit $\mathcal{H}$ un sous-ensemble fini de l'ensemble des propositions $\mathcal{P}$, soit $C \in \mathcal{P}$.
Pour montrer $\mathcal{H} \models C$, on peut montrer que $\mathcal{E} = \mathcal{H} \cup \{\neg C\}$ est un ensemble contradictoire.

Question 2
Supposons que $\mathcal{E}$ contienne une tautologie T. Montrer que $\mathcal{E}$ est un ensemble contradictoire si et seulement si $\mathcal{E} - \{T\}$ est contradictoire.

Question 3
Soit $A, B \in \mathcal{P}$.
Supposons que $\mathcal{E} \supseteq \{A, B, A \Rightarrow B\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ est un ensemble contradictoire si et seulement si $\mathcal{E} - \{B\}$ est un ensemble contradictoire.

2 Questions de sémantique en logique des prédicats (2 points)

2.1 Quel rapport entre équivalence logique et double implication?

Question 4
Etant données 2 formules bien formées A et B équivalentes logiquement, quelle propriété remarquable (Q) possède la formule bien formée C suivante?

$$C : (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

Justifier votre réponse.
Réciproquement, si C de la forme $C : (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, possède la propriété (Q) alors A et B sont-elles équivalentes logiquement? Justifier.

3 Système formel pour le langage des propositions (8 points)

On considère un système formel SF1' très ressemblant à SF1 vu en cours excepté le 3ème axiome:

- Même langage $\mathcal{P}_{\Rightarrow,\neg}$
- 3 Axiomes
  1. A1 : $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
  2. A2 : $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
  3. A'3 : $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow A)$
- Règle du modus ponens : $\{A, A \Rightarrow B\} \vdash B$

On appelle théorème de SF1', une proposition produite par SF1' en partant de la base et en utilisant la règle d'inférence.

Question 5
Montrer que l'axiome A'3 est une tautologie. Connaissant SF1, que peut-on alors dire de SF1'?

Question 6
Démontrer par SF1' que $\{\neg A \Rightarrow B, \neg A \Rightarrow \neg B\} \vdash A$.

Question 7
Prouver par SF1' que l'axiome A3 de SF1 $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ **est un théorème de SF1'.**
On peut utiliser le théorème syntaxique de la déduction.

Question 8
Démontrer par SF1' que $(\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow P$ **est un théorème de SF1'.**

4 La Résolution pour la logique des prédicats (4 points)

Question 9
Montrer par la méthode de la Résolution que

$$\{F1, F2, F3\} \vdash G$$

F1	$\forall X$	$((\exists Y P(X,Y)) \Rightarrow P(X, f(X)))$
F2	$\forall X$	$\exists Y P(X,Y)$
F3	$\exists X$	$P(f(f(X)), X)$
G	$\exists X$	$\exists Y \exists Z (P(X,Y) \wedge P(Y,Z) \wedge P(Z,X))$

- X, Y, Z, **étant des symboles de variables**
- P **étant un symbole de prédicat d'arité 2**
- f **étant un symbole fonctionnel d'arité 1**