Rapport de Projet d'EDP : Analyse mathématique et principes de la méthode des éléments finis

Alexis Gosselin, Issam Alouane

16 avril 2023

Contents

1 Introduction

Dans cette partie, nous cherchons à d'obtenir par la méthode des éléments finis une approximation de la solution d'un problème dit de Laplace en deux dimensions muni de conditions aux limites mixtes (Dirichlet et Neumann). Soit $\Omega =]0,1[\times]0,1[\subset \Re^2$ et $\partial\Omega$ sa frontière partitionnée en deux sous-ensembles $\partial\Omega_d \cup \partial\Omega_n = \partial\Omega$. Etant donné $f \in L^2(\Omega)$, $u_d \in H^1(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega_n)$, le problème de Laplace revient à déterminer u solution de :

$$(P) \left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u(x,y) & = & f(x,y) & sur\ \Omega \\ u(x,y) & = & u_d(x,y) & sur\ \partial\Omega_d \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial n} & = & g(x,y) & sur\ \partial\Omega_n \end{array} \right.$$

La deuxième équation correspond à la condition de Dirichlet qui spécifient la valeur de u sur la frontière du domaine.
La troisième équation correspond à la condition de Neumann spécifient la dérivée partielle normale de u sur la frontière du domaine.

Nous nous proposons de résoudre le problème (P) en le discrétisant par la méthode des éléments finis de Lagrange avec des élements finis de type P1 (approximation polynômiale du premier degré).

La formulation variationnelle discrète du problème (P) permet de le réduire à une résolution de système linéaire $Ax = b$ avec $A \in R^{n\times n}$, x et $b \in R^n$ tels que :

- $$\forall i,j \in [1,n]^2, Aij = \int_\Omega \bigtriangledown \eta_i^\top \bigtriangledown \eta_j\ dx$$
- $$\forall i \in [1,n], b_i = \int_\Omega f\eta_i\ dx + \int_{\partial\Omega_n} g\eta_i\ dx - \sum_{k=1}^{n} U_k \bigtriangledown \eta_i^\top \bigtriangledown \eta_j\ dx$$

On considère donc N points $\{A_k = (xk, yk)\}_k$ sur Ω et sa frontière, que l'on associe à N fonctions de base η_j par la relation:

$$\eta_j(xk, yk) = \delta_{jk}$$

2 Maillage triangulaire et conditions de Dirichlet

On considère un maillage du domaine Ω composé d'éléments triangulaires et on note T l'ensemble de ces éléments. Chaque triangle $\mathrm{T} \in T$ possède ainsi trois sommets qui correspondent à trois points de la discrétisation, et pour un triangle $\mathrm{T} = A_i A_j A_k$, les fonctions η_i, η_j, η_k sont affines sur ce triangle.

Le système à résoudre est donc $Ax = b$, avec $A \in R^{n \times n}$ définie par :

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \bigtriangledown \eta_i(x,y)^{\top} \bigtriangledown \eta_i(x,y)\ dx\ dy = \sum_{\mathrm{T} \in T} \int_{\mathrm{T}} \bigtriangledown \eta_i(x,y)^{\top} \bigtriangledown \eta_i(x,y)\ dx\ dy$$

Remarque : La plupart de ces intégrales seront nulles. De fait, seules les intégrales sur les triangles contenant à la fois les points A_i et A_j auront une contribution non nulle à la valeur de A_{ij}.
Ainsi on procédera de la manière suivante : Pour chaque triangle, on calcule la matrice $\left[M_T^A\right] \in R^{3\times 3}$ dont les éléments correspondent à l'intégrale calculée pour le point i et le point j.

2.1 Calcul de la matrice de raideur A pour un élément triangle

Pour calculer la matrice de raideur A, on utilise les formules :

- $\left[M_{T\,ij}^A\right] = \int_T \bigtriangledown \eta_i^{\top} \bigtriangledown \eta_i dxdy = \bigtriangledown \eta_i^{\top} \bigtriangledown \eta_i \int_T dxdy = |T|\, \eta_i^{\top} \bigtriangledown \eta_i$
- $\bigtriangledown \eta_j = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} y_{j+1} - y_{j+2} \\ x_{j+2} - x_{j+1} \end{pmatrix}$ avec les indices à comprendre modulo 3
- $alpha = det(J_T) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 2 \times |T|$

  où $|T|$ représente l'aire du triangle T

Nous avons donc uniquement à calculer α et les $\bigtriangledown \eta_j$ où $j \in \{1,2,3\}$. Ensuite il nous reste à calculer la matrice$\left[M_T^A\right]$ puis ajouter les termes correspondant à chaque sommet du triangle dans A et ce pour chaque triangle du maillage.

2.2 Calcul du second membre b pour un élément triangle

Pour calculer le second membre b, on utilise les formules :

- $\int_T f \eta_j dx \approx \frac{\alpha}{6} f(x_G, y_G)$
- $\alpha = det(J_T) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 2 \times |T|$

  où $|T|$ représente l'aire du triangle T

Nous avons donc uniquement à calculer α et f appliqué au barycentre du triangle puis à ajouter ce terme dans b pour l'ensemble des sommets du triangle.

2.3 Résolution numérique

Ici, nous avons décidé de prendre :

- $f(x, y) = sin(\pi x)sin(\pi y)$
- $ud(x, y) = 0$ (En imposant ud = c $\in R$, on surélève la courbe de c)
- $g(x, y) = 0$

On s'attend donc à obtenir :

$$u = \frac{sin(\pi x)sin(\pi y)}{2\pi^2}$$

La résolution numérique de ce système avec maillage triangulaire nous donne :

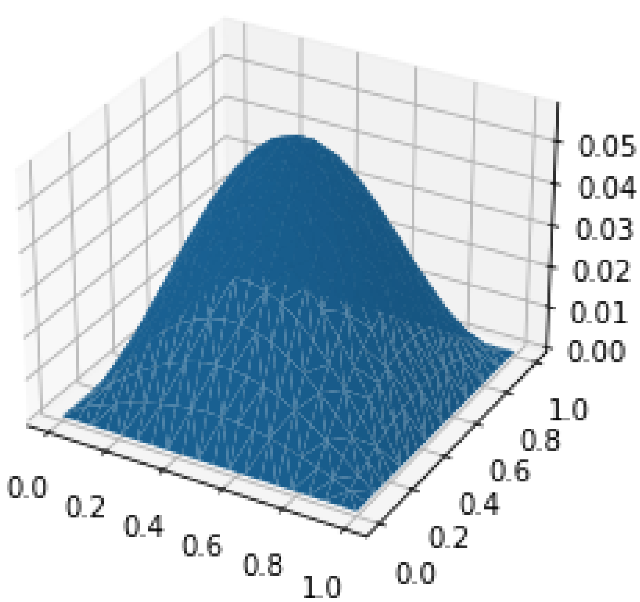


Figure 1: solution obtenue pour n=20

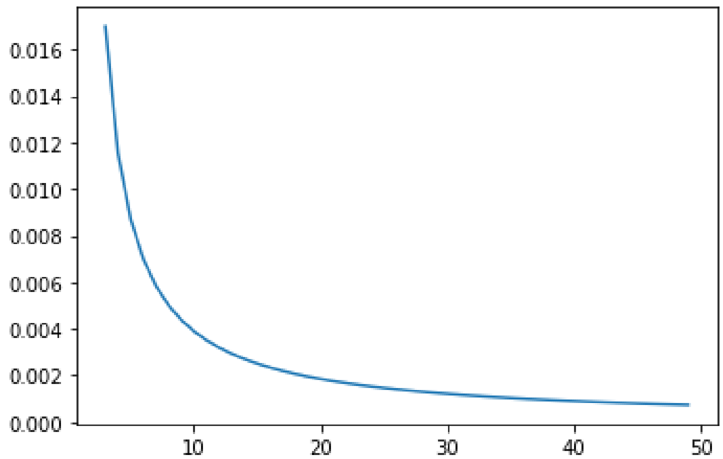


Figure 2: Erreur de la solution obtenue par rapport à la solution réelle en fonction de n

3 Maillage mixte et ajoût des conditions de Neumann

On considère un maillage du domaine Ω composé d'éléments triangles et quadrangles et on note T l'ensemble de ces éléments. Chaque triangle $\mathrm{T} \in T$ possède ainsi trois sommets qui correspondent à trois points de la discrétisation, et pour un triangle $\mathrm{T} = A_i A_j A_k$, les fonctions η_i, η_j, η_k sont affines sur ce triangle. De même quadrangle $\mathrm{Q} \in T$ possède quatre sommets qui correspondent à quatres points de la discrétisation, et pour un quadrangle $\mathrm{Q} = A_i A_j A_k A_l$, les fonctions $\eta_i, \eta_j, \eta_k, \eta_l$ sont affines sur ce quadrangle.

Le système à résoudre est donc $Ax = b$, avec $A \in R^{n \times n}$ définie par :

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \int_{\Omega} \bigtriangledown \eta_i(x,y)^{\top} \bigtriangledown \eta_i(x,y)\ dx\ dy \\
&= \sum_{\mathrm{T} \in T} \int_{\mathrm{T}} \bigtriangledown \eta_i(x,y)^{\top} \bigtriangledown \eta_i(x,y)\ dx\ dy + \sum_{\mathrm{Q} \in T} \int_{\mathrm{Q}} \bigtriangledown \eta_i(x,y)^{\top} \bigtriangledown \eta_i(x,y)\ dx\ dy
\end{aligned}$$

Remarque : On pourra calculer la somme sur les triangles de la même manière que dans la dernière partie. Il suffit donc maintenant de calculer la somme sur les quadrangles. Ainsi on procédera de la manière suivante : Pour chaque quadrangle, on calcule la matrice $\left[M_Q^A\right] \in R^{4 \times 4}$ dont les éléments correspondent à l'intégrale calculée pour le point i et le point j.

3.1 Calcul de la matrice de raideur A pour un élément quadrangle

Pour obtenir la matrice de raideur A des éléments quadrangles, nous devons calculer l'intégrale :

$$M_{ij} = \int_Q \nabla\eta_i \cdot \nabla\eta_j = \int_0^1 \int_0^1 \nabla\varphi_i^T (J_\varphi J_\varphi^T)^{-1} \nabla\varphi_j \, dx \, dy$$

On pose tout d'abord :

$(J_\varphi J_\varphi^T)^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$

De plus, on a :

$$\varphi_1(x,y) = (1-x)(1-y) \qquad \nabla\varphi_1(x,y) = \begin{pmatrix} -(1-y) \\ -(1-x) \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2(x,y) = x(1-y) \qquad \nabla\varphi_2(x,y) = \begin{pmatrix} 1-y \\ -x \end{pmatrix}$$

$$\varphi_3(x,y) = xy \qquad \nabla\varphi_3(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$$\varphi_4(x,y) = (1-x)y \qquad \nabla\varphi_4(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ 1-x \end{pmatrix}$$

Puisque la matrice $\left[M_Q^A\right]$ est symétrique, nous n'avons à calculer que la partie supérieure de celle-ci. Voici un exemple de calcul d'un des coefficients :

$$\begin{aligned}
M_{22} &= |J\varphi| \int_0^1 \int_0^1 \nabla\varphi_2^T (J_\varphi J_\varphi^T)^{-1} \nabla\varphi_2 \, dx \, dy \\
&= |J\varphi| \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} 1-y & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-y \\ -x \end{pmatrix} \, dx \ dy \\
&= |J\varphi| \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} a(1-y)-bx & b(1-y)-cx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-y \\ -x \end{pmatrix} \, dx \ dy \\
&= |J\varphi| \int_0^1 \int_0^1 (a(1-y)^2 - 2b(1-y)x + cx^2) \ dx \ dy \\
&= |J\varphi| \int_0^1 \left(a(1-y)^2 - b(1-y) + \frac{c}{3} \right) \ dy \\
&= |J\varphi| \left(\frac{a}{3} - \frac{b}{2} + \frac{c}{3} \right) \\
&= \frac{|J\varphi|}{6} (2a - 3b + 2c)
\end{aligned}$$

Au final on obtient :

$$\left[M_Q^A\right] = \frac{|J\varphi|}{6}\begin{pmatrix} 2a+3b+2c & -2a+c & -a-3b-c & a-2c \\ -2a+c & 2a-3b+2c & a-2c & -a+3b-c \\ -a-3b-c & a-2c & 2a+3b+2c & -2a+c \\ a-2c & -a+3b-c & -2a+c & 2a-3b+2c \end{pmatrix}$$

3.2 Calcul du second membre b pour un élément quadrangle

Pour calculer le second membre b, on utilise les formules :

- $\int_Q f\eta_j dx \approx \frac{\alpha}{4} f(x_G, y_G)$
- $\alpha = norm(J_Q) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_4 - y_1 \end{vmatrix}$

Nous avons donc uniquement à calculer α et f appliqué au barycentre du quadrangle puis à ajouter ce terme dans b pour l'ensemble des sommets du quadrangle.

3.3 Résolution numérique

Pour résoudre numériquement (P), nous devons tout d'abord obtenir les matrices de raideurs A3 et A4 et les seconds membres b3 et b4 parallèlement pour les éléments triangles et les éléments quadrangles. Ensuite, il suffit de sommer ces matrices afin d'obtenir les matrices de raideurs A = A3 + A4 et le second membre b = b3 + b4 du problème (P).

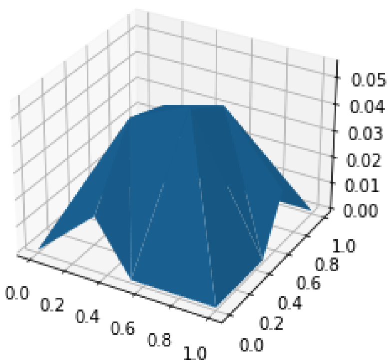
Ici, nous avons décidé de prendre :

- $f(x, y) = sin(\pi x)sin(\pi y)$
- $ud(x, y) = 0$ (En imposant ud = c $\in R$, on surélève la courbe de c)
- $g(x, y) = 0$

On s'attend donc à obtenir :

$$u(x, y) = \frac{sin(\pi x)sin(\pi y)}{2\pi^2}$$

La résolution numérique de ce système avec maillage mixte nous donne :




```
L'erreur de cette méthode est : 0.03408952494743491
```

Figure 3: solution obtenue pour n=4

4 Compléments : introduction d'un nouveau terme dans l'EDP

Dans cette partie, nous considéreront la nouvelle équation :

$$(P)\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u(x,y)+c_0 u(x,y) & = & f(x,y) & sur\ \Omega \\ u(x,y) & = & 0 & sur\ \partial\Omega \end{array}\right.$$

avec $c_0 > 0$ une constante.

4.1 Formulation variationnelle

4.1.1 Expression sous forme intégrale

Montrons que la formulation variationnelle de (P) s'écrit :
Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que :

$$\forall \omega \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \bigtriangledown u. \bigtriangledown \omega \ \mathrm{dx} + c_0 \int_\Omega u\omega \ \mathrm{dx} = \int_\Omega f\omega \ \mathrm{dx} \tag{1}$$

<u>*Démonstration :*</u>
Soit u $\in H_0^1(\Omega)$ solution de (P).
Reprenons la première équation de l'énoncé et multiplions la par $\omega \in H_0^1$.

$$\forall \omega \in H_0^1(\Omega), -\Delta u\omega + c_0.u\omega = f\omega \tag{2}$$

En intégrant sur Ω, on obtient (c_0 est une constante):

$$\forall \omega \in H_0^1(\Omega), -\int_\Omega \Delta u\omega \ \mathrm{d}x + c_0 \int_\Omega u\omega \ \mathrm{d}x = \int_\Omega f\omega \ \mathrm{d}x \tag{3}$$

En utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\forall \omega \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \bigtriangledown u. \bigtriangledown \omega \ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \gamma_0(v)\gamma_1(u) \ \mathrm{d}x + c_0 \int_\Omega u\omega \ \mathrm{d}x = \int_\Omega f\omega \ \mathrm{d}x \tag{4}$$

Or d'après la deuxième équation $\forall (x,y) \in \partial\Omega, u(x,y) = 0$. Ainsi on obtient bien :

$$\forall \omega \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \bigtriangledown u. \bigtriangledown \omega \ \mathrm{d}x + c_0 \int_\Omega u\omega \ \mathrm{d}x = \int_\Omega f\omega \ \mathrm{d}x \tag{5}$$

Le problème peut alors s'écrire :
Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\forall \omega \in H_0^1$, a(u,v) = l(v) avec

$$a : \left\{\begin{array}{ll} H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) & \longrightarrow R \\ (u \ \ , \ \ w) & \longmapsto \int_\Omega \bigtriangledown u. \bigtriangledown \omega \ \mathrm{d}x + c_0 \int_\Omega u\omega \ \mathrm{d}x \end{array}\right. \qquad l : \left\{\begin{array}{ll} H_0^1(\Omega) & \longrightarrow R \\ w & \longmapsto \int_\Omega f\omega \ \mathrm{d}x \end{array}\right.$$

4.1.2 Existence et unicité de solution

Montrons que (P) admet bien une unique solution.

Tout d'abord Ω est un ouvert borné de $R^2, H_0^1(R)$ muni de $<,>_{(1,\Omega)}$ est un Hilbert avec :

$$<,>_{(1,\Omega)}: \begin{cases} R^2 \times R^2 & \longrightarrow R \\ (u \quad , \quad v) & \longmapsto \sum_1^n (\frac{\partial u}{\partial xi}, \frac{\partial v}{\partial xi})_{L^2(R)} \;=\; (\bigtriangledown u, \bigtriangledown v)_{L^2(R)} \end{cases}$$

1) Montrons tout d'abord que l est linéaire continue :

• l est linéaire par linéarité de l'intégrale.

• Pour l continue, on cherche à montrer que :

$$\exists M \geq 0, \forall v \in H_0^1(\Omega), |l(v)| \leq M\, |v|_{(1,\Omega)}$$

Or $f \in L^2(\Omega)$ et $v \in L^2(R)$ donc

$$\begin{aligned} |l(v)| &= \left|(f,v)_{L^2(\Omega)}\right| \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\, \|v\|_{L^2(\Omega)} \text{ (Cauchy-Schwarz)} \end{aligned}$$

Or Ω est un ouvert borné, donc par inégalité de Poincaré :

$$\exists C \geq 0, \forall v \in H_0^1(\Omega), \|v\| \leq |v|_{(1,\Omega)}$$

D'où

$$\|l(v)\| \leq C\, \|f\|_{L^2(\Omega)}\, |v|_{(1,\Omega)} \text{ avec } M = C\, \|f\|_{L^2(\Omega)} \geq 0$$

On a donc bien l continue sur $H_0^1(\Omega)$.

2) Montrons désormais que a est bilinéaire continue et coercive :

• bilinéarité claire.

• Pour a continue, on cherche à montrer que :

$$\exists M \geq 0, \forall (u,v) \in H_0^1(\Omega)^2, |a(u,v)| \leq M\, |u|_{(1,\Omega)}\, |v|_{(1,\Omega)}$$

Or : pour $(u,v) \in H_0^1(\Omega)^2$, On a:

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &= \left|\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx + c_0 \int_\Omega uv \; dx\right| \\ &\leq \left|\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx\right| + c_0 \left|\int_\Omega uv \; dx\right| \; (car\; c_0 > 0) \\ &\leq |< u,v >_{1,\Omega}| + c_0 \left|< u,v >_{L^2(\Omega)})\right| \\ &\leq |u|_{1,\Omega}\, |v|_{1,\Omega} + c_0 ||u||_{L^2(\Omega)} ||v||_{L^2(\Omega)} \text{ (Cauchy-Schwarz)} \\ &\leq |u|_{1,\Omega}\, |v|_{1,\Omega} + c_0 c_\Omega\, |u|_{1,\Omega}\, c_\Omega\, |v|_{1,\Omega} \text{ (Inégalité de Poincaré)} \\ &\leq (1 + c_0 c_\Omega^2)\, |u|_{1,\Omega}\, |v|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

Alors pour M $= (1 + c_0 c_\Omega^2)$, on aboutit à la continuité de a.

• Pour a coercive, on cherche à montrer que :

$$\exists \alpha > 0, \forall u \in H_0^1(\Omega), a(u,u) \geq \alpha \, |u|^2_{(1,\Omega)}$$

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$, alors :

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \int_\Omega (\nabla u)^2 \mathrm{d}x + c_0 \int_\Omega u^2 \mathrm{d}x \\ &\geq \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \quad (\text{car } c_0 > 0) \\ &\geq |u|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

Alors pour alpha = 1, on aboutit à la coercivité de a.

- Bilan :

• a est bilinéaire, continue et coercive
• l est linéaire et continue

Alors par le théorème de Lax-Milgram:

$$\exists ! u \in H_0^1(\Omega) \textit{ tel que } \forall v \in H_0^1(\Omega) \;:\; a(u,v) = l(v)$$

4.2 Forme variationnelle discrète

4.2.1 Reformulation du problème sous forme Ax = b

La forme variationnelle discrète est obtenue en remplaçant les espaces de fonctions continus par des espaces de fonctions discrètes à l'aide de la méthode des éléments finis. En particulier, les fonctions de base η_i sont utilisées pour discrétiser l'espace de fonctions $H_0^1(\Omega)$, et la solution discrète u_h est obtenue en cherchant une combinaison linéaire de ces fonctions de base, notre problème discret devient alors :

> Trouver $v_h \in V_h$ tel que $\forall w_h \in V_h : a(v_h, w_h) = l(w_h)$, avec V_h un sous espace vectoriel de $H_0^1(\Omega)$ de dimension finie n (qui représente aussi le degré de liberté).

Or, $\forall v_h \in V_h, \exists!(x_i)i \in [1,n] \in R^n$ tel que $v_h = \sum_{i=1}^n x_i \eta_i$.
Donc : v_h solution de $P_{FV_h} \Rightarrow \forall w_h \in V_h : a(v_h, w_h) = l(w_h)$
$\Rightarrow \forall i \in [1,n] : a(v_h, \eta_i) = l(\eta_i)$.
$\Rightarrow \forall i \in [1,n] : a(\sum_{j=1}^n x_j \eta_j, \eta_i) = l(\eta_i)$
$\Rightarrow \forall i \in [1,n] : \sum_{j=1}^n x_j a(\eta_j, \eta_i) = l(\eta_i)$
$\Rightarrow Ax = b$ avec :

• $A \in M_n(R)$ tel que

$$\forall i,j \in [1,n]^2 : Ai,j = a(\eta_j, \eta_i) = \int_\Omega \triangledown \eta_j^\mathsf{T} \triangledown \eta_i \; \mathrm{d}x + c_0 \int_\Omega \eta_j \eta_i \; \mathrm{d}x$$

• $b \in R^n$: $\forall i \in [1,n] : b_i = l(\eta_i) = \int_\Omega f\eta_i \; \mathrm{d}x$
• $x = (x_i)_{i\in[1,n]} \in R^n$

4.2.2 Existence et unicité de la solution discrète

Soit $x \in R^n$ un vecteur non nul, on a :

$x^T Ax = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^n a(\eta_i, \eta_j) x_i x_j = a\left(\sum_{j=1}^n x_j\eta_j, \sum_{i=1}^n x_i\eta_i\right)$
donc $x^T Ax = a(x^*, x^*) \geq |x^*|^2_{1,\Omega}$ (coercivité de a).
Si $|x^*|^2_{1,\Omega} = 0$ alors $x^* = 0$ alors $\forall i \in [1,n] : x_i = 0$ donc $x = 0$.
Alors $x^T Ax > 0$ donc A est définie positive et le système admet une unique solution.

4.3 Calcul de l'intégrale

On sait que : $\eta_j(x,y) = \varphi_j(\Phi_T^{-1}(x,y))$ (relation 12 de l'énoncé) alors par un changement de variable on obtient :

$$c_0 \int_T \eta_j \eta_i \; \mathrm{d}x = c_0 \int_{T_1} \varphi_j \varphi_i |J_T| \; \mathrm{d}u \; \mathrm{d}v$$

avec T_1 le triangle unité, d'où :

$$c_0 \int_T \eta_j \eta_i \; \mathrm{d}x = c_0 \cdot \alpha \int_0^1 \int_0^{1-v} \varphi_j \varphi_i \; \mathrm{d}u \; \mathrm{d}v$$

La matrice A étant symétrique, nous n'avons à calculer que la partie supérieure de celle-ci. Voici un exemple de calcul d'un des coefficients :

$$\begin{aligned}
M_{11} &= c_0 \cdot \alpha \int_0^1 \int_0^{1-v} \varphi_1 \varphi_1 \; \mathrm{d}u \; \mathrm{d}v \\
&= c_0 \cdot \alpha \int_0^1 \int_0^{1-v} (1-u-v)(1-u-v) \; \mathrm{d}u \; \mathrm{d}v \\
&= c_0 \cdot \alpha \int_0^1 \int_0^{1-v} (1-u-v)^2 \; \mathrm{d}u \; \mathrm{d}v \\
&= c_0 \cdot \alpha \int_0^1 \left[\frac{-(1-u-v)^3}{3}\right]_0^{1-v} \; \mathrm{d}v \\
&= c_0 \cdot \alpha \int_0^1 \frac{(1-v)^3}{3} \; \mathrm{d}v \\
&= c_0 \cdot \alpha \left[\frac{-(1-v)^4}{12}\right]_0^1 \\
&= c_0 \cdot \alpha \cdot \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$M_{11} = M_{22} = M_{33} = c_0 \cdot \alpha \cdot \frac{1}{12}$$

$$M_{12} = M_{23} = M_{13} = c_0 \cdot \alpha \cdot \frac{1}{24}$$

Enfin, pour obtenir la matrice A du problème, nous n'avons plus qu'à sommer la matrice M que nous venons de calculer avec la matrice A obtenu dans la première partir sur le maillage triangulaire. La matrice b reste la même que dans la première partie sur le maillage triangulaire.

4.4 Résolution numérique

Rappel du problème (P) :

$$(P) \left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u(x,y) + c_0 u(x,y) & = & f(x,y) & sur\ \Omega \\ u(x,y) & = & 0 & sur\ \partial\Omega \end{array} \right.$$

avec $c_0 > 0$ une constante.

Ici, nous avons décidé de prendre :

- $f(x,y) = sin(\pi x)sin(\pi y) + c0 \times \dfrac{sin(\pi x)sin(\pi y)}{2\pi^2}$
- $c_0 = 3$

On s'attend donc à obtenir :

$$u(x,y) = \frac{sin(\pi x)sin(\pi y)}{2\pi^2}$$

La résolution numérique de ce système avec maillage triangulaire nous donne :

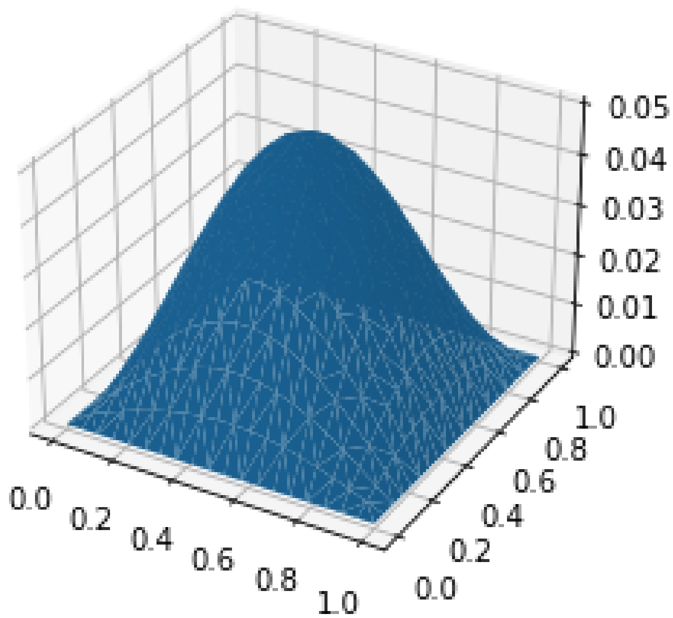


Figure 4: solution obtenue pour n=20

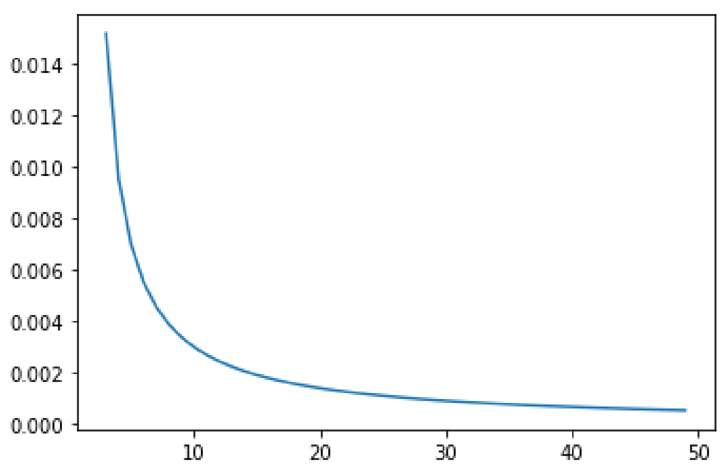


Figure 5: Erreur de la solution obtenue par rapport à la solution réelle en fonction de n