المدرسة الحسنية للأشغال العمومية
ECOLE HASSANIA DES TRAVAUX PUBLICS

1GI

Projet

Le problème des quatre couleurs

Auteurs :
Issam ASSAFI
Othmane JAZOULI
Yassine SETTAI
Omar ZOUAID

Encadrant :
Pr. Salem NAFIRI

Table des matières

Table des figures

Introduction

Dans le cadre du projet final de l'élément de module "Calcul scientifique" nous avons choisi de traiter le problème des quatre couleurs .

L'énoncé du problème est si simple : "On veut colorier une carte géographique tracée sur le plan de manière que deux régions voisines soient toujours de couleurs différentes, et ce en utilisant le minimum possible de couleurs".

Ce sujet a suscité notre intérêt d'abord pour sa popularité et pour la simplicité de son énoncé, mais surtout pour la multitude d'aspects que nous devions traiter pour la résolution de notre problème .

Parmi lesquelles nous citons :

- Une initiation à l'étude des graphes planaires.
- L'étude de deux algorithmes de coloriage des graphes, et la comparaison entre eux.
- L'implémentation de ces dits algorithmes sous forme d'un programme informatique.
- La mise en place d'une interface graphique optimale et interactive pour le programme, permettant de colorier deux cartes géographiques, dont celle du Maroc.

Au départ, nous proposons une contextualisation historique du problème des quatre couleurs, ensuite nous aborderons une démonstration de la solvabilité du problème pour les cas de cinq et six couleurs, puis après nous présenterons deux algorithmes pour la résolution numérique du problème, et enfin nous allons citer quelques-uns parmi les champs d'application du problème des quatre couleurs.

Contexte historique :

- Le problème de quatre couleurs est un problème où on voit clairement la portée de l'informatique, qui a vraiment changé la donne, une preuve comme celle du théorème de quatre couleurs était impossible à rédiger mais avec l'apparition de la machine la solution devient de plus en plus facile.
- Le problème de quatre couleurs trouve ses racines dans le 18éme siècle, et exactement en 1840, même si des historiens assument que les cartographes connurent cette théorie avant cette date.
- En effet le premier savant qui a creusé là-dessus est August Möbius, avec sa théorie de cinq princes qui explique le fait qu'il est impossible de diviser une surface en cinq parties mutuellement frontières, du coup cette théorie est la base de notre problème majeur.
- En 1852 le mathématicien anglais Francis Guthrie à remarquer qu'il suffit quatre couleurs pour colorier n'importe quelle carte planaire, il communique sa remarque à son ancien professeur Morgan, ce dernier s'adresse à l'irlandais Hamilton William pour l'aider à prouver ce théorème, mais il s'est avéré que l'irlandais n'a pas trouvé de l'intérêt à démonter le théorème.
- La communauté scientifique attend jusqu'à 1889 pour se disposer de la première preuve mathématique mais qui se contente du cas de cinq couleurs proposé par Alfred Kempe. En effet Alfred essaya de démonter le théorème de quatre couleurs mais par accident il tomba sur le cas du cinq couleurs. Mais la preuve de Alfred n'a guère persévéré, car en 1890 Percy Heawood trouve une erreur fatale dans le raisonnement de d'Alfred qu'il corrigera par la suite.
- La question reste ouverte pour le théorème de quatre couleurs, les savants ne cessèrent jamais de tenter leurs chances. En 1970 Heinrich Tietze modélise pour la premier fois une carte sous forme d'un graphe, et après un travail acharné il a pensé à un raisonnement informatique avec 8900 configuration à traitées. Mais le résultat final vient après un siècle de recherche mais cette fois avec une combinaison entre deux scientifique Kenneth Appel mathématicien américain et Wolfgang Haken mathématicien allemand qui ont réduit le nombre de configuration à 1478 au lieu de 8900, et ils ont exploité la machine pour démontrer le théorème de quatre couleurs ce qui est un évènement inédit dans l'histoire des maths, car c'est la première fois qu'on utilise une machine pour résoudre un problème mathématique.
- Le processus de la résolution ne s'arrête pas là, en 2004 Georges Gonthier chercheur canadien en informatique, réduit le nombre de configuration à traitées à 633, et après une réservation de la part de la communauté scientifique la preuve est finalement admise définitivement.

Chapitre I

La résolution théorique du problème

I.1 La dualité cartes - graphes :

Les problèmes de coloriage de carte est équivalent à un problème de coloriage de graphe : la capitale de chaque région par exemple peut représenter un sommet du graphe, et chaque deux pays adjacents (ayant une frontière segment, et non pas un point) sont reliés par une arête Pour rendre les explications clairs, nous utiliserons la formulation en graphes dans la suite de cette section .

I.2 Les notions fondamentales :

Avant d'aborder la preuve du théorème, il est nécessaire de définir les notions et les théorèmes évoquées dans la preuve :

Un graphe planaire : est un graphe qui peut être dessiné sur le plan sans que les arêtes ne se croisent.

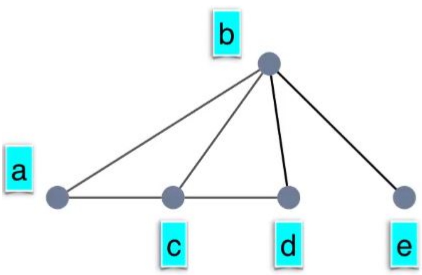

FIGURE I.1 – Exemple d'un graphe planaire

C'est un graphe planaire

Parfois, un graphe peut paraitre non planaire alors qu'il l'est : en changeant la disposition des arêtes du graphe à gauche, on constate qu'il est planaire .

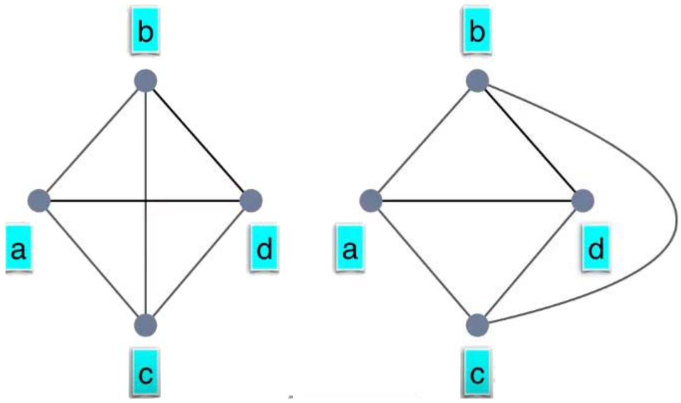

FIGURE I.2 – Graphe constaté planaire

Un graphe connexe : un graphe G est dit connexe lorsqu'il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de G. Le graphe à gauche est connexe, celui à droite ne l'est pas.

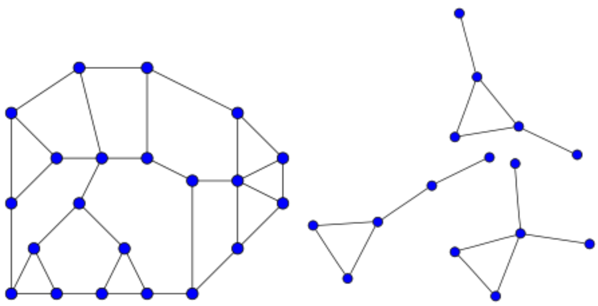

FIGURE I.3 – Graphe connexe / Graphe non connexe

Le degré d'un sommet : est le nombre d'arêtes ayant une extrémité en ce sommet.

I.3 Théorèmes :

I.3.1 La relation d'Euler-Descartes :

Elle relie le nombre d'arêtes, de sommets et de faces d'un graphe planaire.

Théorème : Soit G un graphe planaire possédant s sommets, a arêtes et f faces. Alors s-a+f=2

Exemple explicatif :

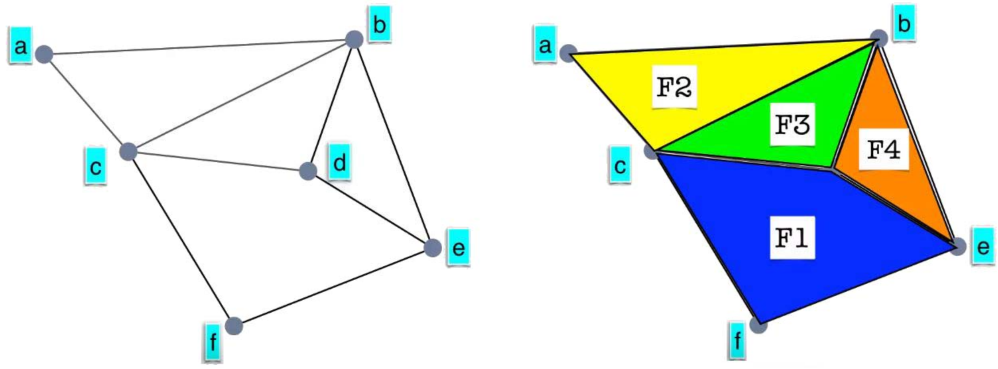

FIGURE I.4 – Exemple d'application de la relation d'Euler

Nous avons 4 faces internes, plus la face externe . Et le nombre de sommets est de 6, le nombre d'arêtes est de 9 : On applique la relation d'Euler est vérifiée : 6-9+5=2

I.3.2 Corollaire 1 :

Cette formule permet de démontrer que tout graphe simple planaire connexe, ayant au moins trois sommets, vérifie la majoration suivante :

a $\leqslant$ 3 * s - 6

I.3.3 Corollaire 2 :

(Un résultat direct de cette majoration) Dans un graphe planaire, il existe un sommet v ayant un degré deg(v) $\leqslant$ 6.

Preuve du Corollaire 2 :

Soit G un graphe planaire connecté, ayant s sommets et a arêtes : Il est claire que la somme des degré de tous les sommets du graphe est égale à 2 fois le nombre total des arêtes (chaque arête lie 2 sommets) :

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2a \leq 2(3s - 6) = 6s - 12$$

FIGURE I.5 – L'existance d'un sommet V de degré au plus 5

D'où le résultat : Il existe un sommet v réalisant

$\deg(v) \leqslant 2(3s - 6)/s$

$\leqslant 6 - 12/s$

$\leqslant 6$

I.3.4 Preuve du théorème : cas de six couleurs

Nous allons suivre un raisonnement par récurrence :

- Propriété : Tout graphe G planaire , ayant n sommets est 6-colorable.
- Initiation : On vérifie la propriété pour n=6 Nous avons, trivialement une couleur à attribuer à chaque sommet.
- Hérédité : Supposons la propriété est vraie pour un entier n, et prouvons la pour n+1 : Soit G un graphe planaire à n+1 sommets. D'après corollaire d'Euler, il existe au moins un sommet V dans le graphe G, qui a un degré au plus 5 : deg(v) <6 .

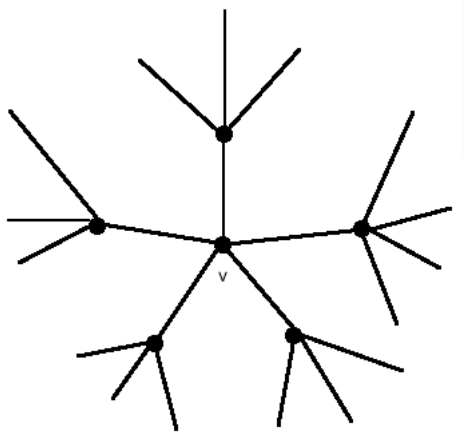

FIGURE I.6 – Le graphe avec V sommets

Si on supprime v du graphe G, il résulte un graphe G' ayant n sommets, on lui applique l'hypothèse de récurrence : G' est 6-colorable.

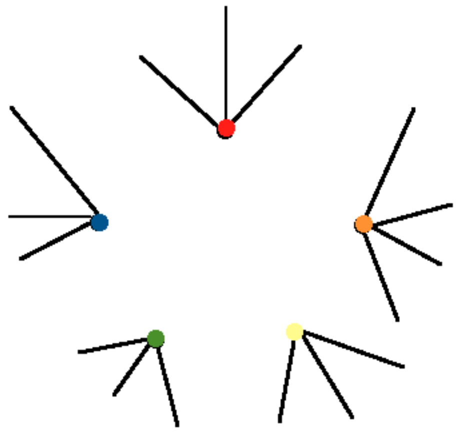

Figure I.7 – Le graphe après avoir supprimé le sommet V

Les 5 sommets adjacents de v sont coloriés (au plus) de 5 couleurs, il reste donc un 6ème couleur disponible pour v.

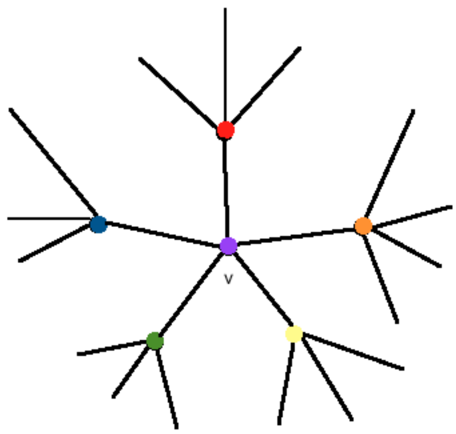

Figure I.8 – Le graphe est 6-coloriable

Conclusion : Le graphe G à n+1 sommets est 6-coloriable, et donc le raisonnement par récurrence est vérifié.

I.3.5 Preuve du théorème : cas de cinq couleurs

*Nous allons suivre un raisonnement par contradiction : supposons qu'il existe des graphes planaires non coloriables par 5 couleurs .

*Prenons G le plus petit graphe (en nombre de sommets) planaire connexe qui ne soit pas "5-coloriable" .

*le corollaire d'Euler nous garantit l'existence d'un sommet V de degré au plus 5 : deg(v) <6 .

*Objectif : Colorions tous les sommets sauf V, et montrons qu'on peut toujours trouver une combinaison pour que V soit aussi colorié tout en respectant le problème des cinq couleurs .

Deux cas se présentent :

1er cas :

Si deg(v)<5

Il y a au plus 4 couleurs déjà utilisées , la cinquième couleur reste disponible pour V .

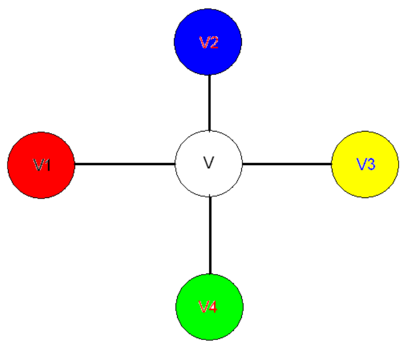

FIGURE I.9 – Cas deg(v)<5 : le graphe est trivialement 5-coloriable

2eme cas : Si deg(v)$=5$ -Si deux parmi v1,v2,v3,v4,v5 sont coloriés par la même couleur , il reste une couleur disponible pour V .

-Sinon :

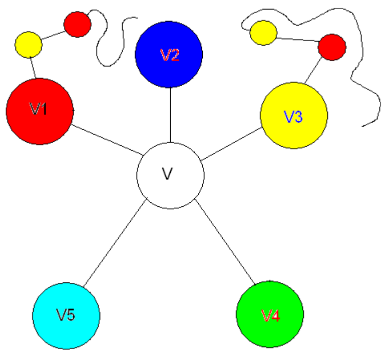

FIGURE I.10 – Si les sommets sont coloriés différemment

-Si v1 et v3 ne sont pas liés entre eux : On peut contourner le problème en donnant à v1 par exemple la même couleur que v3 , et libérer une couleur pour V :

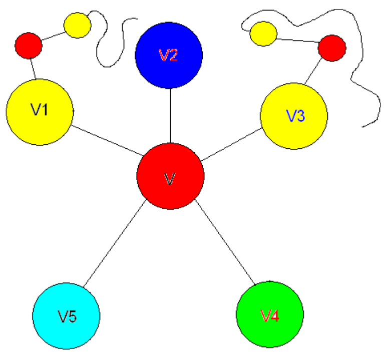

FIGURE I.11 – V1 prend une couleur identique que V3

-Si v1 et v3 sont liés entre eux par une chaine élémentaire , où chaque sommet dans cette chaine est colorié soit comme v1 , soit comme v3 :

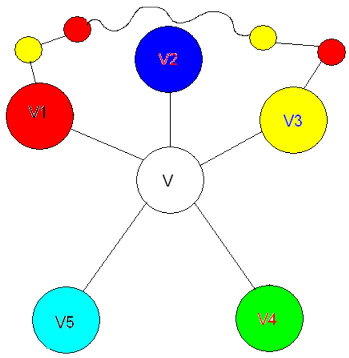

FIGURE I.12 – Si V1 et V3 sont liés par une chaine élémentaire

On passe à un traitement similaire mais cette fois pour v2 et v4 :

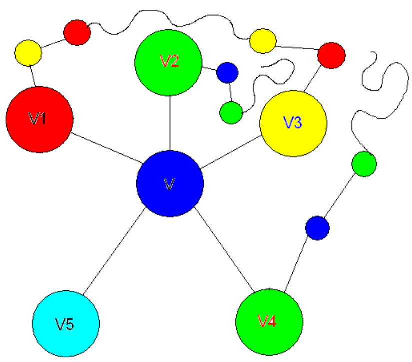

FIGURE I.13 – Traitement similaire pour V2 et V4

Mais, si v2 et v4 sont eux aussi liés entre eux par une chaine élémentaire où chaque sommet dans cette chaine est colorié soit comme v2 , soit comme v4 :

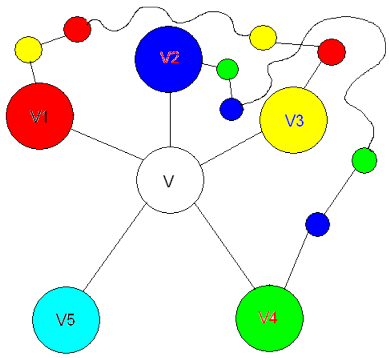

FIGURE I.14 – Si V2 et V4 sont liés par une chaine élémentaire

Cela conduit donc à une intersection entre les deux chaines , ce qui contredit le caractère planaire de notre graphe, donc ce cas-là ne peut jamais arriver.

Conclusion :Il y a toujours un moyen de contourner le problème, et libérer une couleur pour V : chaque graphe peut donc être colorié par cinq couleurs .

I.3.6 Le théorème des quatre couleurs :

Maintenant, si on essaye de faire le même raisonnement suivi pour le cas de 5 couleurs pour prouver que chaque graphe peut être coloré par 4 couleurs, notre raisonnement ne va pas aboutir à un résultat :
Le corollaire d'Euler nous garantit l'existence d'un sommet de degré au plus 5. L'existence d'un sommet de degré au plus 4 n'est pas garantie .

En effet, jusqu'aujourd'hui, aucune preuve classique n'a été approuvée pour le cas de 4 couleurs. Mais il existe des démonstrations mathématiques assistées par ordinateur, via un programme informatique qui permet de trouver une méthode de résolution automatique.Durant la partie d'implémentation numérique, nous allons traiter certains algorithmes le coloriage 4-couleurs d'une carte.

Chapitre II

Implémentation numérique du problème

Nous avons vu dans les sections précédentes que n'importe quelle carte peut être coloriée avec quatre couleurs, et cela est sûr et démontré grâce à l'évolution de l'informatique.

Mais vu qu'on a seulement traité la possibilité de réaliser un tel coloriage, alors la démarche à suivre pour l'effectuer sur une carte donnée en utilisant seulement 4 couleurs n'est pas si claire et demeure ambiguë. Dans cette partie alors, on va s'intéresser à étudier les différentes méthodes ou algorithmes à suivre permettant de colorier une carte tout en respectant la contrainte des 4 couleurs.

Afin de mettre en lumière les résultats de ces algorithmes, on a effectué leur implémentation numérique dans programme équipé d'une solide interface graphique permettant d'interagir avec les résultats en temps réels tout en les regardant de plus près, 2 algorithmes principales vont être étudié, chacun et ses propriétés, avantages et inconvénients :

1. Algorithme Glouton (Greedy Algorithm)
2. Algorithme Retour-sur-trace (Baktracking Algorithm)

On a appliqué ces deux algorithmes sur deux cartes de différentes complexités :

1. Carte de Maroc
2. Carte d'Afrique

Le programme permettant la simulation des deux algorithmes sur les deux cartes proposées a été en langage C++, en utilisant la bibliothèque SDL2 pour réaliser la partie graphique, l'interface est intuitive et simple à comprendre, c'est-à-dire qu'il est facile de naviguer sur le programme voir les différents résultats.

II.1 Modélisation numérique du problème

Le problème en question exige d'opérer un traitement informatique sur des cartes. Vu que la connexité des régions joue un rôle important dans notre étude alors la meilleure modélisation possible serait un graphe qui peut illustrer de manière presque parfaite les caractéristiques d'une carte, dans un premier temps il est nécessaire de transformer les cartes en des graphes connexes planaires.

L'implémentation d'un graphe en informatique peut être effectuée de différentes manière, une présentation classique est la matrice d'adjacents M M[i][j]=1 si nœud i est adjacent à j, sinon M[i][j]=0 (*remarque : la matrice M est symétrique*)

Carte de Maroc :

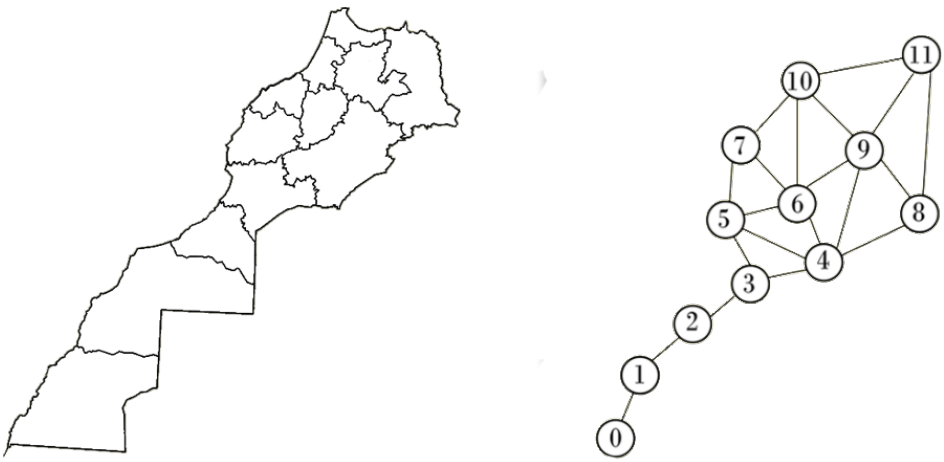

FIGURE II.1 – Carte de Maroc et sa modélisation en un graphe

Carte d'Afrique :

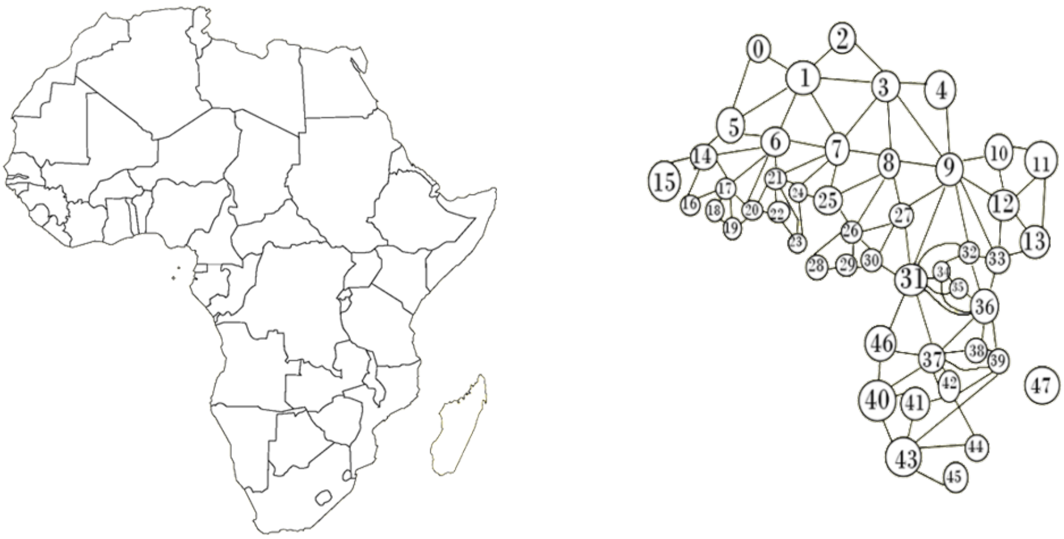

Figure II.2 – Carte d'afrique et sa modélisation en un graphe

Couleurs à utiliser :

1. Vert
2. Rouge
3. Bleu
4. Jaune

II.2 Algorithme Glouton

- **Fonctionnement de l'algorithme :**

En informatique, un algorithme glouton est un algorithme qui suit le principe de faire, étape par étape, un choix optimum local. Dans certains cas cette approche permet d'arriver à un optimum global.

On va l'adapter à notre problème, en lui donnant lui donnant l'aspect d'une heuristique.

C'est un algorithme qui semble naïf et directe dans sa manière d'exécuter le coloriage.

Voici le fonctionnement de l'algorithme, en considérant pour l'entré un graphe de V sommets :

1. Colorier le premier sommet avec la première couleur
2. Faire ce qui suit pour les V-1 sommets restants

-> Considère le sommet actuellement sélectionné et le colorie avec la couleur la plus basse numérotée qui n'a pas été utilisée auparavant pour sommets colorés adjacents. Si toutes les couleurs utilisées précédemment apparaissent sur les sommets adjacents à v, on lui affecter une nouvelle couleur.

- **Nombre maximal de couleurs :**

L'algorithme ne garantit en aucun cas le coloriage d'une carte donnée par 4 couleurs. Mais il garantit l'utilisation de N+1 couleurs maximum si le degré maximal d'un sommet dans graphe en question est N. (En mathématiques, et plus particulièrement en théorie des graphes, le degré (ou valence) d'un sommet d'un graphe est le nombre de liens (arêtes ou arcs) reliant ce sommet.)

- **L'ordre est essentiel :**

L'ordre dans lequel les sommets ont été représentés joue un rôle important dans la détermination de nombre de couleurs à utiliser. Prenons un exemple pour bien assimiler ce point. On considère la palette des couleurs précédente dans le même ordre présenté :

Vert > Rouge > Bleu > Jaune :

1er cas : on a seulement utilisé 3 couleurs.

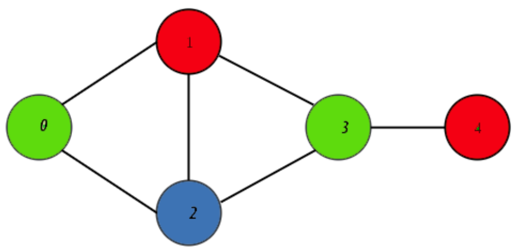

FIGURE II.3 – Graphe colorié avec l'algorithme glouton suivant un premier ordre

2eme cas : on a utilisé toutes les 4 couleurs.

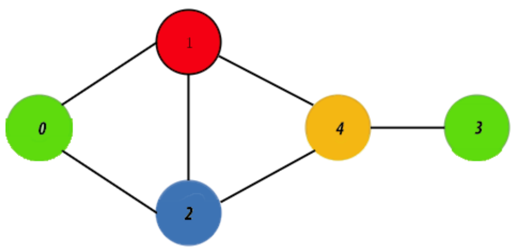

FIGURE II.4 – Graphe colorié avec l'algorithme glouton suivant un deuxième ordre

Remarque : Le même graphe, même algorithme. Mais deux colorations différentes ! Donc un ordre optimal peut mener à une solution optimale.

• Application de l'algorithme Glouton sur la carte de Maroc :

L'ordre des régions sera celui qui est représenté sur la modélisation de la carte en graphe. (0. pour Dakhla-Oued Eddahab jusqu'à 11. Tanger – Tétouan Al Hoceima)

Voici le résultat de la coloration :

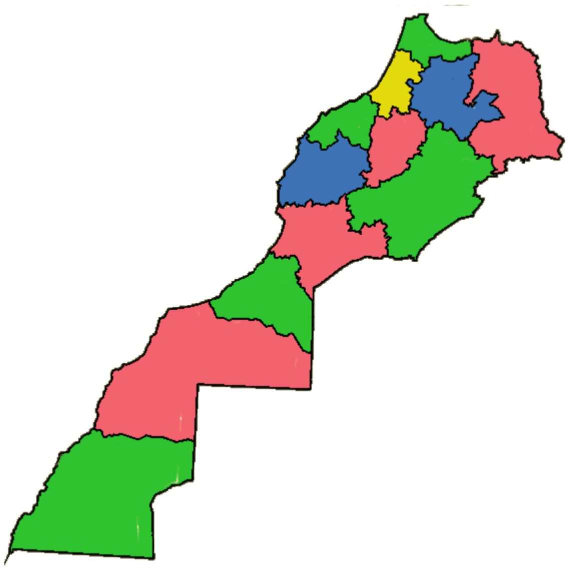

Figure II.5 – Carte de Maroc coloriée avec l'algorithme glouton

On remarque que l'algorithme Glouton permet effectivement de réaliser la coloration de la carte en 4 couleurs maximum comme énoncé dans le théorème. Mais une grande raison pour son succès revient à la simplicité de la carte de Maroc : 12 régions seulement avec des liaisons minimales. Testons alors l'efficacité de cet algorithme contre une carte plus défiante comme celle d'Afrique.

• Application de l'algorithme Glouton sur la carte d'Afrique :

L'ordre des régions sera celui qui est représenté sur la modélisation de la carte en graphe. (0. pour le Maorc jusqu'à 47. Madagascar)

Voici le résultat de la coloration :

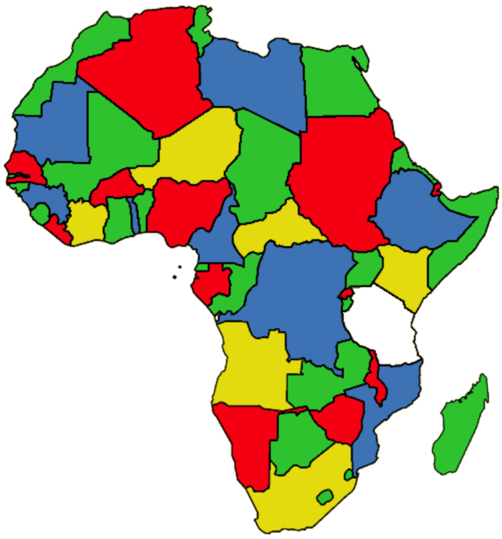

Figure II.6 – Carte d'Afrique coloriée avec l'algorithme glouton

On remarque que l'algorithme a échoué en quelque sorte. Tanzanie n'est pas coloriée de tout. Pour comprendre pourquoi ce qui a mené à cet échec, on vérifie le déroulement de coloriage :

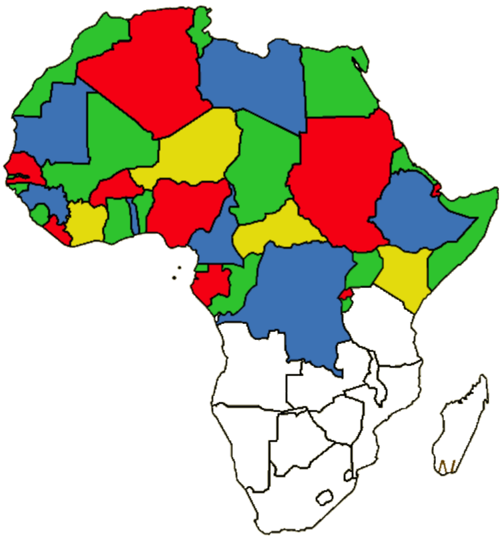

Figure II.7 – Obstacle empêchant la coloration complète de la carte dAfrique avec la'lgorihme glouton

C'est prochain tour est celui de la Tanzanie mais vu que ses voisins sont déjà colorié par la totalité des 4 couleurs possibles, alors on l'ignore. L'algorithme Glouton n'a pas pu colorier cette carte vue qu'elle est complexe et exige de trouver un ordre plus optimal.

Le deuxième algorithme pourrait-il alors résoudre ce problème en suivant le même ordre ?

II.3 Algorithme Retour-sur-trace :

FIGURE II.8 – Carte de Maroc coloriée avec l'algorithme retour-sur-trace

- **Fonctionnement de l'algorithme :**

Le retour sur trace (*appelé aussi Backtracking en anglais*) est une famille d'algorithmes qui consistent à revenir en arrière sur des décisions prises afin de sortir d'un blocage. La méthode des essais et erreurs constitue un exemple simple de Backtracking. Le terme est surtout utilisé en programmation, où il désigne une stratégie pour trouver des solutions à des problèmes de satisfaction de contraintes.

C'est un algorithme classique dans la résolution de jeu Sodoku par exemple :

Dans notre problème, on va l'adapter de la manière suivante :

L'idée est d'assigner les couleurs une par une à différents sommets, en partant du sommet 0. Avant d'assigner une couleur, on vérifie la sécurité en considérant des couleurs déjà assignées aux sommets adjacents. Si nous trouvons une attribution de couleur qui est sûre, nous marquons l'attribution de couleur dans le cadre de la solution.

Si nous ne trouvons pas de couleur à cause d'incompatibilité, nous revenons en arrière et retournons false. C'est un algorithme qui fonctionne de manière récursive.

- Application de l'algorithme Glouton sur la carte de Maroc :

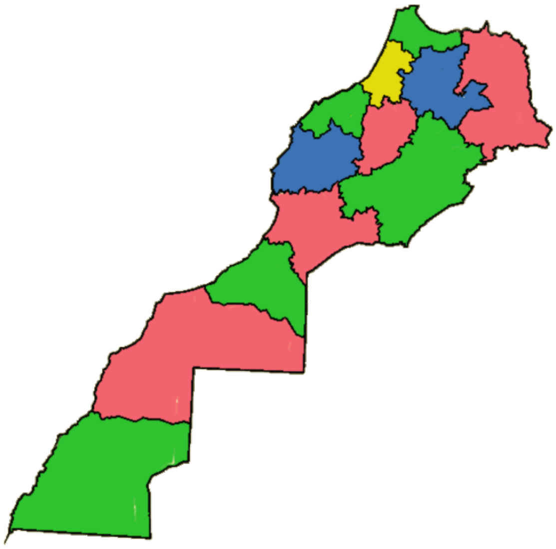

Figure II.9 – Carte du Maroc coloriée avec l'algorithme retour-sur-trace

L'algorithme a réussi à colorier la carte.

- Application de l'algorithme Glouton sur la carte d'Afrique :

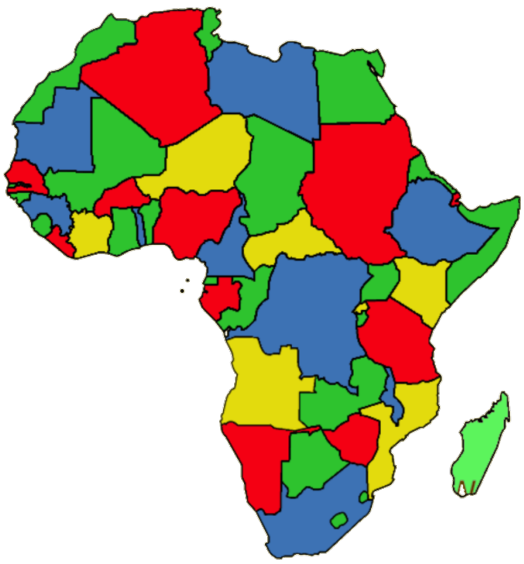

Figure II.10 – Carte d'Afrique coloriée avec l'algorithme retour-sur-trace

L'algorithme Retour-sur-trace a réussie à colorier la totalité de la carte, avec 3 retour en arrières effectué (il faut exécuter le programme et tester pour voir les retour en arrières)

Comparaison entre les deux algorithmes Ces deux algorithmes se ressemblent dans la manière dont ils choisissent la couleur à attribuer à une région (ou un pays), c'est tout simplement de choisir la couleur la plus basse dans la palette de couleur qui n'a pas encore été offerte à aucune des régions voisines. Mais la différence principale entre les deux est :

- l'algorithme Glouton est direct, si la méthode précédente ne mène pas à une certaine solution, il abandonne le sommet en question et passe à ce qui suit.
- L'algorithme Retour-sur-trace, dès qu'il rencontre un obstacle, il décide de retourner en arrière pour corriger le choix précédant qui a mené à l'erreur courante, et ensuite il avance.

L'algorithme Retour-sur-trace essaye en quelque sorte toutes les configurations possible suivant un ordre des sommets donné, jusqu'à trouver « la bonne solution ».

L'algorithme Glouton n'est qu'un cas particulier de celui qui précède, (exactement la première configuration testée par Retour-sur-trace). Pour pousser l'algorithme Retour-sur-trace à sa limite pour tester son efficacité, on l'a même testé pour la carte d'Afrique avec 3 couleurs seulement (il n'a pas réussi malheureusement, c'est prévisible vu que la carte est déjà complexe et aucun théorème de 3 couleurs n'existe) mais le test nous a donné une idée plus claire sur son fonctionnement

(*Vous pouvez le tester aussi, sur le program Africa Map > Backtracking algo BONUS 3*)

Chapitre III

Champs d'application

- L'affectation des fréquences GSM :

Le théorème des quatre couleurs a une application pratique dans l'affectation par un opérateur mobile des fréquences GSM aux zones de couverture des stations de base de son réseau (BTS = base transceiver station), la BTS peut émettre jusqu'à 35KM au max, et pour assurer la fiabilité et la performance du réseau, deux BTS adjacentes ne doivent en aucun cas se voir attribuer la même bande de fréquence.

En effet, un réseau GSM peut être modélisé par un graphe planaire, tel que les sommets de notre graphe représentent les BTS, et entre chaque deux hexagones adjacents il existe une arête.

L'exemple de réseau d'opérateur mobile GSM représente donc un exemple concret, où le théorème des quatre couleurs contribue à la résolution de la problématique.

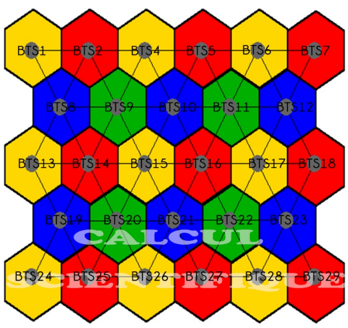

Figure III.1 – Réseau BTS colorié par quatre couleurs

- La préparation d'un Planning :

- Parmi les applications du théorème des quatre couleurs, on trouve timetable. Par exemple à l'EhP, durant la semaine des rattrapages il se peut qu'un élève ait deux rattrapages programmés dans le même jour et dans la même heure. On peut modéliser ce problème par un graphe où les sommets sont les matières, tel qu'une arête existe entre deux matières s'il y a au moins un élève qui va passer le rattrapage dans les deux matières.

- Il faut juste mentionner que dans certains cas, 4 couleurs ne seront pas suffisantes pour colorier le graphe (la condition de graphe planaire n'est pas toujours vérifiée). De plus, il faut prendre en compte un facteur nommé Chromatic Number, qui représente le nombre de couleurs minimales par lesquels on peut colorier un graphe quelconque sans que deux sommets adjacents n'aient la même couleur.

RQ : *dans notre cas, le nombre chromatique égal au nombre maximal de rattrapages qu'un étudiant a eu.*

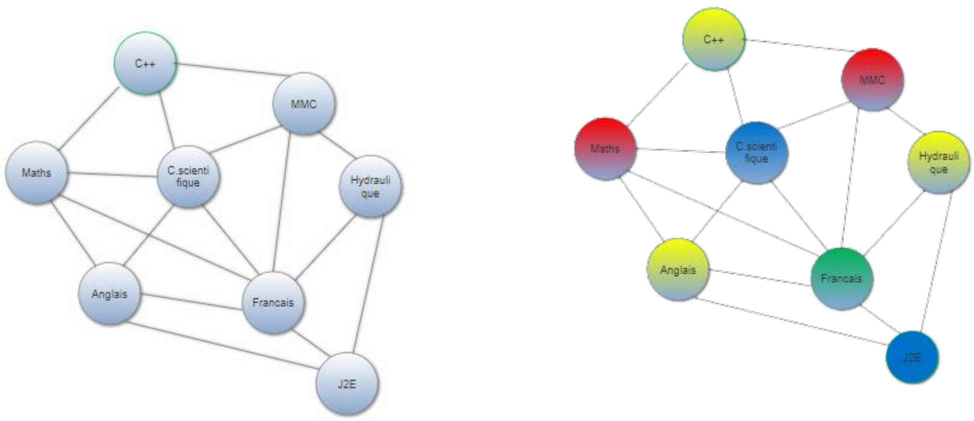

Figure III.2 – Graphe de matières avant et après coloration

- La mise à jour d'un réseau :

Dans les réseaux compliqués, il existe des centaines de serveurs qui sont liés entre eux. Lorsque on veut installer une mise à jour, il faut prendre en considération que deux serveurs adjacents n'installeraient pas la mise à jour simultanément, pour éviter que notre réseau tombe en panne. En fait, on peut résoudre la problématique on se basant sur le théorème de coloration d'un graphe, où chaque serveur est représenté par un sommet et entre deux serveurs adjacents il y'a une arête. Comme le cas de la préparation d'un planning, il se peut qu'avec quatre couleurs la coloration soit impossible.

Conclusion et perspectives

Le problème des quatre couleurs s'avère être parmi les problèmes les plus célèbres de mathématiques combinatoires. Plusieurs mathématiciens l'ont abordé, et plusieurs d'entre eux ont aboutit à des résultats faux. Jusqu'à l'instant, les démonstrations approuvées du problème sont toutes assistées par ordinateur. Mais des démonstrations mathématiques existent pour le cas du coloriage d'une carte planaire avec cinq ou six couleurs.

De plus, l'importance du problème des quatre couleurs dépasse la théorie au concret, puisqu'il sert à résoudre des problèmes d'affectation et de planning. Ainsi, en traitant ce sujet, nous avons voulu mettre en pratique ce que nous avons eu d'apprentissage lors de cette première année, et aussi de faire un travail collectif où chacun des membres de l'équipe a contribué à la réalisation de cette étude théorique-numérique du problème .

Bibliographie

[1] formule d'Euler pour les graphes planaires
http://web.itu.edu.tr/gencata/courses/GT/GTlecture6.pdf

[2] Théorème des six couleurs
https://courses.cit.cornell.edu/cis295_2004fa/6color.pdf

[3] Théorème des cinq couleurs
https://en.wikipedia.org/wiki/Five_colorcolor_theorem

[4] Théorème des quatre couleurs
http://www.math93.com/index.php/histoire-des-maths/les-developpements/388-le-theor

[5] Introduction à la théorie des graphes
http://www.unit.eu/cours/EnsROtice/module_de_base_voo7/co/coloration.html

[6] Algorihtme de DSATUR
https://fr.wikipedia.org/wiki/DSATUR

[7] Base transceiver station
http://www.maths-et-physique.net/article-2594820.html

EHTP
Km 7 Route d'El Jadida
BP 8108
31055 Casablanca