

## Exercice 1. Cutting-Stock

Nous avons des pièces qui ont toutes une longueur `RollWidth`. Chacune de ces pièces peut être découpée en plusieurs pièces. Nous avons reçu `NbItems` demandes. A chaque demande `d` correspond une longueur particulière `Size[d]` (évidemment inférieure à `RollWidth`) et un nombre de pièces à fournir `Amount[d]`. Cependant une pièce originale ne peut être découpée que selon un des motifs possibles décrits dans le tableau `Patterns`; l'objet `Pattern` qui représente un motif est un tuple composé de trois éléments : son id, son coût, et un tableau qui contient pour chaque longueur donnée les nombres de pièces résultantes, suite au découpage de la pièce originale selon le motif en question. Nous supposons ici que le coût est constant ; il est égal à 1 pour tous les motifs. L'objectif est de répondre à toutes les demandes en utilisant le nombre minimum des pièces originales.

**Question 1.** Ecrire le PLNE qui permet de résoudre une instance générique (voici un exemple d'instance)

```
NbItems = 5;
RollWidth = 110;
Size = [20, 45, 50, 55, 75];
Amount = [48, 35, 24, 10, 8];

Patterns = { <0, 1, [1, 0, 0, 0, 1]>,
<1, 1, [0, 1, 0, 0, 0]>,
<2, 1, [0, 0, 1, 0, 0]>,
<3, 1, [1, 0, 0, 1, 0]>,
<4, 1, [0, 0, 0, 0, 1]> };
```

**Question 2.** En relâchant les contraintes d'intégrité, est-ce que la valeur objective peut changer ?

**Question 3.** En supposant que le programme linéaire précédent est résolu à l'aide de l'algorithme "Simplex", écrire la formule générique qui permet de calculer le coût réduit de l'une des colonnes de ce programme (remarquer que chaque colonne du programme linéaire représente la structure d'un motif).

**Question 4.** Ecrire le PLNE qui permet de trouver une colonne capable d'augmenter la valeur de la fonction objective du programme linéaire précédent, si une telle colonne existe bien sûr.

**Question 5.** Tant que le PLNE trouve une telle colonne, nous aimerions rajouter le motif correspondant, à notre programme linéaire, le résoudre à nouveau, mettre à jour les données du PLNE, et répéter la procédure. Ensuite nous allons reprendre notre problème initial, avec ses contraintes d'intégrité et le résoudre avec l'ensemble des motifs découverts lors de sa relaxation. Ecrire le pseudo-code qui résume cette boucle.

**Question 6.** Est-ce que la solution trouvée est optimale pour le modèle initial ?

## Exercice 2. Génération de coupes

Une entreprise possède 15 sites qu'elle désire interconnecter par un réseau de communication. Il est possible de créer des liens directs entre certaines paires de sites mais pas toutes. Le graphe ci-dessous montre les paires de sites pouvant être connectés directement. Sur chacun de ces liens il est possible d'installer plusieurs câbles sachant que chaque câble offrira une capacité  $C$  (en Gb/s) au lien. Chaque site  $v$  a besoin d'avoir un débit de 1 Gb/s vers chaque autre site  $w$ . Nous supposons que chaque câble installé coûtera la même chose à l'entreprise. Cette dernière veut donc minimiser le nombre des câbles installés tout en respectant les demandes.

**Question 1.** Est il possible de prévoir la solution pour un  $C$  très grand ?

**Question 2.** Ecrire le PLNE qui permet de résoudre ce problème.

**Question 3.** Imaginer un algorithme combinatoire capable de résoudre le cas  $C = 1$ . Décrire ce dernier en quelques lignes.

**Question 4.** Est ce qu'il est possible d'avoir une solution faisable dont la valeur objective est 13 ? Dédire une inégalité valide.

**Question 5.** En considérant un site particulier  $v$ , déduire une inégalité valide qui contraint le nombre des câbles installés sur les liens adjacents à ce site.

**Question 6.** Considérons une bipartition arbitraire des sites  $\{S, \bar{S}\}$ . Soit  $E$  l'ensemble minimum des liens qui déconnecte complètement l'ensemble  $S$  de  $\bar{S}$ . Dédire une inégalité valide qui contraint le nombre des câbles installés sur les liens de  $E$ . Comment trouver l'inégalité la plus violée parmi les inégalités de ce type.

**Question 7.** En considérant cette fois les tripartitions des sites, est il possible de déduire des nouvelles inégalités valides non redondantes avec les inégalités décrites précédemment ?

