

付 録 A 高速フーリエ変換

1.1 はじめに

高速フーリエ変換は、離散フーリエ変換を高速に行うために開発されたアルゴリズムであり、音声データをはじめとする時系列データや画像データの解析や加工、数値シミュレーションなど様々な場面で使われている。本演習では、1965年に、J. W. Cooley(ジェイムズ・クーリー)と J. W. Tukey(ジョン・テューキー)が発表した形式のアルゴリズムを習得し、応用に活かせるようになることを目標とする。

1.2 フーリエ級数

周期 T をもつ関数 $x(t)$ [$x(t+mT) = x(t)$ 、 m : 整数、以下 $x(t)$ は実数値関数とする] を、周期 $\frac{T}{k}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) の三角関数の系列、 $\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$ および $\sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$ 、の重ね合わせ (足し合わせ) で表すことをフーリエ級数展開とよぶ。そこで、次のような関数 $x_M(t)$ を考えてみよう。

$$x_M(t) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^M \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) \right] \quad (\text{A.1})$$

係数 a_k と b_k (k 次のフーリエ係数) は、 $x_M(t) = x(t)$ の場合を考えることにより決める。即ち、両辺

に $\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)$ または $\sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)$ を掛けて、関係式

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{T}t\right) dt = \frac{1}{2} \delta_{k,m}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) \sin\left(\frac{2\pi m}{T}t\right) dt = \frac{1}{2} \delta_{k,m}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) \sin\left(\frac{2\pi m}{T}t\right) dt = 0$$

(ただし、 $\delta_{k,m}$ はクロネッカーのデルタ) を用いると、次のように決まる。

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) dt \quad (\text{A.2})$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) dt \quad (\text{A.3})$$

上のように、 $x(t)$ が周期 $\frac{T}{k}$ ($k = 1, 2, \dots, M$) の三角関数を足し合わせたものであれば、 $x_M(t)$ で $x(t)$ を表すことが出来る。しかし、任意の周期関数 $x(t)$ について、 M を大きくすれば $x_M(t)$ が $x(t)$ に近づくかどうかは、 $x(t)$ の性質に依存する [1]。結論だけをいうと、

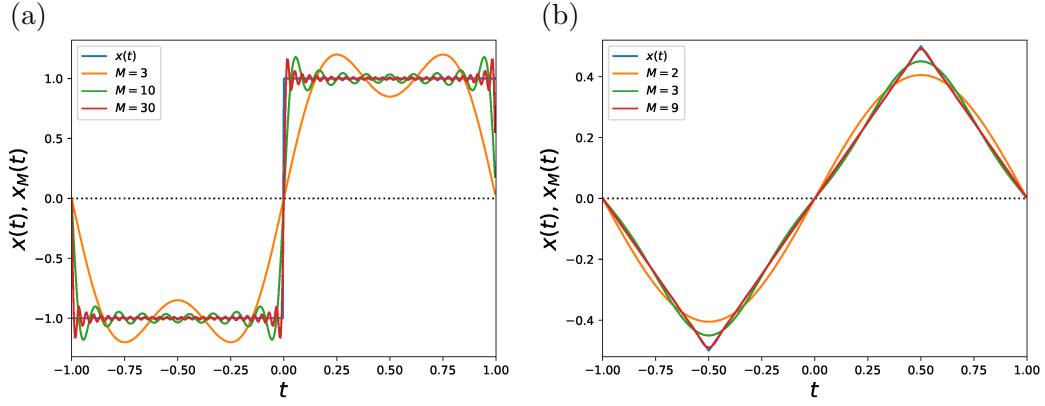
I. $x(t)$ と $x'(t) \equiv \frac{d}{dt}x(t)$ が (ある有限個の点を除いて) 区分的に連続であり、かつ、不連続な点 (代表として t_0 とする) で左極限と右極限が存在すれば、 $x_M(t)$ ($M \rightarrow \infty$) は連続である領域の各点 t において $x(t)$ に収束する。即ち、 $t \neq t_0$ において、

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) \right]$$

ただし、 a_k と b_k は式 (A.2)、(A.3) で定義される。不連続点 (t_0) における $x(t_0)$ は、上の $x(t)$ を用いて、次のようになる。

$$x(t_0) = \frac{x(t_0 - 0) + x(t_0 + 0)}{2} \quad (\text{A.4})$$

また、次のことも知られている。

図 A.1: 矩形波 (a) と三角波 (b) に対する $x_M(t)$ の収束の様子

II. $x(t)$ がリプシッツ (Lipschitz) 連続、つまり、ある実数 $L > 0$ があり、任意の実数 s と t について、

$$|x(t) - x(s)| \leq L |t - s| \quad (\text{A.5})$$

が成り立つ場合は、 $x_M(t)$ は $M \rightarrow \infty$ で $x(t)$ に一様収束する。

I と II に対応する具体例として、次の (a) 矩形波と (b) 三角波を考える。

(a)

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ -1, & -1 < t < 0 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

(b)

$$x(t) = \begin{cases} t, & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 1-t, & \frac{1}{2} < t < \frac{3}{2} \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

ただし、 $x(t)$ は示された領域以外では、 $x(t + 2m) = x(t)$ (m は整数) に従う周期 2 の周期関数であるとする。フーリエ係数は、次のようになる。

(a)

$$a_m = 0, \quad b_{2m} = 0, \quad b_{2m+1} = \frac{4}{\pi(2m+1)}$$

(b)

$$a_m = 0, \quad b_{2m} = 0, \quad b_{2m+1} = \frac{4(-1)^m}{\pi^2(2m+1)^2}$$

ただし、 $m = 0, 1, 2, \dots$

図 A.1 に $x(t)$ と

$$x_M(t) = \sum_{m=0}^{\frac{M-1}{2}} b_{2m+1} \sin[\pi(2m+1)t]$$

を示す。(a) 矩形波の場合をみると、不連続点 $t = \dots, -1, 0, 1, \dots$ 以外の領域では、 M を大きくするとゆっくりとではあるが $x_M(t)$ は $x(t)$ に近づいている。しかし、不連続点の左側と右側には、振幅が跳ね上がるような振動部分が残っている。この跳ね上がりは M を増やしても無くならないことが知られており、ギブス (Gibbs) 現象と呼ばれている [1]。一般に $x(t)$ の不連続点における飛びを a 、即ち $x(t_0+0) - x(t_0-0) = a$ とすると、 $x_M(t)$ は、 M を無限大とした場合の不連続点の左右の点において、 $x_M(t_0-0) = x(t_0) - a \cdot 0.089490\dots$ 、 $x_M(t_0+0) = x(t_0) + a \cdot 0.089490\dots$ のようにふるまうことが知られている。一方、図 A.1(b) の三角波の場合をみると、矩形波の場合に比べて、格段に速く収束している様子が見える。

物理現象 (音波や電磁波など) で現れる物理量の時間 (空間) 変動を表す関数はほぼ上で述べた I か II のタイプに分類できる。したがって、不連続点に気をつければ、大抵の物理量の変動をフーリエ級数で表せると思ってよい。

1.3 フーリエ変換

フーリエ変換とは、フーリエ級数展開 (A.1) においては、フーリエ係数を決める公式 (A.2) と (A.3) に対応するものである。フーリエ級数展開 (A.1) の場合は、周期が有限である関数を対象にしているが、フーリエ変換の場合は、一般の関数も対象に含まれる。ここでは、フーリエ変換を簡潔に定義するため、周期 T をもつ関数 $x(t)$ を考え、 $x(t)$ は II の性質 (リプシッツ連続性) を満たすとする。即ち、式 (A.1) において M を無限まで取ったものは、 $x(t)$ に一様収束するとする。したがって、 $x(t)$ は次のようにフーリエ級数で表すことが出来る。

$$x(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \exp\left(i \frac{2\pi k}{T} t\right) \quad (\text{A.8})$$

ここで、 $i \equiv \sqrt{-1}$ 、 X_k は複素数 (複素フーリエ係数) である。式 (A.8) はオイラーの公式：

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

を用いると式 (A.1) のような表現に帰着される。因子 $\frac{1}{T}$ を付けた理由は、後の便宜のためである。

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \exp\left[i \frac{2\pi(k-l)}{T} t\right] dt = T \delta_{k,l}$$

を用いると、 X_k は、次のように表される。

$$X_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \exp\left(-i \frac{2\pi k}{T} t\right) dt \quad (\text{A.9})$$

変数 t を時刻と見なすと、式 (A.8)、(A.9) に現れた $\frac{2\pi k}{T}$ は角振動数 (角周波数、角速度)、 $\frac{k}{T}$ は周波数 (振動数) である。 T は、基本周期とも呼ばれる。次に、式 (A.8)、(A.9) において T を無限大にすることを考える。周波数を $f \equiv \frac{k}{T}$ とおき、 $T \rightarrow \infty$ において、 $\frac{1}{T} \rightarrow df$ 、 $X_k \rightarrow X(f)$ とおくと、式 (A.9)、(A.8) はそれぞれ次のような積分に書き換えることが出来る。

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi i f t} dt \quad (\text{A.10})$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{2\pi i f t} df \quad (\text{A.11})$$

式 (A.10) はフーリエ変換、式 (A.11) は逆フーリエ変換と呼ばれる。 $X(f)$ は (複素) フーリエ係数、あるいは、文脈によっては周波数 f のスペクトルとも呼ばれる。¹ 周波数 f の代わりに角振動数 $\omega \equiv 2\pi f$ を用いる場合、上の 2 式は次のように表現される。²

$$\tilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{A.12})$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{A.13})$$

フーリエ変換を理論的に用いる場合は、角振動数を用いた式 (A.12)、(A.13) がよく使われる。しかし、(次節以降で取り扱う離散フーリエ変換のように) 実用的に取り扱う場合は、周波数を用いた表現 (A.10)、(A.11) が便利なが多い。

1.4 離散フーリエ変換 (DFT)

連続時間 t に関して周期的あるいは非周期的に (有界な範囲で) 変動する原関数 (原信号) $x(t)$ があるとする。 $x(t)$ を離散的な時点で標本抽出 (サンプリング) し、得られた離散数列を時系列データあるいは単にデータと呼ぶ。離散数列に対するフーリエ変換は離散フーリエ変換 (Discrete Fourier Transform、略して DFT) と呼ばれる。以下では、間隔 τ の離散時刻 $n\tau$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N-1$) における N 個の値からなるデータ $\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$ について、その離散フーリエ変換を考える。 τ は標本化 (サンプリング) 周期、 $\frac{1}{\tau}$ は標本化 (サンプリング) 周波数と呼ばれる。また、 N をデータ長と呼ぶことにする。

¹ スペクトルという場合、通常 §1.6 で扱うパワースペクトル密度 (A.34) を用いて、その周波数 f と df の範囲の積分量を指す。パワースペクトル密度がある離散的な特定の周波数のみで無限大となる場合、そのフーリエ係数 (成分) は、その振動数で線スペクトルを持っていると言及される。

² $x(t)$ が周期関数の場合、式 (A.10) あるいは式 (A.12) の積分値は不定となるが、物理学や工学の分野では、ある非常に小さな実数 $\epsilon > 0$ を用いて、 $\tilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-\epsilon|t| - i\omega t} dt$ として $\tilde{X}(\omega)$ を仮に定義しておき、最終的な段階で $\epsilon \rightarrow 0$ とするような定義も用いられる。数学的に厳密には超関数 (例えば、参考文献 [1] の 6 章参照) を用いて取り扱うことができる。後で述べる線スペクトルは、この方法で定義される。

N 個の値から成るデータ $\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$ の DFT およびその逆変換は次のように定義される.

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i \frac{2\pi kn}{N}} \quad (\text{A.14})$$

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i \frac{2\pi kn}{N}} \quad (\text{A.15})$$

まず、フーリエ変換 (A.10) および逆変換 (A.11) と対応する DFT (A.14) およびその逆変換 (A.15) とは、どのような関係にあるのか、また、どのような条件で、式 (A.14)、(A.15) が、式 (A.10)、(A.11) の良い近似になるのか、といったことについて考察しよう. 式 (A.15) より、 x_n は $x_{n+mN} = x_n$ (m は整数) を満たし、 x_n が基本周期 N をもつことが見いだされる. 同様に、式 (A.14) より、 X_k は、 $X_{k+mN} = X_k$ (m は整数) を満たし、基本周期 N をもつことがわかる. 一般的には、これらの周期性は元々の $x(t)$ および $X(f)$ にはなかった性質である. 前者は、データ長を有限にしたこと、後者は時間を離散化したことに、それぞれ関係しているが、これらの詳細は以下で示す.

初めに式 (A.10) と式 (A.14) との対応関係を見てみよう. 式 (A.10) について、その積分を離散時刻に関する和で近似し、離散周波数に関して、次のように書き換える.

$$X\left(\frac{k}{\tau N}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(n\tau)x(n\tau)e^{-i \frac{2\pi kn}{N}} \quad (\text{A.16})$$

ここで、 $w(t)$ は、 $t < 0$ と $t \geq N\tau$ ($N\tau \equiv T$) で $w(t) = 0$ となる関数である. つまり $w(t)$ は $0 \leq t < T$ の範囲の $x(t)$ を切り取る関数であり、窓関数と呼ばれる. 特に、 $0 \leq t < T$ で $w(t) = 1$ 、それ以外で 0 となるものは矩形窓と呼ばれる. $X\left(\frac{k}{\tau N}\right) = X_k$ と置き換えると、式 (A.16) は、次のようになる.

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} w(n\tau)x(n\tau)e^{-i \frac{2\pi kn}{N}} \quad (\text{A.17})$$

さらに $x_n = w(n\tau)x(n\tau)$ とおくと、式 (A.10) と式 (A.14) は対応付けられる. 式 (A.15) での x_n は、

このようにして得られたフーリエ係数 X_k を用いて周期 N の関数として拡張されている. 即ち、

$$x_{n+mN} = w(n\tau)x(n\tau), \quad (\text{A.18})$$

($0 \leq n < N$, m : 整数). $x(t)$ が周期 T の関数である場合、 $w(t)$ は時間 T の間だけで 1 となる矩形窓でよいが、そうでない場合、あるいは基本周期が未知である場合は、一般に $x(0)$ と $x(T)$ は一致せず、 x_0 と x_{N-1} は有限の差をもつ. フーリエ変換における不連続性の影響は前に述べたとおりである. したがって、一般の $x(t)$ では、 x_{N-1} と $x_N = x_0$ が連続的につながるように、 $w(t)$ として、 $0 \leq w(t) \leq 1$ 、 $w\left(\frac{T}{2}\right) = 1$ 、および、 $t = \frac{T}{2}$ に関して対称であり、 $t = 0$ と T で連続的に 0 となる連続関数を選ぶ. 窓関数の具体例は §1.6 で示す.

次に時間を離散化したことに起因する問題を取り扱う. 式 (A.11) を周波数に関して離散化すると、

$$\begin{aligned} x(n\tau) &= \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{\tau N}\right) e^{i \frac{2\pi kn}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k+mN}{\tau N}\right) \right] e^{i \frac{2\pi kn}{N}} \quad (\text{A.19}) \end{aligned}$$

より、 $x(n\tau) = x_n$ 、

$$X_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k+mN}{\tau N}\right) \quad (\text{A.20})$$

とすると、式 (A.11) と式 (A.15) は対応が付く. 式 (A.20) では、上に述べた周期性 $X_{k+pN} = X_k$ (p : 整数) が満たされている. X_k の 1 周期に対する k の定義域を $-\frac{N}{2} \leq k < \frac{N}{2}$ にとり、この範囲において $X_k \approx X\left(\frac{k}{\tau N}\right)$ であれば、DFT は元の $x(t)$ のフーリエ変換をよく近似していると言える. そこで、次の量:

$$\Delta X_k \equiv X\left(\frac{k}{\tau N}\right) - X_k, \quad (\text{A.21})$$

($-\frac{N}{2} \leq k < \frac{N}{2}$) を考えると、これは原信号のフーリエ係数に対する誤差を表したものであり、エリヤシング (Aliasing) 誤差 (折り返し雑音) と呼ばれる.

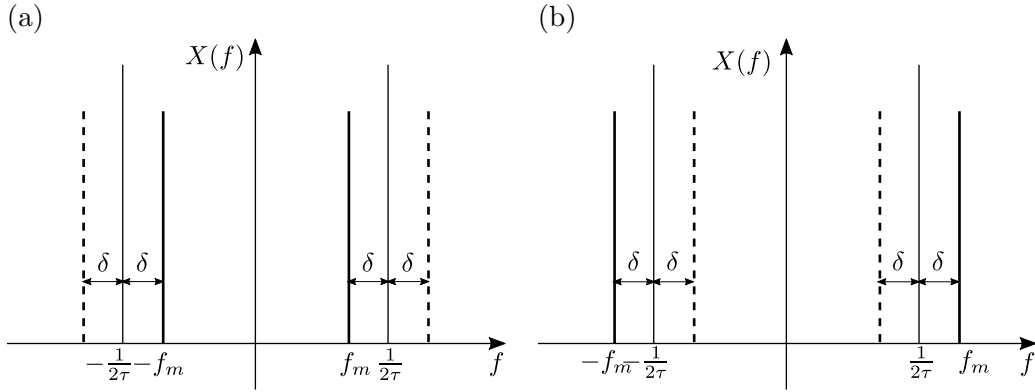


図 A.2: $x(t) = \cos(2\pi f_m t)$ のフーリエ係数 $X(f)$ の実部 (概念図). (a) $f_m = f_c - \delta$ と (b) $f_m = f_c + \delta$ ($\delta > 0$) の場合、ただし $f_c = \frac{1}{2\tau}$ は Nyquist 周波数. 太線は真のフーリエ係数 (周波数 f_m と $-f_m$ における線スペクトル). 波線は DFT のフーリエ係数 $X(\frac{k_m}{\tau N} - \frac{1}{\tau})$, $X(-\frac{k_m}{\tau N} + \frac{1}{\tau})$ の実部. ただし整数 k_m は $\frac{k_m}{\tau N} = f_m$ を満たしていると仮定している.

エリアシング誤差が無くなるような $X(f)$ および τ の条件について考察しよう. $\Delta X_k = 0$ の場合、式 (A.20) より、 $X(f)$ は

$$X\left(\frac{k}{\tau N}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k+mN}{\tau N}\right) \quad (\text{A.22})$$

$(-\frac{N}{2} \leq k < \frac{N}{2})$ を満たさなければならない. そこで、 $X(f)$ は $|f| > f_m$ で $X(f) = 0$ であると仮定しよう. すると、

$$f_m < \frac{1}{2\tau} \equiv f_c$$

が満たされればよいことがわかる [2]. f_c は Nyquist 周波数と呼ばれる. この結果は、標本化 (サンプリング) 定理と呼ばれるものと同じ内容である. 標本化定理とは、ある原関数 $x(t)$ があり、そのフーリエ変換 $X(f)$ が $|f| > f_m$ で 0 となる時、 $x(t)$ を $\frac{1}{2f_m}$ より小さい標本化周期で標本化すれば、その標本化された時系列から、原関数を完全に復元できるというものである.

具体例として、 $x(t) = \cos(2\pi f_m t)$ を考えよう. 図 A.2 には、(a) $f_m < \frac{1}{2\tau}$ と (b) $f_m > \frac{1}{2\tau}$ (τ は標本化周期) の場合のそれぞれの DFT によるフーリエ係数と真のフーリエ係数 $X(f)$ を模式的に示している. 真のフーリエ係数は、周波数 $f_m (> 0)$ と $-f_m$ の線スペクトル (太い実線) となる.³ 標

本化された離散数列は、 $f_m = \frac{1}{2\tau} + \delta$ とすると、

$$\begin{aligned} x(\tau n) &= \cos\left[2\pi\left(\frac{1}{2\tau} + \delta\right)n\tau\right] \\ &= \cos\left[2\pi\left(\frac{1}{2\tau} - \delta\right)n\tau\right] \end{aligned}$$

となるので、 $\delta > 0$ のとき、周波数 f_m と $-f_m$ の線スペクトルは、 $f_c = \frac{1}{2\tau}$ の軸に関して折返された格好で $f_m - 2\delta$ と $-f_m + 2\delta$ の線スペクトルとして見える. (a) の場合、図の破線は DFT の周期

のフーリエ係数 (線スペクトル) を

$$\tilde{X}(\omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\Omega t) e^{-\epsilon|t| - i\omega t} dt$$

より計算すると次のようになる.

$$\tilde{X}(\omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\frac{\epsilon}{(\omega - \Omega)^2 + \epsilon^2} + \frac{\epsilon}{(\omega + \Omega)^2 + \epsilon^2} \right]$$

これは、 $\omega = \Omega$ ($f = f_m$) または $\omega = -\Omega$ ($f = -f_m$) で無限大となり、それ以外では 0 となるような関数になる. 因子 $e^{-\epsilon|t|}$ は窓関数と見なすことができる. $x(t)$ の DFT に対応するものは、 $t = \tau n$ ($n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$) として、 N が非常に大きいとき、次のようになる.

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \cos(\Omega \tau n) e^{-\epsilon \tau |n| - i\omega \tau n} \\ &\approx \frac{e^{\epsilon \tau}}{4 \cosh(\epsilon \tau)} \left[\frac{1}{1 - \frac{\cos[(\omega - \Omega)\tau]}{\cosh(\epsilon \tau)}} + \frac{1}{1 - \frac{\cos[(\omega + \Omega)\tau]}{\cosh(\epsilon \tau)}} \right] \end{aligned}$$

ただし、 $\epsilon > 0$ は微小な量、 $\epsilon \tau N \gg 1$ 、 $\Omega = \frac{2\pi k_m}{\tau N}$ 、および、 $\omega = \frac{2\pi k}{\tau N}$.

³ $2\pi f \equiv \omega$ 、および、 $2\pi f_m \equiv \Omega$ として、 $x(t) = \cos(\Omega t)$

性 (周波数に関して周期 $\frac{1}{T}$ である) による $f_m - \frac{1}{T}$ と $-f_m + \frac{1}{T}$ の線スペクトルであるが、 $|f| < f_c$ の範囲では、真のスペクトルと DFT の結果とは一致する。(b) の場合、真のスペクトルは、 $(-f_c, f_c)$ の外側にあり、それらが、 $(-f_c, f_c)$ に移動してきたものが $f_m - \frac{1}{T}$ と $-f_m + \frac{1}{T}$ の破線である。これは、上で述べたように $-f_m$ および f_m をそれぞれ $-\frac{1}{2T}$ および $\frac{1}{2T}$ の軸に関して折返したものと見て取れる。ここでは、 \cos 関数を用いてフーリエ係数の実部を見たが、§1.6 で述べるパワースペクトル密度を用いれば、 \sin 関数や位相をずらした $\cos(2\pi f_m t + \phi_0)$ についても同じことが言える。

以上のことから、原信号 $x(t)$ の標本化に際して、 $x(t)$ のフーリエ係数 $X(f)$ が、ある周波数 f_m よりも大きな周波数 ($|f| > f_m$) で非常に小さくなるようなものであり、標本化周期を $\frac{1}{2f_m}$ より十分小さくとれて、かつ、 $x(t)$ の低周波数領域の (興味の対象となる) 特徴を損なわないような十分な長さの標本であれば、その標本は原信号をよく近似できると考えてよいだろう。

1.5 高速フーリエ変換 (FFT)

高速フーリエ変換 (Fast Fourier Transform) は DFT の計算を高速に行うために考えられたアルゴリズムで、以下ではこれを FFT と呼ぶ。まずその原理を解説しよう。

式 (A.14) を簡潔に表現するため、

$$W_N \equiv e^{-i\frac{2\pi}{N}} \quad (\text{A.23})$$

という記号を導入し、式 (A.14) を

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{kn} \quad (\text{A.24})$$

と書き表す。 x_n を N 行のベクトルと見ると、 W_N^{kn} は、 $N \times N$ の行列の (k, n) 要素と考えることができる。

まず、 W_N^{kn} の周期的性質を考慮しないで (W_N^{kn} を相関のない行列要素だと思って)、DFT を計算した場合の計算量について考えてみよう。式 (A.24) の (複素数の) 乗算の回数は N^2 と見積もることが

できる。これはデータの長さ N とともに計算時間が N^2 で加速度的に増加することを意味する。実際に計算機で DFT の計算を行うと、入力するデータが大きくなるにつれて終了までの時間が急速に長くなることが実感できる。これに対して FFT の計算時間は W_N^{kn} の性質を利用して乗算回数を $N \log_2 N$ の程度まで減らし、計算に要する時間を著しく短く出来ることが後で分かる。

FFT は 1965 年に J. W. Cooley と J. W. Tukey が発表した形式のものが、一般に知られているが、その 20 年前にもその方法を独立に発見した人はいた [3, 4]。FFT の初期の発見の 1 つである Danielson-Lanczos 補題もその 1 つで、FFT の本質を示している。Danielson-Lanczos 補題では、 $W_N^{2kn} = W_{N/2}^{kn} = e^{-i\frac{2\pi kn}{N/2}}$ という性質によって、長さ N の DFT は、長さ $\frac{N}{2}$ の二つの DFT の和で表されると主張している。具体的に説明しよう。 N が偶数であるとして、式 (A.24) の和の中の n を偶数 $\{2m \mid m = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1\}$ と奇数 $\{2m+1 \mid m = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1\}$ の場合に分けると、

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2m} W_N^{2mk} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2m+1} W_N^{(2m+1)k} \\ &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2m} W_{N/2}^{mk} + W_N^k \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2m+1} W_{N/2}^{mk} \\ &= X_k^{(0)} + W_N^k X_k^{(1)} \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

ここで、⁴

$$X_k^{(\alpha)} \equiv \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2n+\alpha} W_{N/2}^{kn}, \quad \alpha \in \{0, 1\} \quad (\text{A.26})$$

は、 $\frac{N}{2}$ 個の偶数点 ($\alpha = 0$) と奇数点 ($\alpha = 1$) のデータに対する DFT である。また、 $X_k^{(\alpha)}$ は、周波数に関して、 $\frac{N}{2}$ の周期を持つ、すなわち、 $X_{k+\frac{N}{2}}^{(\alpha)} = X_k^{(\alpha)}$ 。

$N = 2^K$ だとすると、式 (A.25) の手続きを再帰的に実行できる。式 (A.26) の $X_k^{(\alpha)}$ に対して式 (A.25) の手続きを用いて、 $X_k^{(\alpha)}$ を $\frac{N}{4}$ の長さの

⁴ 上付き添字の“(・)”は乗算との混同を避けるための記法である。

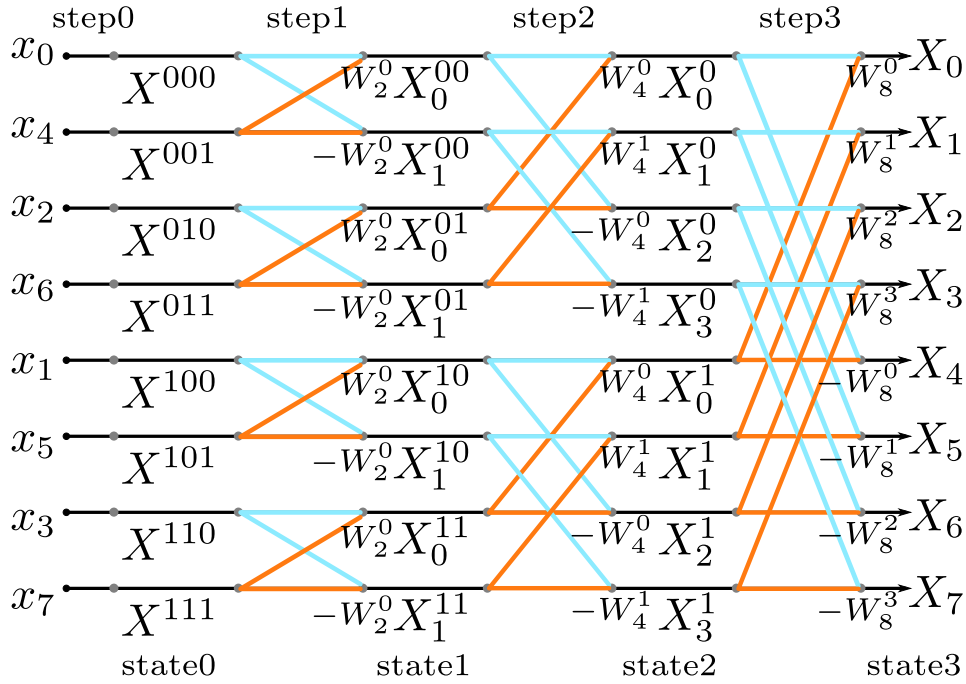


図 A.3: FFT($N = 8$) のバタフライ演算: 本文中の $X_l^{(\alpha\beta\cdots\chi)}$ は、図中では $X_l^{\alpha\beta\cdots\chi}$ と表示されている。 $W_2^0 = 1$. $W_N^j = e^{-i\frac{2\pi j}{N}}$.

DFT の和で表すと、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 X_k^{(\alpha)} &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{4}-1} x_{2(2m)+\alpha} W_{N/2}^{2mk} \\
 &\quad + \sum_{m=0}^{\frac{N}{4}-1} x_{2(2m+1)+\alpha} W_{N/2}^{(2m+1)k} \\
 &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{4}-1} x_{2^{2m}+\alpha} W_{N/4}^{mk} \\
 &\quad + W_{N/2}^k \sum_{m=0}^{\frac{N}{4}-1} x_{2^{2m+2}+\alpha} W_{N/4}^{mk} \\
 &= X_k^{(\alpha 0)} + W_{N/2}^k X_k^{(\alpha 1)} \quad (\text{A.27})
 \end{aligned}$$

ここで、

$$X_k^{(\alpha\beta)} \equiv \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} x_{2^{2n}+2\beta+\alpha} W_{N/4}^{kn}, \quad \alpha, \beta \in \{0, 1\} \quad (\text{A.28})$$

は長さ $\frac{N}{4}$ の (4 点間隔の点列におけるデータの)DFT であり、周波数 k に関して $\frac{N}{4}$ 周期

($X_{k+\frac{N}{4}}^{(\alpha\beta)} = X_k^{(\alpha\beta)}$) である。この手続は、長さ 1 の DFT になるまで、すなわち、

$$X_k^{(\alpha\beta\cdots\eta\zeta)} = x_{2^{K-1}\zeta+2^{K-2}\eta+\cdots+2\beta+\alpha} \quad (\text{A.29})$$

まで繰り返すことができる。このとき $X_k^{(\alpha\beta\cdots\eta\zeta)}$ は周波数 k に関して $1 (= \frac{N}{2^K})$ 周期であり、便宜的に $X_k^{(\alpha\beta\cdots\eta\zeta)} = X_0^{(\alpha\beta\cdots\eta\zeta)}$ とおく。添字の $()$ の中の $\alpha\beta\cdots\eta\zeta$ は、時点 n の K 桁の 2 進数表現 $n = (\zeta\eta\cdots\beta\alpha)_2$ のビット列を反転させたものに対応している。[$x_{(\zeta\eta\cdots\beta\alpha)_2}$ と $X_0^{(\alpha\beta\cdots\eta\zeta)}$ は一対一に対応している。]

FFT のアルゴリズムの一つ (時間引き FFT アルゴリズム) は、最後に示した式 (A.29) から開始して、式 (A.27)、式 (A.25) の手続きを逆に遡るものである。これを図 A.3 の $K = 3$ ($N = 8$) の例を見ながら説明する。まず、 $N (= 2^K)$ 個の等間隔に並んだ時点におけるデータ $\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$ が一次元配列 (0 から $N - 1$ までのアドレスを割り振られた記憶領域) に読み込まれたとしよう。

1. (ステップ 0) $\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$ の各時刻 n の K 桁の 2 進数表現 $n = (\zeta\eta\cdots\beta\alpha)_2$ を求め、そのビッ

ト列を反転した数 $(\alpha\beta\cdots\eta\zeta)_2$ をアドレスとする $X^{(\alpha\beta\cdots\eta\zeta)} [= X_0^{(\alpha\beta\cdots\eta\zeta)}]$ の配列に x_n を代入する⁵ (図 A.3 の左端と state 0 の列).

2. (ステップ k) 長さ 2^{k-1} ($1 \leq k < K$) の 2^{K-k+1} 個の DFT の組から、state k の DFT の組を作る:

$$X_l^{(\alpha\beta\cdots\chi)} = X_l^{(\alpha\beta\cdots\chi^0)} + W_{2^k}^l X_l^{(\alpha\beta\cdots\chi^1)}, \quad (\text{A.30})$$

($0 \leq l < 2^k$) ここで、 χ は下から $k+1$ 桁目の (2^k に係る) ビットである. state k の $X_l^{(\alpha\beta\cdots\chi)}$ を格納する配列のアドレスは、 $(\alpha\beta\cdots\chi)_2 \times 2^k + l$ となる. また、 $X_l^{(\alpha\beta\cdots\chi^0)}$ と $X_l^{(\alpha\beta\cdots\chi^1)}$ は、 l に関して 2^{k-1} の周期をもち、それらの配列上のアドレスの距離は 2^{k-1} である. そこで、式 (A.30) を $0 \leq l < 2^{k-1}$ と $2^{k-1} \leq l < 2^k$ とに分けて書くと次のようになる.

$$\begin{aligned} X_g^{(\alpha\beta\cdots\chi)} &= X_g^{(\alpha\beta\cdots\chi^0)} + W_{2^k}^g X_g^{(\alpha\beta\cdots\chi^1)}, \\ X_{g+2^{k-1}}^{(\alpha\beta\cdots\chi)} &= X_g^{(\alpha\beta\cdots\chi^0)} - W_{2^k}^g X_g^{(\alpha\beta\cdots\chi^1)}, \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

($0 \leq g < 2^{k-1}$). 図では、色の異なる実線で $X_g^{(\alpha\beta\cdots\chi^0)}$ (青太線) と $X_g^{(\alpha\beta\cdots\chi^1)}$ (朱太線) から $X_g^{(\alpha\beta\cdots\chi)}$ と $X_{g+2^{k-1}}^{(\alpha\beta\cdots\chi)}$ を作る演算 (バタフライ演算とも呼ばれる) を示している. バタフライ演算を基本単位として、各ステップの演算の構造を見ると、step1 では、孤立したバタフライ演算が 4 個あり、step2 では、2 つのバタフライ演算の群が 2 グループ、step3 では、4 つのバタフライ演算の群が 1 グループというように、step k では、 2^{k-1} 個のバタフライ演算の群が 2^{K-k} グループあるという構造になっている. アルゴリズムの実装における定石の 1 つは、このような群の左上端位置を移動させながら各群内でバタフライ演算を順次行うことである.

3. (ステップ $K-1$) $k = K-1$ のとき、この繰り返しは終了し、 $\{X_l\}_{l=0}^{N-1}$ が求まる.

⁵ $X^{(\alpha\beta\cdots\eta\zeta)}$ は複素数であることに注意. x_n が実数である場合、 $X^{(\alpha\beta\cdots\eta\zeta)}$ の虚部は 0 に初期化しておく.

ここで、再び計算量について考えよう. 一連の計算が終了するまでのステップ数は K 回である. この内 (W_N^j による) 複素数の乗算を行うステップは $\log_2 N - 1$ ($= K - 1$) 回で、各ステップの中での乗算回数は式 (A.31) より $\frac{N}{2}$ 回 (図 A.3 の水平と斜めの朱色の線を 1 つとする) であるので、全体で $\frac{N}{2}(\log_2 N - 1)$ である. つまりおおよそ $N \log_2 N$ である. これは最初の方で述べた N^2 に比べて非常に少ない計算量である.

1.6 パワースペクトル密度と窓関数

これまで通り原信号を $x(t)$ とする. $|x(t)|^2$ は信号のパワーと呼ばれ、

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \quad (\text{A.32})$$

は全パワーと呼ばれる. これは、式 (A.8) を用いると、次のように書き換えられる.

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X(f)|^2 df \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

これはパーセバルの定理 (Parseval の定理) と呼ばれるものである. また、

$$S(f) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X(f)|^2 \quad (\text{A.34})$$

はパワースペクトル密度と呼ばれるもので、 $\int_f^{f+df} S(g) dg$ は、信号に含まれる周波数 f から $f + df$ の範囲にあるパワーを表す量である. $x(t)$ が実数のとき、 $X(-f) = X(f)^*$ ($*$ は複素共役を表す) であるので、パワースペクトル密度は f に関して偶関数である.

離散時刻 $n\tau$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N-1$) で標本化された時系列データ $\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$ に対する、式 (A.33) に対応する全パワーの関係式は、式 (A.15) を用いると、次のように得られる.

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2 \equiv \sum_{k=0}^{N/2} S_k \quad (\text{A.35})$$

ただし、 $\{X_k\}_{k=0}^N$ は離散周波数 $f = \frac{k}{\tau N}$ ($k = 0, 1, \dots, N-1$) についてのフーリエ係数であり、

$$S_k = \begin{cases} \frac{|X_0|^2}{N^2}, & k = 0 \\ \frac{|X_k|^2 + |X_{N-k}|^2}{N^2}, & 1 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1 \\ \frac{|X_{N/2}|^2}{N^2}, & k = \frac{N}{2} \end{cases} \quad (\text{A.36})$$

である。この S_k でパワースペクトル密度を推定 (近似) することをピリオドグラム (periodogram) という。つまり、原信号のパワースペクトル密度を有限の長さの離散数列で推定したものをピリオドグラムによって推定されたパワースペクトル密度などと呼ぶ。しかし、ここでは、特に断らない限り、 S_k をパワースペクトル密度とも呼ぶことにする。

上で定義した S_k は、窓関数として矩形窓を用いた場合である。窓関数 $w(t)$ を用いて、 x_n を

$$x_n = w(n\tau)x(n\tau) \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

のように定義した場合の S_k は次のように作られる [4]。

$$S_k = \begin{cases} \frac{1}{W_{ss}} |X_0|^2, & k = 0 \\ \frac{1}{W_{ss}} (|X_k|^2 + |X_{N-k}|^2), & 1 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1 \\ \frac{1}{W_{ss}} |X_{N/2}|^2, & k = \frac{N}{2} \end{cases} \quad (\text{A.37})$$

ただし、 W_{ss} は、窓の 2 乗和 (Window squared and summed)

$$W_{ss} \equiv N \sum_{n=0}^N w_n^2 \quad (\text{A.38})$$

である。一般の $0 \leq w(t) \leq 1$ である窓関数を掛けた場合の全パワー $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |w(n\tau)x(n\tau)|^2$ は、矩形窓の場合に比べて大きさが小さくなるので、上の式では、窓関数の全パワーで割ることで、その影響分を補正している。

窓関数として、よく使われているものを幾つかあげておく (図 A.4)。 $w_n \equiv w(n\tau)$ とする。

1. Parzen 窓

$$w_n = 1 - \left| \frac{n - \frac{1}{2}(N-1)}{\frac{1}{2}(N+1)} \right| \quad (\text{A.39})$$

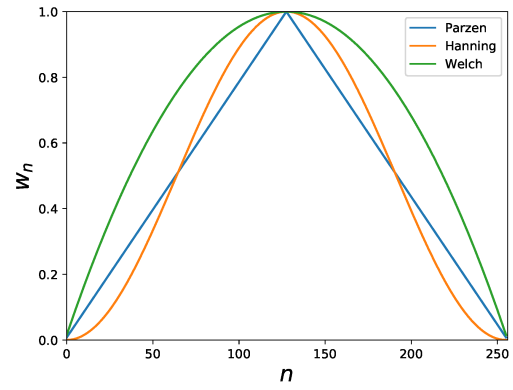


図 A.4: 窓関数。 $N = 256$ 。

2. Hanning 窓

$$w_n = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{2\pi n}{N-1} \right] \quad (\text{A.40})$$

3. Welch 窓

$$w_n = 1 - \left(\frac{n - \frac{1}{2}(N-1)}{\frac{1}{2}(N+1)} \right)^2 \quad (\text{A.41})$$

1.7 演習問題

以下の問題への答案をレポートとして清書して提出して下さい。レポートにはそれぞれの問題ごとに問題文 (あるいはそれを簡潔に表したもの)、答案 (計算結果や図など) および簡単な考察を記述して下さい。

レポートは PDF に出力し、ファイル名を「report_学籍番号.pdf」として下さい。また、問題 2,3,5,6 で作成したプログラムのソースコードは、フォルダー名「Src_学籍番号」の下に整理して格納し、tar+gz (もしくは zip) で固め、ファイル名を「src_学籍番号.tgz」 (もしくは .zip) としてして下さい。

このようにして作った 2 つのファイル [PDF と tgz (もしくは zip)] を PandA から提出して下さい。

問題 1 (ギブス現象)

下記の 2 つの周期関数について各問に答えよ。

$$\text{A: } x(t) = t - [t]$$

$$\text{B: } x(t) = \left| \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right|$$

ただし、 $[t]$ はガウス記号で n を整数として t が $n \leq t < n+1$ となるときの $[t] = n$ となる。

- (a) 上の A、B の周期関数をフーリエ級数展開するときの k 次のフーリエ係数

$$a_k = \int_{-1}^1 x(t) \cos(\pi kt) dt$$

$$b_k = \int_{-1}^1 x(t) \sin(\pi kt) dt$$

を求めよ。

- (b) それぞれの M 次までのフーリエ級数展開:

$$x_M(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^M [a_k \cos(\pi kt) + b_k \sin(\pi kt)]$$

を $x(t)$ とともに図示せよ。ただし、 M については次の 3 つの場合をそれぞれ図示せよ。

(i) $1 \leq M < 3$ の場合、(ii) $x_M(t)$ が $x(t)$ に収束しつつある場合、(iii) (i) と (ii) の中間の M の場合。

- (c) 上の A、B の周期関数について、 $x_M(t)$ の M を大きくしていったときの収束の違いについて、その相違点を述べよ。

問題 2 (動作テスト)

次のような時系列データ $\{x_n\}_{n=0}^7$:

$$x_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1,$$

$$x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0, x_7 = 0$$

が与えられたとき、以下の問に答えよ。

- (a) DFT [本文の式 (A.14)] の厳密な表現 (数式変形で得られる代数的表現) を求めよ。

- (b) FFT を用いてフーリエ係数を求めよ。また、その結果と (a) の結果との差より誤差を評価し、誤差の大きさの最大値を $O(10^{-K})$ の形で表し、誤差の原因について述べよ。⁶

- (c) 上の逆フーリエ変換を FFT(IFFT) をもちいて計算し、(精度の範囲内で) 元のデータ $\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$ に戻ることを確認せよ。(これはレポートに解答する必要は無い。)

問題 3 (標本化定理)

周波数 f の搬送波の振幅を変調した振幅 (AM) 変調波

$$x(t) = [1 + s(t)] \cos(2\pi ft)$$

を標本化周期 $\tau = \frac{1}{f}$ の離散時刻 $t = n\tau$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N-1$) で標本化し信号:

$$s(t) = \frac{1}{2} \cos(\pi f_s t + \phi_1) + \frac{1}{4} \sin(2\pi f_s t + \phi_2) + \frac{1}{6} \cos(2\sqrt{3}\pi f_s t + \phi_3) \quad (\text{P3})$$

を復元することを考えよう。以下の問に答えよ。

- (a) 式 (P3) の位相 ϕ_j ($j = 1, 2, 3$) は (信号の受信者にとっては) 未知であるとする。データ長 $N = 256$ で標本化されたデータ $\{x(n\tau)\}_{n=0}^{N-1}$ から $s(t)$ を復元できるためには、 f_s がどのような範囲であればよいか? $f_s < f_1$ と書くとき、標本化定理の観点から f_1 の上限値を答えよ。

- (b) $f = 10$ 、 $\phi_j = 0$ ($j = 1, 2, 3$) として、(i) $f_s = \frac{f}{\sqrt{10}}$ 、(ii) $f_s = \frac{f}{\sqrt{14}}$ 、(iii) $f_s = \frac{f}{10}$ のそれぞれの場合について、矩形窓を用いて標本化したデータ $\{x(n\tau)\}_{n=0}^{N-1}$ から変換 $s_n = x(n\tau) - 1$ より信号時系列を抽出し、(ピリオドグラムによる) パワースペクトル密度を図示せよ。また、本来の信号 $s(t)$ のパワースペクトル密度と異なるものを挙げよ。

⁶最大の誤差が $x \times 10^{-K}$ 、 $0.1 < x \leq 1.0$ 、 K は整数、であることを意味する。

- (c) 前問の (i)~(iii) のそれぞれについて、信号時系列 $\{s_n\}_{n=0}^{N-1}$ ($N = 256$) の DFT から得られたフーリエ係数 $\{X_k\}_{k=0}^{N-1}$ を用いて、次のことを実施せよ。まず、データ長が $4N$ で、その要素をすべて 0 に初期化した (複素) フーリエ係数 $\{G_k\}_{k=0}^{4N-1}$ を新たに作り、その最初から $\frac{1}{8}$ の部分に前問のフーリエ係数の $\{X_k\}_{k=0}^{N/2-1}$ を順序を変えずに代入し、最後から $\frac{1}{8}$ の部分に $\{X_k\}_{k=N/2}^{N-1}$ を同じく代入する。次に、そうして設定した $\{G_k\}_{k=0}^{4N-1}$ の逆フーリエ変換に 4 を乗じたもの、すなわち、 $\{s(\frac{1}{4}\tau n)\}_{n=0}^{4N-1}$ を求める。⁷ 最後に、 $\{s(\frac{1}{4}\tau n)\}_{n=0}^{4N-1}$ を本来の信号を直接標本化したもの $\{s(\frac{1}{4}\tau n)\}_{n=0}^{4N-1}$ を同じ図 (横軸: t 、縦軸: $s(t)$) に重ねて図示し比較せよ。(比較しやすいように t の範囲を $0 < t < 0.25(N\tau)$ などに拡大して表示せよ。)

問題 4 (近い周波数の線スペクトルの識別)

二つの近い周波数の正弦波からなる信号：

$$x(t) = \sin[2\pi(f - \delta)t] + \sin[2\pi(f + \delta)t] \quad (\text{P4})$$

($0 < \delta \ll f$) があり、これを標本化周期 $\tau = \frac{1}{5f}$ の離散時刻 $t = n\tau$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N-1$) で標本化したものを考える。以下の問に答えよ。

- (a) 周波数が近い 2 つの正弦波がある場合、うなりと呼ばれる包絡線がゆっくり変動する振動が生じる。式 (P4) の場合に、式を変形して、うなりの周波数を求めよ。

⁷ この原理は以下の通り。フーリエ係数 $\{X_k\}_{k=0}^{N-1}$ から時間間隔を $\frac{\tau}{m}$ にした時系列を復元するには、式 (A.15) より、

$$x\left(\frac{\tau}{m}n\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i \frac{2\pi k n}{mN}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{mN-1} G_k e^{i \frac{2\pi k n}{mN}}$$

ただし、 G_k は、

$$G_k = \begin{cases} X_k, & 0 \leq k < \frac{N}{2} \\ 0, & \frac{N}{2} \leq k < (m - \frac{1}{2})N \\ X_{k-(m-1)N}, & (m - \frac{1}{2})N \leq k < mN \end{cases}$$

であることに注意すると、 $\{f(\frac{\tau}{m}n)\}_{n=0}^{mN-1}$ は、 $\{X_k\}_{k=0}^{N-1}$ を拡張して作った $\{G_k\}_{k=0}^{mN-1}$ の逆フーリエ変換に m を乗じたものであることが分かる。

	$\delta = 0.2$	$\delta = 0.1$	$\delta = 0.05$
矩形窓			
Parzen 窓			
Hanning 窓			

表 A.1: δ および窓関数と N_c 。

- (b) $f = 10$ として、(I) $\delta = 0.2$ 、(II) $\delta = 0.1$ 、(III) $\delta = 0.05$ 、および、窓関数が (i) 矩形窓、(ii) Parzen 窓、(iii) Hanning 窓の各々の組み合わせ (表 A.1) について、データ長を $N = 256, 512, 1024, 2048, 4096, \dots$ と変えて標本化した時系列データ $\{x(n\tau)\}_{n=0}^{N-1}$ の各々のパワースペクトル密度を計算し、二つの周波数 $f - \delta$ と $f + \delta$ の線スペクトルを区別できるようにする最小のデータ長 N_c を求めよ。つまり、表 A.1 の各欄に N_c を書き入れて、表を完成させよ。
- (c) 前問の結果より N_c と δ についてどのような関係 (たとえば、比例や反比例など) が予想されるか、解答せよ。
- (d) 問 (b) で取り扱った窓関数の中で、近接した周波数の線スペクトルを識別・推定するという目的に、最もかなっていたものはどれか (甲乙つけがたい場合は複数挙げよ)、(パワースペクトル密度などの) 図や理由を付けて答えよ。(目的にかなう窓関数は標本化周期のとり方、窓の開始・終了時刻の取り方、「推定の正しさ」の基準などに依存して変わるので、この小問に関しては、正解を設定しない。目的は問題 5 と問題 6 で用いる窓関数を決定することである。)

問題 5 (太陽表面の黒点に関するデータの解析)

ウォルフ黒点相対数 (Wulf number) は、太陽表面の黒点および黒点群の総量を数値化したものである。PandA 上の指定された場所 (演習期間中に指定する。) からデータ (元のデータは [5] のも

の使用) をダウンロードして、下記の設問に答えよ。

- (a) データ SN_y_tot_V2.0.txt を用いて、横軸を時間 (年) として、黒点相対数の時系列を図示せよ。
- (b) 月単位での観測データ SN_m_tot_V2.0.txt を用いて、データ長を 2^K (K は整数) になるように切り詰めて、そのデータから黒点相対数の変動の周波数に対するパワースペクトル密度を求めそれを図示せよ。(窓関数は、問題 4 (d) で答えたものを用いよ。)
- (c) パワースペクトル密度が最大となる周波数より周期を求めよ (一年未満は四捨五入せよ)。

問題 6 (氷期一週氷期サイクルの解析)

Milankovitch 理論では、地球の気候変動における氷河期と間氷期の到来を、地球の公転軌道要素の周期的変化によって生じる日射量の変化と関係づけている。具体的には、公転軌道における楕円軌道の離心率、地軸傾斜、地軸の歳差運動の周期的変動に関連する数十万年から 100 万年周期の気候変動があるという (発表: 1920 年代)。理論の発表後しばらくして、1970 年代より、海洋底のボーリング調査により採取されたサンプルに遺された微生物 (有孔虫) 化石の酸素同位体比⁸ から気候変動の周期が測定されるようになり、Milankovitch 理論を支持する結果が報告されるようになってきた。(詳細は、文献やインターネットの検索などで調べよ。)

PandA 上の指定された場所 (演習期間中に指定する。) からデータ (元のデータは [6] のものを使用) をダウンロードして、下記の設問に答えよ。

- (a) 横軸を時間 [ka BP]⁹ として、酸素同位体比 ($\delta^{18}\text{O}$) [%] の時系列を図示せよ。

⁸ 海水中の水 (H_2O) は、酸素分子が ^{16}O の軽い水と、 ^{18}O の重い水 (存在比は小さい) とから構成されている。海水中を漂う石灰質有孔虫は海水を使って石灰質の殻を作り、その殻には水温が低いほど、重い海水が多く取り込まれるので、酸素同位体比 $^{18}\text{O}/^{16}\text{O}$ は氷期に大きく、間氷期に小さくなる。

⁹ t ka BP は、現在から $t \times 1000$ 年前を意味する。

- (b) データ長が 2^K (K は整数) になるようにデータを切り詰めて、そのデータからパワースペクトル密度を求め結果を図示せよ。[窓関数は、問題 4 (d) で答えたものを用いよ。]
- (c) パワースペクトル密度が極大となる周波数より、楕円軌道の離心率、地軸傾斜、地軸の歳差運動の周期的変動に関連する数十万年から 100 万年周期の 3 つの周期を千年単位で推定せよ。[窓の開始点を変えて、周期が変わるかどうか確認せよ。もし変わるようであれば、幾つか (3~5) の異なる開始点の場合での周期 (の標本) を求め、それらの平均値を答えよ。また、時系列は明らかに何らかのトレンド (観測時間全体に渡る増加・減少の傾向) を持っているの、そのことを考慮し、周波数が 0 付近のスペクトルの極大は無視せよ。]

参考文献

- [1] 中村周. フーリエ解析. 応用数学基礎講座 4 / 岡部靖憲, 和達三樹, 米谷民明編集. 朝倉書店, 2003.
- [2] 佐川雅彦, 貴家仁志, 辻井重男. 高速フーリエ変換とその応用. デジタル信号処理シリーズ / 辻井重男企画・編集, 第 2 巻. 昭晃堂, 1992.
- [3] E. Oran Brigham. *The Fast Fourier Transform and Its Applications*. Prentice-Hall, Inc., USA, 1988.
- [4] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery. ニューメリカルレシピ・イン・シー: C 言語による数値計算のレシピ: 日本語版. 技術評論社, 東京, Japan, 1993. 翻訳: 丹慶 勝市 奥村 晴彦 佐藤 俊郎 小林 誠.
- [5] SILSO World Data Center, Royal Observatory of Belgium, Brussels. The international sunspot number. *International Sunspot Number Monthly Bulletin and on-line catalogue*, <http://www.sidc.be/silso>.

- [6] John D Imbrie, James D Hays, Douglas G Martinson, Andrew McIntyre, Alan C Mix, Joseph J Morley, Nicklas G Pisias, Warren L Prell, and Nicholas J Shackleton (1984). Stacked and smoothed oxygen-isotope record as a function of age in the SPECMAP time scale (SPECMAP-Stack). PANGAEA, <https://doi.org/10.1594/PANGAEA.56063>.

[筒広樹]