数理工学実験レポート

第 4 章（常微分方程式の数値的解法）

学籍番号 1029366161　中塚一瑳

2025 年 11 月 15 日

概要

目次

1　はじめに

2　課題 1　身の回りの現象の定式化

2.1　現象の説明

本課題では，身の回りの現象として SNS（X，旧 Twitter）におけるツイートの「バズり方」を取り上げる．あるユーザが投稿したツイートが，他のユーザによるいいねやリポスト（拡散）によって時間とともに広がっていく様子を，常微分方程式の初期値問題としてモデル化する．

ここではさらに，「どのくらい界隈を越えて受け入れられるツイートか」を表すパラメータとして β を導入する．一般受けしやすいツイートほど，フォロワーの界隈から離れても反応が落ちにくく，身内ネタや日常報告のようなツイートほど，界隈が少し離れるだけで反応しにくくなる，という直感を数式に反映させることを目指す．

2.2　モデル化のための仮定

ツイートの広がり方を簡単に記述するために，次のような仮定をおく．

- 時刻 t をツイート投稿からの経過時間とする．
- $x(t)$ を，時刻 t までにそのツイートに対して**いいねまたはリポストしたユーザの累積人数**と定める．
- すでに反応したユーザは，界隈のそこからさらに外側の界隈へとツイートを伝播させる．界隈が遠くなるほど反応しにくくなる効果を，x に対する冪 $x^{1-\beta}$ の形で表し，$0 < \beta \leq 1$ とする．
  - $\beta \approx 0$：動物系、ニュース・政治系など界隈を問わず受け入れられやすい「一般受け」ツイート．
  - $\beta \approx 1$：身内ネタや日常報告など，特定の界隈にしか届きにくいツイート．
- ツイートを見たユーザがいいね／リポストする確率は，界隈の内部では一定であり，界隈内外で平均すると，$x^{1-\beta}$ に比例する総合的な効果にまとめられると仮定する．
- アルゴリズムの影響により，ツイートは時間が経つほどおすすめやタイムラインに表示されにくくなる．その効果を「実効的な拡散力」$k(t)$ が指数関数的に減衰する

  $$k(t) = k_0 e^{-\alpha t} \quad (k_0 > 0,\ \alpha > 0)$$

  として表現する．
- ツイートを最終的に見うる潜在的ユーザ数 N は非常に大きく，実際の反応人数 $x(t)$ は $x(t) \ll N$ の範囲にとどまると仮定し，飽和効果は無視する．

これらの仮定のもとで，時刻 t における「新たに反応する人数の増加率」は

$$\{\text{すでに反応した人数}\}^{1-\beta} \times \{\text{時間に応じた拡散力}\} \approx k(t)\, x(t)^{1-\beta}$$

で与えられると考える．

2.3　常微分方程式の初期値問題

以上より，反応人数 $x(t)$ の時間発展は次の常微分方程式でモデル化できる：

$$\frac{dx}{dt} = k(t)\,x(t)^{1-\beta} = k_0 e^{-\alpha t} x(t)^{1-\beta}, \qquad 0 < \beta \le 1,\ k_0 > 0,\ \alpha > 0. \tag{1}$$

初期条件として，ツイート直後 $t = 0$ の時点で，投稿者本人や一部のフォロワーによる反応がすでに x_0 件存在していると仮定すると，

$$x(0) = x_0 \quad (x_0 > 0) \tag{2}$$

と書ける．

したがって，ツイートのバズり方を表す初期値問題は

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k_0 e^{-\alpha t} x^{1-\beta}(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{3}$$

となる．

2.4　解析解

式 (3) は変数分離形であり，$x > 0$ の範囲で

$$x^{\beta-1}\frac{dx}{dt} = k_0 e^{-\alpha t}$$

と書けるので，

$$x^{\beta-1}\,dx = k_0 e^{-\alpha t}\,dt$$

を積分する：

$$\int x^{\beta-1}\,dx = \int k_0 e^{-\alpha t}\,dt.$$

左辺は

$$\int x^{\beta-1}\,dx = \frac{x^\beta}{\beta},$$

右辺は

$$\int k_0 e^{-\alpha t}\,dt = -\frac{k_0}{\alpha}e^{-\alpha t} + C$$

であるから，

$$\frac{x^\beta}{\beta} = -\frac{k_0}{\alpha}e^{-\alpha t} + C.$$

初期条件 $t = 0,\ x(0) = x_0$ を用いると

$$\frac{x_0^\beta}{\beta} = -\frac{k_0}{\alpha} + C$$

より

$$C = \frac{x_0^\beta}{\beta} + \frac{k_0}{\alpha}.$$

したがって

$$\frac{x^\beta}{\beta} = -\frac{k_0}{\alpha}e^{-\alpha t} + \frac{x_0^\beta}{\beta} + \frac{k_0}{\alpha} = \frac{x_0^\beta}{\beta} + \frac{k_0}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}),$$

すなわち

$$x(t)^\beta = x_0^\beta + \frac{\beta k_0}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}). \tag{4}$$

よって解は

$$x(t) = \left[x_0^\beta + \frac{\beta k_0}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})\right]^{1/\beta} \tag{5}$$

となる（括弧内が正の範囲で有効）.

特に，十分時間が経った極限 $t \to \infty$ では $e^{-\alpha t} \to 0$ より

$$x_\infty := \lim_{t\to\infty} x(t) = \left[x_0^\beta + \frac{\beta k_0}{\alpha}\right]^{1/\beta} \tag{6}$$

となる．これは「ツイートの寿命が尽きた後の最終的な反応数」に対応する．

2.5　パラメータ β の解釈と考察

ツイートの「面白さ」や「受けやすさ」を表す指標を s とし，面白いツイートほど初期拡散力が大きくなると仮定して

$$k_0 = k_{\mathrm{base}} s$$

とおく．ここで k_{base} は定数である．このとき (6) より，最終的な反応数は

$$x_\infty(s) = \left[x_0^\beta + \beta K s\right]^{1/\beta}, \qquad K := \frac{k_{\mathrm{base}}}{\alpha} \tag{7}$$

と書ける．

この式から，パラメータ β の値によって，「面白さ s の変化が最終的な反応数にどう効くか」が大きく変わることが分かる．

$\beta \to 0$ の極限（界隈を越えてバズりやすいツイート）

β が十分小さいとき，$\log x_\infty(s)$ を β について一次までで近似すると

$$\log x_\infty(s) = \frac{1}{\beta}\log\bigl(x_0^\beta + \beta K s\bigr) \approx \log x_0 + Ks$$

となる．従って

$$x_\infty(s) \approx x_0 \exp\bigl(Ks\bigr) \qquad (\beta \ll 1). \tag{8}$$

すなわち，β が 0 に近いツイート（界隈をまたいで受け入れられる，いわゆる一般受けするツイート）では，面白さ s が 1 増えるごとに，最終的な反応数がほぼ指数関数的に増加する．この意味で，「面白さに対して指数的に効く」モードになっていると解釈できる．

$\beta \to 1$ の極限（身内ネタ寄りのツイート）

一方，$\beta \to 1$ とすると

$$x_\infty(s) = \left[x_0^\beta + \beta K s\right]^{1/\beta} \xrightarrow[\beta \to 1]{} x_0 + Ks$$

となり，

$$x_\infty(s) \approx x_0 + Ks \qquad (\beta \approx 1) \tag{9}$$

とほぼ線形に増加する．これは，身内ネタや日常報告のように，ごく限られた界隈にしか届かないツイートでは，面白さ s を上げても，反応数はほぼ比例程度しか増えないことを意味している．

まとめ

以上より，パラメータ β は

- β が 0 に近いほど「界隈を越えて受け入れられやすい」ツイートであり，面白さ s に対して最終的な反応数 $x_\infty(s)$ は式 (8) のように **ほぼ指数関数的** に増加する．
- β が 1 に近いほど「特定の界隈にしか刺さらない」ツイートであり，$x_\infty(s)$ は式 (9) のように**ほぼ線形** にしか増加しない．

このように，常微分方程式 (3) の解の形を解析することで，

> 一般受けするツイートほど，小さな「面白さ」の差が最終的なバズり具合を非常に大きく変えうるのに対し，身内ネタに近づくほど，面白さはほぼ線形にしか効かない

という直感的な性質を，数学的に説明することができる．

3　課題 2 4 次のアダムス・バッシュフォース法とアダムス・ムルトン法の導出

Adams 型多段法の一般的構成に基づき, 4 次のアダムス・バッシュフォース法（Adams – Bashforth, AB4）と 4 次のアダムス・ムルトン法（Adams – Moulton, AM4）を *Lagrange* **補間の積分を明示的に行うことで**導出する。さらに，これらを組み合わせて 4 次の予測子・修正子法を構成する。

対象とする常微分方程式は

$$u' = f(t, u), \qquad u(t_n) = u_n \tag{10}$$

とし，時間刻みを一定 Δt とおく。資料と同様に

$$f_n = f(t_n, u_n)$$

と略記する。

3.1　4 次アダムス・バッシュフォース法の導出

まず，

$$u_n = u_{n-1} + \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(\tau, u(\tau))\, d\tau$$

を数値積分で近似することを考える。4 次 AB 法では，区間 $[t_{n-1}, t_n]$ 上の f を

$$(t_{n-1}, f_{n-1}),\ (t_{n-2}, f_{n-2}),\ (t_{n-3}, f_{n-3}),\ (t_{n-4}, f_{n-4})$$

の 4 点を通る 3 次 Lagrange 多項式で近似し，その積分をとる。

変数変換

等間隔刻み Δt を用いて

$$\tau = t_{n-1} + \theta\Delta t, \qquad \theta \in [0, 1] \tag{11}$$

とおくと，

$$d\tau = \Delta t\, d\theta$$

より

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(\tau, u(\tau))\, d\tau = \Delta t \int_0^1 f(t_{n-1} + \theta\Delta t, u(t_{n-1} + \theta\Delta t))\, d\theta \tag{12}$$

$$= \Delta t \int_0^1 g(\theta)\, d\theta, \tag{13}$$

ただし

$$g(\theta) = f(t_{n-1} + \theta\Delta t, u(t_{n-1} + \theta\Delta t))$$

とおいた。

θ の節点は

$$t_{n-1} \leftrightarrow \theta = 0, \quad t_{n-2} \leftrightarrow \theta = -1, \quad t_{n-3} \leftrightarrow \theta = -2, \quad t_{n-4} \leftrightarrow \theta = -3$$

となる。

Lagrange 多項式の構成

節点

$$\theta_0 = 0, \quad \theta_1 = -1, \quad \theta_2 = -2, \quad \theta_3 = -3$$

に対し，

$$g(\theta_k) = f_{n-1-k} \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

となる。Lagrange 基底多項式を

$$\ell_k(\theta) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{3} \frac{\theta - \theta_j}{\theta_k - \theta_j}$$

とおくと，

$$g(\theta) \approx \ell_0(\theta) f_{n-1} + \ell_1(\theta) f_{n-2} + \ell_2(\theta) f_{n-3} + \ell_3(\theta) f_{n-4}$$

と表される。

各 $\ell_k(\theta)$ を具体的に書くと

$$\ell_0(\theta) = \frac{(\theta - \theta_1)(\theta - \theta_2)(\theta - \theta_3)}{(\theta_0 - \theta_1)(\theta_0 - \theta_2)(\theta_0 - \theta_3)} \tag{14}$$

$$= \frac{(\theta + 1)(\theta + 2)(\theta + 3)}{(0 + 1)(0 + 2)(0 + 3)} = \frac{(\theta + 1)(\theta + 2)(\theta + 3)}{6}, \tag{15}$$

$$\ell_1(\theta) = \frac{(\theta-\theta_0)(\theta-\theta_2)(\theta-\theta_3)}{(\theta_1-\theta_0)(\theta_1-\theta_2)(\theta_1-\theta_3)} \tag{16}$$

$$= \frac{\theta(\theta+2)(\theta+3)}{(-1-0)(-1+2)(-1+3)} = -\frac{\theta(\theta+2)(\theta+3)}{2}, \tag{17}$$

$$\ell_2(\theta) = \frac{(\theta-\theta_0)(\theta-\theta_1)(\theta-\theta_3)}{(\theta_2-\theta_0)(\theta_2-\theta_1)(\theta_2-\theta_3)} \tag{18}$$

$$= \frac{\theta(\theta+1)(\theta+3)}{(-2-0)(-2+1)(-2+3)} = \frac{\theta(\theta+1)(\theta+3)}{2}, \tag{19}$$

$$\ell_3(\theta) = \frac{(\theta-\theta_0)(\theta-\theta_1)(\theta-\theta_2)}{(\theta_3-\theta_0)(\theta_3-\theta_1)(\theta_3-\theta_2)} \tag{20}$$

$$= \frac{\theta(\theta+1)(\theta+2)}{(-3-0)(-3+1)(-3+2)} = -\frac{\theta(\theta+1)(\theta+2)}{6}. \tag{21}$$

係数の積分計算

$$\int_0^1 g(\theta)\,d\theta \approx \sum_{k=0}^{3}\Big(\int_0^1 \ell_k(\theta)\,d\theta\Big) f_{n-1-k}$$

であるから，各

$$\alpha_k = \int_0^1 \ell_k(\theta)\,d\theta$$

を計算すればよい。

■ℓ_0 の積分

$$\ell_0(\theta) = \frac{(\theta+1)(\theta+2)(\theta+3)}{6} \tag{22}$$

$$= \frac{(\theta^2+3\theta+2)(\theta+3)}{6} \tag{23}$$

$$= \frac{\theta^3+6\theta^2+11\theta+6}{6}. \tag{24}$$

したがって

$$\alpha_0 = \int_0^1 \ell_0(\theta)\,d\theta \tag{25}$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 (\theta^3+6\theta^2+11\theta+6)\,d\theta \tag{26}$$

$$= \frac{1}{6}\Big[\frac{\theta^4}{4} + 6\frac{\theta^3}{3} + 11\frac{\theta^2}{2} + 6\theta\Big]_0^1 \tag{27}$$

$$= \frac{1}{6}\Big(\frac{1}{4} + 2 + \frac{11}{2} + 6\Big) = \frac{55}{24}. \tag{28}$$

■ℓ_1 の積分

$$\ell_1(\theta) = -\frac{\theta(\theta+2)(\theta+3)}{2} \tag{29}$$

$$= -\frac{\theta(\theta^2+5\theta+6)}{2} = -\frac{\theta^3+5\theta^2+6\theta}{2}. \tag{30}$$

よって

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \int_0^1 \ell_1(\theta)\,d\theta && (31)\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 (\theta^3+5\theta^2+6\theta)\,d\theta && (32)\\
&= -\frac{1}{2}\Big[\frac{\theta^4}{4}+5\frac{\theta^3}{3}+6\frac{\theta^2}{2}\Big]_0^1 && (33)\\
&= -\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{4}+\frac{5}{3}+3\Big) = -\frac{59}{24}. && (34)
\end{aligned}
$$

■ℓ_2 の積分

$$
\begin{aligned}
\ell_2(\theta) &= \frac{\theta(\theta+1)(\theta+3)}{2} && (35)\\
&= \frac{\theta(\theta^2+4\theta+3)}{2} = \frac{\theta^3+4\theta^2+3\theta}{2}. && (36)
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\alpha_2 &= \int_0^1 \ell_2(\theta)\,d\theta && (37)\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (\theta^3+4\theta^2+3\theta)\,d\theta && (38)\\
&= \frac{1}{2}\Big[\frac{\theta^4}{4}+4\frac{\theta^3}{3}+3\frac{\theta^2}{2}\Big]_0^1 && (39)\\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{4}+\frac{4}{3}+\frac{3}{2}\Big) = \frac{37}{24}. && (40)
\end{aligned}
$$

■ℓ_3 の積分

$$
\begin{aligned}
\ell_3(\theta) &= -\frac{\theta(\theta+1)(\theta+2)}{6} && (41)\\
&= -\frac{\theta(\theta^2+3\theta+2)}{6} = -\frac{\theta^3+3\theta^2+2\theta}{6}. && (42)
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\alpha_3 &= \int_0^1 \ell_3(\theta)\,d\theta && (43)\\
&= -\frac{1}{6}\int_0^1 (\theta^3+3\theta^2+2\theta)\,d\theta && (44)\\
&= -\frac{1}{6}\Big[\frac{\theta^4}{4}+3\frac{\theta^3}{3}+2\frac{\theta^2}{2}\Big]_0^1 && (45)\\
&= -\frac{1}{6}\Big(\frac{1}{4}+1+1\Big) = -\frac{3}{8} = -\frac{9}{24}. && (46)
\end{aligned}
$$

■AB4 の最終形　以上より

$$
\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(\tau,u(\tau))\,d\tau \approx \Delta t\Big(\alpha_0 f_{n-1}+\alpha_1 f_{n-2}+\alpha_2 f_{n-3}+\alpha_3 f_{n-4}\Big)
$$

であり，

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t\Big(\frac{55}{24}f_{n-1} - \frac{59}{24}f_{n-2} + \frac{37}{24}f_{n-3} - \frac{9}{24}f_{n-4}\Big) \tag{47}$$

$$= u_{n-1} + \frac{\Delta t}{24}\Big(55f_{n-1} - 59f_{n-2} + 37f_{n-3} - 9f_{n-4}\Big). \tag{48}$$

これが 4 次アダムス・バッシュフォース法である。

3.2 4 次アダムス・ムルトン法の導出

同様にして AM4 を導出する。今度は節点として

$$(t_n, f_n),\ (t_{n-1}, f_{n-1}),\ (t_{n-2}, f_{n-2}),\ (t_{n-3}, f_{n-3})$$

の 4 点を用いる。先ほどと同じ変数変換

$$\tau = t_{n-1} + \theta\Delta t, \quad \theta \in [0, 1]$$

を用いると

$$t_n \leftrightarrow \theta = 1, \quad t_{n-1} \leftrightarrow \theta = 0, \quad t_{n-2} \leftrightarrow \theta = -1, \quad t_{n-3} \leftrightarrow \theta = -2$$

となる。

節点

$$\theta_0 = 1, \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = -1, \quad \theta_3 = -2$$

に対し

$$g(\theta_k) = \begin{cases} f_n & (k = 0), \\ f_{n-1} & (k = 1), \\ f_{n-2} & (k = 2), \\ f_{n-3} & (k = 3) \end{cases}$$

である。Lagrange 基底は

$$g(\theta) \approx \tilde{\ell}_0(\theta)f_n + \tilde{\ell}_1(\theta)f_{n-1} + \tilde{\ell}_2(\theta)f_{n-2} + \tilde{\ell}_3(\theta)f_{n-3}$$

と書ける。

同様に

$$\tilde{\ell}_0(\theta) = \frac{(\theta - \theta_1)(\theta - \theta_2)(\theta - \theta_3)}{(\theta_0 - \theta_1)(\theta_0 - \theta_2)(\theta_0 - \theta_3)} \tag{49}$$

$$= \frac{\theta(\theta + 1)(\theta + 2)}{(1 - 0)(1 + 1)(1 + 2)} = \frac{\theta(\theta + 1)(\theta + 2)}{6}, \tag{50}$$

$$\tilde{\ell}_1(\theta) = \frac{(\theta - \theta_0)(\theta - \theta_2)(\theta - \theta_3)}{(\theta_1 - \theta_0)(\theta_1 - \theta_2)(\theta_1 - \theta_3)} \tag{51}$$

$$= -\frac{(\theta - 1)(\theta + 1)(\theta + 2)}{2}, \tag{52}$$

$$\tilde{\ell}_2(\theta) = \frac{(\theta - \theta_0)(\theta - \theta_1)(\theta - \theta_3)}{(\theta_2 - \theta_0)(\theta_2 - \theta_1)(\theta_2 - \theta_3)} \tag{53}$$

$$= \frac{\theta(\theta - 1)(\theta + 2)}{2}, \tag{54}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\ell}_3(\theta) &= \frac{(\theta-\theta_0)(\theta-\theta_1)(\theta-\theta_2)}{(\theta_3-\theta_0)(\theta_3-\theta_1)(\theta_3-\theta_2)} && (55)\\
&= \frac{\theta(1-\theta^2)}{6}. && (56)
\end{aligned}
$$

同様に

$$
\tilde{\alpha}_k = \int_0^1 \tilde{\ell}_k(\theta)\,d\theta
$$

を計算すると

$$
\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_0 &= \frac{3}{8} = \frac{9}{24}, && (57)\\
\tilde{\alpha}_1 &= \frac{19}{24}, && (58)\\
\tilde{\alpha}_2 &= -\frac{5}{24}, && (59)\\
\tilde{\alpha}_3 &= \frac{1}{24} && (60)
\end{aligned}
$$

が得られる（展開・積分は AB4 の場合と同様に多項式を展開して項別に行う）。

したがって

$$
\begin{aligned}
u_n &= u_{n-1} + \Delta t\Big(\tilde{\alpha}_0 f_n + \tilde{\alpha}_1 f_{n-1} + \tilde{\alpha}_2 f_{n-2} + \tilde{\alpha}_3 f_{n-3}\Big) && (61)\\
&= u_{n-1} + \frac{\Delta t}{24}\Big(9f_n + 19f_{n-1} - 5f_{n-2} + f_{n-3}\Big). && (62)
\end{aligned}
$$

これが 4 次アダムス・ムルトン法である。

3.3　4 次予測子・修正子法

AM4 は $f_n = f(t_n, u_n)$ を含む陰的法である。そこで，まず AB4 を用いて u_n の予測値 $\tilde{u}_n$ を計算し，AM4 の中の f_n を $f(t_n, \tilde{u}_n)$ に置き換えることで完全に陽的な 4 次予測子・修正子法を得る。

■予測 (Predictor: AB4)

$$
\tilde{u}_n = u_{n-1} + \frac{\Delta t}{24}\Big(55f_{n-1} - 59f_{n-2} + 37f_{n-3} - 9f_{n-4}\Big). \tag{63}
$$

■修正 (Corrector: AM4)

$$
u_n = u_{n-1} + \frac{\Delta t}{24}\Big(9f(t_n, \tilde{u}_n) + 19f_{n-1} - 5f_{n-2} + f_{n-3}\Big). \tag{64}
$$

必要に応じて修正ステップを繰り返せば，AM4 の陰的方程式に対する反復解法として解釈することもできる。

3.4　まとめ

本課題では，Lagrange 補間多項式を明示的に構成し，その積分を実行することにより，4 次アダムス・バッシュフォース法および 4 次アダムス・ムルトン法の係数

$$
(55, -59, 37, -9), \quad (9, 19, -5, 1)
$$

を導出した。さらに，AB4 を予測子，AM4 を修正子として用いることにより，4 次精度の予測子・修正子法を構成した。

4　結論

付録 A　使用コード一覧

- レポート作成、Python の実装の一部に GitHub Copilot の補完を使用

参考文献

参考文献

[1] 数理工学実験（2025 年度配布資料）.