COHOMOLOGÍA DE ESPACIOS DE EILENBERG-MAC LANE

ANDRÉS MORÁN LAMAS

Abstract. El propósito del presente documento es calcular $H^*(K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Esto resulta relevante dada su relación directa con el álgebra de Steenrod $\mathcal{A}_2$ (módulo 2), que será clave en la construcción de la sucesión espectral de Adams. Las operaciones de Steenrod Sq^I cumplen un rol fundamental. El teorema de Borel cumple un rol destacable en la demostración.

1 Introducción

Como se ha podido evidenciar anteriormente, el cómputo de la cohomología de espacios de Eilenberg-Mac Lane dista de ser trivial. Los únicos espacios de Eilenberg-Mac Lane $K(\pi, n)$, con $n > 1$, cuya (co)homología puede ser calculada por medios elementales corresponden a $K(\mathbb{Z}, 2) \cong \mathbb{C}P^\infty$, y productos de este último (el cual es un $K(\pi, 2)$, donde π es libre abeliano). La sucesión espectral de Serre nos permite ir más allá, y calcular $H^*(K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, que resultará estar determinada por $\mathcal{A}_2$. La relación con el álgebra de Steenrod se sigue de que calcular $H^*(K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ equivale a determinar todas las operaciones en cohomología con coeficientes en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

El texto de Hatcher [1] define las operaciones de Steenrod mediante la construcción cuadrática, la cual tiene la ventaja de ser inducida por una construcción en espacios, entregando por tanto mayor información que mediante el teorema de modelos acíclicos. Sin embargo, esta distinción no influye en los resultados expuestos posteriormente. Esto será detallado en notas futuras. En lo que sigue, se asumirá este resultado, el teorema de representabilidad de cohomología de espacios, y la definición del álgebra de Steenrod, junto con sus propiedades básicas.

Se considerará el caso $p = 2$. El cálculo para p primo impar es relativamente análogo, como puede apreciarse en el trabajo de Cartan [4]. Sin embargo, para primos impares las relaciones de Adem para potencias reducidas de Steenrod son más complicadas, por lo que el argumento escala en extensión y dificultad técnica.

2 Preliminares

En esta sección consideraremos los resultados y definiciones básicas relativas al álgebra de Steenrod. La construcción de los cuadrados de Steenrod nos entrega el siguiente resultado.

Teorema 1 (Existencia de las operaciones de Steenrod módulo 2)**.** Existen morfismos naturales de mapas de pares

$$\mathrm{Sq}^i \colon H^n(X, A; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^{n+i}(X, A; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), \quad i \geq 0,$$

satisfaciendo los axiomas

(i) $\mathrm{Sq}^i(f^*(\alpha)) = f^*(\mathrm{Sq}^i(\alpha))$, para $f \colon X \to Y$.
(ii) $\mathrm{Sq}^i(\alpha + \beta) = \mathrm{Sq}^i(\alpha) + \mathrm{Sq}^i(\beta)$.
(iii) $\mathrm{Sq}^i(\alpha \smile \beta) = \sum_{j+k=i} \mathrm{Sq}^j(\alpha) \smile \mathrm{Sq}^k(\beta)$, i.e. se satisface la fórmula de Cartan.
(iv) $\mathrm{Sq}^i(\sigma(\alpha)) = \sigma(\mathrm{Sq}^i(\alpha))$, donde $\sigma \colon H^n(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^{n+1}(\Sigma X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ es el isomorfismo de suspensión dado por el producto $\times$ reducido (i.e. el *smash product*) con un generador de $H^1(S^1; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.
(v) $Sq^i(\alpha) = \alpha^2$ si $i = |\alpha|$, y $\mathrm{Sq}^i(\alpha) = 0$ si $i > |\alpha|$.
(vi) $\mathrm{Sq}^0 = \mathrm{Id}$.
(vii) Sq^1 es el morfismo de Bockstein β en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ asociado a la secuencia de coeficientes

$$0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0.$$

Date: 19 de junio de 2024.

En el contexto del teorema previo, no se requerirán todos los axiomas. En particular, la fórmula de Cartan no será necesaria para nuestro propósito actual. Primero es necesario fijar algo de notación.

Definición 1 (Notación)**.** Sea $I := (i_1, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}_{>0}^k$, $k \in \mathbb{N}$. Definimos $\mathrm{Sq}^I := \mathrm{Sq}^{i_1} \ldots \mathrm{Sq}^{i_k} := \mathrm{Sq}^{i_1} \circ \cdots \circ \mathrm{Sq}^{i_k}$.

Definición 2 (Monomio de Steenrod admisible)**.** Sea $I := (i_1, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}_{>0}^k$, $k \in \mathbb{N}$. Decimos que Sq^I es *admisible* si $2i_j \leq i_{j-1}$ para todo $j = 2, \ldots, k$.

La siguiente definición nos da una noción de qué tanto dista un monomio de ser admisible.

Definición 3 (Exceso)**.** Consideremos $I := (i_1, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}_{>0}^k, k \geq 0$. Definimos el *exceso* de Sq^I admisible como

$$e(I) := \sum_j (i_j - 2i_{j+1}).$$

Por convención, $I := (i_1, \ldots, i_k) = (i_1, \ldots, i_k, 0, 0, \ldots)$, por lo que el último término de la suma corresponde a i_k.

3 Cohomología de espacios de Eilenberg-Mac Lane

El siguiente lema nos describe el comportamiento de los monomios admisibles. Su utilidad radica en que posibilita el argumento inductivo que nos entregará los generadores especificados en el teorema de Serre sobre $H^*(K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Lema 1 (Lema de admisibilidad)**.**

(a) $\mathrm{Sq}^I(\iota_n) = 0$, si Sq^I es admisible y $e(I) > n$.

(b) Los elementos Sq^I admisibles con $e(I) = n$ se corresponden exactamente con $\left(\mathrm{Sq}^J(\iota_n)\right)^{2^j}$ donde J es admisible y $e(J) < n$.

Demostración. Para un monomio $\mathrm{Sq}^I = \mathrm{Sq}^{i_1} \cdots \mathrm{Sq}^{i_k}$, por definición de $e(I)$ podemos escribir $i_1 = e(I) + i_2 + \cdots + i_k$. Luego, si $e(I) > n$, se sigue que $i_1 > n + i_2 + \cdots + i_k = |\mathrm{Sq}^{i_2} \cdots \mathrm{Sq}^{i_k}(\iota_n)|$, por lo que $\mathrm{Sq}^I(\iota_n) = 0$, pues i_1 excede al grado del argumento.

Si $e(I) = n$, entonces $i_1 = n + i_2 + \cdots + i_k$, por lo que

$$\mathrm{Sq}^I(\iota_n) = \mathrm{Sq}^{i_1}\left(\mathrm{Sq}^{i_2} \cdots \mathrm{Sq}^{i_k}\right)(\iota_n) = \left(\mathrm{Sq}^{i_2} \cdots \mathrm{Sq}^{i_k}(\iota_n)\right)^2.$$

Dado que Sq^I es admisible, de la definición de exceso tenemos que $e(i_2, \ldots, i_k) \leq e(I) = n$, por lo que $\mathrm{Sq}^{i_2} \cdots \mathrm{Sq}^{i_k}$ tiene exceso estrictamente menor a n ó tiene exceso igual a n. Si el exceso es igual a n, repetimos el proceso hasta obtener una ecuación

$$\mathrm{Sq}^I(\iota_n) = \left(\mathrm{Sq}^J(\iota_n)\right)^{2^j}$$

con $e(J) < n$. Observar que truncar monomios admisibles preserva admisibilidad.

Recíprocamente, supongamos que $\mathrm{Sq}^{i_2} \cdots \mathrm{Sq}^{i_k}$ es admisible con $e(i_2, \cdots, i_k) \leq n$, y sea $i_1 = n + i_2 + \cdots + i_k$, de modo que

$$\mathrm{Sq}^{i_1} \cdots \mathrm{Sq}^{i_k}(\iota_n) = \left(\mathrm{Sq}^{i_2}\mathrm{Sq}^{i_3} \cdots (\iota_n)\right)^2.$$

Luego, $(i_1, \ldots, i_k)$ es admisible pues $e(i_2, \ldots, i_k) \leq n$ implica que $i_2 \leq n + i_3 + \cdots + i_k$, por lo que $i_1 = n + i_2 + \cdots + i_k \geq 2i_2$. Además, $e(i_1, \ldots i_k) = n$ dado que $i_1 = n + i_2 + \cdots + i_k$ porque la suma es telescópica. Así, iterativamente, podemos expresar una 2^j-potencia de $\mathrm{Sq}^J(\iota_n)$ admisible con $e(J) \leq n$, como $\mathrm{Sq}^I(\iota_n)$ admisible con $e(I) \leq n$. $\square$

El siguiente lema nos permitirá aplicar el teorema de Borel en la demostración del teorema de Serre. Esto conducirá a construir una base de elementos transgresivos.

Lema 2 (Sq^I conmuta con la transgresión)**.** Si $x \in H^*(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ es transgresivo entonces también lo es $\mathrm{Sq}^i(x)$, y $\tau(\mathrm{Sq}^i(x)) = \mathrm{Sq}^i(\tau(x))$.

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama obtenido de la naturalidad de la sucesión exacta larga de cohomología

$$
\begin{tikzcd}
 & H^r(B,b) \cong \tilde{H}^r(B) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "p^*"] & H^r(B) \\
H^{r-1}(F) \arrow[r, "\delta"] & H^r(X,F) &
\end{tikzcd}
$$

Denotemos por $\tau := j^*(p^*)^{-1}\delta$ a la transgresión. Sea $x \in H^{r-1}(F)$ transgresivo. Luego, $\delta x \in \mathrm{Im}(p^*)$, por lo que $\mathrm{Sq}^i(x) \in \mathrm{Im}(p^*)$, por naturalidad y porque Sq^i conmuta con δ dado que conmuta con la suspensión (y su inversa), y δ corresponde al mapa de borde topológico, el cual está descrito en términos de la suspensión (ver [1], pg. 200, y [3], pg. 108). Aplicando naturalidad nuevamente, se concluye que $\tau(\mathrm{Sq}^i(x)) = \mathrm{Sq}^i(\tau(x))$. $\square$

Requeriremos un teorema de comparación de sucesiones espectrales para posteriormente demostrar el teorema de Borel.

Teorema 2 (Comparación de sucesiones espectrales cohomológicas)**.** Supongamos que tenemos un morfismo Φ entre sucesiones espectrales de primer cuadrante de tipo cohomológico, de manera que $d_r\colon E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$. Asumamos que $E_2^{p,q} = E_2^{p,0} \otimes E_2^{0,q}$ para ambas sucesiones espectrales, con diferenciales d_2 que provengan de un producto tensor de aquellos donde $p=0$ o $q=0$. Entonces, cualquier par de las siguientes condiciones implica la tercera

(I) Φ es un isomorfismo en los términos $E_2^{p,0}$.
(II) Φ es un isomorfismo en los términos $E_2^{0,q}$.
(III) Φ es un isomorfismo en E_∞.

Demostración. Demostración en [2]. $\square$

Como preliminar al teorema de Borel y de Serre requerimos de la siguiente definición.

Definición 4 (Sistema simple de generadores)**.** Sea H^* un álgebra conmutativa graduada sobre un anillo R. Un conjunto $\{x_1, x_2, \dots\}$ se denomina un *sistema simple de generadores* si los elementos 1 y $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}$ con $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ forman una base (aditiva) sobre R de H^*.

Ejemplo 1 (Álgebras con sistema simple de generadores)**.**

(I) Un álgebra exterior tiene un sistema simple de generadores.
(II) Un álgebra polinomial $\mathbb{K}[x]$ tiene un sistema simple de generadores, dado por los términos x^{2^i}.
(III) El álgebra de polinomios truncada $\mathbb{K}[x]/(x^{2^n})$ tiene un sistema simple de generadores.
(IV) La propiedad de tener un sistema simple de generadores se preserva bajo producto tensor.
(V) Como consecuencia del ítem previo se tiene que las álgebras polinomiales multivariadas admiten un sistema simple de generadores.

El siguiente resultado es central en la demostración del teorema de Serre. El argumento consiste en construir un modelo algebraico de la sucesión espectral de Serre para la fibración a considerar, y verificar que dicho modelo es correcto (i.e. isomorfo), mediante el teorema de comparación previo. La construcción del modelo involucra al producto tensor de sucesiones espectrales sobre un campo. En general, el producto tensor de sucesiones espectrales no es una sucesión espectral.

Teorema 3 (Teorema de Borel)**.** Sea $F \to X \to B$ una fibración con X contráctil y B simplemente conexo. Supongamos que $H^*(F;\mathbb{K})$ donde $\mathbb{K}$ es un campo, tiene una base como espacio vectorial que consta de todos los productos $x_{i_1}\cdots x_{i_k}$, $i_1 < \cdots < i_k$, de elementos transgresivos $x_1, x_2, \dots \in H^*(F;\mathbb{K})$, los cuales son de dimensión impar si $\mathrm{Char}(\mathbb{K}) \neq 2$. Entonces

$$H^*(B;\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}\left[y_1, y_2, \cdots \mid [y_i] := \tau(x_i)\right].$$

Demostración. Construiremos un modelo algebraico de la sucesión espectral asociada a $F \to X \to B$. El bloque básico de la construcción es una sucesión espectral cuya $2-$página viene dada por $\Lambda_{\mathbb{K}}[\overline{x}_i] \otimes \mathbb{K}[\overline{y}_i]$, donde $|\overline{x}_i| = |x_i|$ e $|\overline{y}_i| = |y_i|$. Los diferenciales no triviales corresponden a los únicos que pueden ser no triviales, indicados en la figura siguiente, i.e. $d_r(\overline{x}_i \otimes \overline{y}_i^m) := \overline{y}_i^{m+1}$ para $r = |\overline{y}_i|$.

$$\begin{tikzcd}
\overline{x}_i \arrow[dr, "d_0"] & \overline{x}_i \otimes \overline{y}_i \arrow[dr, "d_1"] & \overline{x}_i \otimes \overline{y}_i^2 \arrow[dr, "d_2"] & \dots & \\
1 & \overline{y}_i & \overline{y}_i^2 & \overline{y}_i^3 & \dots
\end{tikzcd}$$

Figura 1. Bloque básico de la sucesión espectral modelo.

La fibra corresponde a $\Lambda_{\mathbb{K}}[\overline{x}_i]$, y la base a $\mathbb{K}[\overline{y}_i]$. Los d_r son isomorfismos (aditivos) porque envían generador a generador en el grado respectivo. Imponemos la regla de Leibniz en la definición de los diferenciales. En consecuencia, E_∞ es trivial, salvo por $E_\infty^{0,0} = \mathbb{K}$.

Como la sucesión espectral que estamos considerando tiene coeficientes en $\mathbb{F}_2$, tomando el producto tensor de sucesiones espectrales para todo i, obtenemos la sucesión espectral modelo deseada. La $2-$página E_2 es definida por $E_2^{p,q} := E_2^{p,0} \otimes E_2^{0,q}$, donde la fila inferior corresponde a $\mathbb{K}[\overline{y}_1, \overline{y}_2, \dots]$, y la columna izquierda está dada por $\Lambda_{\mathbb{K}}[\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots]$.

Ahora nos encontramos en el punto álgido de la demostración: definimos los diferenciales d_r inductivamente, tomando los diferenciales tensores $d_{r,i} \otimes 1 + 1 \otimes d_{r,j}$, donde se satisface la regla de Koszul. De este modo, los diferenciales d_r son derivaciones, y los elementos $\overline{x}_i$ son transgresivos, con $d_r(\overline{x}_i) = \overline{y}_i$. En particular, estas condiciones determinan d_2, con $d_2(\overline{x}_i) = \overline{y}_i$, si $|\overline{x}_i| = 1$, y $d_2(\overline{x}_i) = 0$ en otro caso.

En este punto, podemos describir la $3-$página, dado que bajo coeficientes en un campo, la homología de un producto tensor de complejos de cadena es el tensor de sus homologías, por el teorema de Künneth algebraico. Se sigue que en la $3-$página, los generadores $\overline{x_i}$ de grado $|\overline{x}_i| = 1$, y los generadores $\overline{y}_i$ de grado $|\overline{y}_i| = 2$ pasan a ser triviales, mientras el resto de ellos no son afectados. La columna izquierda es el álgebra exterior en los términos $\overline{x}_i$ restantes, mientras que la fila del fondo es el álgebra polinomial en los $\overline{y}_i$ restantes, y se cumple que $E_3^{p,q} = E_3^{p,0} \otimes E_3^{0,q}$. Los diferenciales d_3 se definen de manera análoga, de manera tal que satisfagan Leibniz, tales que $d_3(\overline{x}_i) = \overline{y}_i$, si $|\overline{x}_i| = 2$, y $d_3(\overline{x}_i) = 0$, en otro caso. Procedemos inductivamente, hasta construir E_∞, con todas las entradas triviales, salvo por $E_\infty^{0,0} = \mathbb{K}$.

Denotemos los términos en la sucesión espectral de Serre asociada a la fibración por $E_r^{p,q}$, y a los términos de la sucesión espectral modelo por $\overline{E}_r^{p,q}$. Definamos morfismos

$$\Phi \colon \overline{E}_2^{p,q} \to E_2^{p,q}$$

de la manera siguiente. Sea $\overline{x}_{i_1} \cdots \overline{x}_{i_r} \in \overline{E}_2^{0,q}$ un producto de generadores distintos. Definimos

$$\Phi(\overline{x}_{i_1} \cdots \overline{x}_{i_r}) := x_{i_1} \cdots x_{i_r}$$

y extendemos linealmente. En los términos $\overline{E}_2^{p,0}$ como el álgebra polinomial es libre, definamos Φ como el morfismo de anillos tal que $\Phi(\overline{y}_i) = y_i$, donde y_i es tal que su imagen bajo la proyección $E_2^{p,0} \to E_r^{p,0}$ es la transgresión $\tau(x_i)$ para $r = |y_i|$. Luego, en $\overline{E}_2^{p,q} = \overline{E}_2^{p,0} \otimes \overline{E}_2^{0,q}$, definimos Φ como el tensor de los valores definidos en los factores. Notar que Φ es solamente un morfismo aditivo, dado que $\mathrm{Char}(\mathbb{K}) = 2$, por lo que para $\overline{x}_i \in \Lambda_{\mathbb{K}}[\overline{x}_i]$ se tiene que $\overline{x}_i^2 = 0$, pero no podemos determinar si $-x_i^2 = x_i^2 = 0$. Sin embargo, en el resto del argumento basta con multiplicatividad parcial en la fila del fondo.

Por construcción, Φ conmuta con los diferenciales d_2, induciendo mapas $\overline{E}_3^{p,q} \to E_3^{p,q}$. Inductivamente, Φ conmuta con el resto de los diferenciales, induciendo mapas en las páginas respectivas. De este modo, $\Phi \colon \overline{E}_r^{p,q} \to E_r^{p,q}$ es un mapa de sucesiones espectrales.

Dado que X es contráctil, $\Phi \colon \overline{E}_\infty^{p,q} \to E_\infty^{p,q}$ es un isomorfismo. La hipótesis de que los x_i forman un sistema simple de generadores implica que $\overline{E}_2^{0,q} \cong E_2^{0,q}$, pues $\Phi|_{\overline{E}_2^{0,q}}$ es sobreyectivo en cada grado, por lo que restringe en isomorfismos en dichos grados. Por el teorema de comparación de sucesiones espectrales cohomológicas, se tiene que $\Phi \colon \overline{E}_2^{p,0} \to E_2^{p,0}$ es un isomorfismo. Además, se tiene que $\Phi \colon \overline{E}_2^{p,0} \to E_2^{p,0}$ es morfismo de anillos, concluyéndose el resultado. $\square$

Tenemos las siguientes observaciones adicionales. Para nuestro objetivo actual basta con centrar la atención en (ii).

(I) Si $\mathrm{Char}(\mathbb{K}) \neq 2$, los elementos $\{x_i\}_{i\in I}$, al ser de dimensión impar, cumplen $x_i^2 = 0$, por lo que $H^*(F;\mathbb{K})$ es un álgebra exterior. Esto se sigue de la conmutatividad del producto cup, pues tendremos que $2x_i^2 = 0$, donde podemos cancelar el coeficiente.

(II) La contractibilidad de X implica que la fibra $F \cong \Omega B$ débilmente. Luego, si asumimos que solo hay finitos elementos $x_i \in H^j(F;\mathbb{K})$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$, se tiene que $H^*(F;\mathbb{K})$ es un álgebra de Hopf conmutativa y asociativa, por lo que es producto tensor de álgebras exteriores, polinomiales, y, cuando $\mathrm{Char}(\mathbb{K}) = p > 0$, álgebras polinomiales truncadas. En particular, cuando $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $H^*(F;\mathbb{K})$ posee un sistema simple de generadores. Estos generadores no son transgresivos necesariamente.

(III) Otro resultado de Borel establece que $H^*(B;\mathbb{K})$ es un álgebra polinomial en generadores de dimensión par si y solo si $H^*(F;\mathbb{K})$ es un álgebra exterior en generadores de dimensión impar, sin necesidad de asumir condiciones relativas a la transgresión. Esto se puede demostrar o bien con la sucesión espectral de Serre, o bien con la sucesión espectral de Eilenberg-Moore, conduciéndo a una demostración más conceptual.

El siguiente lema técnico cobra especial relevancia para el cálculo de $H^*(K(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},n),\mathbb{F}_p)$ para $p > 2$ primo. En el argumento para módulo 2 su uso es prescindible. El texto de Robert E. Mosher y Martin C. Tangora [5] deja esta demostración propuesta para el lector. El texto de A. Hatcher [2] simplemente no lo menciona.

Lema 3 (Transgresión y clase fundamental)**.** Sea π un grupo abeliano. Consideremos la fibración de camino $K(\pi,n) \to P \to K(\pi,n+1)$, donde $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Entonces la transgresión

$$\tau\colon H^n(K(\pi,n);\pi) \to H^{n+1}(K(\pi,n+1);\pi)$$

es un isomorfismo, y se satisface que $\tau(\iota_n) = \iota_{n+1}$, donde $\iota_j \in H^j(K(\pi,j);\pi)$, con $j \in \{n, n+1\}$, corresponden a las clases fundamentales respectivas.

Demostración. Como $K(\pi,n+1)$ es 1-conexo, podemos considerar la sucesión espectral de Serre cohomológica. Dado que $P \cong *$, de la $n-$conexidad de la fibra, y la $(n+1)-$conexidad de la base, por convergencia de la sucesión espectral, es claro que

$$\tau\colon H^n(K(\pi,n);\pi) \to H^{n+1}(K(\pi,n+1);\pi)$$

es un isomorfismo.

Ahora, consideremos el diagrama siguiente, el cual corresponde a la definición de la transgresión

$$\begin{tikzcd}
 & H^{n+1}(K(\pi,n+1),x_0;\pi) \cong \tilde{H}^{n+1}(K(\pi,n+1);\pi) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "p^*"] & H^{n+1}(K(\pi,n+1);\pi) \\
H^n(K(\pi,n);\pi) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\alpha"] & H^{n+1}(P,K(\pi,n);\pi) \arrow[d, "\alpha"] & \\
\mathrm{Hom}(H_n(K(\pi,n)),\pi) \arrow[r, "\partial^*"] & \mathrm{Hom}(H_{n+1}(P,K(\pi,n)),\pi) &
\end{tikzcd}$$

El cuadrado conmutativo inferior se sigue de la relación entre los morfismos conectores en homología y cohomología para un par de espacios. En particular, los morfismos verticales corresponden a los del teorema de coeficientes universales. La conmutatividad de este diagrama se sigue por una cacería en diagramas, utilizando el diagrama de definición de los morfismos conectores respectivos.

Dado que $P \cong *$, por la sucesión exacta larga homológica del par $(P, K(\pi,n))$

$$\cdots \to H_i(K(\pi,n)) \to H_i(P) \to H_i(P,K(\pi,n)) \to H_{i-1}(K(\pi,n)) \to \cdots$$

de lo cual se deduce que $H_{i-1}(K(\pi,n)) \cong H_i(P,K(\pi,n))$ para todo $i \geq 2$. Para ver que esto también se satisface para $i = 1$, notar que $H_i(P,K(\pi,n)) = 0$, pues P es arco-conexo. Además, los términos asociados al funtor $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(-,-)$ del teorema de coeficientes universales

$$\mathrm{Ext}(H_{n-1}(K(\pi,n)),\pi) = 0, \quad \mathrm{Ext}(H_n(P,K(\pi,n)),\pi) \cong \mathrm{Ext}(H_{n-1}(K(\pi,n)),\pi) = 0,$$

de lo que se deduce que los morfismos verticales α son isomorfismos. Considerando el diagrama escalera homotopía$-$homología, tenemos el siguiente cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H_{n+1}(P,K(\pi,n)) \arrow[r, "\Phi_{n+1}"] \arrow[d, "\partial"] & \pi_{n+1}(P,K(\pi,n)) \arrow[d, "\hat{\partial}"] \\
H_n(K(\pi,n)) \arrow[r, "\Phi_n"] & \pi_n(K(\pi,n))
\end{tikzcd}$$

donde Φ_n, Φ_{n+1} corresponden a la inversa del morfismo de Hurewicz según corresponda, y $\hat{\partial}$ es el morfismo conector, el cual es un isomorfismo, por un argumento similar al caso homológico. Como la sucesión exacta corta del teorema de coeficientes universales es natural en el módulo de los coeficientes, podemos extender el diagrama de la transgresión anterior a

$$\begin{tikzcd}
 & H^{n+1}(K(\pi,n+1),x_0;\pi) \cong \tilde{H}^{n+1}(K(\pi,n+1);\pi) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "p^*"] & H^{n+1}(K(\pi,n+1);\pi) \\
H^n(K(\pi,n);\pi) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\alpha"] & H^{n+1}(P,K(\pi,n);\pi) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"] & H^{n+1}(P,K(\pi,n);\pi_{n+1}(P,K(\pi,n))) \arrow[d, "\alpha"] \\
\mathrm{Hom}(H_n(K(\pi,n)),\pi) \arrow[r, "\partial^*"] & \mathrm{Hom}(H_{n+1}(P,K(\pi,n)),\pi) \arrow[r, "\beta"] & \mathrm{Hom}(H_{n+1}(P,K(\pi,n+1)),\pi)
\end{tikzcd}$$

Los morfismos verticales en el cuadrado conmutativo inferior derecho son isomorfismos. También lo son los morfismos horizontales β, los cuales son inducidos por $\hat{\delta}^{-1}\colon \pi_n(K(\pi,n)) \to \pi_{n+1}(P,K(\pi,n))$. Notemos ahora que $\beta\circ\partial^*\circ\alpha(\iota_n) = \beta(\Phi_n\circ\partial) = \hat{\delta}^{-1}\circ\Phi_n\circ\partial = \Phi_{n+1}$, por la conmutatividad del diagrama escalera homotopía$-$homología. Luego, $\alpha^{-1}(\beta\circ\partial^*\circ\alpha(\iota_n)) = \iota_{n+1} \in H^{n+1}(P,K(\pi,n);\pi_{n+1}(P,K(\pi,n)))$, por definición de clase fundamental. De la conmutatividad del diagrama, y dado que el isomorfismo β de la parte superior viene del teorema de coeficientes universales, se sigue que $\delta(\iota_n) = \iota_{n+1} \in H^{n+1}(P,K(\pi,n);\pi)$.

Finalmente, como la transgresión es un isomorfismo, en particular p^* es un isomorfismo. Adicionalmente, como $n+1 \geq 1$, podemos asumir S.P.G. que j^* es una igualdad, i.e. el resultado deseado se reduce a demostrar que p^* preserva la clase fundamental. Esto se seguirá de que p^* viene inducido por un mapa de espacios, por lo cual podemos proceder de manera análoga al argumento anterior, explotando la naturalidad de la inversa del morfismo de Hurewicz.

Como $\mathrm{Ext}(H_n(K(\pi,n+1),x_0),\pi) = 0$, se tiene que $\alpha\colon H^{n+1}(K(\pi,n+1),x_0;\pi) \to \mathrm{Hom}(H_{n+1}(K(\pi,n+1),x_0),\pi)$ es un isomorfismo. Por la naturalidad en espacios de la secuencia exacta corta del teorema de coeficientes universales, obtenemos el siguiente cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H^{n+1}(K(\pi,n+1),x_0;\pi) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "p^*"] & \mathrm{Hom}(H_{n+1}(K(\pi,n+1),x_0),\pi) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(p_*,\pi)"] \\
H^{n+1}(P,K(\pi,n);\pi) \arrow[r, "\alpha"] & \mathrm{Hom}(H_{n+1}(P,K(\pi,n)),\pi)
\end{tikzcd}$$

Denotemos por $\iota_{n+1} \in H^{n+1}(K(\pi,n+1),x_0;\pi), \iota_{P,n} \in H^{n+1}(P,K(\pi,n);\pi)$ a las clases fundamentales respectivas. Consideremos las inversas de los morfismos de Hurewicz

$$\alpha(\iota_{n+1}) =: \Phi_{n+1}\colon H_{n+1}(K(\pi,n+1),x_0) \to \pi_{n+1}(K(\pi,n+1),x_0)$$
$$\alpha(\iota_{P,n}) =: \Phi_{P,n}\colon H_{n+1}(P,K(\pi,n)) \to \pi_{n+1}(P,K(\pi,n)).$$

Por la naturalidad del morfismo de Hurewicz, tenemos el siguiente cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H_{n+1}(K(\pi,n+1),x_0) \arrow[r, "\Phi_{n+1}"] & \pi_{n+1}(K(\pi,n+1),x_0) \\
H_{n+1}(P,K(\pi,n)) \arrow[u, "p_*"] \arrow[r, "\Phi_{P,n}"] & \pi_{n+1}(P,K(\pi,n)) \arrow[u, "\pi_{n+1}(p,p|_{K(\pi,n)})"']
\end{tikzcd}$$

Dada la $n-$conexidad de los espacios involucrados, se sigue que los morfismos horizontales son isomorfismos. Además, como $K(\pi,n) \to P \xrightarrow{p} K(\pi,n+1)$ es una fibración de Serre con base arco-conexa, se tiene que $\pi_{n+1}\left(p,p|_{K(\pi,n)}\right)$ es un isomorfismo. Consideremos el (iso)morfismo de $\mathbb{Z}-$módulos

$$\left(\pi_{n+1}\left(p,p|_{K(\pi,n)}\right)\right)^{-1} : \pi_{n+1}(K(\pi,n+1),x_0) \to \pi_{n+1}(P,K(\pi,n)).$$

Por naturalidad en los coeficientes de la sucesión exacta corta del teorema de coeficientes universales,

$$\begin{tikzcd}
H^{n+1}(K(\pi,n+1),x_0;\pi) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "p^*"] & \mathrm{Hom}(H_{n+1}(K(\pi,n+1),x_0),\pi) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(p_*,\pi)"] \\
H^{n+1}(P,K(\pi,n);\pi) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"] & \mathrm{Hom}(H_{n+1}(P,K(\pi,n)),\pi) \arrow[d, "\gamma"] \\
H^{n+1}(P,K(\pi,n);\pi_{n+1}(P,K(\pi,n))) \arrow[r, "\alpha"] & \mathrm{Hom}(H_{n+1}(P,K(\pi,n)),\pi_{n+1}(P,K(\pi,n)))
\end{tikzcd}$$

donde γ viene inducido por $\left(\pi_{n+1}\left(p,p|_{K(\pi,n)}\right)\right)^{-1}$. Luego, para $\iota_{n+1} \in H^{n+1}(K(\pi,n+1),x_0;\pi)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\gamma \circ \mathrm{Hom}(p_*,\pi) \circ \alpha(\iota_{n+1}) &= \gamma \circ \mathrm{Hom}(p_*,\pi)(\Phi_{n+1}) \\
&= \gamma(\Phi_{n+1} \circ p_*) \\
&= \gamma\left(\pi_{n+1}\left(p,p|_{K(\pi,n)}\right) \circ \Phi_{P,n}\right) \\
&= \left(\pi_{n+1}\left(p,p|_{K(\pi,n)}\right)\right)^{-1} \circ \pi_{n+1}\left(p,p|_{K(\pi,n)}\right) \circ \Phi_{P,n} \\
&= \Phi_{P,n}.
\end{aligned}$$

Luego, $\gamma \circ p^*(\iota_{n+1}) = \iota_{P,n}$. Como γ es un isomorfismo y viene dado por el teorema de coeficientes universales, se sigue que $p^*(\iota_{n+1}) = \iota_{P,n} \in H^{n+1}(P,K(\pi n);\pi)$. Ahora bien, p^* es un isomorfismo, pues $\pi_{n+1}\left(p,p|_{K(\pi,n)}\right)$ lo es, y la inversa del morfismo de Hurewicz es natural. Se sigue que $(p^*)^{-1}$ preserva la clase fundamental, concluyéndose la demostración. $\square$

El teorema de Borel es el ingrediente principal en la demostración del teorema central de esta sección. La demostración procede por inducción, mediante la fibración $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},n) \to P \to K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},n+1)$. La transgresión cumple un rol destacable.

Teorema 4 (Cohomología de $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},n)$ (módulo 2))**.** Tenemos un isomorfismo

$$H^*(K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},n);\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{F}_2\left[\mathrm{Sq}^I(\iota_n) \mid e(I) < n,\ \mathrm{Sq}^I \text{ admisible}\right],$$

donde $\iota_n \in H^n(K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},n);\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ es un generador.

Demostración. Procederemos por inducción en $n \in \mathbb{N}$. El caso base corresponde a

$$H^*(K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},1);\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong H^*(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{F}_2[\mathrm{Sq}^0\iota_1].$$

Para el paso inductivo, usamos la fibración de camino $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},n) \to P \to K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},n+1)$. Cuando $n=1$, la fibra es $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},1)$, con sistema simple de generadores dado por elementos $i_1^{2^i} = \mathrm{Sq}^{2^{i-1}} \cdots \mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^1(\iota_1)$. Dado que estamos considerando una fibración de Serre con base $1-$conexa, podemos considerar la sucesión espectral de Serre cohomológica. Luego, tenemos que $E_2^{p,q}$ viene dada por

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & \vdots & \vdots & \vdots \\
2 & \mathbb{F}_2 \cdot \iota_1^2 & 0 & \mathbb{F}_2 \cdot \iota_1^2 \iota_2 \\
1 & \mathbb{F}_2 \cdot \iota_1 & 0 & \mathbb{F}_2 \cdot \iota_1 \iota_2 \\
0 & \mathbb{F}_2 \cdot 1 & 0 & \mathbb{F}_2 \cdot \iota_2 \\
\hline
 & 0 & 1 & 2
\end{array}
$$

Figura 2. $E_2^{p,q}$ asociada a $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n) \to P \to K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n+1)$.

donde $\iota_2 \in H^*(K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 2); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ es la clase fundamental respectiva. Como $P \cong *$, se tiene que d_2 es un isomorfismo.

Estos últimos elementos son transgresivos gracias al lema previo, dado que $\iota_1 \in H^1(K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ es claramente transgresivo: $d_2\colon H^1(K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^2(K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 2); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ es un morfismo en todo su dominio, y se cumple que $d_2(\iota_1) = \iota_2$, por el Lema 3, dado que d_2 es un isomorfismo. El teorema de Borel nos entrega que

$$H^*(K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 2); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{F}_2 \left[\mathrm{Sq}^{2^i} \cdots \mathrm{Sq}^2 \mathrm{Sq}^1(\iota_2) \mid d_2(\iota_1) = \iota_2 \right].$$

El caso general es similar. Si

$$H^*(K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{F}_2 \left[\mathrm{Sq}^I(\iota_n) \mid \mathrm{Sq}^I \text{ admisible}, \;\; e(I) < n \right]$$

entonces tiene un sistema simple de generadores que consiste de los términos $\left(\mathrm{Sq}^I(\iota_n)\right)^{2^i}$, para $i = 0, 1, \ldots$. Por el lema de admisibilidad, estos términos corresponden exactamente a los monomios admisibles $\mathrm{Sq}^I(\iota_n)$ tales que $e(I) \leq n$. Estos elementos son transgresivos, dado que ι_n es transgresivo, y la sucesión espectral tiene filas triviales entre la fila $0-$ésima y la $(n+1)-$ésima (extremos no incluidos). Dado que $d_n(\iota_n) = \iota_{n+1}$, se sigue que $d_n(\mathrm{Sq}^I(\iota_n)) = \mathrm{Sq}^I(\iota_{n+1})$, por lo que podemos concluir el resultado deseado mediante el teorema de Borel para $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n+1)$. □

4 Relación con el álgebra de Steenrod

El resultado siguente será clave en la construcción de la sucesión espectral de Adams. Observar que entre mayor sea $n \in \mathbb{N}$, el cálculo previo de $\tilde{H}^*(K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ nos entrega una porción mayor del álgebra de Steenrod $\mathcal{A}_2$. Como el lado izquierdo no depende de n, al tomar límite inverso, en el lenguaje de *spectrum* esto se traducirá en que la cohomología módulo 2 del spectrum de Eilenberg-Mac Lane asociado al grupo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ es isomorfa al álgebra de Steenrod $\mathcal{A}_2$. Se verá que, en nuestro contexto, los límites inversos son más sutiles que los colímites.

Corolario 1 (Álgebra de Steenrod en grado d)**.** El morfismo definido en monomios admisibles

$$\begin{aligned} \Phi\colon \mathcal{A}_2 &\to \tilde{H}^*(K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ Sq^I &\to \mathrm{Sq}^I(\iota_n) \end{aligned}$$

es un isomorfismo restringido a $(\mathcal{A}_2)_d$ sobre $H^{n+d}(K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ para $d \leq n$. En particular, los monomios admisibles Sq^I forman una base aditiva para $\mathcal{A}_2$.

Demostración. El mapa dado es sobreyectivo, pues $\tilde{H}^{n+d}(K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, para $d < n$, consta solamente de polinomios lineales en las variables $\mathrm{Sq}^I(\iota_n)$, y el único término no lineal para $d = n$ corresponde a $\iota_n^2 = \mathrm{Sq}^n(\iota_n)$.

Para la inyectividad, primero notar que $d(I) \geq e(I)$. Esto puede verificarse inductivamente, observando que

$$e(i_1, \ldots, i_k) \leq d(i_1, \ldots, i_{k-1}) - i_k \leq d(i_1, \ldots, i_{k-1}) \leq d(i_1, \ldots, i_{k-1}, i_k).$$

Además, Sq^n corresponde al único monomio con exceso y grado iguales a n, pues

$$i_1 = e(I) + i_2 + \cdots + i_k, \qquad d(I) = i_1 \dots i_k.$$

Reemplazamos i_1 en $d(I)$ y vemos que $k = 1$. Luego, $i_1 = n$, de modo que Sq^n es la única posibilidad.

En consiguiente, los monomios admisibles Sq^I con $d(I) \leq n$ son mapeados en clases linealmente independientes en $\tilde{H}^*(K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, pues $\mathrm{Sq}^n(\iota_n) = (\mathrm{Sq}^0(\iota_n))^2$, y $H^*(K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ posee un sistema simple de generadores $(\mathrm{Sq}^{I'}(\iota_n))^{2^i}$, para $i = 0, 1, \dots$, con $e(I') < n$.

Dado que todo monomio puede ser escrito como combinación lineal de monomios admisibles gracias a las relaciones de Adem, se sigue la inyectividad, junto con la independencia lineal de los monomios admisibles. □

Referencias

[1] A. Hatcher, "Algebraic Topology", *Cambridge University Press*, Cambridge, 2002.
[2] A. Hatcher, "Spectral Sequences in Algebraic Topology", Unpublished, 2004, URL: `https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATch5.pdf`.
[3] J.P. May, "A concise course in algebraic topology", *The University of Chicago Press*, Chicago, 1999.
[4] H. Cartan, "Sur les groupes d'Eilenberg-MacLane. II", *Proc. Nat. Acad. Sci.*, U.S.A., 1954, 704–707, DOI 10.1073/pnas.40.8.704 (Francés).
[5] R. E. Mosher, M. C. Tangora, "Cohomology Operations and Applications in Homotopy Theory", Harper and Row, New York, 1968.

Email address: `andres.moran.l@uc.cl`