

# TEOREMA DE SUSPENSIÓN DE FREUDENTHAL

ANDRÉS MORÁN LAMAS

ABSTRACT. El propósito del presente documento es demostrar el teorema de suspensión de Freudenthal. Se siguen las notas de Oscar Randal-Williams [1]. Se recurre a [2] y [3] complementariamente.

## 1 INTRODUCCIÓN

La idea central de la demostración es factorizar el isomorfismo de escisión en homología como la composición entre el mapa inducido por la unidad de la adjunción suspensión-loop, y el mapa inducido por la fibración de caminos  $\text{ev}_1: P_*X \rightarrow X$ . Dicha factorización, junto con el teorema de Hurewicz, nos permiten construir un puente entre homotopía (estable) y homología. La herramienta técnica que nos permitirá concretar la demostración corresponde a la secuencia espectral de Serre, junto con la noción de transgresión.

## 2 PRELIMINARES

La parte preliminar consta de la secuencia exacta de Serre. Es un concepto prescindible, pues puede suplirse por la secuencia espectral de Serre, pero permite una demostración más limpia. Esta sección se fundamenta en [3].

**Proposición 1** (Morfismos del borde). Sea  $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$  una fibración de Serre, con base  $B$  arco-conexa, tal que  $\pi_1(B, b_0)$  actúa trivialmente en  $H_*(F; G)$ . Luego:

(a) El morfismo  $i_*: H_q(F) \rightarrow H_q(E)$  se factoriza como:

$$H_q(F) \cong E_{0,q}^2 \rightarrow E_{0,q}^\infty \cong F_{0,q} \rightarrow H_q(E),$$

donde el mapa de la izquierda es la proyección en la infinito-página, y el de la derecha es la inclusión.

(b) El morfismo  $p_*: H_p(E) \rightarrow H_p(B)$  se factoriza como:

$$H_p(E) \rightarrow E_{p,0}^\infty \rightarrow E_{p,0}^2 \cong H_p(B),$$

donde el mapa de la izquierda es la proyección  $H_p(E) \cong F_{p,0} \rightarrow E_{p,0}^\infty$ , y el mapa de la derecha es la inclusión.

*Demostración.* Como la secuencia espectral de Serre es una secuencia espectral acotada en el primer cuadrante, se tiene que  $E_{p,q}^r = 0$  para  $p < 0$ . Por lo tanto,  $d^r: E_{0,q}^r \rightarrow E_{-r,q+r-1}^r = 0$  es trivial. Luego,  $E_{0,q}^{r+1}$  es un cociente de  $E_{0,q}^r$ . Tomemos el morfismo sobreyectivo  $E_{0,q}^2 \rightarrow E_{0,q}^\infty$  dado por la composición de las proyecciones  $E_{0,q}^k \rightarrow E_{0,q}^{k+1}$ . Notemos que  $E_{0,q}^\infty = F_{0,q} \subseteq H_q(E)$  (pues  $E_{p,q}^\infty = 0$  para  $p < 0$ ). Demostraremos la primera afirmación.

Sean  $p': F \rightarrow \{b_0\}$  y el mapa de fibraciones:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{i} & E \\ \downarrow p' & & \downarrow p \\ \{b_0\} & \hookrightarrow & B \end{array}$$

Notemos que  $p': F \rightarrow \{b_0\}$  corresponde a una fibración de Serre con base 1-conexa. Denotemos por  $E_{p,q}'$  a la secuencia espectral asociada. Por naturalidad de la secuencia espectral de Serre, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} H_q(F) \cong E_{0,q}^2 & \longrightarrow & E_{0,q}^\infty & \longrightarrow & H_q(E) \\ \uparrow \text{Id} & & \uparrow i_* & & \uparrow i_* \\ H_q(F) \cong E_{0,q}'^2 & \longrightarrow & E_{0,q}'^\infty & \longrightarrow & H_q(E) \end{array}$$

Como  $E_{k,q}'^2 = 0$  para todo  $k \neq 0$ , se tiene que  $E_{0,q}'^\infty = H_q(F)$ . Por construcción de la infinito-página, y de la filtración, se sigue que los morfismos de la fila inferior están dados por la identidad, teniéndose (a).

Para (b), dado que la secuencia espectral de Serre está acotada en el primer cuadrante, en particular,  $E_{p,q}^r = 0$  para  $q < 0$ . Luego,  $E_{p,0}^{r+1} = \text{Ker}(d^r) \subseteq E_{p,0}^r$ . Así,  $E_{p,0}^\infty \subseteq E_{p,0}^2$ . Además, ya que  $E_{p,q}^\infty = 0$  para  $q < 0$ , se tiene que  $F_{p,0} = H_p(E)$ . Luego, tenemos un morfismo sobreyectivo  $H_p(E) = F_{p,0} \rightarrow E_{p,0}^\infty$ . La demostración es similar a la de (a). Consideremos el mapa de fibraciones:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{p} & B \\ \downarrow p & & \downarrow \text{Id} \\ B & \xrightarrow{\text{Id}} & B \end{array}$$

Por naturalidad de la secuencia espectral de Serre:

$$\begin{array}{ccccc} H_p(E) & \longrightarrow & E_{p,0}^\infty & \longrightarrow & E_{p,0}^2 \cong H_p(B) \\ \downarrow p_* & & \downarrow p_* & & \downarrow = \\ F_{p,0}' = H_p(B) & \longrightarrow & E_{p,0}'^\infty & \longrightarrow & E_{p,0}'^2 \cong H_p(B) \end{array}$$

Como la fibra de  $\text{Id}: B \rightarrow B$  es contractible, se tiene que en la secuencia espectral asociada, todas las filas son triviales, salvo la 0-ésima. Luego, por convergencia,  $E_{p,0}'^\infty = H_p(B)$ , de manera que ambos morfismos en la parte inferior del diagrama corresponden a la identidad, teniéndose lo deseado.  $\square$

**Definición 1** (Morfismos del borde). Denominamos por *morfismos del borde* a los morfismos de la proposición previa.

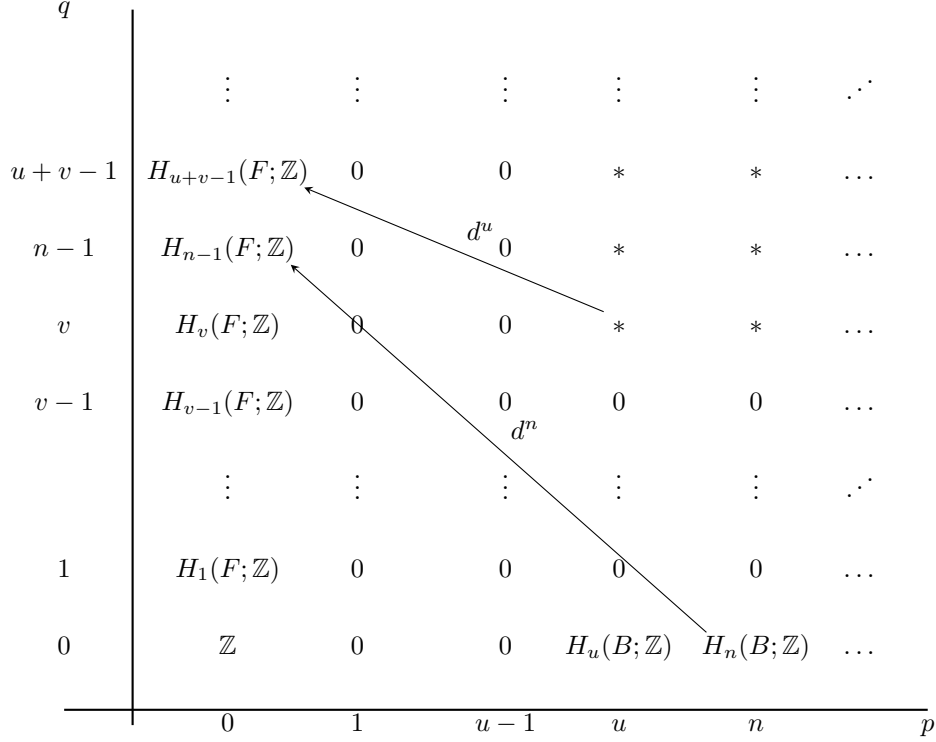
Tenemos un análogo homológico de la secuencia exacta asociada a una fibración en homotopía.

**Teorema 1** (Secuencia exacta de Serre para homología). Sea  $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$  una fibración de Hurewicz, con  $B$  simplemente-conexo, y  $F$  arco-conexo. Supongamos que  $H_s(B) = 0$  para  $1 \leq s < u$  y  $H_t(F) = 0$  para  $1 \leq t < v$ . Luego, existe una secuencia exacta:

$$H_{u+v-1}(F) \xrightarrow{i_*} H_{u+v-1}(E) \xrightarrow{p_*} H_{u+v-1}(B) \xrightarrow{d} H_{u+v-2}(F) \xrightarrow{i_*} H_{u+v-2}(E) \xrightarrow{p_*} H_{u+v-2}(B) \xrightarrow{d} \cdots \rightarrow H_1(E) \rightarrow 0,$$

donde el morfismo conector  $d: H_{u+v-k}(B) \rightarrow H_{u+v-k-1}(F)$  corresponde a la transgresión.

*Demostración.* Por hipótesis, podemos utilizar la secuencia espectral de Serre. Además, por la descripción de la 2-página, y el teorema de coeficientes universales, tenemos que  $E_{p,q}^2$  tiene el aspecto descrito en la figura siguiente:



**Figura 1.**  $E_{\bullet, \bullet}^2$  asociada a la fibración  $p$ .

Denotamos por  $*$  al resto de las entradas que posiblemente sean no-triviales. Sea  $n < u + v$ . Consideremos las transgresiones  $d^n: H_n(B) = E_{n,0}^n \rightarrow E_{0,n-1}^n = H_{n-1}(F)$ . El primer diferencial presuntamente no trivial en grado total  $u + v$  es  $d^u: E_{u,v}^u \rightarrow H_{u+v-1}(F)$ , ilustrado en la figura, el cual se traduce en el rango finito enunciado en el teorema. Dado que en la 2-página, los términos con grado total  $n$  son triviales salvo en los extremos, por convergencia, tenemos la secuencia exacta corta:

$$0 \rightarrow E_{0,n}^\infty \rightarrow H_n(E) \rightarrow E_{n,0}^\infty \rightarrow 0,$$

donde:

$$\begin{aligned} E_{0,n}^\infty &= \text{Coker} \left( d^{n+1}: H_{n+1}(B) = E_{n+1,0}^{n+1} \rightarrow E_{0,n}^{n+1} = H_n(F) \right), \\ E_{n,0}^\infty &= \text{Ker} \left( d^n: H_n(B) = E_{n,0}^n \rightarrow E_{0,n-1}^n = H_{n-1}(F) \right). \end{aligned}$$

Por la proposición anterior tenemos que  $p_*: H_n(E) \rightarrow E_{n,0}^\infty \xrightarrow{i_*} H_n(B)$ . Luego  $H_n(E) \xrightarrow{p_*} H_n(B) \xrightarrow{d^n} H_{n-1}(F)$  es exacta. Similarmente,  $i_*: H_n(F) \rightarrow E_{0,n}^\infty \rightarrow H_n(E)$ . Así,  $\text{Im}(d^{n+1}) = \text{Ker}(i_*)$ , por lo que:

$$H_{n+1}(B) \xrightarrow{d^{n+1}} H_n(F) \xrightarrow{i_*} H_n(E) \xrightarrow{p_*} H_n(B) \xrightarrow{d^n} H_{n-1}(F)$$

es exacta, para  $1 \leq n \leq u + v - 2$ . Para  $n = u + v - 1$ , el codominio de  $d^{u+v}$  es un cociente de  $H_n(F)$ , lo que se traduce en la truncamiento de la secuencia exacta enunciada en el teorema.  $\square$

## 3 TEOREMA DE SUSPENSIÓN DE FREUDENTHAL

En este punto, disponemos de las herramientas para demostrar el teorema de suspensión de Freudenthal.

**Teorema 2** (Teorema de suspensión de Freudenthal). Sea  $X$  un espacio  $(n-1)$ -conexo basado en  $x_0 \in X$ . Entonces, el mapa de suspensión:

$$\begin{aligned} \Sigma: \pi_i(X) &\rightarrow \pi_{i+1}(\Sigma X) \\ [f: S^i \rightarrow X] &\mapsto [\Sigma f: \Sigma S^i \cong S^{i+1} \rightarrow \Sigma X] \end{aligned}$$

es un morfismo sobreyectivo para  $0 \leq i \leq 2n-1$  y un isomorfismo para  $0 \leq i \leq 2n-2$ .

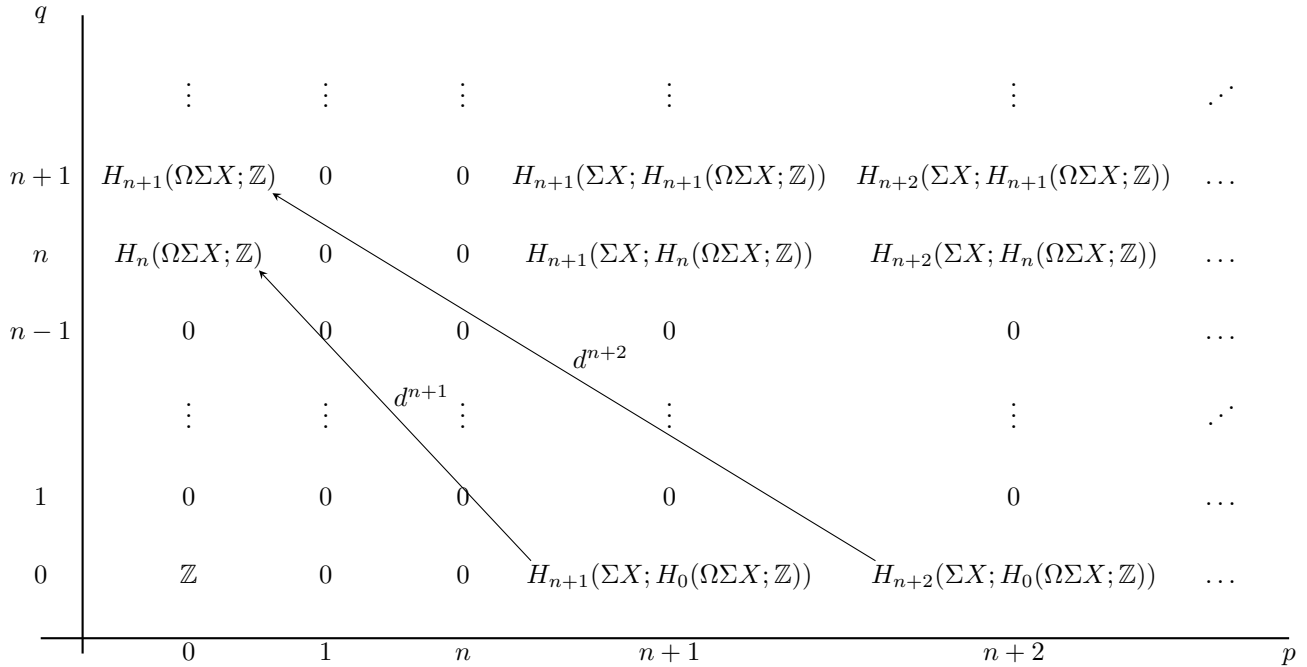
*Demostración.* Consideremos la fibración de caminos

$$\Omega \Sigma X \longrightarrow P_* \Sigma X \xrightarrow{\text{ev}_1} \Sigma X,$$

y notemos que  $\Sigma X$  es  $n$ -conexo (esto puede demostrarse mediante el teorema de Hurewicz, junto con el isomorfismo  $\tilde{H}_*(\Sigma X) \cong \tilde{H}_{*-1}(X)$ ), por lo que  $\Omega \Sigma X$  es  $(n-1)$ -conexo. Esta observación es suficiente para demostrar el caso  $i = 0$ . Como  $\text{ev}_1: P_* \Sigma X \rightarrow \Sigma X$  es una fibración de Serre, y la base  $\Sigma X$  es  $n$ -conexa ( $n \geq 1$ ), por la secuencia espectral de Serre, tenemos que  $E_{p,q}^2 \cong H_p(\Sigma X; H_q(\Omega \Sigma X; \mathbb{Z}))$ . Ahora, como  $\Omega \Sigma X$  es  $(n-1)$ -conexo, por el teorema de Hurewicz, tenemos que  $\tilde{H}_j(\Omega \Sigma X; \mathbb{Z}) = 0$  para  $0 \leq j \leq n-1$ . Por otro lado, por teorema de coeficientes universales, tenemos que  $H_p(\Sigma X; H_q(\Omega \Sigma X; \mathbb{Z})) \cong H_p(\Sigma X) \otimes_{\mathbb{Z}} H_q(\Omega \Sigma X) \oplus \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{p-1}(\Sigma X), H_q(\Omega \Sigma X))$ . Similarmente, por teorema de Hurewicz,  $\tilde{H}_j(\Sigma X; \mathbb{Z}) = 0$  para  $0 \leq j \leq n$ . Adicionalmente, notar que tanto la base como la fibra son arco-conexos. Luego,  $H_0(\Sigma X) \cong \mathbb{Z}$ , el cual es libre. En resumen:

$$H_p(\Sigma X; H_q(\Omega \Sigma X; \mathbb{Z})) \cong (0), \quad 1 \leq p \leq n, \text{ o } 1 \leq q \leq n-1.$$

De esta manera, tenemos que  $E_{\bullet,\bullet}^2$  está dada por:



**Figura 2.**  $E_{\bullet,\bullet}^2$  asociada a la fibración  $\text{ev}_1$ .

Observar que adicionalmente hemos incluido los diferenciales de transgresión  $d^{n+1}$  y  $d^{n+2}$ , correspondientes a las páginas respectivas. Como el espacio total de la fibración  $\text{ev}_1: P_* \Sigma X \rightarrow \Sigma X$  es contractible, se sigue que  $E_{p,q}^\infty = 0$  salvo en  $p = q = 0$ , donde  $E_{p,q}^\infty \cong \mathbb{Z}$ . Notemos que todos los diferenciales cuyo codominio corresponda a la entrada en  $(0, n)$  son triviales, salvo el diferencial de transgresión  $d^{n+1}$ . Dado que  $E_{0,n}^\infty = 0$  se tiene que

$d^{n+1}: E_{n+1,0}^{n+1} \rightarrow E_{0,n}^{n+1} \cong H_n(\Omega\Sigma X; \mathbb{Z})$  es sobreyectivo. Por otro lado, todos los diferenciales que salen de la entrada  $(n+1, 0)$  son triviales, salvo, presuntamente  $d^{n+1}$ . Todos los diferenciales que entran en  $(n+1, 0)$  son triviales. Luego, dicha entrada es estable hasta  $E_{\bullet,\bullet}^{n+1}$ . Por otro lado, por convergencia de la secuencia espectral de Serre se sigue que  $\text{Ker}(d^{n+1}: E_{n+1,0}^{n+1} \cong H_{n+1}(\Sigma X; \mathbb{Z}) \rightarrow E_{0,n}^{n+1} \cong H_n(\Omega\Sigma X; \mathbb{Z})) = 0$ , por lo que la transgresión  $d^{n+1}$  es un isomorfismo.

Análogamente, tenemos que las transgresiones  $d^j: H_j(\Sigma X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{j-1}(\Omega\Sigma X; \mathbb{Z})$  son isomorfismos para todo  $n+1 \leq j \leq 2n$ . El argumento no es válido considerando la entrada  $(0, 2n)$ , pues es alcanzada por los diferenciales  $d: E_{n+1,n}^{n+1} \rightarrow E_{0,2n}^{n+1}$  y  $d: E_{2n+1,0}^{2n+1} \rightarrow E_{0,2n}^{2n+1}$ , y no tenemos forma de garantizar que  $E_{n+1,n}^{n+1} = 0$ . Esta restricción se traduce en el rango estipulado en el teorema. Además, es claro que  $d^j = 0$  son isomorfismos, para  $2 \leq j \leq n$ . Como es posible intuir, no requeriremos de  $d^1$ .

Ahora, dado que las transgresiones  $d^j$  son isomorfismos, tenemos el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} H_j(P_*\Sigma X, \Omega\Sigma X) & \xrightarrow{\cong} & H_{j-1}(\Omega\Sigma X; \mathbb{Z}) \\ \downarrow \text{ev}_{1*} & & \\ H_j(\Sigma X; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cong} & H_j(\Sigma X, *) \end{array}$$

El isomorfismo de la izquierda viene dado por la caracterización de la transgresión. El isomorfismo de la derecha se sigue de la secuencia exacta larga de homología del par, junto con el hecho de que el espacio total  $P_*\Sigma X$  es contractible.

Como las transgresiones son isomorfismos se tiene que

$$\text{ev}_{1*}: H_j(P_*\Sigma X, \Omega\Sigma X) \rightarrow H_j(\Sigma X, *)$$

también es un isomorfismo, con  $2 \leq j \leq 2n$ .

Consideremos ahora el siguiente ingrediente: el mapa unidad de la adjunción suspensión-loop. Sea:

$$\begin{aligned} \hat{f}: X &\rightarrow \Omega\Sigma X \\ x &\mapsto \hat{f}(x)(s) = [s, x], \quad s \in [0, 1], \end{aligned}$$

y definamos el siguiente mapa auxiliar:

$$\begin{aligned} f: CX &\rightarrow P_*\Sigma X \\ [t, s] &\mapsto (s \mapsto [st, x]), \quad s, t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Estamos viendo a  $CX, \Sigma X$  como cocientes de  $[0, 1] \times X$ . Adicionalmente, asumimos que  $\Sigma X$  es cociente de  $CX$ . De este modo, tenemos el siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\hat{f}} & \Omega\Sigma X \\ \downarrow [1, x] & & \downarrow \\ CX & \xrightarrow{f} & P_*\Sigma X \end{array}$$

Por la naturalidad de la secuencia exacta larga de homología, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_j(CX, X) & \xrightarrow{\cong} & H_{j-1}(X) \\ \downarrow (f, \hat{f})_* & & \downarrow \hat{f}_* \\ H_j(P_*\Sigma X, \Omega\Sigma X) & \xrightarrow{\cong} & H_{j-1}(\Omega\Sigma X) \\ \downarrow \text{ev}_{1*} & & \\ H_j(\Sigma X, *) & & \end{array}$$

$i_*$  (curved arrow from  $H_j(CX, X)$  to  $H_j(\Sigma X, *)$ )

Los isomorfismos dados por los morfismos conectores se siguen de que  $CX$  y  $P_*\Sigma X$  son contractibles. Adicionalmente, el diagrama de la izquierda es conmutativo porque  $\text{ev}_1 \circ f$  es homotópicamente equivalente a la inclusión que induce el isomorfismo del teorema de escisión. Tomando  $2 \leq j \leq 2n$  se deduce que  $(f, \hat{f})_*$  es un isomorfismo, i.e.:

$$\hat{f}_*: H_{j-1}(X) \rightarrow H_{j-1}(\Omega\Sigma X)$$

es un isomorfismo para todo  $1 \leq j-1 \leq 2n-1$ . El caso  $n=0$  es trivial por lo discutido al inicio para  $i=0$ . El caso  $n=1$  se sigue del teorema de Hurewicz para el grupo fundamental en este contexto. En efecto, consideremos el siguiente cuadrado conmutativo obtenido por la naturalidad del morfismo de Hurewicz:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X) & \xrightarrow{\hat{f}_*} & \pi_1(\Omega\Sigma X) \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ H_1(X) \cong \pi_1(X)^{\text{ab}} & \xrightarrow{\hat{f}_*} & H_1(\Omega\Sigma X) \cong \pi_1(\Omega\Sigma X)^{\text{ab}} \cong \pi_1(\Omega\Sigma X) \cong \pi_2(\Sigma X) \end{array}$$

Gracias a lo anterior, el morfismo de abajo es un isomorfismo. Por otra parte, el morfismo  $h$  de la derecha es un isomorfismo porque  $\pi_2(\Sigma X)$  es abeliano. Por la conmutatividad del diagrama se sigue que  $\hat{f}_*: \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(\Omega\Sigma X)$  es sobreyectiva. Esto implica que:

$$\Sigma: \pi_1(X) \rightarrow \pi_2(\Sigma X)$$

es sobreyectiva. En efecto, pues el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X) & \xrightarrow{\Sigma} & \pi_2(\Sigma X) \\ & \searrow \hat{f}_* & \nearrow \sigma \\ & \pi_1(\Omega\Sigma X) & \end{array}$$

conmuta, donde:

$$\begin{aligned} \sigma: \pi_1(\Omega\Sigma X) &\xrightarrow{\cong} \pi_2(\Sigma X) \\ [y \mapsto \gamma_y] &\mapsto [[t, y] \mapsto \gamma_y(t)]. \end{aligned}$$

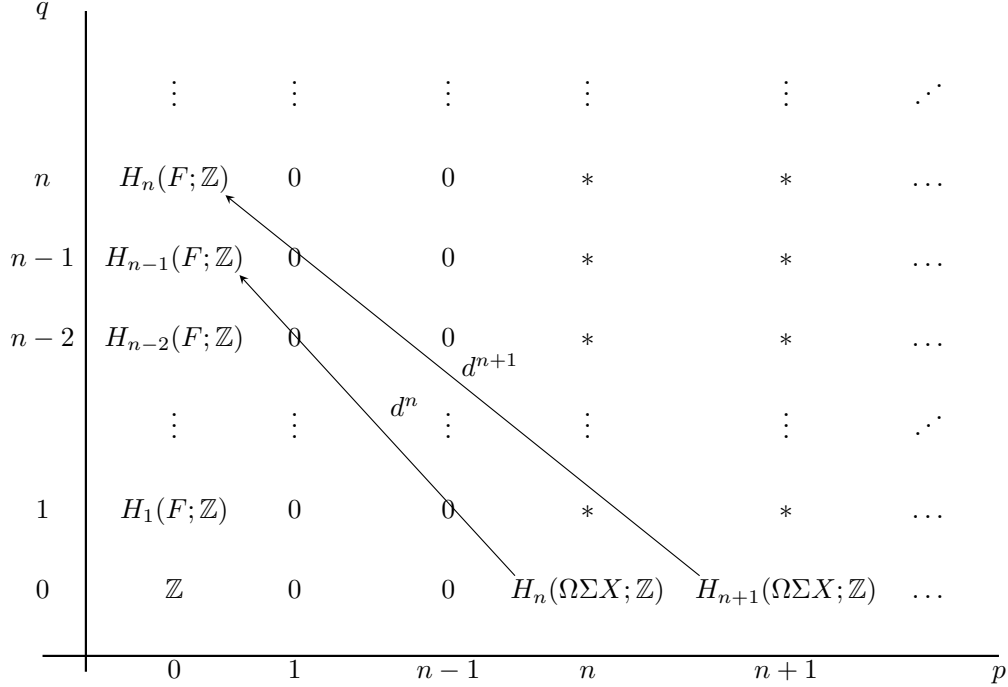
Por lo tanto, se tiene el resultado deseado para  $n=1$ .

Para el caso general, asumamos que  $n-1 \geq 1$ , de modo que  $\Omega\Sigma X$  es 1-conexo. Sea  $F$  la fibra homotópica de  $\hat{f}$ . Salvo homotopía podemos reemplazar  $\hat{f}$  por una fibración de Hurewicz. Ahora estamos en condiciones de aplicar nuevamente la secuencia espectral de Serre. Asumamos S.P.G. que  $\hat{f}: X \rightarrow \Omega\Sigma X$  es una fibración. Tenemos que:

$$E_{p,q}^2 \cong H_p(\Omega\Sigma X; H_q(F; \mathbb{Z})) \cong H_p(\Omega\Sigma X) \otimes_{\mathbb{Z}} H_q(F) \oplus \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{p-1}(\Omega\Sigma X), H_q(F)).$$

Como  $\Omega\Sigma X$  es  $(n-1)$ -conexo, por teorema de Hurewicz,  $\tilde{H}_k(\Omega\Sigma X) = 0$  para todo  $0 \leq k \leq n-1$ . De manera análoga, se tiene que  $H_k(X) = 0$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ . Además, tenemos que para  $p=0$ ,  $E_{0,q}^2 \cong H_q(F)$  dada la arco-conexidad de la base. Por otra parte, para  $q=0$ ,  $E_{p,0}^2 \cong H_p(\Omega\Sigma X)$  porque  $\mathbb{Z}$  es  $\mathbb{Z}$ -módulo libre. Además, notemos

que para  $1 \leq k \leq n-1$ , se tiene que  $E_{k,q}^2 = 0$ . Adicionalmente, notar que  $E_{0,0}^2 \cong \mathbb{Z}$ , ya que la fibra es arco-conexa (el espacio total y la base son 1-conexos). La 2-página de la secuencia espectral de Serre tiene la forma siguiente:



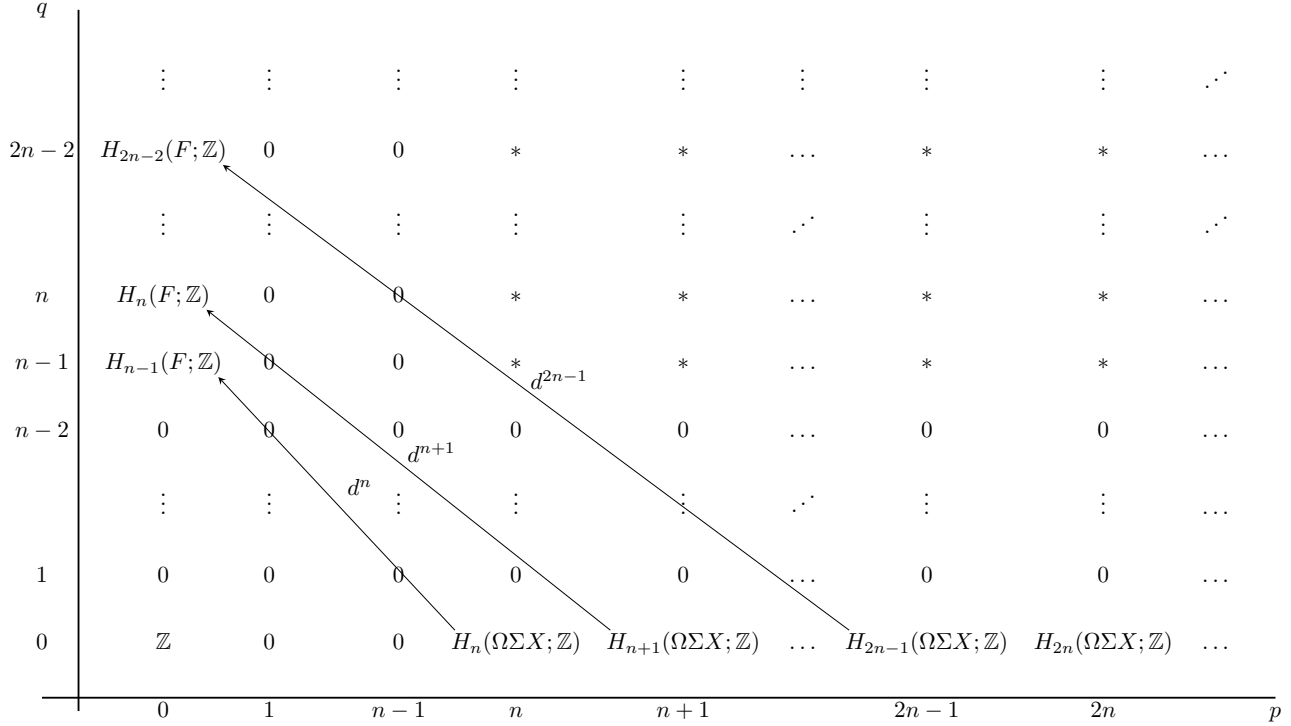
**Figura 3.**  $E_{\bullet,\bullet}^2$  asociada a la fibración  $\hat{f}$ .

Las entradas denotadas por  $*$  corresponden a aquellas que desconocemos en principio que son nulas. Se han incluido las transgresiones con propósitos ilustrativos.

Recordemos que el espacio total  $X$  es  $(n-1)$ -conexo. Probaremos que  $H_k(F; \mathbb{Z}) = 0$  para todo  $1 \leq k \leq n-2$ . Para  $n=2$  no hay nada que demostrar. Para  $n \geq 3$ , notar que todos los diferenciales que entran y salen de la entrada en  $(0,1)$  son triviales. Luego, por convergencia de la secuencia espectral, tenemos la siguiente secuencia exacta corta:

$$0 \rightarrow E_{0,1}^\infty \rightarrow H_1(X) \rightarrow E_{1,0}^\infty \rightarrow 0,$$

lo que se traduce en que  $E_{0,1}^\infty = H_1(F; \mathbb{Z}) = 0$ . En consiguiente, la primera fila es trivial. Procediendo inductivamente, se tiene lo deseado. Para  $k=n-1$ , el argumento deja de ser válido, dado que  $d^n$  podría no ser trivial. Así,  $E_{p,k}^2 = 0$  para  $1 \leq k \leq n-2$ . La siguiente figura refleja el nuevo aspecto de la 2-página:



**Figura 4.**  $E_{\bullet, \bullet}^2$  asociada a la fibración  $\hat{f}$ .

Ahora veremos que  $H_k(F; \mathbb{Z}) = 0$ ,  $1 \leq k \leq n-2 < n-1 \leq k \leq 2n-2$ . Utilizaremos la secuencia exacta larga de Serre (la cual puede ser deducida en este contexto particular mediante esta misma instancia de la secuencia espectral de Serre). Como tenemos una fibración  $\hat{f}: X \rightarrow \Omega \Sigma X$  de Hurewicz, con fibra arco-conexa y base simplemente-conexa, se satisface que  $H_k(\Omega \Sigma X; \mathbb{Z}) = 0$  para  $1 \leq k \leq n-1$ , y  $H_l(F; \mathbb{Z}) = 0$  para  $1 \leq l \leq n-2$ , tenemos la siguiente secuencia exacta:

$$H_{2n-2}(F) \rightarrow H_{2n-2}(X) \xrightarrow{\hat{f}_*} H_{2n-2}(\Omega \Sigma X) \rightarrow H_{2n-3}(F) \rightarrow \cdots \rightarrow H_1(X) \rightarrow 0.$$

Sabemos que  $\hat{f}_*: H_l(X) \rightarrow H_l(\Omega \Sigma X)$  es un isomorfismo para todo  $1 \leq l \leq 2n-1$ . Luego, se sigue que  $H_k(F; \mathbb{Z}) = 0$  para todo  $1 \leq k \leq 2n-3$ . Esto se traduce en más filas nulas en el diagrama anterior. Una última aplicación directa de la secuencia exacta de Serre nos entrega que  $H_{2n-2}(F; \mathbb{Z}) = 0$ .

Para concluir, por la secuencia exacta larga asociada a la fibración  $\hat{f}$  se tiene que:

$$(1) \quad \cdots \longrightarrow \pi_k(F) \longrightarrow \pi_k(X) \xrightarrow{\hat{f}} \pi_k(\Omega \Sigma X) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(F) \longrightarrow \cdots$$

Notar que  $\pi_1(F)$  es abeliano porque es un cociente de  $\pi_2(\Omega \Sigma X)$ . Por teorema de Hurewicz,  $\pi_1(F) \cong H_1(F; \mathbb{Z}) = 0$ . Luego, la fibra es 1-conexa. Nuevamente, por Hurewicz,  $\pi_2(F) = 0$ . Inductivamente, tenemos que  $\pi_k(F) = 0$ , para  $1 \leq k \leq 2n-2$ . Por 1 se tiene que  $\hat{f}_*: \pi_k(X) \rightarrow \pi_k(\Omega \Sigma X)$  es un isomorfismo para  $1 \leq k \leq 2n-2$ , y es sobreyectiva para  $1 \leq k \leq 2n-1$ . Componiendo con el isomorfismo  $\sigma: \pi_t(\Omega \Sigma X) \rightarrow \pi_{t+1}(\Sigma X)$  se concluye lo deseado.  $\square$

## REFERENCIAS

- [1] O. R. Williams, “Homotopy Theory”, Lecture notes, University of Cambridge, 2021, URL: <https://www.dpmms.cam.ac.uk/~or257/teaching/notes/HomotopyTheory.pdf>.
  - [2] R. E. Moshier, M. C. Tangora, “Cohomology Operations and Applications in Homotopy Theory”, Harper and Row, New York, 1968.
  - [3] R. M. Switzer, “Algebraic Topology - Homology and Homotopy”, Springer Berlin, Heidelberg, 2002.
- Email address:* andres.moran.1@uc.cl