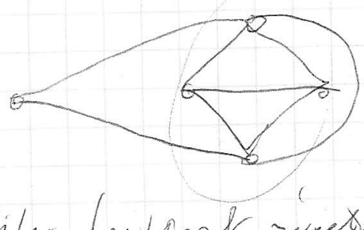
KOLOROWANIE GRAFU

kolorowanie wierzchołków – minimalna liczba ~~wierzch~~ kolorów, aby pomalować wierzch. aby się sąsiednie były różne

$\chi(G)$ – liczba chromatyczna grafu



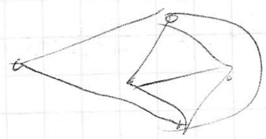
$\chi(G) = 4$

klika (podgraf zupełny) więc nie mniej niż 4

kolorowanie ~~wierzchołków~~ krawędzi – incydentne (do tego samego ~~wierzch~~ wierzch.) innego koloru

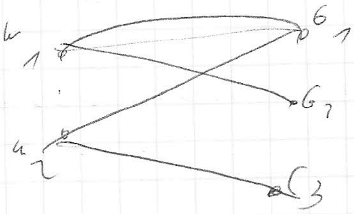
$\chi'(G)$ – indeks chromatyczny

$\chi'(G) = 4$



Co najmn. 4 bo jest wierzch. stopnia 4

	c_1	c_2	c_3
u_1	2	1	0
u_2	1	1	1

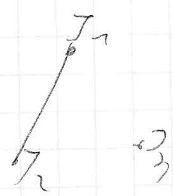


kolorowanie krawędzi

zadanie

	J_1	J_2	J_3
v_1	X	X	
zasoby v_2		X	
v_3			X

Graf wierz.



PKW – probl. kol. wierzch.

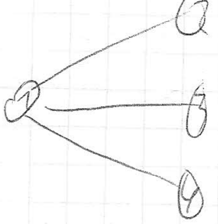
PKK – — " — krawędzi

PKW – trudniejszy, ogólniejszy

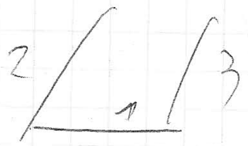
PKK zawsze można przejść do PKW $L(G)$

W drugą stronę nie zawsze, np

L^{-1} nie zawsze jest możliwe np.



$\downarrow L^{-1}$ - nie ma



4?

PKK

ale żeby stwierdzić czy Δ_G czy Δ_G+1 to problem NP-zupełny

$\Delta_G \leq \chi'(G) \leq \Delta_G+1$ - graf prosty

$\chi'(G) = \Delta_G$ - graf dwudzielny

Δ_G - maksymalny stopień wierzchołka w grafie

$\Delta_G \leq \chi'(G) \leq \Delta_G + w$ - multigraf

w - maksymalna wielokrotność

PKW

$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta_G+1$

$\omega(G)$ - rozmiar maksymalnej kliki w G

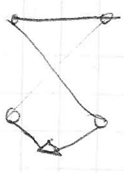
Grafy Mycielskiego

M2

$\omega(M2)=2$

$\chi(G)=2$

M3



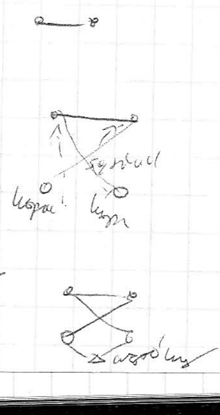
$\omega(M3)=2$

$\chi(G)=3$

I

II

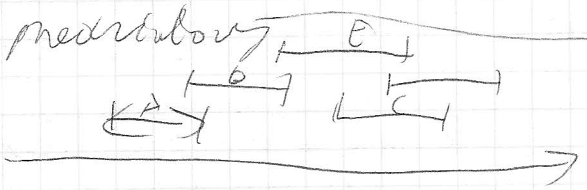
III

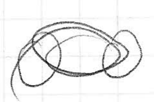


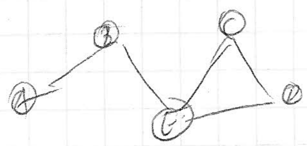
M4

$\omega(M4)=2$

$\chi(G)=4$

graf przedziałowy  $\omega(G) = \chi(G)$ – dla gr. przedz.

 wchodzą => kraw. wspólna



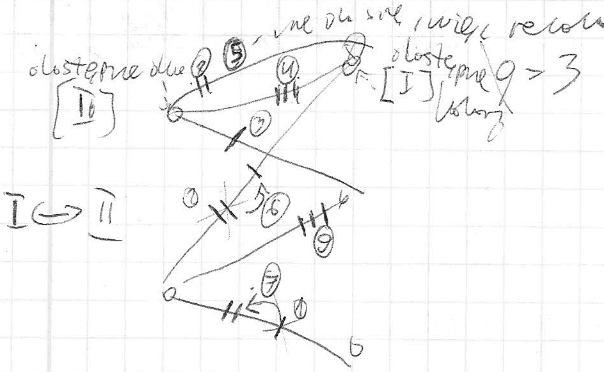
PKK
graf prosty na $\Delta_G + 1$ kol – $O(mn)$
wielom
dwudzielny – $O(n \log n)$

Czy DKW da się rozw – NP-upełny dla $p \geq 3$

Graf dwudzielny - taki, który da się pokolorować 2 kolorami.

KK
procedure koloruj (G(V,E), q)
begin
if $\Delta \leq 2$ koloruj G zachłannie
else begin
~~G~~ := (V, ∅)
for każda e∈E do begin
G = G+e
if e = (U,V) można pokolorować jednym z q kolorów
then koloruj e
else begin
Recolor (U,V) koloruj e
end
end
end
end

dwudzielny $q = \Delta$
prosty / niedwudzielny $q = \Delta + 1$



dla niesłusznego trochę inna proc. recolor bo cykl może być nieparzystej długości

Algorytmy sekwencyjne

- wybór niepokolorow. wierzch.
- przydział wierzch. dopuszczalny kolor

Reguły przydziału koloru

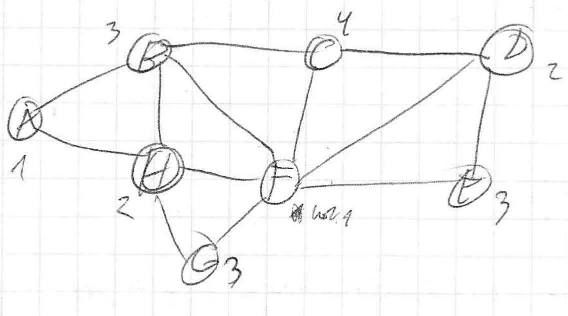
- np. przydział „najniższego" wolnego koloru

Reguły wyboru wierzch.

- różne

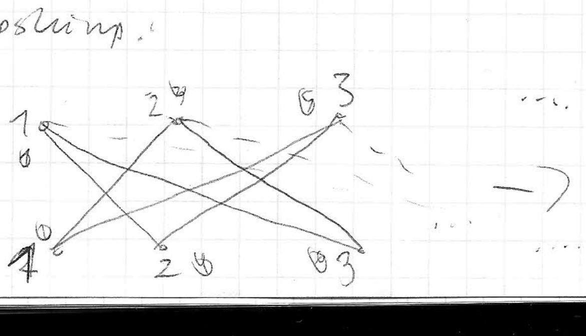
Metoda LF (Largest First)

- wybór wierzch. według malejących stopni wierzchołków (w grafie pierwotnym)
- złożoność $O(n+m)$
- dokładność w najgorszym przypadku dowolnie zła



LF: F → H → B → D → C → E → A → G
d = (5) (4) (4) (3) (3) (2) (2) (2)

[illegible]:



dla LF wybór wierzch. losowo

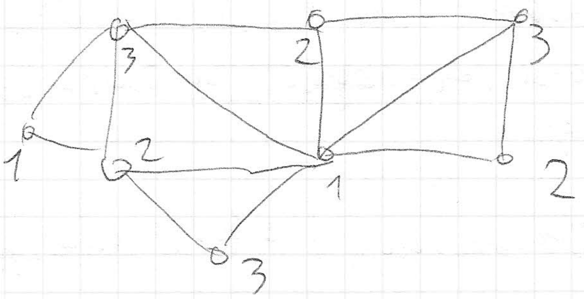
np.

Metoda SL (Smallest Last)

jako ostatni brany jest wierzch. V_n o najmniejszym stopniu w grafie G, jako przedostatni wybierany jest wierzch. V_{n-1} który ma minimalny stopień w grafie zredukowanym $G \setminus V \setminus \{V_n\}$ itd.

8 7 6 5 4 3 2 1

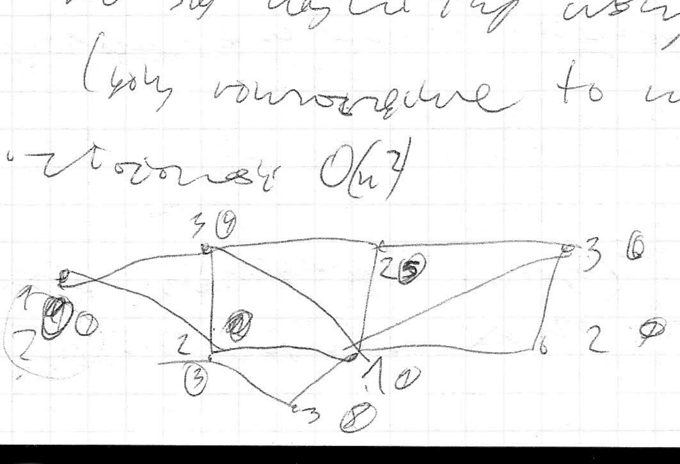
F → C → B → D → H → E → G → A



- złożoność $O(n+m)$ ale działa dłużej
- w przypadku planarnych gr. używa maksymalnie 6 kolorów (a ich min to 4)
- optymalnie koloruje grafy Mycielskiego
- dokładność w najgorszym przypadku dowolnie zła

Metoda DSATUR

- określa się stopień nasycenia wierzchołka — liczba różnych pokolorowanych sąsiadów
- W każdym kroku wybiera się wierzchołek o największym stopniu nasycenia i przydziela mu się najniższy wolny (gdy równorzędne to max d-stop. wierzch)
- złożoność $O(n^2)$



~~[illegible]~~

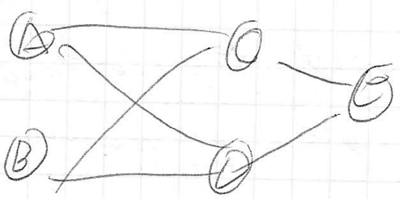
| Algorytmy zbiorów niezależnych |

zbiór niezależny grafu – taki podzbiór jego wierzchołków, w których żadne 2 wierzchołki nie są połączone ze sobą krawędzią

maksymalny zbiór niezależny grafu (maximal) – ~~taki, którego~~ taki zbiór niezależny, który nie jest podzbiorem właściwym innego zb. niezależ.

NP-trudny

największy (maximum) zbiór niezależny – największy (w sensie liczby wierzch.) zbiór niezależny tego grafu



{C,D} – maksymalny

{A,B,E} – największy

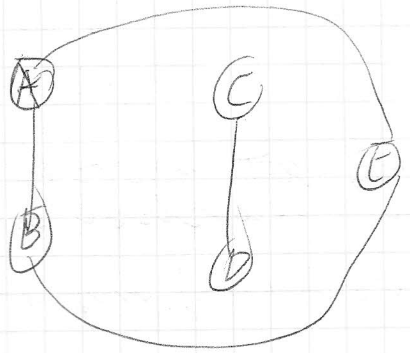
Ogólna idea

while graf G niepusty do

- utwórz (maksymalny) zbiór niezależny w grafie G
- pomaluj wierzchołki zbioru niezależnego kolejnym kolorem
- usuń pokolorowane wierzchołki grafu

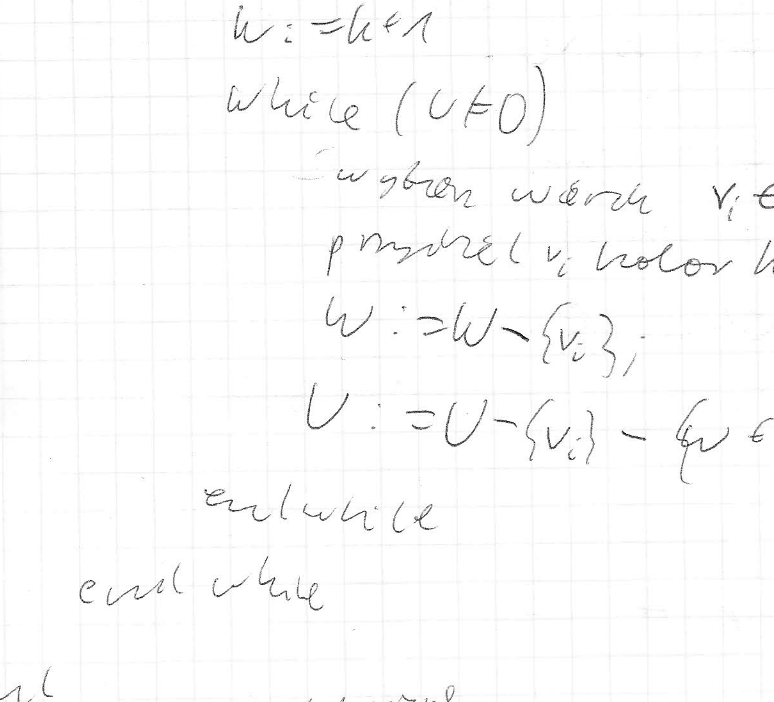
end while

Różnice między wersjami algorytmów – ~~sposób~~ konstruowania max zbiorów niezależnych



znalezienie max kliki w dopełnieniu (np.) jest równoważne znalezieniu najw. zb. niezal. w grafie pierwotnym

```
begin
  W := V              {V - zbiór
  k := 0              {k - indeks koloru
  while (W ≠ ∅)
      U := W;
      k := k+1
      while (U ≠ 0)
          wybierz wierzch v_i ∈ U
          przydziel v_i kolor k
          W := W - {v_i};
          U := U - {v_i} - {u ∈ U: u jest sąsiadem v_i};
      endwhile
  end while
end
```



Algorytm GIS Greedy

- w każdej iter. wybieramy zbiór węzłów o minimalnym stopniu wierzchołkowym w aktualnym (zredukowanym) grafie G/U

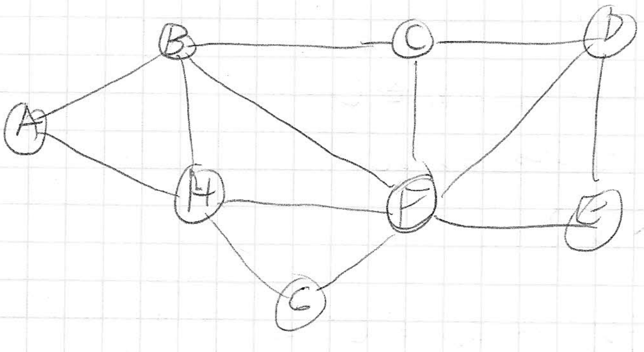
Algorytm RLF (Recursive Largest First)

reg 1) wybiera pierwszego do zbioru U = C

max stopień węzła

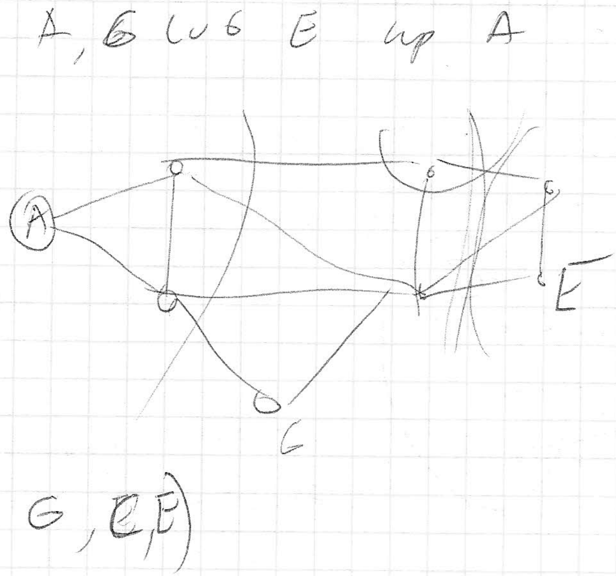
reg 2) Wybiera kolejnego

ten, który ma najwięcej sąsiadów w zbiorze W \ U

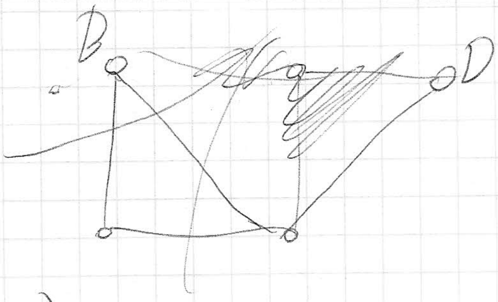


GIS Przykład

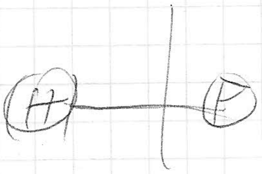
A, G lub E np A



(A, G, E, E)



(D, B)



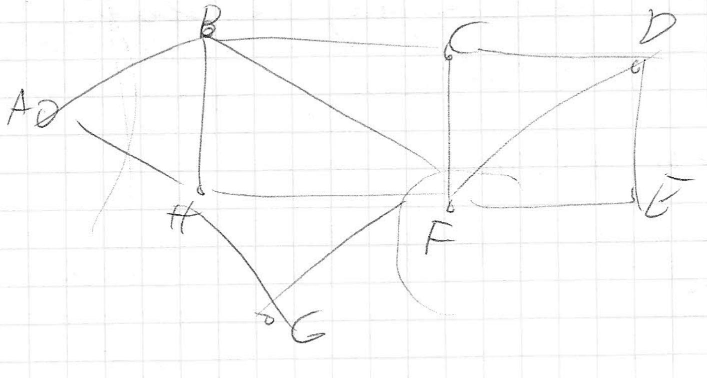
(H)

(F)

4 kolory

ma tendencję zachowania jak największych zbiorów

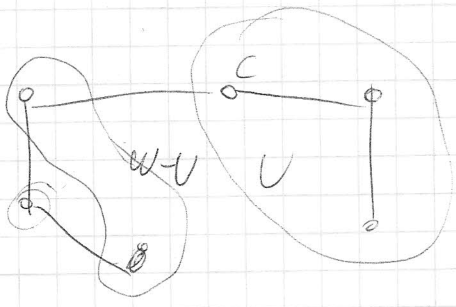
RLF przykład maksymalizuje liczbę krawędzi



rep(1)

F rep

(F, A)



rez 1 (kilka rozwiązań)

wo (H)

(H, C, E)

B

D

G

(B, D, G)

3 kolory

Symulowane wyżarzanie

- Johnson
- Morgenstern i Shapiro
- Chams

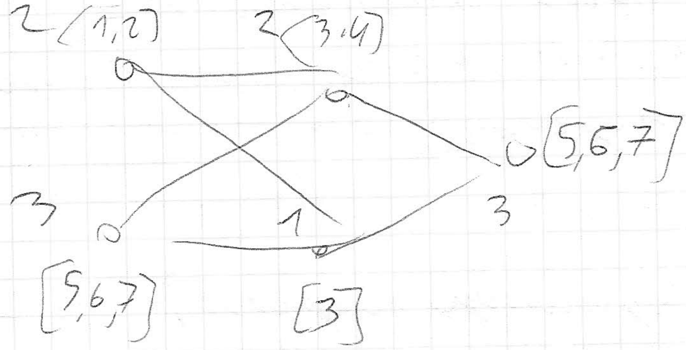
Tabu search

Podejścia hybrydowe (genetyczne, tabu search, lokalne poprawienie

- Fleurent i Ferland

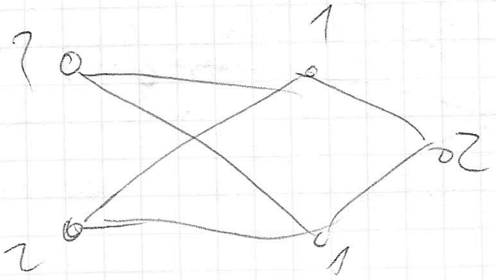
algorytm XRLF

- parametryzacja i randomizacja alg. RLF multikolorowanie (kolor. przedziałowe) - wierzchołkowi (krawędzi) należy przydzielić pewien przedział kolorów



np plan (aby były obok)

kolorowanie sumacyjne - suma numerów kolorów ma być jak najmniejsza



szeregowanie

- da się mniej (zamieniając 1 z 2)

kolorowanie sprawiedliwe - zrównoważona liczba poszczególnych kolorach
wierzchołkach co ...

rezerwowanie sal
opłacanie sędziów itp

T-kolorowanie - jeżeli $(u,v) \in E$ to $|c(u) - c(v)| \notin T$

np klasyczne to $T=\{0\}$

inne np $T=\{0,1\}$ - żeby kolory nie były sąsiednie

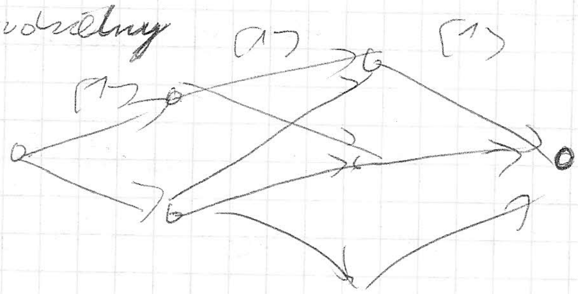
kolor. grafów w trybie online - stopniowe (na bieżąco) pojawiają się wierzchołki

SKOJARZENIA I POKRYCIA

Skojarzeniem w grafie (nieskierowanym) nazywamy zbiór krawędzi $M \subseteq E$ taki, że żadne dwie krawędzie ze zbioru M nie są ze sobą incydentne

- Problem maksymalnego skojarzenia
  - w grafie dwudzielnym (alg Hopcrofta-Karpa $O(n^{5/2})$)
  - w dowolnym grafie prostym ($O(n^3)$)

dwudzielny



- Problem najtańszego skojarzenia
  - w grafie dwudzielnym – problem przydziału ($O(n^3)$)
  - w dowolnym grafie prostym ($O(n^3)$)

- Problem minimaksowego skojarzenia

minimalizujemy największy koszt pary

Problem chińskiego listonosza (tak jak Eulera ale co najmniej raz a nie raz)

jeśli wszystkie parzyste → Euler

- identyfikacja nieparzystych węzłów
- wyliczenie najkrótszych połączeń (ścieżek) między nimi

- znalezienie łojtowskiego pełnego skojarzenia M w grafie pełnym ze zbiorem wierzchołków V i wylicz[illegible] wagami połączeń
- uzupełnienie pierwotnego grafu o krawędzie reprezentowane przez połączenia ze zbioru M
- znalezienie cyklu Eulera

POKRYCIE KRAWĘDZIOWE

zbiór F krawędzi taki że każdy wierzchołek $v \in V$ jest incydentny do pewnej krawędzi ze zbioru F
(Pr.: kamery na ulicach)

Problem minimalnego pokrycia krawędziowe

- maksymalne skojarz
- dla każdego nieskojarzonego dołącz krawędź

$\mu(G) + \alpha(G) = n$

$n = |V|$ - liczba wierzchołków

$\mu(G)$ - liczność maksymalnego skojarzenia

$\alpha(G)$ - liczność minimalnego pokrycia krawędziowego

$\alpha = \mu + (n - 2\mu)$

~~Problem~~

POKRYCIE WIERZCHOŁKOWE

zbiór wierzch. taki że każda krawędź jest incydentna z pewnym wierzchołkiem

Problem minimalnego pokr. wierzch - jest rów[illegible]

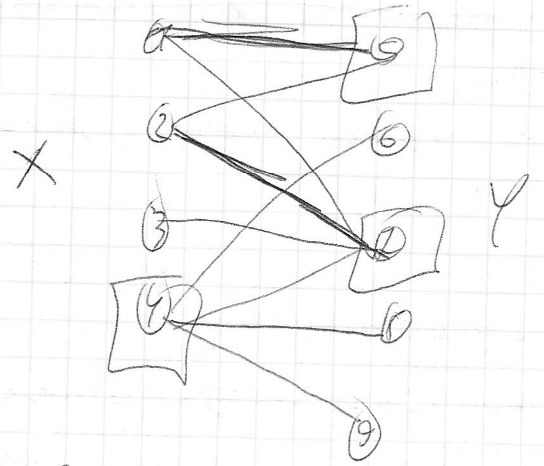
odszukanie max kliki ; probl. zn. najw. zbioru niezależnego

W grafie dwudzielnym

k_2 = liczn. maks. skojarzenia

Niech M będzie maksymalnym skojarzeniem w grafie dwudzielnym $H = (X, Y, E)$ oraz niech A będzie zbiorem wierzchołków $v \in X \cup Y$ osiągalnych z wolnych wierzch. w X przez „częściowe ścieżki naprzemienne”
na zmianę skojarzona raz nie

Jeżeli graf H nie zawiera izolowanych wierzch., to $P = (X \setminus A) \cup (Y \cap A)$ jest minimalnym pokryciem.



$A = \{3, 7, 2, 5, 1\}$

$X \setminus A = \cancel{\{4, 6, 8\}}\ \{4\}$

$Y \cap A = \{5, 7\}$

$P = \{4, 5, 7\}$

WYKŁAD

ile ścieżek wierzchołkowo rozłącznych

tw. Mengera o spójności koh.

jeżeli 2 wyróżnione wierzch., to max l. ścieżek wierzchoł. rozł. = minimalny

Przekrój wierzchołkowy

$G-(V,E)$ (przepływy sieciowe

najczęściej graf zorientowany

$\varphi(E)\to\mathbb{R}^+$ – waga/przepustowość krawędzi

e_{ij} – krawędź łącząca skierowana od w. i do j

$\varphi(e_{ij})=c_{ij}$ – pojemność krawędzi

f_{ij} – rzeczywisty przepływ łączący w. i j (chyba w kierunku

węzły

s, t

źródło (węzeł początkowe) – odbiorcze (więc końcowe)

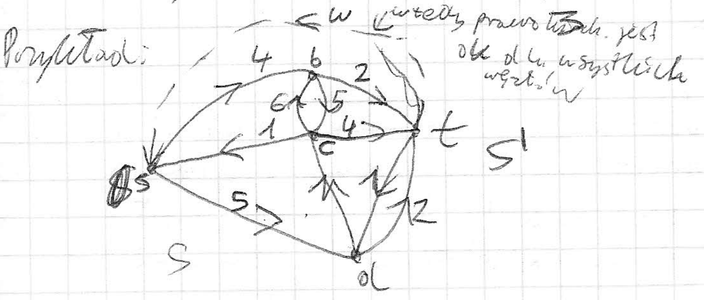
założenia

1 źródło, 1 odbiorca

wydajność źródła = ∞ (t też może przyjąć ∞)

ograniczenia są przez pojemność sieci

Przykład:



1. $(i,j)\quad 0\le f_{ij}< c_{ij}$
2. $\sum_{i\in V} f_{si}-\sum_{i\in V} f_{is}=w>0$ ← więc bezstratność!
3. $\sum_{i\in V} f_{ti}-\sum_{i\in V} f_{it}=-w$
4. $\forall_{i\ne s,t}\ \sum_{i\in V} f_{ji}-\sum_{i\in V} f_{ij}=0$

przepływ dopuszczalny

$$\max_{f_{ij}} w$$

$\underline{c}$ – wektor kolumnowy pojemności krawędzi

$\underline{f}$ – w. kol. aktualnych przepływów

$\underline{f}'-\begin{bmatrix} w\\ \underline{f}\end{bmatrix}$

B' – pełna macierz incydencji sieci S' (tam S z uwzględnieniem w)

$\underline{f}=\begin{bmatrix} f_{sb}\\ f_{sd}\\ f_{cs}\\ f_{bc}\\ f_{bt}\\ f_{cb}\\ f_{ct}\\ f_{dt}\\ f_{dc}\\ f_{td}\end{bmatrix}\qquad \underline{c}=\begin{bmatrix}4\\5\\1\\5\\2\\6\\4\\2\\1\\1\end{bmatrix}$

krawędzie

$$B'=\begin{array}{c} \\ s\\ b\\ c\\ d\\ t\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccccc} w & sb & sd & cs & bc & bt & cb & ct & dt & dc & td\end{array}\\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}\qquad \underline{f}'=\begin{bmatrix} w\\ \underline{f}\end{bmatrix}$$

wierzchołki

$$\max_{\underline{f}} \; w$$

$$\underline{f} \leq \underline{c}$$

$$0 \leq \underline{f}$$

$$\underline{B}' \underline{f}' = 0$$

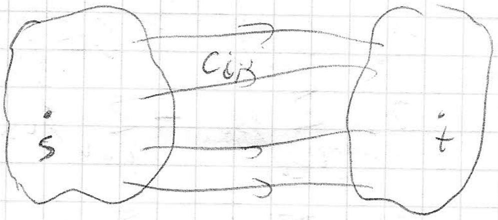
s-b-t 2

s-d-t 2

s-d-c-t +1

s-b-c-t +2 (5)

7



Maksymalny przepływ = pojemności minimalnego przekroju od s do t

$V_s \subset V$; $s \in V_s$, $t \notin V_s$

V_s , $\overline{V}_s$; $V = V_s \cup \overline{V}_s$; $V_s \cap \overline{V}_s = 0$; $V_s, \overline{V}_s$ są niepuste i rozłączne

Przekrój rozdzielający wierzchołki s i t – suma krawędzi między V_s i $\overline{V}_s$

$$f(V_s, \overline{V}_s) = \sum_{\substack{i \in V_s \\ j \in \overline{V}_s}} f_{ij}$$

metoda pełnego przeglądu

V_s	$\{s\}$	$\{s,b\}$	$\{s,c\}$	$\{s,d\}$	$\{s,b,c\}$	$\{s,b,d\}$	$\{s,c,d\}$	$\{s,b,c,d\}$
$c(V_s, \overline{V}_s)$	9	12	19	$\boxed{7}$	11	10	16	8

$$s \quad \sum_{\substack{j \in V_s \\ i \in \overline{V}_s}} f_{ji} - \sum_{\substack{j \in V_s \\ i \in V_s}} f_{ij} - w = 0$$

$$\sum f_{ji} \geq w$$

$$\sum f_{ji} - \sum f_{ji} = w$$

Algorytm Forda-Fulkersona (dla maksymalnego przepływu)

2/5
aktualny przepływ / pojemność

krawędź nienasycona : $f_{ij} < c_{ij}$

nasycona $f_{ij} = c_{ij}$

sieć rezydualna S_r

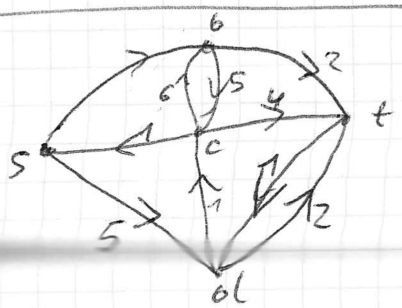
- ten sam zbiór wierzchołków jak sieć oryginalna
- każdej krawędzi sieci oryginalnej odpowiadają w sieci rez. jedna lub dwie o przeciwnych orientacjach

$f_{ij} < c_{ij} \Rightarrow$ 2 krawędzie

$i \xrightarrow{f_{ij}/c_{ij}} j \Rightarrow$ $r_{ij} = c_{ij} - f_{ij}$, $r_{ji} = f_{ij}$

W każdej iteracji szukamy ścieżki powiększającej przepływ tzn. ścieżki zorientowanej sieci oryg. lub rezyd. łączącej s z t. Pojemność tej ścieżki = minimalnej pojemności krawędzi należących do tej ścieżki.

Iteracyjnie szukamy ścieżki powiększającej, przestajemy tyle ile się da iść



ZADANIE NA KOLOKWIUM DO ŚRODY
MOŻLIWOŚĆ ZWOLNIENIA Z KOL 2
(NIE Z KSIĄŻKI - ORYGINALNE)