



## Kommunikationstechnik I

### Lösung zur 3. Python-Übung

#### Aufgabe 1: Entwurf von Kosinus-roll-off-Filtern

Der Term  $\sin(\pi t/T)/(\pi t/T)$  hat den Grenzwert eins bei  $t = 0$  und ansonsten äquidistante Nullstellen bei  $t_{\nu}^{(1)} = \nu T$ ; dieser Term stellt also die erste Nyquistbedingung sicher. Der zweite Term hat die Wirkung einer Fensterung im Zeitbereich, womit die Kosinusflanke des Spektrums hervorgerufen wird. An den Stellen  $t_0 = \pm T/(2r)$  ergeben sich unbestimmte Ausdrücke, die mit Hilfe des Verfahrens von Bernoulli-L'Hospital bestimmt werden; es ergibt sich

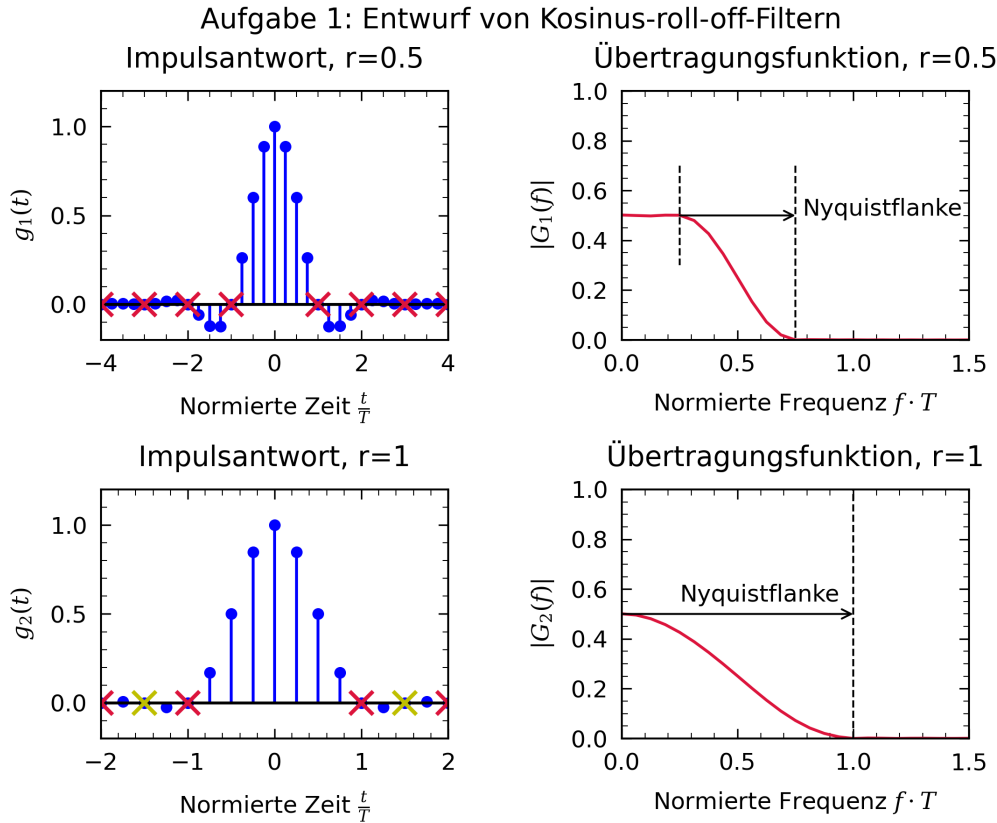
$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow T/(2r)} \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \cdot \frac{\cos(\pi r t/T)}{1 - (2r t/T)^2} &= \frac{\sin(\pi/(2r))}{\pi/(2r)} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\cos(\pi \alpha/2)}{1 - \alpha^2} \\ &= \frac{\sin(\pi/(2r))}{\pi/(2r)} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{-\pi/2 \cdot \sin(\pi \alpha/2)}{-2\alpha} = \frac{r}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2r}\right) \end{aligned} \quad (1)$$

Für  $r = 0.5$  ist der Grenzwert null; er fällt dann mit den durch den ersten Term erzeugten Nullstellen der ersten Nyquistbedingung bei  $t = \pm T$  zusammen. Für  $r = 1$  erhält man an den Stellen  $t_0 = \pm T/2$  die Grenzwerte  $1/2$ .

Der zweite Term steuert weitere Nullstellen zu den Zeitpunkten  $t_{\mu}^{(2)} = \pm(2\mu + 1)T/(2r)$ ,  $\mu = 1, 2, \dots$  bei.

Für  $r = 1$  ergeben sich also in der Mitte der Symbolintervalle, d.h. bei  $t_{\mu}^{(2)} = \pm(3/2)T, (5/2)T, \dots$  weitere Nulldurchgänge. Man bezeichnet diese Eigenschaft als zweite Nyquistbedingung.

Die Impulsantworten und Übertragungsfunktionen der mittels `cosroll` entworfenen Filter sind in Abbildung 1 dargestellt. Zunächst wird deutlich, dass für den geringeren Roll-off-Faktor, also für die steilere Filterflanke, ein höherer Filtergrad vorgesehen werden muss. Obwohl er für  $r = 0.5$  mit  $N = 32$  doppelt so hoch gewählt wurde wie für  $r = 1$ , zeigt sich in der rechten Grafik von Bild 1 noch eine deutliche Abweichung vom Idealverlauf. Die erste Nyquistbedingung ist in beiden Fällen exakt erfüllt (Kennzeichnung der zugehörigen Abtastwerte der Impulsantworten mit roten „×“). Die in Aufgabenteil 1 hergeleiteten Besonderheiten im Falle  $r = 1$  sind in dem unteren Diagramm von Abbildung 1 abzulesen: Die zusätzlichen Nullstellen in der Mitte der Symbolintervalle sind an den  $t_1^{(2)} = \pm 1.5T \rightarrow k = \pm 1.5 \cdot w = \pm 6$  mit gelben „×“ markiert.



**Abbildung 1: Kosinus-roll-off-Entwürfe**

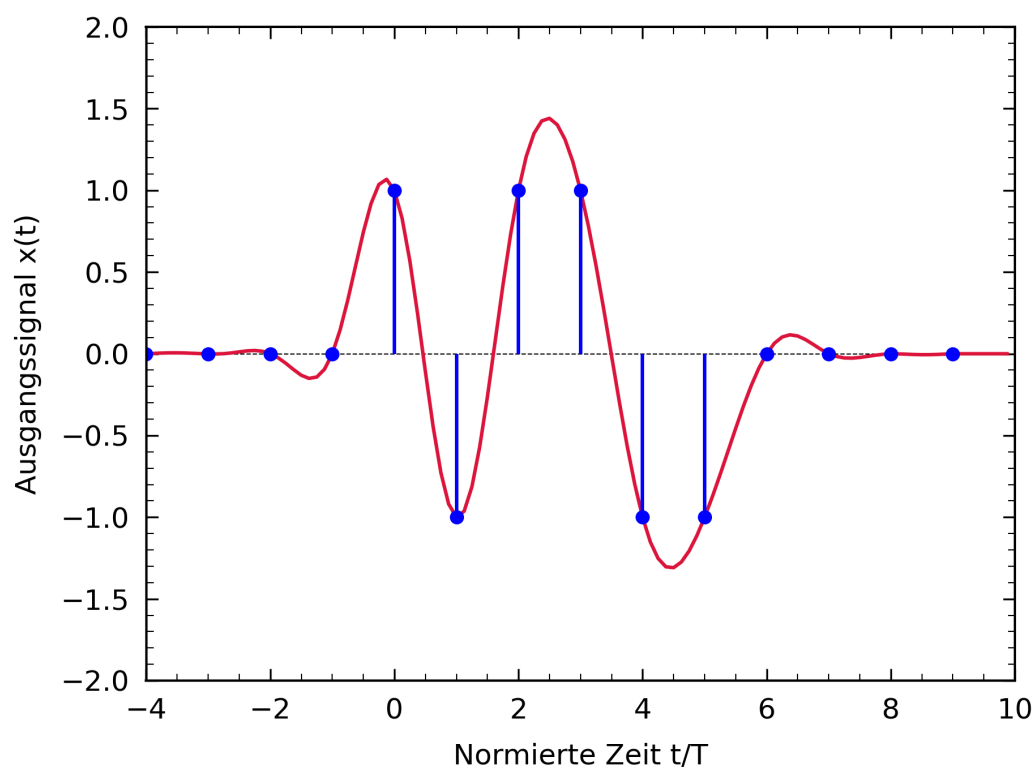
### Aufgabe 2.1: Impulsformung

Das Ausgangssignal für ein Kosinus-roll-off Filter mit Parametern  $r = 0.5$ ,  $L = 8$ ,  $w = 8$  und Eingangssignal  $\underline{d} = [1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1]^T$  wird in Abbildung 2 gezeigt. Man erkennt die Ein- und Ausschwingvorgänge. Beim Vergleichen des Eingangssignales und des abgetasteten Signals nach dem Pulsformungsfilter ist zu sehen, dass die ersten und die letzten Werte des abgetasteten Ausgangssignals gleich Null sind. Der Grund dafür ist die Verzögerung wegen der Ein- und Ausschwingvorgänge. Die erste Nyquist-Bedingung ist erfüllt (keine Intersymbolinterferenz).

### Aufgabe 2.2: Intersymbolinterferenz

Um eine Fehlabtastung um  $\Delta t = T/16$  realisieren zu können, wird in `datensig` der Parameter  $w = 16$  eingesetzt. Dem generierten Vektor  $\underline{x}$  werden die Elemente `[1:w]` entnommen. Nach Abzug der von `datensig` rückübergebenen Referenzdaten  $\underline{d}_{\text{ref}}$  erhält man den Vektor  $\underline{e}$  des ISI-Fehlers; die quadratische Mittelung liefert die Varianz  $\sigma_E^2$ , der Maximalwert  $\max(\underline{e})$  den maximalen ISI-Fehler. Die Simulationsergebnisse sind in Tabelle 1 theoretischen Werten gegenübergestellt, wobei

## Aufgabe 2.1: Impulsformung



**Abbildung 2:** Ausgangssignal mit Pulsformung

letzteren nicht die idealen Kosinus-roll-off-Impulse zugrunde liegen, sondern deren endliche Approximation mit endlicher Länge  $L$  berücksichtigen (endliche Summen bis  $L$ ).

**Tabelle 1:** Simulation einer nichtidealen Abtastung ( $\Delta t = T/16$ )

		$r = 0 (L = 256)$	$r = 0.5 (L = 16)$	$r = 1 (L = 8)$
Simulation	$(S/N)_{ISI}$	18.9 dB	22.9 dB	30.2 dB
Theorie	$(S/N)_{ISI}$	18.9 dB	23.0 dB	30.6 dB
Simulation	$\max\{ISI\}$	0.35	0.12	0.05
Theorie	$\max\{ISI\}$	0.68	0.12	0.05

Mit Ausnahme des maximalen ISI-Wertes bei  $r = 0$  stimmen die Simulationsergebnisse sehr gut mit den theoretischen Werten überein. Der theoretische ISI-Maximalwert ist für einen idealen Tiefpass eigentlich unbegrenzt, wenn man die unendlich lange  $\sin(x)/x$ -Impulsantwort zugrundelegt. Der Wert reduziert sich auf  $\max\{ISI\} = 0.68$  bei einer Zeitbegrenzung auf  $256T$ . Auch dieser Wert wird in der Simulation nicht

erreicht, da nur zwei ganz bestimmte Bitkonstellationen, nämlich

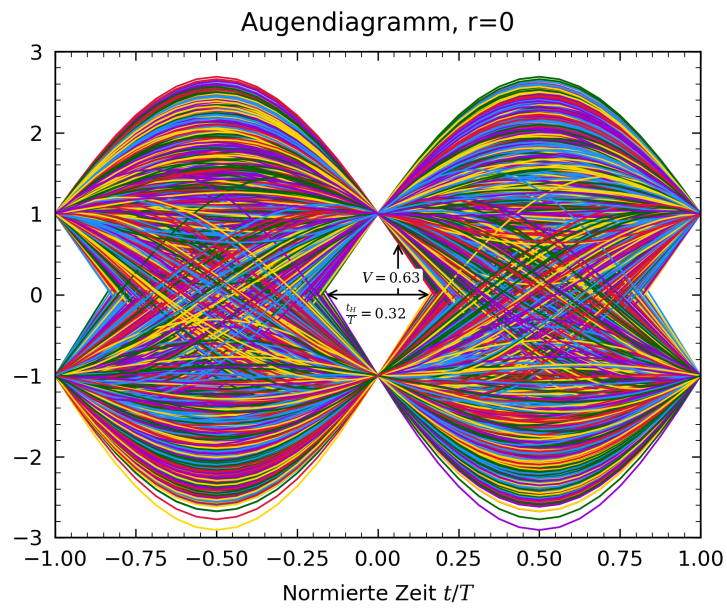
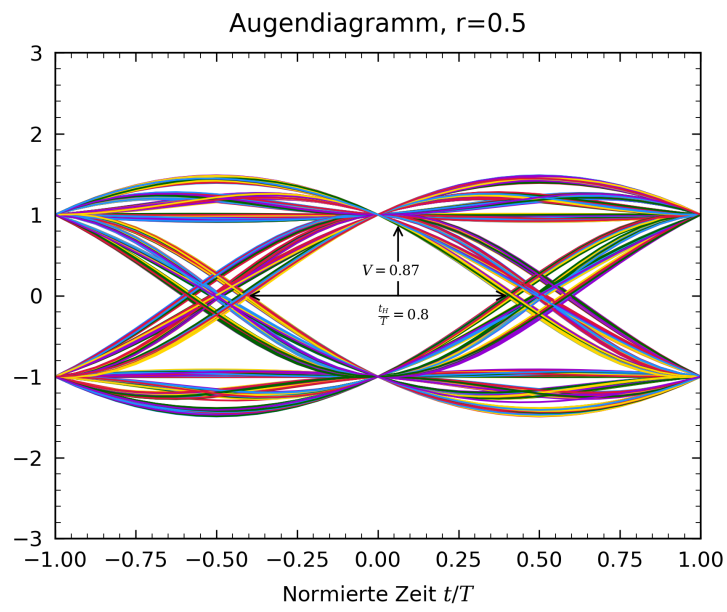
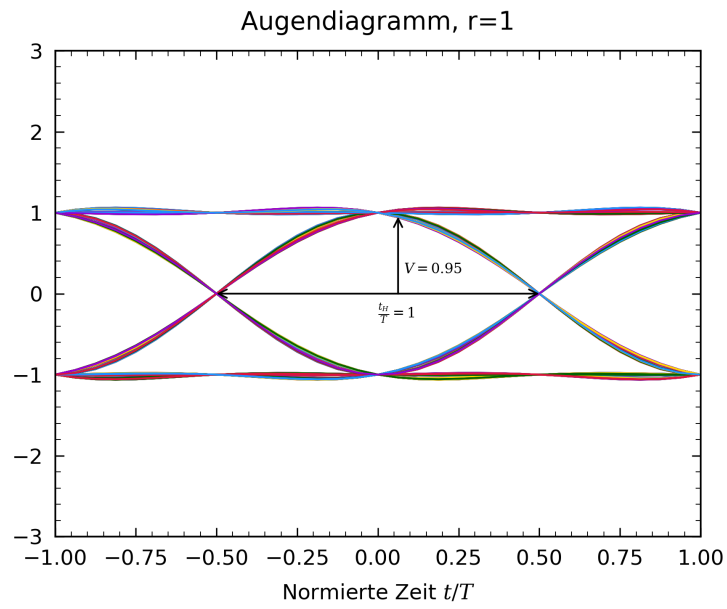
$$\underline{d} = [\cdots -1 +1 -1 +1 -1 d(i) +1 -1 +1 -1 +1 \cdots]^T \text{ und} \\ \underline{d} = [\cdots +1 -1 +1 -1 +1 d(i) -1 +1 -1 +1 -1 \cdots]^T$$

zum maximalen Fehler führen; diese Konstellationen treten bei großen Werten  $L$  äußerst selten auf, so dass der in der Simulation erreichte Maximalwert erheblich darunter liegt. Setzt man den oben angegebenen spezifischen Datenvektor in das Simulationsprogramm ein, so erhält man den theoretischen Maximalwert aus Tabelle 1.

### Aufgabe 3: **Augendiagramm**

- 3.1 Die mit Hilfe der Funktionen `datensig` und `auge` erstellten Augendiagramme für eine zweistufige Übertragung mit  $r = 1, 0.5$  und  $r = 0$  sind in der Abbildung 3 wiedergegeben.
- 3.2 Aus den Diagrammen werden bei einem Abtast-Offset von  $\Delta t = T/16$  für  $r = 1, 0.5$  und  $r = 0$  die relativen vertikalen Augenöffnungen  $V = 95\%, 87\%$  und  $63\%$  abgelesen. Diese Werte lassen sich anhand der Formel  $(1 - \max\{ISI\})$  bestätigen, indem hier die ISI-Maximalwerte aus Tabelle 1 eingesetzt werden - im Falle  $r = 0$  ist aus den erläuterten Gründen das Simulationsergebnis und nicht der theoretische Wert zu berücksichtigen.

Für die horizontale Augenöffnung ergeben sich die Werte  $H = 100\%, 80\%$  und  $32\%$ ; erwartungsgemäß wird die Augenbreite mit abnehmenden Roll-off-Faktor geringer. Besonders günstige Eigenschaften bezüglich der horizontalen Augenöffnung - und damit einer geringeren Empfindlichkeit gegenüber Abtastzeitfehler - weist der Fall  $r = 1$  mit  $H = 100\%$  auf. Impulse mit dieser Eigenschaft erfüllen die *zweite Nyquistbedingung*. Neben den gemäß der ersten Nyquistbedingung zu fordernden Nullstellen bei  $t = iT$  enthalten solche Impulse auch in der Mitte der Symbolintervalle Nulldurchgänge. Die Erfüllung der zweiten Nyquistbedingung erfordert eine Bandbreite von  $1/T$ , also doppelt so viel wie der Grenzfall des idealen Tiefpasses. Die geringe Empfindlichkeit gegenüber Abtastfehlern wird also mit einem erhöhten Bandbreitenbedarf erkauft.



**Abbildung 3:** Augendiagramme