Задача 4.3

$$\bar{u} = \underset{\|u\|=1}{\arg\max} \|X\bar{u}\|_2^2$$

Показать, что $\bar{u}$ - син. вектор матрицы X, отвечающий наибольшему син. числу.

Син. разложение X: $X = V \cdot \Sigma \cdot U^T$

$X \in M_{\ell \times F}$
$V \in M_{\ell \times \ell}$, $\Sigma \in M_{\ell \times F}$
$U \in M_{F \times F}$.
V, U - орт., Σ - прямоуг. диаг.

$$\|X\bar{u}\|_2^2 = \bar{u}^T X^T X \bar{u} =$$

$$= \bar{u}^T U \Sigma^T V^T V \Sigma U^T \bar{u} =$$

$$= \bar{u}^T U \Sigma^T \Sigma U^T \bar{u} = \bar{v}^T \Sigma^T \Sigma \bar{v}$$

$$\bar{v} = U^T \bar{u}; \quad \|\bar{v}\|_2 = \|\bar{u}\|_2$$

$\Sigma^T \Sigma \in M_{F \times F} = diag(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_F^2)$

Пусть без огр. общности $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots$

Тогда максимум $\|X\bar{u}\|_2^2$ достигается при $\bar{v} = (1, 0, \ldots, 0)^T$

$\bar{u} = U\bar{v} = \left|\begin{matrix}\text{первый столбец} \\ \text{матрицы } U\end{matrix}\right| = \bar{u}_1$ - первый син. вектор матр. X - син. вектор, соответствующий макс. син. числу.

ч.т.д.