Задача 2.5

$$p(\tilde{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det A^{-1}}} \exp\left(-\frac{(\tilde{y}-y)^T A(\tilde{y}-y)}{2}\right)$$

1) Показать, что распределение правильно нормировано.

A - ~~[illegible]~~ симметричная $\Rightarrow \exists S: \; S^T A S = E$.

$\det S = \sqrt{\det A^{-1}}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{(\tilde{y}-y)^T A(\tilde{y}-y)}{2}\right) d^n\tilde{y} = \left| \begin{array}{l} \tilde{y}-y = Sz \\ d^n\tilde{y} = \det S \cdot d^n z \end{array} \right| =$$

$$= \sqrt{\det A^{-1}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{z_i^2}{2}\right) d^n z = \sqrt{\det A^{-1}} \cdot$$

$$\cdot \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n \exp\left(-\frac{z_i^2}{2}\right) d^n z = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz\right)^n \cdot \sqrt{\det A^{-1}} =$$

$$= \sqrt{\det A^{-1}} \cdot (2\pi)^{\frac{n}{2}} \Rightarrow p(\tilde{y}) \text{ - нормировано.}$$

2) $\langle\langle \tilde{y}_i \tilde{y}_j \rangle\rangle$ - ?

Посчитаем интеграл: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{Y^T A Y}{2} + J^T Y} d^n Y =$

$$= \left| \begin{array}{l} Y = Sz \\ S^T A S = E \end{array} \right| = \sqrt{\det A^{-1}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum \frac{z_i^2}{2} + \underbrace{J^T S}_{\psi^T} z} d^n z =$$

$$= \sqrt{\det A^{-1}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum\left(\frac{z_i^2}{2} - \psi_i z_i + \frac{\psi_i^2}{2}\right) + \sum \frac{\psi_i^2}{2}} d^n z =$$

$$= \sqrt{\det A^{-1}}\, e^{\sum \frac{\psi_i^2}{2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum \frac{(z_i - \psi_i)^2}{2}} d^n z =$$

$$= \sqrt{\det A^{-1}} (2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot e^{\frac{J^T S S^T J}{2}} = \sqrt{\det A^{-1}} (2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot e^{\frac{J^T A^{-1} J}{2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial J_i}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{Y^TAY}{2}+J^TY} d^nY = \int_{\mathbb{R}^n} Y_i e^{-\frac{Y^TAY}{2}+J^TY} d^nY$$

$$\frac{\partial^2}{\partial J_i \partial J_j}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{Y^TAY}{2}+J^TY} d^nY = \int_{\mathbb{R}^n} Y_i Y_j e^{-\frac{Y^TAY}{2}+J^TY} d^nY$$

$$\frac{\partial}{\partial J_i}\left(e^{\frac{J^TA^{-1}J}{2}}\right) = \frac{\partial}{\partial J_i}\left(e^{\frac{J_k A^{-1}_{km} J_m}{2}}\right) =$$

$$= e^{\frac{J^TA^{-1}J}{2}} \frac{1}{2}\left(A^{-1}_{im} J_m + J_k A^{-1}_{ki}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial J_i \partial J_j}\left(e^{\frac{J^TA^{-1}J}{2}}\right) = \frac{\partial}{\partial J_j}\left(e^{\frac{J^TA^{-1}J}{2}} \frac{1}{2}\left(A^{-1}_{im} J_m + J_k A^{-1}_{ki}\right)\right) =$$

$$= e^{\frac{J^TA^{-1}J}{2}} (A^{-1}J)_i (A^{-1}J)_j + e^{\frac{J^TA^{-1}J}{2}} \cdot A^{-1}_{ij}$$

Полагая $J \to 0$ получим:

$$\langle\langle \tilde{y}_i \tilde{y}_j \rangle\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{Y_i Y_j}{\sqrt{\det A^{-1}} (2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{Y^TAY}{2} + \overset{0}{J^TY}} d^nY =$$

$$= e^{\frac{J^TA^{-1}J}{2}} A^{-1}_{ij}\Big|_{J=0} = A^{-1}_{ij}$$

3) Оценить погрешности w_α

Пусть $Q = (X^TX)^{-1}X^T$: $w = QY$, X - матрица объект признак.

$\tilde{w} = Q\tilde{y}$ | $\langle \tilde{w}_\alpha \rangle = \langle Q_{\alpha i} \tilde{y}_i \rangle = Q_{\alpha i} y_i = w_\alpha$

$$\langle\langle \tilde{w}_\alpha \tilde{w}_\beta \rangle\rangle = \langle (\tilde{w}_\alpha - w_\alpha)(\tilde{w}_\beta - w_\beta) \rangle =$$

$$= Q_{\alpha i} Q_{\beta j} \langle\langle \tilde{y}_i \tilde{y}_j \rangle\rangle = Q_{\alpha i} A^{-1}_{ij} Q^T_{ji} = Q A^{-1} Q^T$$

$$\operatorname{var} \tilde{w}_\alpha = \langle\langle \tilde{w}_\alpha \tilde{w}_\alpha \rangle\rangle = (Q A^{-1} Q_T)_{\alpha\alpha}$$ | без суммирования

4) $A = \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_n)$

$$\operatorname{var} u_\alpha = (Q^* A^{-1} Q^T)_{\alpha\alpha} = \sum_{i=1}^{n} Q_{\alpha i} A_i^{-1} Q^T_{i\alpha} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Q_{\alpha i}^2 A_i^{-1}$$

т.к. $A_i^{-1} = \operatorname{var} \tilde{y}_i$, то A_i следует брать:

$$A_i = \frac{1}{S_i^2}, \text{ где}$$

S_i - погрешность т.у