

Задача 2.5

$$p(\tilde{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det A^{-1}}} \exp\left(-\frac{(\tilde{y}-y)^T A (\tilde{y}-y)}{2}\right)$$

1) Показать, что распределение правильно нормировано.

A - ~~симметричная~~ симметрична $\Rightarrow \exists S: S^T A S = E$.

$$\det S = \sqrt{\det A^{-1}}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{(\tilde{y}-y)^T A (\tilde{y}-y)}{2}\right) d\tilde{y} = \left| \begin{array}{l} \tilde{y}-y = Sz \\ d\tilde{y} = \det S \cdot dz \end{array} \right| =$$

$$= \sqrt{\det A^{-1}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{z_i^2}{2}\right) dz = \sqrt{\det A^{-1}}.$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n \exp\left(-\frac{z_i^2}{2}\right) dz = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right)^n = \sqrt{\det A^{-1}} =$$

$$= \sqrt{\det A^{-1}} \cdot (2\pi)^{\frac{n}{2}} \Rightarrow p(\tilde{y}) \text{ - нормировано.}$$

2) $\langle \tilde{y}_i \tilde{y}_j \rangle$ - ?

Посчитаем интеграл: $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{y^T A y}{2}} + J^T y \, d\tilde{y} =$

$$= \left| \begin{array}{l} y = Sz \\ S^T A S = E \end{array} \right| = \sqrt{\det A^{-1}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\sum z_i^2}{2} + J^T S z} dz =$$

$$= \sqrt{\det A^{-1}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left(\frac{z_i^2}{2} - y_i z_i + \frac{y_i^2}{2}\right) + \sum \frac{y_i^2}{2}} dz =$$

$$= \sqrt{\det A^{-1}} e^{\sum \frac{y_i^2}{2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum \frac{(z_i - y_i)^2}{2}} dz =$$

$$= \sqrt{\det A^{-1}} (2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot e^{\frac{J^T S S^T J}{2}} = \sqrt{\det A^{-1}} (2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot e^{\frac{J^T A^{-1} J}{2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial J_i} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{Y^T A Y}{2} + J^T Y} dY = \int_{\mathbb{R}^n} Y_i e^{-\frac{Y^T A Y}{2} + J^T Y} dY$$

$$\frac{\partial^2}{\partial J_i \partial J_j} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{Y^T A Y}{2} + J^T Y} dY = \int_{\mathbb{R}^n} Y_i Y_j e^{-\frac{Y^T A Y}{2} + J^T Y} dY$$

$$\frac{\partial}{\partial J_i} \left(e^{\frac{J^T A^{-1} J}{2}} \right) = \frac{\partial}{\partial J_i} \left(e^{\frac{J_k A_{km}^{-1} J_m}{2}} \right) =$$

$$= e^{\frac{J^T A^{-1} J}{2}} \frac{1}{2} (A_{im}^{-1} J_m + J_k A_{ki}^{-1})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial J_i \partial J_j} \left(e^{\frac{J^T A^{-1} J}{2}} \right) = \frac{\partial}{\partial J_j} \left(e^{\frac{J^T A^{-1} J}{2}} \frac{1}{2} (A_{im}^{-1} J_m + J_k A_{ki}^{-1}) \right) =$$

$$= e^{\frac{J^T A^{-1} J}{2}} \left(A^{-1} \right)_{ij} + \frac{1}{2} (A_{im}^{-1} J_m + J_k A_{ki}^{-1})_{,j} + e^{\frac{J^T A^{-1} J}{2}} \cdot A_{ij}^{-1}$$

Положим $J \rightarrow 0$ найдем:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{y}_i \tilde{y}_j \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{Y_i Y_j}{\sqrt{\det A} (2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{Y^T A Y}{2} + J^T Y} dY = \\ &= e^{\frac{J^T A^{-1} J}{2}} A_{ij}^{-1} \Big|_{J=0} = A_{ij}^{-1} \end{aligned}$$

3) Определим нормированные \tilde{w}_α

Пусть $Q = (X^T X)^{-1} X^T$: $w = Q y$, X - матрица

$\tilde{w} = Q \tilde{y}$ | $\langle \tilde{w}_\alpha \rangle = \langle Q_{\alpha i} \tilde{y}_i \rangle = Q_{\alpha i} y_i = w_\alpha$ объем нормировки.

$$\langle \tilde{w}_\alpha \tilde{w}_\beta \rangle = \langle (\tilde{w}_\alpha - w_\alpha)(\tilde{w}_\beta - w_\beta) \rangle =$$

$$= Q_{\alpha i} Q_{\beta j} \langle \tilde{y}_i \tilde{y}_j \rangle = Q_{\alpha i} A_{ij}^{-1} Q_{\beta j}^T = Q A^{-1} Q^T$$

$$\text{Var } \tilde{w}_\alpha = \langle \tilde{w}_\alpha \tilde{w}_\alpha \rangle = (Q A^{-1} Q^T)_{\alpha\alpha} \quad | \text{diag симметризован}$$

$$4) A = \text{diag}(A_1, \dots, A_n)$$

$$\text{var } w_n = (Q^T \tilde{A}^{-1} Q^T)_{nn} = \sum_{i=1}^n Q_{ni} \tilde{A}_i^{-1} Q_{ni} =$$

$$= \sum_{i=1}^n Q_{ni}^2 A_i^{-1}$$

т.к. $A_i^{-1} = \text{var } \tilde{y}_i$, то A_i можем считать:

$$A_i = \frac{1}{S_i^2}, \text{ где}$$

S_i - стандарт Т.у