Задача 4.5

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Показать, что задача поиска синг. чисел X эквивалентна приведению соотв. тензора инерции к главным осям.

$$I = \begin{pmatrix} \sum y_i^2 + \sum z_i^2 & -\sum x_i y_i & -\sum x_i z_i \\ -\sum x_i y_i & \sum x_i^2 + \sum z_i^2 & -\sum y_i z_i \\ -\sum x_i z_i & \sum y_i z_i & \sum x_i^2 + \sum y_i^2 \end{pmatrix}$$

Поиск синг. чисел X экв. поиску собств. чисел $X^T X$

$$X^T X = \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i y_i & \sum x_i z_i \\ \sum x_i y_i & \sum y_i^2 & \sum y_i z_i \\ \sum x_i z_i & \sum y_i z_i & \sum z_i^2 \end{pmatrix}$$

Пусть $R^2 = \sum x_i^2 + \sum y_i^2 + \sum z_i^2$

Тогда $X^T X = R^2 \cdot E - I$

Пусть $X^T X = A^{-1} \Delta A$; Δ - диагональна

Тогда: $I = R^2 \cdot E - A^{-1} \Delta A = A^{-1} R^2 E \cdot A -$

$- A^{-1} \Delta A = A^{-1} \underbrace{(R^2 E - \Delta)}_{\text{диагональна}} A =>$

скаляр. матрица

=> матр. преобр. A диагонализует I и $X^T X$ одновременно, и собств. числа $X^T X$ есть $R^2 - \lambda_i^T$ (числа I) =>

=> задачи эквивалентны.