Задача 5.6

$A_{n\times n}$ – симм. ~~(невырожденная)~~ матрица.

$v \in \mathbb{R}^n$

$v_p = A^p v$, $p \in [0, n-1]$

Пусть все собственные числа A различны.
Докажем, что v_p – базис в $\mathbb{R}^n$
Пусть e_i – базис из собств. векторов A;

$$Ae_i = \lambda_i e_i$$

$$v = \sum \alpha_i e_i$$

$$v_p = \sum \alpha_i \lambda_i^p e_i$$

Если v_p – базис, то если $\sum_p \beta_p v_p = 0$, то $\beta_p = 0\ \forall p$.
~~Тогда:~~
Тогда базисность v_p определяется рав-вом или нерав-вом нулю следующего детерминанта:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1\lambda_1 & \alpha_1\lambda_1^2 & \cdots & \alpha_1\lambda_{n-1}^2 \\ \alpha_2 & \alpha_2\lambda_2 & \alpha_2\lambda_2^2 & \cdots & \alpha_2\lambda_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_1\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_n \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix}\text{опред.} \\ \text{Вандермонда}\end{matrix}\right| =$$

$= \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n \cdot \prod\limits_{1 \le j < i \le n} (\lambda_i - \lambda_j) \ne 0$, если все λ различны и все $\alpha_i \ne 0$.

Таким образом, для того, чтобы данная система была базисом, необходимо, чтобы v имел ненулевые проекции на все собств. подпространства.

~~Если же~~ Исследуем случай совпадения собств. чисел (пусть также $\alpha_i \ne 0 \; \forall i$)

В базисе из собств. векторов занумеруем векторы так, что первые m соотв. m различным собств. числам (m наибольшее).

Тогда, сузившись на подпространство $\langle e_1, \ldots, e_m \rangle$ ~~на~~ ан-но получим, что $v_1, \ldots, v_m$ — лин. нез., т.к. их проекции на $\langle e_1, \ldots, e_m \rangle$ — лин. нез.

Пусть $A^p v$ лин. зависит от $v, \ldots, A^{p-1} v$.

Тогда $A^p v = \sum\limits_{i=0}^{p-1} \beta_i A^{i} v$.

$$A^{p+1} v = A(A^p v) = \sum_{i=0}^{p-1} \beta_i A^{i+1} v = \sum_{i=1}^{p} \beta_{i-1} A^i v \Rightarrow$$

$\Rightarrow A^{p+1} v$ лин. зависим от $A^p v, \ldots, v$.

Тогда получаем, что m и есть размерность подпр. Крылова.

m — число различных λ_i