Задача 2.3

$Xw=y$ – неопределённая система: $X \in M_{n \times F}$, $F>n$.

Показать, что правая псевдообратная матрица даёт решение данной системы с наименьшей l_2 нормой.

По условию, X имеет максимальный ранг

Тогда XX^T обратима

$$w^* = X^T(XX^T)^{-1}y \text{ – решение. } \left(XX^T(XX^T)^{-1}y = y\right)$$

Общее решение системы есть w^*+w_0, где w_0 решение системы $Xw_0=0$.

Рассмотрим l_2 норму w^*+w_0

$$(w^*+w_0)^T(w^*+w_0) = \|w^*\|_2^2 + 2(w_0, w^*) + \|w^*\|_2^2 =$$

$$= \|w^*\|_2^2 + \|w_0\|_2^2 + 2\left(X^T(XX^T)^{-1}y\right)^T w_0 =$$

$$= \|w^*\|_2^2 + \|w_0\|_2^2 + 2\left[(XX^T)^{-1}y\right]^T \underbrace{Xw_0}_{=0} = \|w^*\|_2^2 + \|w_0\|_2^2$$

– минимальна при $w_0=0$.

Итого, $w^* = X^T(XX^T)^{-1}y$ – решение искомой системы с наименьшей l_2 нормой.