Задача 3. 6

$Ax = f$

A - симм., положительно определённая.

γ_2 - макс. собств. число A

γ_1 - мин. собств. число A $\quad | \gamma_2 \geq \gamma_1 > 0$

Док-ть, что максимальная скорость сх-ти ~~итерац~~ МПИ достигается при $\tau = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}$ и для такого τ: $\|\delta^{(k+1)}\| \leq \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \|\delta^{(k)}\|$

Док-во:

Будем работать с евклидовой нормой для векторов и подчинённой ей спектральной для матриц.

A-симм. $\Rightarrow$ можно ортогональным преобразованием привести A к диаг. виду. Далее считаем $A = \operatorname{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_2)$.

$Ax = f \Leftrightarrow x = (E - \tau A)x + \tau f$

$x^{(k+1)} = (E - \tau A)x^{(k)} + \tau f$

$\delta^{(k)} = Ax^{(k)} - f$

$\delta^{(k+1)} = Ax^{(k+1)} - f = A\big((E - \tau A)x^{(k)} + \tau f\big) - f =$

$= Ax^{(k)} - \tau A^2 x^{(k)} + \tau A f - f = \delta^{(k)} - \tau A \delta^{(k)} =$

$= \cancel{\delta^{(k)}} (E - \tau A) \delta^{(k)}$

$\|\delta^{(k+1)}\| \leq \|E - \tau A\| \|\delta^{(k)}\|$.

$\|E - \tau A\| = \min\big(|1 - \tau\gamma_1|, |1 - \tau\gamma_2|\big)$

Тогда оптимальное τ: $1-\tau\gamma_1 = \tau\gamma_2 - 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \tau = \frac{2}{\gamma_1+\gamma_2}$$

Тогда $\|E - \tau A\| = 1 - \dfrac{2\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2} = \dfrac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_2+\gamma_1}$

$$\|\delta^{(k+1)}\| \leq \frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_2+\gamma_1} \|\delta^{(k)}\|$$

ч. т. д.