

Задача 4.2

$$X \in M_{\mathbb{R}, F}$$

$X = V \Sigma U^T$ - сингулярное разложение

$\Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}$ в $\tilde{\Sigma}$ оставлены только \tilde{r} мин. чисел.

$$X \rightarrow \tilde{X}$$

Найти ^{норму} ~~теперь~~ Фробениуса матрицу

$$X - \tilde{X}. (\|X - \tilde{X}\|_F)$$

Известно, что $\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$, σ_i - мин. числа матрицы A .

Таким образом, нужно найти и сложить собственные числа матрицы $(X - \tilde{X})^T (X - \tilde{X})$ и сложить их (они и являются квадратичными мин. числами матрицы $X - \tilde{X}$).

$$\begin{aligned} (X - \tilde{X})^T (X - \tilde{X}) &= X^T X - \tilde{X}^T X - X^T \tilde{X} + \tilde{X}^T \tilde{X} = \\ &= U \Sigma^T \Sigma U^T - U \tilde{\Sigma}^T \Sigma U^T - U \Sigma^T \tilde{\Sigma} U^T + \\ &+ U \tilde{\Sigma}^T \tilde{\Sigma} U^T = U [\Sigma^T \Sigma - \tilde{\Sigma}^T \Sigma - \Sigma^T \tilde{\Sigma} + \tilde{\Sigma}^T \tilde{\Sigma}] U^T \end{aligned}$$

Заметим, что для ортогональной U :

$$\lambda(U A U^T) = \lambda(U A U^{-1}) = \lambda(A) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \|X - \tilde{X}\|_F^2 = \text{сумма собственных чисел матрицы}$
 $\Sigma^T \Sigma - \tilde{\Sigma}^T \Sigma - \Sigma^T \tilde{\Sigma} + \tilde{\Sigma}^T \tilde{\Sigma}$.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_F & \\ 0 & & & \sigma_{F+1} \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \sigma_F \end{pmatrix} \quad \tilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_F & \\ 0 & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma^T \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_F^2 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma^T \tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}^T \Sigma = \tilde{\Sigma}^T \tilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_{\tilde{F}}^2 & 0 \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma^T \Sigma - \Sigma^T \tilde{\Sigma} - \tilde{\Sigma}^T \Sigma + \tilde{\Sigma}^T \tilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_{\tilde{F}+1}^2 & 0 \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & \sigma_F^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|X - \tilde{X}\|_F = \sqrt{\sum_{i=\tilde{F}+1}^F \sigma_i^2}$$