Задача 4.3

Док-ть, что при наличии диагонального преобладания метод Зейделя сходится, причём быстрее метода Якоби.

Док-во:

Система: $Ax = F$

Для ответа на 2-ой вопрос, необходимо проанализировать сходимость как метода Зейделя, так и метода Якоби

Диагональное преобладание: $|A_{ii}| > \sum_{i \neq j} |A_{ij}|$ (*)

Якоби: $A = L + D + U$

$$L x^{(k)} + D x^{(k+1)} + U x^{(k)} = F \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{(k+1)} = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{R} x^{(k)} + D^{-1} f$$

$$x^{(k+1)} = R x^{(k)} + D^{-1} f$$

Выберем норму вектора как $\|x\| = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$.

Пусть x_0 - точное решение. Тогда:

$$\delta^{(k)} = x^{(k)} - x_0$$

$$\delta^{(k+1)} = x^{(k+1)} - x_0 = R x^{(k)} + D^{-1} f - x_0 = R x^{(k)} - R x_0 = R \delta^{(k)}$$

В компонентах:

$$\delta_i^{(k+1)} = \frac{1}{A_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} \delta_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij} \delta_j^{(k)} \right)$$

Тогда: $\|\delta^{(k+1)}\| \le \|\delta^{(k)}\| \cdot \max\limits_i \dfrac{\sum\limits_{j=1, j\ne i}^{n} A_{ij}}{A_{ii}} \le \dfrac{\sum\limits_{i\ne j} A_{ij}}{\min\limits_i A_{ii}} \cdot \|\delta^{(k)}\|$

По условию диагонального преобладания

$\sum\limits_{\substack{j=1 \\ i\ne j}}^{n} A_{ij} < A_{ii}\ (\forall i) \Rightarrow$ метод Якоби

сх-ся с „сжимающим" коэф-м $\dfrac{\sum\limits_{j\ne i}^{n} A_{ij}}{\min\limits_i A_{ii}}$

Заметим, что все оценки были не улучшаемыми $\Rightarrow$ в худшем случае ~~тот~~ коэф. сжатия будет именно таким.

Зейдель: Ан-но рассуждая, получим:

$\delta_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{A_{ii}} \left(\sum\limits_{j=1}^{i-1} A_{ij} \delta_j^{(k+1)} + \sum\limits_{j=i+1}^{n} A_{ij} \delta_j^{(k)} \right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \|\delta^{(k+1)}\| \le \max\limits_i \left(\dfrac{1}{A_{ii}} \sum\limits_{j=1}^{i-1} A_{ij} \right) \|\delta^{(k+1)}\| + \max\limits_i \sum\limits_{j=i+1}^{n} A_{ij} / A_{ii} \, \|\delta^{(k)}\| \le$

$$\le \underbrace{\dfrac{\sum\limits_{j<i} A_{ij}}{\min\limits_i A_{ii}}}_{\alpha} \|\delta^{(k+1)}\| + \underbrace{\dfrac{\sum\limits_{i>j} A_{ij}}{\min\limits_i A_{ii}}}_{\beta} \|\delta^{(k)}\|$$

$$\|\delta^{(k+1)}\| \le \|\delta^{(k)}\| \cdot \dfrac{\beta}{1-\alpha}$$

Сравним $\dfrac{\beta}{1-\alpha}$ с константой для Якоби: $\dfrac{\sum\limits_{i\ne j} A_{ij}}{\min\limits_i A_{ii}} = \alpha+\beta$

$$\dfrac{\beta}{\underbrace{1-\alpha}_{>0}} - \alpha + \beta = \dfrac{\beta - (\alpha+\beta)(1-\alpha)}{1-\alpha} = \dfrac{\alpha(\alpha+\beta-1)}{1-\alpha} < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ метод Зейделя сх-ся, причем быстрее метода Якоби. ч.т.д.