Задача 3.5

Показать, что минимизация ф-ции потерь с доп. ограничением: (лассо Тибширани)

$$L = \|Xw - y\|^2 \to \min_w \ ; \ \sum_\alpha |w_\alpha| < C$$

эквивалентна L1-регуляризации

Воспользуемся условиями Каруша-Куна-Таккера.

Пусть минимизируется ф-я $f(x)$ при условиях $g_i(x) \leq 0$.

Тогда: Если x_0^* - решение задачи, то $\exists \lambda_i$:

1) $L(x) = f(x) + \sum \lambda_i g_i(x)$ имеет минимум в x_0
2) $\lambda_i g_i(x_0) = 0$
3) $\lambda_i \geq 0$.

Если для некоторой x_0 выполняются условия (1-3) и $\lambda_1 > 0$, то x_0 - решение задачи.

Теперь докажем утверждение.

1. Пусть x_0 - решение задачи с лассо Тибширани.

Тогда $\exists \lambda$: $w_0 = \arg\min\left(\|Xw - y\|^2 + \lambda\left(\sum_\alpha |w_\alpha| - C\right)\right)$

Тогда $w_0 = \arg\min\left(\|Xw - y\|^2 + \lambda \sum_\alpha |w_\alpha|\right)$.

Т.е. $\overset{w_0}{~}$ – решение задачи об L_1 регуляризации с коэффициентом λ.

Формально, λ может быть 0, тогда рег. нет.

2. Пусть $\overset{w_0}{~}$ – решение задачи с L_1 регуляризацией.

Тогда $\overset{w_0}{~} = \arg\min \left(\|Xw - y\|^2 + \tau \sum_\alpha |w_\alpha| \right)$

Тогда $w_0 = \arg\min \left(\|Xw - y\|^2 + \tau \left(\sum_\alpha |w_\alpha| - \sum_\alpha |w_{0\alpha}| \right) \right)$

~~Покажем, что w_0 решение задачи~~

Теперь видно, что w_0 – решение задачи с лассо $C = \sum_\alpha |w_{0\alpha}|$; $\tau = \lambda$.

Действительно, условие 1) выполняется

2) выполняется

3) $\tau > 0$ – выполняется

уст. усл.

ч.т.д.