Задача 3.1

$$P_\lambda(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \quad \Big| \lambda \geq 0$$

1) Счётчик сработал за минуту m раз.

Найти апостериорное распр. на λ.

$$P(\lambda|m) = \cancel{\frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}} - ?$$

$$P(m|\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

$$P(\lambda) = \begin{cases} const, & \lambda \leq M \\ 0, & \lambda > M \end{cases} \quad M \to +\infty.$$

По т. Байеса: $P(\lambda|m) = \dfrac{P(m|\lambda)P(\lambda)}{P(m)} =$

$$= \frac{P(m|\lambda)P(\lambda)}{\int_0^{+\infty} P(m|\lambda)P(\lambda)d\lambda} = \frac{\frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}}{\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} d\lambda} = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{\Gamma(m+1)} =$$

$$= \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$$

2) ~~Теперь~~ Эксперимент повторим ~~и~~ ещё раз и получим m' отсчётов. Найти новое апост. распр. на λ

Теперь априорное распр. на λ - ответ из п. 1)

$$P(\lambda|(m,m')) = \frac{\frac{\lambda^{m'}}{m'!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}}{\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{m'}}{m'!} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-2\lambda} d\lambda} = \frac{\lambda^{m'} \lambda^m e^{-2\lambda}}{\int_0^{+\infty} \lambda^{m'+m} e^{-2\lambda} d\lambda} =$$

$$= \frac{\lambda^{m+m'} e^{-2\lambda}}{2^{-(m+m'+1)} (m+m')!}$$