Задача 4.4

$(x_i, y_i): \; \sum x_i = \sum y_i = 0$

Показать, что мн. вектор, соотв. наибольшему мн. числу матрицы $X = (\bar{x}\ \bar{y})$ даёт минимум вышеописанной функц.: $L' = \sum_{i=1}^{N} dist[(x_i, y_i), \bar{a}]$, где $\bar{a}$ задаёт прямую, проходящую через 0, а dist - евклидово расстояние от точки до прямой.

$$d_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \cdot \frac{|a_x y_i - a_y x_i|}{\underbrace{\|\bar{a}\|}_{\text{пусть } \|a\|=1} \cdot \sqrt{x_i^2 + y_i^2}} \Rightarrow d_i^2 = (a_x y_i - a_y x_i)^2 =$$

$$= a_x^2 y_i^2 - 2 a_x a_y y_i x_i + a_y^2 x_i^2$$

$$L' = a_x^2 \sum_{i=1}^{N} y_i^2 - 2 a_x a_y \sum_{i=1}^{N} x_i y_i + a_y^2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 =$$

$$= (a_x\ a_y) \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i^2 & -\sum_{i=1}^{N} x_i y_i \\ -\sum_{i=1}^{N} x_i y_i & \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

$$X^T X = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 & \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i y_i & \sum_{i=1}^{N} y_i^2 \end{pmatrix}$$

~~Тогда~~ вспомогательное ~~решение задачи~~, если A - невырожденная:

$$A = |X^T X| \cdot (X^T X)^{-1} = \alpha (X^T X)^{-1}$$

Если $X = V \Lambda U^T$, то $X^T X = V^T \Lambda^T \Lambda V$

$$\frac{1}{\alpha} A = (X^T X)^{-1} = (V^T \Lambda^T \Lambda V)^{-1} = V^T (\Lambda^T \Lambda)^{-1} V \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ матрица A диагонализуется одновременно с $X^T X \Rightarrow X^T X$ и A имеют одинаковые собств. векторы.

Минимальному собств. числу матрицы A: $\frac{\alpha}{\sigma_{max}^2}$ соответствует максимальное собств. число для X^TX: σ_{max}^2. При этом эти числа соотв. одному и тому же с.в.: $Av = \frac{\alpha}{\sigma^2} v$

$$X^TXv = \sigma^2 v.$$

Т.к. $L' = \bar{a}^T A \bar{a}$, то $\bar{a}_0$: $A\bar{a}_0 = \frac{\alpha}{\sigma_{max}} \cdot \bar{a}_0$ мини-~~миз~~мизирует L'.

$\bar{a}_0$ будет сингулярным вектором матрицы X, соотв. макс. сингул. числу, т.к. $(X^TX)\bar{a}_0 = \sigma_{max}^2 \bar{a}_0$

Если A вырожд., то все точки лежат на одной прямой и вектор $\binom{1}{k}$, соответств. ненулевому с.н. числу: $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot (1+k^2)$

k - угл. коэф.

(легко добавить случай $k \to \infty$)

ч.т.д.