Algorithme de minimisation de Brzozowski

Informatique Théorique 2 - Unité J1INPW11
Licence 3 - Université de Bordeaux

1 Introduction

Le but de cette partie théorique est de prouver l'algorithme de Brzozowski. Cet algorithme est un algorithme de minimisation alternatif à celui de Moore. Étant donné un automate $\mathcal{A}$, l'algorithme de Brzozowski effectue séquentiellement les quatre opérations suivantes :

1. Faire le miroir de $\mathcal{A}$.
2. Déterminiser l'automate obtenu.
3. Faire le miroir de l'automate obtenu.
4. Déterminiser l'automate obtenu.

On va montrer que quel que soit l'automate $\mathcal{A}$, l'automate obtenu en appliquant ces quatre opérations est toujours l'automate minimal du langage de $\mathcal{A}$.

2 Preuve

Pour toute cette preuve on considère fixé l'alphabet A utilisé par nos automates. On ne considère que des automates (potentiellement non-déterministes) **sans** ε-transitions. Si $\mathcal{A}$ est un automate, on note $L(\mathcal{A})$ le langage des mots acceptés par $\mathcal{A}$.

Définition : Pour tout automate $\mathcal{A} = (A, Q, I, F, \delta)$ on note $\textsc{mir}(\mathcal{A})$ l'*automate miroir* de $\mathcal{A}$. Plus précisément, on a $\textsc{mir}(\mathcal{A}) = (A, Q, F, I, \delta')$ avec $\delta' = \{(q, a, r) \mid (r, a, q) \in \delta\}$ (c'est-à-dire que $\textsc{mir}(\mathcal{A})$ est l'automate obtenu en renversant les flèches et en échangeant I et F dans $\mathcal{A}$). Pour tout mot $w \in A^*$, on note $\tilde{w}$ le miroir de w. C'est-à-dire que si $w = a_1a_2a_3 \cdots a_n$, $\tilde{w} = a_n \cdots a_3a_2a_1$.

Question 1. Soit $\mathcal{A}$ un automate, montrer que $L(\textsc{mir}(\mathcal{A})) = \{\tilde{w} \mid w \in L(\mathcal{A})\}$.

Définition : Pour tout automate $\mathcal{A} = (A, Q, I, F, \delta)$ et tout état $q \in Q$ de $\mathcal{A}$, on note $L_g^{\mathcal{A}}(q)$ accepté par l'automate $(A, Q, I, \{q\}, \delta)$, qu'on appelle le *langage à gauche* de q. De la même façon, le *langage à droite* $L_d^{\mathcal{A}}(q)$ de l'état q est le langage accepté par l'automate $(A, Q, \{q\}, F, \delta)$.

Question 2. Soit $\mathcal{A} = (A, Q, I, F, \delta)$ un automate. On rappelle que $\mathcal{A}$ et $\textsc{mir}(\mathcal{A})$ on le même ensemble d'états Q. Montrer que pour tout état $q \in Q$:

a) $L_g^{\textsc{mir}(\mathcal{A})}(q) = \{\tilde{w} \mid w \in L_d^{\mathcal{A}}(q)\}$.

b) $L_d^{\textsc{mir}(\mathcal{A})}(q) = \{\tilde{w} \mid w \in L_g^{\mathcal{A}}(q)\}$.

DÉFINITION : Pour tout automate $\mathcal{A} = (A, Q, I, F, \delta)$, on note $\textsc{det}(\mathcal{A})$ l'automate déterminisé de $\mathcal{A}$. C'est-à-dire l'automate des parties associé à $\mathcal{A}$ obtenu en ne gardant que les états accessibles. On rappelle que chaque état de $\textsc{det}(\mathcal{A})$ est un sous-ensemble $R \subseteq Q$ de l'ensemble Q des états de $\mathcal{A}$.

Question 3. Soit $\mathcal{A} = (A, Q, I, F, \delta)$ un automate et $R \subseteq Q$ un état de $\textsc{det}(\mathcal{A})$. Montrer que le langage à droite $L_d^{\textsc{det}(\mathcal{A})}(R)$ est l'union des langages à droite $L_d^{\mathcal{A}}(r)$ pour $r \in R$. C'est-à-dire

$$L_d^{\textsc{det}(\mathcal{A})}(R) = \bigcup_{r \in R} L_d^{\mathcal{A}}(r)$$

Question 4. Soit $\mathcal{A} = (A, Q, I, F, \delta)$ automate. Montrer que $\mathcal{A}$ est déterministe si et seulement si $|I| = 1$ et les langages à gauche associés à ses états sont deux à deux disjoints :

$$\text{pour tout } q, r \in Q \text{ tels que } q \neq r : \qquad L_g^{\mathcal{A}}(q) \cap L_g^{\mathcal{A}}(r) = \emptyset$$

Question 5. Soit $\mathcal{A} = (A, Q, I, F, \delta)$ un automate déterministe dont tous les états sont accessibles. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les états de $\mathcal{A}$ pour que $\mathcal{A}$ soit minimal.
Indice : On pourra utiliser les langages à droite des états de $\mathcal{A}$.

Question 6. Soit $\mathcal{A}$ un automate. Combiner les questions précédentes pour montrer que l'automate $\textsc{det}(\textsc{mir}(\textsc{det}(\textsc{mir}(\mathcal{A}))))$ est l'automate minimal de $\mathcal{A}$.

Question 7. Quelle est la complexité de la construction de l'automate $\textsc{det}(\textsc{mir}(\textsc{det}(\textsc{mir}(\mathcal{A}))))$, dans le cas le pire (justifier la réponse) ?