# ZADANIA Z ALGEBRY I LOGIKI
## Zestaw 2[1]

**1.** Sprawdzić, czy prawdziwe są poniższe zdania
(a) $\forall x \; \exists e \; x \cdot x = e$,
(b) $\forall x \; \exists e \; x \cdot e = x$,
(c) $\exists e \; \forall x \; x \cdot e = x$,
(d) $\forall x \; \forall y \; \exists z \; \forall t \; x + y + z + t = 0$.

**2.** Niech $x = y$, $x < y$, $x \leq y$ będą funkcjami zdaniowymi określonymi dla liczb naturalnych. Za ich pomocą korzystając z działań arytmetycznych $x+y$ i $x \cdot y$, symboli dla liczb oraz symboli logicznych, zapisać następujące funkcje zdaniowe:
(a) $x$ jest liczbą parzystą,
(b) $x$ jest sumą kwadratów dwu liczb naturalnych,
(c) $x$ jest liczbą pierwszą,
(d) $x$ nie jest liczbą pierwszą,
(e) $x$ jest największym wspólnym dzielnikiem liczb $y$ i $z$,
(f) $x$ jest najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb $y$ i $z$,
(g) Każda liczba parzysta większa od 3 rozkłada się na sumę dwóch liczb pierwszych (hipoteza Goldbacha),
(h) pomiędzy liczbami $n$ i $2n$ istnieje co najmniej jedna liczba pierwsza (twierdzenie Czebyszewa),
(i) każda liczba całkowita przy dzieleniu przez 2 daje resztę 0 lub 1.

**3.** Czy poniższe wyrażenia są tautologiami (jeśli równoważność jest nieprawdziwa to postawić strzałkę w odpowiednią stronę):
(a) $\sim \exists x \; \Phi(x) \Leftrightarrow \forall x \; \sim \Phi(x)$,
(b) $\sim \forall x \; \Phi(x) \Leftrightarrow \exists x \; \sim \Phi(x)$,
(c) $\exists x \; \forall y \; \Phi(x, y) \Leftrightarrow \forall y \; \exists x \; \Phi(x, y)$,
(d) $\exists x \; (\Phi(x) \vee \Psi(x)) \Leftrightarrow \exists x \; \Phi(x) \vee \exists x \Psi(x)$,
(e) $\exists x \; (\Phi(x) \wedge \Psi(x)) \Leftrightarrow \exists x \; \Phi(x) \wedge \exists x \Psi(x)$,
(f) $\forall x \; (\Phi(x) \vee \Psi(x)) \Leftrightarrow \forall x \; \Phi(x) \vee \forall x \Psi(x)$,
(g) $\forall x \; (\Phi(x) \wedge \Psi(x)) \Leftrightarrow \forall x \; \Phi(x) \wedge \forall x \Psi(x)$,
(h) $\forall x \; (\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)) \Leftrightarrow [\forall x \; \Phi(x) \Rightarrow \forall x \Psi(x)]$,
(i) $\forall x \; (\Phi(x) \Leftrightarrow \Psi(x)) \Leftrightarrow [\forall x \; \Phi(x) \Leftrightarrow \forall x \Psi(x)]$,
(j) $\exists x \; (\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)) \Leftrightarrow [\exists x \; \Phi(x) \Rightarrow \exists x \Psi(x)]$,

[1] Większość zadań pochodzi ze zbioru W. Marek, J.Onyszkiewicz „Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości w zadaniach", PWN, Warszawa 1991.

(k) $\exists x\ (\Phi(x) \Leftrightarrow \Psi(x)) \Leftrightarrow [\exists x\ \Phi(x) \Leftrightarrow \exists x \Psi(x)]$.

**4.** Uzasadnić, że jeśli $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ jest zbiorem skończonym to prawdziwe są wyrażenia:
(a) $\forall x\ \Phi(x) \Leftrightarrow \Phi(x_1) \wedge \Phi(x_2) \wedge \dots \wedge \Phi(x_n)$,
(b) $\exists x\ \Phi(x) \Leftrightarrow \Phi(x_1) \vee \Phi(x_2) \vee \dots \vee \Phi(x_n)$.

**5.** Dla podanych zbiorów $A, B, C$ wykonać działania - $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \div B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$:
(a) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, d, e\}$,
(b) $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 3\}$,
(c) $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x = 3\}$,
(d) $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x < 1\}$,
(e) $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 2\}$.

**6.** Dane są zbiory

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} :\ x^7 - 2x^6 - x^3 + 2x^2 \geq 0\}, \\ B &= \{x \in \mathbb{R} :\ \log_{1/2}(x^2 - 2) - \log_{1/2}(3 - x) + 1 < 0\}, \\ C &= \{x \in \mathbb{R} :\ |5 - 2x| < 1\}. \end{aligned}$$

Wyznaczyć zbiór $(A \cup B) \cap C$.

**7.** Niech $X$ będzie zbiorem wszystkich wielokątów, $A \subseteq X$ zbiorem wszystkich trójkątów równoramiennych, $B$ zbiorem wszystkich trójkątów równobocznych, $C$ zbiorem wszystkich trójkątów prostokątnych. Wyznaczyć zbiory
(a) $(A \cap B) \cap C$,
(b) $(A \cap B') \cap C$,
(c) $A' \cap (B \cap C)$,
(d) $A' \cap (B \cap C')$,
(e) $(A \cap B) \cap C'$.

**8.** Udowodnić równości zbiorów:
(a) $A \cup B = B \cup A$,
(b) $A \cap B = B \cap A$,
(c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
(d) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,
(e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
(f) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
(g) $A \cap (A \cup B) = A$,
(h) $A \cup (A \cap B) = A$,

(i) $A \cap \emptyset = \emptyset$,
(j) $A \cup \emptyset = A$.

**9.** Niech $A, B$ będą podzbiorami zbioru $X$ (dopełnienia będziemy obliczać w $X$). Udowodnić,
(a) $A \cap A' = \emptyset$,
(b) $A \cup A' = X$,
(c) $(A \cup B)' = A' \cap B'$,
(d) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

**10.** Udowodnić następujące równości:
(a) $A \div B = B \div A$,
(b) $(A \div B) \div C = A \div (B \div C)$,
(c) $A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C)$.

**11.** W miejsce kropek wpisać odpowiedni zbiór i udowodnić otrzymaną równość:
(a) $A \div A = \ldots\ldots$,
(b) $A \div \ldots\ldots = A$,
(c) jeśli $A \subset B$ to $A \div B = \ldots\ldots$,
(d) jeśli $A \cap B = \emptyset$ to $A \div B = \ldots\ldots$,
(e) $A \div A' = \ldots\ldots$.

**12.** W miejsce kropek wpisać odpowiedni zbiór i udowodnić otrzymaną równość:
(a) $A \subset B \iff A \cap B = \ldots\ldots$,
(b) $A \subset B \iff A \cup B = \ldots\ldots$.

**13.** Wyznaczyć $\mathcal{P}(A)$ dla $A = \{1, 2\}$, $A = \{a, b, c\}$, $A = \{-1, 3, -5, 7\}$.

**14.** Wyznaczyć zbiór $\{1, -1, 0, 5\} \times \{-2, 3, 0\}$.

**15.** Wyznaczyć zbiory $A^2$ i $A^3$ dla $A = \{1, 2, 4\}$.

**16.** Zaznaczyć na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiór $A \times B$, gdzie
(a) $A = (0, 1) \cup < 2, 4)$, $B = (3, 6)$,
(b) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : 5x + 7 = 37\}$,
(c) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x^3 < 1\}$.

**17.** Sprawdzić, czy prawdziwe są następujące równości:
(a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,

(b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,
(c) $A \setminus (B \times C) = (A \setminus B) \times (A \setminus C)$,
(d) $A \cap (B \times C) = (A \cap B) \times (A \cap C)$,
(e) $A \cup (B \times C) = (A \cup B) \times (A \cup C)$.