ZADANIA Z ALGEBRY I LOGIKI

ZESTAW 4[1]

**1.** Które z poniższych funkcji są różnowartościowe, a które są 'na'? Jeśli funkcja jest bijekcją wyznaczyć funkcję odwrotną.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$,
(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$,
(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$,
(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + x$,
(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$,
(f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x2^{x-1}$,
(g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{dla} \quad x \geq 0, \\ 2x & \text{dla} \quad x < 0, \end{cases}$
(h) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{dla} \quad x \neq -1, \\ 1 & \text{dla} \quad x = -1, \end{cases}$

**2.** Dla jakiej wartości parametru $a$ funkcja

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-2} & \text{dla} \quad x \neq 2, \\ a & \text{dla} \quad x = 2, \end{cases}$$

jest bijekcją? Wyznaczyć funkcję odwrotną.

**3.** Wypisać wszystkie funkcje przekształcające zbiór $\{1, 2\}$ w siebie. Skonstruować tabelkę składania tych funkcji.

**4.** Wypisać wszystkie bijekcje zbioru $\{1, 2, 3\}$ na siebie. Skonstruować tabelkę składania tych funkcji. Dla każdej funkcji wyznaczyć funkcję odwrotną.

**5.** Udowodnić, że złożenie iniekcji jest iniekcją, a złożenie surjekcji jest surjekcją. Wywnioskować stąd, że złożenie bijekcji jest bijekcją.

**6.** Niech $f : X \to X$ będzie odwzorowaniem różnowartościowym, a $g : X \to X$ dowolnym odwzorowaniem. Niech przy tym $f \circ g = f$. Udowodnić, że wtedy $g = id_X$.

**7.** Niech $f : X \to X$ będzie odwzorowaniem 'na', a $g : X \to X$ dowolnym odwzorowaniem. Niech przy tym $g \circ f = f$. Udowodnić, że wtedy $g = id_X$.

[1] Większość zadań pochodzi ze zbioru W. Marek, J.Onyszkiewicz „Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości w zadaniach", PWN, Warszawa 1991.

**8.** Załóżmy, że $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ są odwzorowaniami takimi, że $g \circ f$ jest 'na', zaś $g$ jest odwzorowaniem różnowartościowym. Udowodnić, że $f$ jest 'na'.

**9.** Podać przykład odwzorowania $f : X \to X$ takiego, że $f \circ f = f$ i $f \neq id_X$.

**10.** Podać przykład odwzorowania $f : X \to X$, które jest 'na' i które nie jest różnowartościowe. Czy taki przykład istnieje gdy zbiór jest skończony?

**11.** Podać przykład odwzorowania $f : X \to X$, które jest różnowartościowe i które nie jest 'na'. Czy taki przykład istnieje gdy zbiór jest skończony?

**12.** Czy funkcja $f : \{0,1\}^4 \to \{0,1\}^4$, $f(a_1a_2a_3a_4) = \bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3\bar{a}_4$, gdzie $\bar{a} = 1 - a$ jest bijekcją? Obliczyć $f(1101)$. Wyznaczyć $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n}$ dla wszystkich $n$ naturalnych. Wyznaczyć $f(\{1111, 0101\})$ oraz $f^1(\{1101, 1101, 1100\})$

**13.** Dana jest funkcja $f : X \to Y$ oraz podzbiory $A_1, A_2 \subset X, B_1, B_2 \subset Y$. W miejsce kropek wstawić jeden ze znaków $\subset, \supset, =$:

(a) $f(A_1 \cup A_2) \ldots f(A_1) \cup f(A_2)$,

(b) $f(A_1 \cap A_2) \ldots f(A_1) \cap f(A_2)$,

(c) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) \ldots f(B_1) \cup f(B_2)$,

(d) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \ldots f(B_1) \cap f(B_2)$,