ZADANIA Z ALGEBRY I LOGIKI
ZESTAW 3[1]

**1.** Niech $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Narysować tabelkę i graf relacji

$$\{(a, b) \in X^2 : a - b \in \{-1, 0, 1\}\}.$$

Jakie własności ma ta relacja?

**2.** Weźmy zbiór $D_{12} = \{d \in \mathbb{N} :\ d|12\}$. Wyznaczyć tabelkę i narysować graf relacji $R$ w zbiorze $D_{12}$:

$$xRy \iff x|y.$$

**3.** W zbiorze $X = \{z \in \mathbb{Z} :\ -4 \leq z \leq 4\}$ dana jest relacja

$$xRy \iff |x| + |y| > 5.$$

Narysować tabelkę i graf tej relacji.

**4.** Narysować grafy relacji $AR_1B \iff |A| = |B|$ i $AR_2B \iff |A| < |B|$ w zbiorze $X = \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$. Narysować grafy relacji $R_1 \cap R_2$ i $R_1 \cup R_2$.

**5.** Zbadać jakie własności mają poniższe relacje w zbiorze $X$:

(a) $X = \mathbb{Z}$, $xRy \iff 3|x - y$,

(b) $X = \mathbb{N}$, $xRy \iff 2|x + y$,

(c) $X = \mathbb{R}$, $xRy \iff x^2 = y^2$,

(d) $X = \mathbb{R}$, $xRy \iff |x| + |y| = 3$,

(e) $X = \mathbb{R}$, $xRy \iff |x| + |y| \neq 3$,

(f) $X = \mathbb{R}$, $xRy \iff |x| < |y|$,

(g) $X = \mathcal{P}(T)$, $ARB \iff |A| \leq |B|$ ($T$ jest dowolnym zbiorem),

(h) $X = \mathbb{R}^2$, $(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \iff y_1 = y_2$,

(i) $X = \{0, 1\}^2$, $(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \iff x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2$.

**6.** Relacje binarne w zbiorze $\mathbb{R}$ są podzbiorami zbioru $\mathbb{R}^2$, a więc mają swoje obrazki na płaszczyźnie kartezjańskiej. Jaki jest sens geometryczny zwrotności, symetryczności, antysymetryczności?

**7.** Niech $R_1$, $R_2$ będą relacjami w zbiorze $X$.

[1] Większość zadań pochodzi ze zbioru W. Marek, J.Onyszkiewicz „Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości w zadaniach", PWN, Warszawa 1991.

(a) Czy jeśli $R_1$ i $R_2$ są zwrotne to $R_1 \cap R_2$ jest zwrotna?

(b) Czy jeśli $R_1$ i $R_2$ są zwrotne to $R_1 \cup R_2$ jest zwrotna?

(c) Czy jeśli $R_1$ i $R_2$ są symetryczne to $R_1 \cap R_2$ jest symetryczna?

(d) Czy jeśli $R_1$ i $R_2$ są symetryczne to $R_1 \cup R_2$ jest symetryczna?

(e) Czy jeśli $R_1$ i $R_2$ są symetryczne to $R_1 \cap R_2$ jest antysymetryczna?

(f) Czy jeśli $R_1$ i $R_2$ są antysymetryczne to $R_1 \cup R_2$ jest antysymetryczna?

(g) Czy jeśli $R_1$ i $R_2$ są przechodnie to $R_1 \cap R_2$ jest przechodnia?

(h) Czy jeśli $R_1$ i $R_2$ są przechodnie to $R_1 \cup R_2$ jest przechodnia?

**8.** Jakie własności relacji zachowuje działanie $R_1 \setminus R_2$?

**9.** Jeśli dane są grafy relacji $R_1$ i $R_2$ to jak wyglądają grafy relacji $R_1 \cap R_2$ i $R_1 \cup R_2$?

**10.** Sprawdzić, która z poniższych relacji jest relacją równoważności (jeśli jest wyznaczyć jej klasy abstrakcji):

(a) $X = \mathbb{Z}$, $xRy \iff 3|x - y$,

(b) $X = \mathbb{N}$, $xRy \iff 2|x + y$,

(c) $X = \mathbb{R}$, $xRy \iff x^2 = y^2$,

(d) $X = \mathbb{R}$, $xRy \iff |x| = |y|$,

(e) $X = \mathbb{R}$, $xRy \iff |x| \neq |y|$,

(f) $X = \mathbb{R}$, $xRy \iff x - y \in \mathbb{Q}$,

(g) $X = \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$, $ARB \iff |A| = |B|$,

(h) $X = \mathbb{R}^2$, $(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \iff y_1 = y_2$,

(i) $X = \mathbb{R}^2$, $(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \iff x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$,

(j) $X = \{0, 1\}^2$, $(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \iff x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2$.

**11.** Ile jest relacji równoważności w zbiorze trójelementowym, a ile w czteroelementowym?

**12.** Niech $n$ będzie liczbą naturalną. Definiujemy relację zbiorze $\mathbb{Z}$:

$$a \equiv b \bmod n \iff n|a - b.$$

Udowodnić, że jest to relacja równoważności. Wyznaczyć klasy abstrakcji i pokazać, że spełnione są następujące własności:

$$
\begin{aligned}
&a + c \equiv b + d \bmod n, \\
&a \cdot c \equiv b \cdot d \bmod n, \\
&\forall_{k \in \mathbb{N}}\; a^k \equiv b^k \bmod n.
\end{aligned}
$$