ZADANIA Z ALGEBRY I LOGIKI
ZESTAW 1
RACHUNEK ZDAŃ

1. Sprawdzić, że poniższe wyrażenia są tautologiami:
(a) $p \Rightarrow p$,
(b) $p \vee \sim p$,
(c) $\sim (p \wedge \sim p)$,
(d) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$,
(e) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$,
(f) $(\sim p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$,
(g) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$,
(h) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$,
(i) $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$,
(j) $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$,
(k) $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$,
(l) $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$,
(m) $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$,
(n) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$.

2. Sprawdzić, czy następujące wyrażenia są tautologiami:
(a) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$,
(b) $[(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r] \Leftrightarrow [p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)]$,
(c) $[p \veebar (q \veebar r)] \Leftrightarrow [(p \veebar q) \veebar r]$.

3. Wykazać, że jeśli Φ jest tautologią to zdania $\Phi \wedge p \Leftrightarrow p$ i $\sim \Phi \vee p \Leftrightarrow p$ są prawdziwe.

4. Zapisać prawa przemienności, łączności, rozdzielności dla spójników $\vee$, $\wedge$, $\veebar$, $\Rightarrow$, $\iff$ jako wyrażenia logiczne i sprawdzić czy są tautologiami.

5. Zapisać zaprzeczenia spójników logicznych $\vee$, $\wedge$, $\veebar$, $\Rightarrow$, $\iff$ jako tautologie rachunku zdań.

6. Zdefiniować alternatywę za pomocą koniunkcji i negacji.

7. Zdefiniować alternatywę za pomocą implikacji i negacji.

8. Udowodnić, że nie można zdefiniować implikacji za pomocą alternatywy i koniunkcji.

9. Rozważmy wyrażenie:

$$(\ldots\underbrace{((p \Rightarrow p) \Rightarrow p)\ldots) \Rightarrow p}_{n}$$

Dla jakich n to wyrażenie jest tautologią?

10. Używając spójników logicznych $\sim, \vee, \wedge$, wyznaczyć wyrażenie zależne od zmiennych p, q, r, s, które przyjmuje wartość 1 tylko w przypadku gdy p ma wartość 1, q wartość 0, r wartość 1 i s wartość 1.

11. Używając spójników logicznych $\sim, \vee, \wedge$, wyznaczyć wyrażenie zależne od zmiennych p, q, r, s, które przyjmuje wartość 1 tylko w przypadku gdy p ma wartość 1, q wartość 0, r wartość 1 i s wartość 1 lub gdy p ma wartość 0, q wartość 1, r wartość 1 i s wartość 1 .

12. Używając spójników logicznych $\sim, \vee, \wedge$, wyznaczyć wyrażenie zależne od zmiennych p, q, r, s, które przyjmuje wartość 0 tylko w przypadku gdy p ma wartość 1, q wartość 1, r wartość 0 i s wartość 1.

13. Używając spójników logicznych $\sim, \vee, \wedge$, wyznaczyć wyrażenie zależne od zmiennych p, q, r, s, które przyjmuje wartość 0 tylko w przypadku gdy p ma wartość 1, q wartość 1, r wartość 1 i s wartość 0 lub gdy p ma wartość 1, q wartość 1, r wartość 0 i s wartość 1 .

14. Używając różnych tautologii, uprościć wyrażenia:
(a) $(\sim p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$,
(b) $(p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r)$.

15. Znaleźć formułę w możliwie najkrótszej formie zapisaną przy pomocy spójników $\sim, \vee, \wedge$ równoważną formule:
(a) $\sim p \Rightarrow \sim\sim q$,
(b) $(p \wedge q) \vee \sim (\sim p \Rightarrow q)$,
(c) $(p \wedge q \wedge s) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (p \wedge q \wedge \sim s) \vee (p \wedge r \Rightarrow q)$.

16. Przeanalizować rozumowanie:
Jeśli jestem geniuszem lub będę się uczył, zdam egzamin. Jeśli zdam egzamin, zostanę dopuszczony do następnych wykładów. A więc nie będę sie uczył.

17. Przeanalizować zdanie:
Jeżeli figura A jest czworokątem i A ma wszystkie kąty równe, to z faktu, iż A jest czworokątem, wynika iż A ma wszystkie boki równe.

18. Udowodnić następujące twierdzenie:
Jeśli prawdziwe są wynikania $p_1 \Rightarrow q_1, \ldots, p_n \Rightarrow q_n$ *oraz zdania* $(p_1 \vee \ldots \vee p_n)$ *i* $\sim (q_i \wedge q_j)$ *dla* $i \neq j$ *to prawdziwe są też wynikania* $q_1 \Rightarrow p_1, \ldots, q_n \Rightarrow p_n$.

Mówimy wtedy, że zdania $p_1, \ldots, p_n$, $q_1, \ldots, q_n$ tworzą *zamknięty układ twierdzeń*. Podać przykłady takich układów.