

# I SPRAWDZIAN Z ALGEBRY I LOGIKI

## Wariant A

1.

(Efekt 1) potrafi formułować zdania i formy zdaniowe w języku formalnym i oceniać ich prawdziwość

(a) Sprawdzić, czy wyrażenie  $[p \vee (q \Rightarrow r)] \iff [(p \vee q) \Rightarrow (p \vee r)]$  jest tautologią.

(b) Przypominam, że jeśli zdania

$$p_1 \Rightarrow q_1, \dots, p_n \Rightarrow q_n \text{ i } \sim (q_1 \vee \dots \vee q_n)$$

są prawdziwe to  $p_1 \Rightarrow q_1, \dots, p_n \Rightarrow q_n$  nazywamy zamkniętym układem twierdzeń. Podać przykład własnego zamkniętego układu twierdzeń, w którym  $n \geq 3$ .

2.

(Efekt 1) potrafi formułować zdania i formy zdaniowe w języku formalnym i oceniać ich prawdziwość

(a) Czy zdanie

$$\forall A \subseteq \mathbb{R} \forall a \in A \exists b \in A \quad ab = 1$$

jest prawdziwe? Odpowiedź uzasadnić.

(b) Wstawić jeden ze znaków  $\Rightarrow, \Leftarrow$  w miejsce kropek tak aby otrzymać tautologię i uzasadnić dlaczego nie można wstawić drugiego:

$$[\forall x \quad \Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)] \dots \dots \dots [(\forall x \quad \Phi(x)) \Rightarrow (\forall x \quad \Psi(x))]$$

3.

(Efekt 2) posługuje się pojęciami teorii mnogości, potrafi wykonywać działania na zbiorach

Dla zbiorów  $A, B$  określamy działanie  $A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

(a) Udowodnić, że  $A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C)$

(b)

1. Pokazać, że istnieje  $X$  taki, że dla każdego  $A$  zachodzi  $A \div X = A$ .

2. Jeśli  $A \cap B = \emptyset$  to  $A \div B = \dots \dots \dots$

4.

(Efekt 3) posługuje się pojęciem relacji, rozpoznaje typy relacji

(Efekt 4) zna relacje równoważności, umie zastosować relacje równoważności do tworzenia nowych obiektów

W zbiorze  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  definiujemy relację:

$$x \sim y \iff |x - y| \text{ jest podzielne przez } 3.$$

(a) Narysować graf tej relacji.

(b) Udowodnić, że jest to relacja równoważności.

(c) Wyznaczyć podział na klasy abstrakcji.

- 
- Za każde zadanie można otrzymać od 0 do 10 punktów.
  - Aby zaliczyć efekt trzeba z zadania lub grupy zadań sprawdzających ten efekt otrzymać przynajmniej 30% punktów, które można za to zadanie (lub grupę zadań) otrzymać.

# I SPRAWDZIAN Z ALGEBRY I LOGIKI

## Wariant B

1.

(Efekt 1) potrafi formułować zdania i formy zdaniowe w języku formalnym i oceniać ich prawdziwość

(a) Sprawdzić, czy wyrażenie  $[p \wedge (q \Rightarrow r)] \iff [(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)]$  jest tautologią.

(b) Przypominam, że jeśli zdania

$$q_1 \Rightarrow p_1, \dots, q_n \Rightarrow p_n \text{ i } \sim (p_1 \vee \dots \vee p_n)$$

są prawdziwe to  $q_1 \Rightarrow p_1, \dots, q_n \Rightarrow p_n$  nazywamy zamkniętym układem twierdzeń. Podać przykład własnego zamkniętego układu twierdzeń, w którym  $n \geq 3$ .

2.

(Efekt 1) potrafi formułować zdania i formy zdaniowe w języku formalnym i oceniać ich prawdziwość

(a) Czy zdanie

$$\forall A \subseteq \mathbb{R} \forall a \in A \exists b \in A \quad a + b = 0$$

jest prawdziwe? Odpowiedź uzasadnić.

(b) Wstawić jeden ze znaków  $\Rightarrow, \Leftarrow$  w miejsce kropek tak aby otrzymać tautologię i uzasadnić dlaczego nie można wstawić drugiego:

$$[\forall x \quad \Phi(x) \vee \Psi(x)] \dots\dots\dots [(\forall x \quad \Phi(x)) \vee (\forall x \quad \Psi(x))]$$

3.

(Efekt 2) posługuje się pojęciami teorii mnogości, potrafi wykonywać działania na zbiorach

Dla zbiorów  $A, B$  określamy działanie  $A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

(a) Udowodnić, że  $A \div (B \div C) = (A \div B) \div C$

(b)

1. Pokazać, że dla każdego  $A$  istnieje  $B$  taki, że  $A \div B = \emptyset$ .

2. Jeśli  $A \subseteq B$  to  $A \div B = \dots\dots\dots$

4.

(Efekt 3) posługuje się pojęciem relacji, rozpoznaje typy relacji

(Efekt 4) zna relacje równoważności, umie zastosować relacje równoważności do tworzenia nowych obiektów

W zbiorze  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$  definiujemy relację:

$$x \sim y \iff |x - y| \text{ jest podzielne przez } 4.$$

(a) Narysować graf tej relacji.

(b) Udowodnić, że jest to relacja równoważności.

(c) Wyznaczyć podział na klasy abstrakcji.

- 
- Za każde zadanie można otrzymać od 0 do 10 punktów.
  - Aby zaliczyć efekt trzeba z zadnia lub grupy zadań sprawdzających ten efekt otrzymać przynajmniej 30% punktów, które można za to zadanie (lub grupę zadań) otrzymać.