Orbifolds (título provisional)

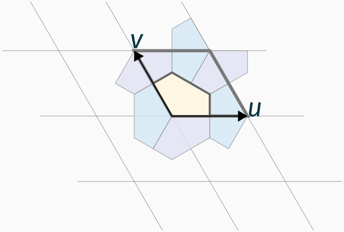
Santiago Pareja Pérez

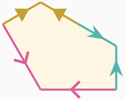
14 de diciembre de 2023

Motivación e idea

¿Por qué orbifolds?

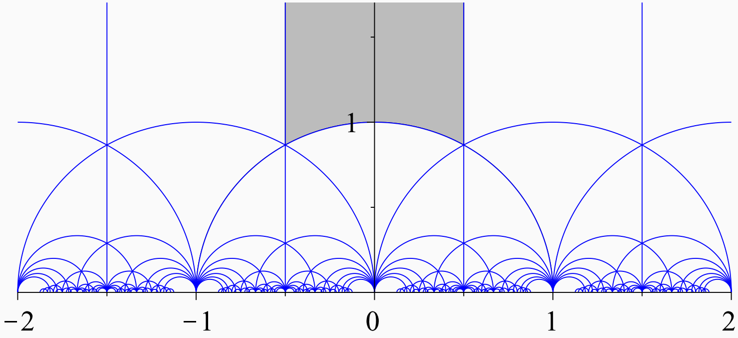
- G grupo, M variedad diferenciable, $G \circlearrowright M$ acción libre y propia $\rightsquigarrow G/M$ hereda estructura de variedad diferenciable.
  ¿Pero qué pasa si la acción tiene puntos fijos?





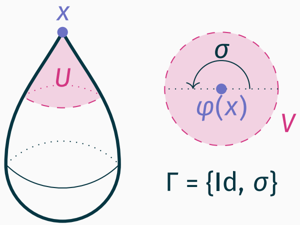
¿Por qué orbifolds?

- Cuando se tratan espacios de móduli, muchas veces aparecen singularidades: por ejemplo, el móduli de las estructuras complejas del toro (acción del grupo modular $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \circlearrowright \mathbb{H}^2$).



¿Qué es un orbifold?

Un ***orbifold*** es un espacio modelado localmente por cocientes $\mathbb{R}^n/\Gamma$ por acciones de grupos finitos.



$\Gamma = \{\mathrm{Id}, \sigma\}$

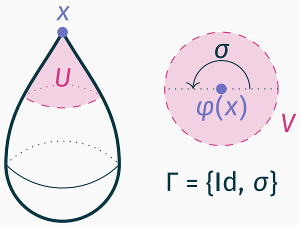
Es un espacio Q (Hausdorff y paracompacto) equipado con

- un recubrimiento $\{U_i\}$ de Q,
- abiertos $V_i \subset \mathbb{R}^n$,
- grupos finitos $\Gamma_i \circlearrowright V_i$ (suave y fielmente), (equiv., $\Gamma_i \subset \mathrm{Difeo}\, V_i$),
- homeomorfismos $\varphi_i : U_i \to V_i/\Gamma_i$.

Deben satisfacer algunas condiciones técnicas de compatibilidad.

¿Qué es un orbifold?

Un ***orbifold*** es un espacio modelado localmente por cocientes $\mathbb{R}^n/\Gamma$ por acciones de grupos finitos.



Es un espacio Q (Hausdorff y paracompacto) equipado con

- un recubrimiento $\{U_i\}$ de Q,
- abiertos $V_i \subset \mathbb{R}^n$,
- grupos finitos $\Gamma_i \circlearrowright V_i$ (suave y fielmente), (equiv., $\Gamma_i \subset \mathrm{Difeo}\, V_i$),
- homeomorfismos $\varphi_i : U_i \to V_i/\Gamma_i$.

Deben satisfacer algunas condiciones técnicas de compatibilidad.

Ejemplos de orbifolds

- Toda variedad (quizás con borde o esquinas) es un orbifold:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n/\{*\}, \quad \mathbb{H}^n = \mathbb{R}^n/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), \quad \mathbb{R}^n_{\geq 0} = \mathbb{R}^n/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n.$$

- Cocientes por una acción de grupo propia (quizás no libre).
- Cosas potencialmente muy raras.

Ejemplos de orbifolds

- Toda variedad (quizás con borde o esquinas) es un orbifold:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n/\{*\}, \quad \mathbb{H}^n = \mathbb{R}^n/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), \quad \mathbb{R}^n_{\geq 0} = \mathbb{R}^n/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n.$$

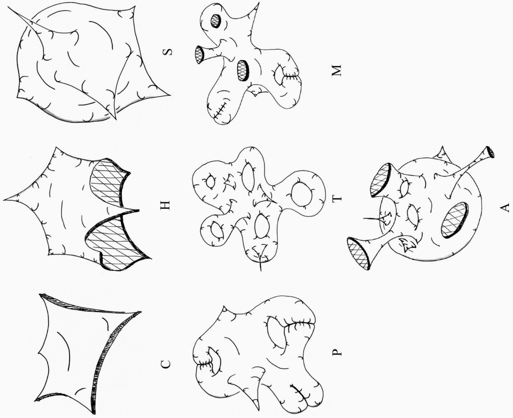
- Cocientes por una acción de grupo propia (quizás no libre).
- Cosas potencialmente muy raras.

Ejemplos de orbifolds

- Toda variedad (quizás con borde o esquinas) es un orbifold:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n/\{*\}, \quad \mathbb{H}^n = \mathbb{R}^n/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), \quad \mathbb{R}^n_{\geq 0} = \mathbb{R}^n/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n.$$

- Cocientes por una acción de grupo propia (quizás no libre).
- Cosas potencialmente muy raras.



Orbi-recubrimientos

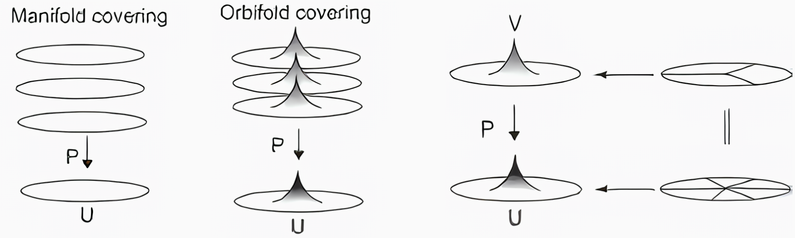
Orbi-recubrimientos

El modelo local para un recubrimiento entre variedades es la identidad:

$$\mathrm{Id} : U \longrightarrow U, \quad \text{con } U \subset \mathbb{R}^n.$$

El modelo local para un ***orbi-recubrimiento*** será:

$$\mathbb{R}^n/\Gamma' \longrightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma, \quad \text{con } \Gamma' < \Gamma \text{ (subgrupo)}.$$



Ejemplo de orbi-recubrimiento

...y cualquier otro recubrimiento ramificado.

Característica de Euler–Poincaré

Una propiedad importante en variedades es la siguiente:

Teorema

Si M' recubre a M con d hojas, entonces $\chi(M') = d \cdot \chi(M)$.

Vamos a definir una característica de Euler–Poincaré para los orbifolds. No coincidirá con la topológica.

Orbi-característica de Euler–Poincaré

Sea Q un orbifold. Le damos estructura de CW-complejo de modo que el grupo local Γ es constante en cada celda.

Definición

La ***orbi-característica de Euler–Poincaré*** es:

$$\chi(Q) = \sum_{\text{celda } c} \frac{(-1)^{\dim(c)}}{|\Gamma_c|} \in \mathbb{Q},$$

donde $|\Gamma_c|$ es el orden del ***grupo de isotropía*** de la celda c.

Se cumple lo que queríamos:

Teorema (Fórmula de Riemann–Hurwitz)

Si Q' orbi-recubre a Q con d hojas, entonces $\chi(Q') = d \cdot \chi(Q)$.

Orbi-característica de Euler–Poincaré

Sea Q un orbifold. Le damos estructura de CW-complejo de modo que el grupo local Γ es constante en cada celda.

Definición

La ***orbi-característica de Euler–Poincaré*** es:

$$\chi(Q) = \sum_{\text{celda } c} \frac{(-1)^{\dim(c)}}{|\Gamma_c|} \in \mathbb{Q},$$

donde $|\Gamma_c|$ es el orden del ***grupo de isotropía*** de la celda c.

Se cumple lo que queríamos:

Teorema (Fórmula de Riemann–Hurwitz)

Si Q' orbi-recubre a Q con d hojas, entonces $\chi(Q') = d \cdot \chi(Q)$.

Clasificación de los orbifolds compactos planos

Clasificación de los orbifolds bidimensionales

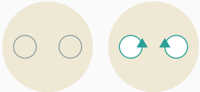
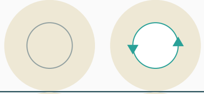
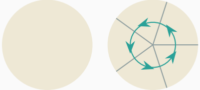
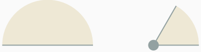
Consideramos orbifolds compactos de dimensión 2.

Análogamente a las superficies, clasificamos los orbifolds en dimensión 2 mediante la característica de Euler–Poincaré:

- $\chi(Q) > 0 \rightsquigarrow$ elíptico;
- $\chi(Q) = 0 \rightsquigarrow$ plano/parabólico;
- $\chi(Q) < 0 \rightsquigarrow$ hiperbólico.

Nosotros nos centraremos en los planos.

La tienda de orbifolds

Accesorio	Foto	Precio (€)	Identificador
Asa		2	$\circ$
Espejo		1	$*$
Boina (cross-cap)		1	$\times$
Cono (orden n)		$\frac{n-1}{n}$	$n \cdots *$
Gajo (orden n)		$\frac{n-1}{2n}$	$* \cdots n$

NOTA AL CONSUMIDOR: Para instalar un gajo necesitas un espejo.

La tienda de orbifolds (realidad)

Accesorio	€	Not.
Asa	2	$\circ$
Espejo	1	$*$
Boina	1	$\times$
Cono	$\frac{n-1}{n}$	$n \cdots *$
Gajo	$\frac{n-1}{2n}$	$* \cdots n$

En realidad, el «precio» es la característica de E–P disfrazada:

$$\begin{aligned}\chi(Q) &= 2 - \text{Euros} \\ &= 2 - \left(2g + b + K + \sum_{\text{conos}} \frac{n-1}{n} + \sum_{\text{gajos}} \frac{n-1}{2n}\right).\end{aligned}$$

Un orbifold compacto cuesta 2€ si y solo si es plano ($\chi(Q) = 0$).
Con 2€ puedes comprar un asa, o dos espejos, o un espejo y dos conos de orden 2, o un espejo y 3 gajos de orden 3…

¿Qué orbifolds cuestan 2€?

Accesorio	€	Not.
Asa	2	$\circ$
Espejo	1	$*$
Boina	1	$\times$
Cono	$\frac{n-1}{n}$	$n \cdots *$
Gajo	$\frac{n-1}{2n}$	$* \cdots n$

Hay 17 posibilidades. Luego las veremos con calma.

Cada una de las características de la tabla anterior corresponde a una transformación euclídea del plano.

Teorema (Teorema mágico de Conway)

Un orbifold compacto 2D cuesta 2€ si y solo si es un cociente $\mathbb{R}^2/\Gamma$, para Γ un ***grupo cristalográfico plano*** *(wallpaper group).*

¿Qué orbifolds cuestan 2€?

Accesorio	€	Not.	Transformación
Asa	2	$\circ$	Traslación
Espejo	1	$*$	Reflexión
Boina	1	$\times$	Reflexión con deslizamiento
Cono	$\frac{n-1}{n}$	$n \cdots *$	Rotación (en el interior, cíclico $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)
Gajo	$\frac{n-1}{2n}$	$* \cdots n$	Rotación (en el borde, diédrico D_n)

Hay 17 posibilidades. Luego las veremos con calma.

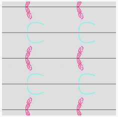
Cada una de las características de la tabla anterior corresponde a una transformación euclídea del plano.

Teorema (Teorema mágico de Conway)

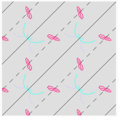
Un orbifold compacto 2D cuesta 2€ si y solo si es un cociente $\mathbb{R}^2/\Gamma$, para Γ un ***grupo cristalográfico plano*** *(wallpaper group).*

Los 17 grupos cristalográficos planos

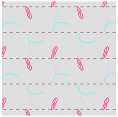
∘



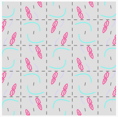
**



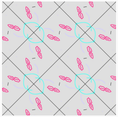
*×



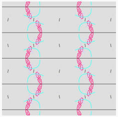
××



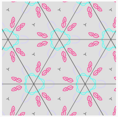
22×



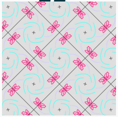
2*22



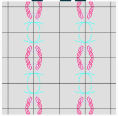
22*



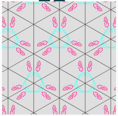
3*3



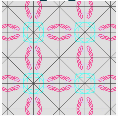
4*2



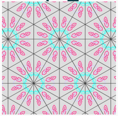
*2222



*333



*442



*632

2222

333

442

632

¡Gracias por vuestra atención!

Anexo

Origen del nombre

This terminology should not be blamed on me. It was obtained by a democratic process in my course of 1976–77.

An orbifold is something with many folds; unfortunately, the word “manifold” already has a different definition.

I tried “foldamani”, which was quickly displaced by the suggestion of “manifolded”.

After two months of patiently saying “no, not a manifold, a manifol*dead*”, we held a vote, and “orbifold” won.

—William P. Thurston (1979). **«The Geometry And Topology Of Three-Manifolds».** sec. 13.2

Origen del nombre

This terminology should not be blamed on me. It was obtained by a democratic process in my course of 1976–77.

An orbifold is something with many folds; unfortunately, the word "manifold" already has a different definition.

I tried "foldamani", which was quickly displaced by the suggestion of "manifolded".

After two months of patiently saying "no, not a manifold, a manifol*dead*", we held a vote, and "orbifold" won.

—William P. Thurston (1979). **«The Geometry And Topology Of Three-Manifolds».** sec. 13.2

Origen del nombre

> This terminology should not be blamed on me. It was obtained by a democratic process in my course of 1976–77.
>
> An orbifold is something with many folds; unfortunately, the word “manifold” already has a different definition.
>
> I tried “foldamani”, which was quickly displaced by the suggestion of “manifolded”.
>
> After two months of patiently saying “no, not a manifold, a manifol*dead*”, we held a vote, and “orbifold” won.
>
> —William P. Thurston (1979). **«The Geometry And Topology Of Three-Manifolds».** sec. 13.2

Origen del nombre (2)

> Near the beginning of his graduate course in 1976, Bill Thurston wanted to introduce a word to replace Satake's "V-manifold" [...]
> So Bill said we would have an election after people made various suggestions for a new name for this concept. Chuck Giffen suggested "origam", Dennis Sullivan "spatial dollop" and Bill Browder "orbifold". [...]
> After the next round of voting "orbifold" and the other name were to be eliminated. At this point, I spoke up and said something like "Wait you can't eliminate orbifold because the other two names are ridiculous." So "orbifold" was left on the list. After my impassioned speech, it won easily in the next round of voting.
>
> —Michael W. Davis (2011). **«Lectures on Orbifolds and Reflection Groups».** Págs. 5-6

Superficies planas

Accesorio	€	Not.	Transformación
Asa	2	$\circ$	Traslación
Espejo	1	$*$	Reflexión
Boina	1	$\times$	Reflexión con deslizamiento
Cono	$\frac{n-1}{n}$	$n \cdots *$	Rotación (en el interior, cíclico $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)
Gajo	$\frac{n-1}{2n}$	$* \cdots n$	Rotación (en el borde, diédrico D_n)

Empezamos por los más aburridos: las superficies.

- El toro $\circ$.
- El cilindro (con borde) $**$.
- La banda de Möbius (con borde) $*\times$.
- La botella de Klein $\times\times$.
- El plano proyectivo (con dos conos) $22\times$.

Discos topológicos planos

Accesorio	€	Not.	Transformación
Asa	2	$\circ$	Traslación
Espejo	1	$*$	Reflexión
Boina	1	$\times$	Reflexión con deslizamiento
Cono	$\frac{n-1}{n}$	$n \cdots *$	Rotación (en el interior, cíclico $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)
Gajo	$\frac{n-1}{2n}$	$* \cdots n$	Rotación (en el borde, diédrico D_n)

Saquitos o gorros:

- Triángulo dirómbico $2{*}22$ (me he quedado sin nombres).
- Media almohada $22{*}$.
- Gorrito 45° $3{*}3$.
- Gorrito agudo $4{*}2$.

Discos topológicos todavía más planos

Accesorio	€	Not.	Transformación
Asa	2	$\circ$	Traslación
Espejo	1	$*$	Reflexión
Boina	1	$\times$	Reflexión con deslizamiento
Cono	$\frac{n-1}{n}$	$n \cdots *$	Rotación (en el interior, cíclico $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)
Gajo	$\frac{n-1}{2n}$	$* \cdots n$	Rotación (en el borde, diédrico D_n)

Polígonos planos:

- Cuadrado $*2222$.
- Triángulo equilátero $*333$.
- Triángulo isósceles $*442$.
- Triángulo rectángulo $*632$.

Esferas topológicas

Accesorio	€	Not.	Transformación
Asa	2	$\circ$	Traslación
Espejo	1	$*$	Reflexión
Boina	1	$\times$	Reflexión con deslizamiento
Cono	$\frac{n-1}{n}$	$n \cdots *$	Rotación (en el interior, cíclico $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)
Gajo	$\frac{n-1}{2n}$	$* \cdots n$	Rotación (en el borde, diédrico D_n)

No tienen espejos/borde $*$.

Son versiones mullidas de las cuatro anteriores:

- Almohada cuadrada 2222.
- Almohada triangular equilátera 333.
- Almohada triángular isósceles 442.
- Almohada triangular rectángula 632.