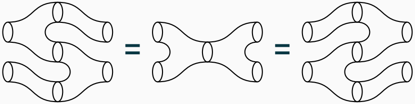
Teorías topológicas de campos cuánticos:

Pantalones, álgebras de Frobenius y el Lema del Zorro

Microcharla — ENEM 2024

Santiago Pareja Pérez

24 de julio de 2024



Cobordismos y TQFTs

Cobordismos

- Sean M y N dos $(n-1)$-variedades cerradas y orientadas.
  (Para $n=2$, son uniones finitas de circunferencias o el vacío).
- Un ***cobordismo*** $B\colon M \to N$ es una n-variedad con borde equipada con un difeomorfismo $\partial B \cong \overline{M} \sqcup N$.

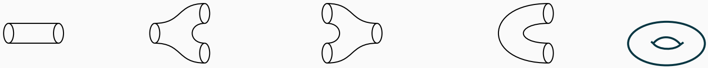
  M es borde de entrada y N es borde de salida.

$\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ $\quad$ $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1$ $\quad$ $\mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ $\quad$ $\varnothing \to \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1$ $\quad$ $\varnothing \to \varnothing$

$\bigsqcup_6 \mathbb{S}^1 \to \bigsqcup_6 \mathbb{S}^1$

Cobordismos

- Sean M y N dos $(n-1)$-variedades cerradas y orientadas.
  (Para $n = 2$, son uniones finitas de circunferencias o el vacío).
- Un ***cobordismo*** $B : M \to N$ es una n-variedad con borde equipada con un difeomorfismo $\partial B \cong \overline{M} \sqcup N$.
  M es borde de entrada y N es borde de salida.

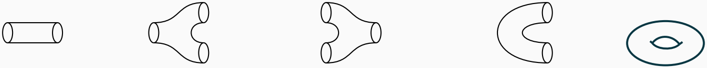


$\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ $\quad$ $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1$ $\quad$ $\mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ $\quad$ $\varnothing \to \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1$ $\quad$ $\varnothing \to \varnothing$

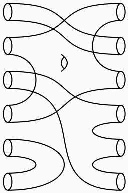
$\bigsqcup_6 \mathbb{S}^1 \to \bigsqcup_6 \mathbb{S}^1$

Cobordismos

- Sean M y N dos $(n-1)$-variedades cerradas y orientadas.
  (Para $n = 2$, son uniones finitas de circunferencias o el vacío).
- Un ***cobordismo*** $B\colon M \to N$ es una n-variedad con borde equipada con un difeomorfismo $\partial B \cong \overline{M} \sqcup N$.
  M es borde de entrada y N es borde de salida.



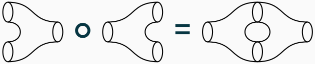
$\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ $\quad$ $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1$ $\quad$ $\mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ $\quad$ $\varnothing \to \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1$ $\quad$ $\varnothing \to \varnothing$



$\bigsqcup_6 \mathbb{S}^1 \to \bigsqcup_6 \mathbb{S}^1$

Pegando, uniendo y girando

Podemos componer cobordismos pegando el borde común:



$$\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1.$$

Los cilindros $M \times [0,1]$ se comportan como identidades (salvo difeo).

También podemos unir cobordismos:

$$\mathbb{S}^1 \sqcup (\mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1) \to (\mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1) \sqcup \mathbb{S}^1.$$

La variedad vacía $\varnothing$ se comporta como unidad: $M \sqcup \varnothing \equiv M$.

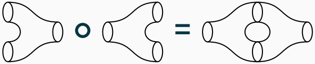
Existen giros intercambiando el orden de dos variedades:

$$M \sqcup N \to N \sqcup M.$$

Los n-cobordismos forman una categoría monoidal simétrica.

Pegando, uniendo y girando

Podemos componer cobordismos pegando el borde común:



$$\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1.$$

Los cilindros $M \times [0,1]$ se comportan como identidades (salvo difeo).

También podemos unir cobordismos:

$$\mathbb{S}^1 \sqcup (\mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1) \to (\mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1) \sqcup \mathbb{S}^1.$$

La variedad vacía $\varnothing$ se comporta como unidad: $M \sqcup \varnothing \equiv M$.

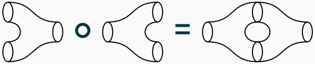
Existen giros intercambiando el orden de dos variedades:

$$M \sqcup N \to N \sqcup M.$$

Los n-cobordismos forman una categoría monoidal simétrica.

Pegando, uniendo y girando

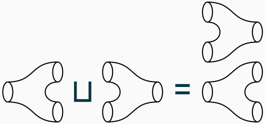
Podemos componer cobordismos pegando el borde común:



$$\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1.$$

Los cilindros $M \times [0,1]$ se comportan como identidades (salvo difeo).

También podemos unir cobordismos:



$$\mathbb{S}^1 \sqcup (\mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1) \to (\mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1) \sqcup \mathbb{S}^1.$$

La variedad vacía $\varnothing$ se comporta como unidad: $M \sqcup \varnothing \equiv M$.

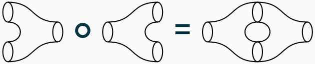
Existen giros intercambiando el orden de dos variedades:

$$M \sqcup N \to N \sqcup M.$$

Los n-cobordismos forman una categoría monoidal simétrica.

Pegando, uniendo y girando

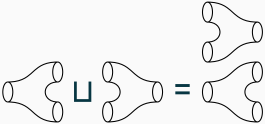
Podemos componer cobordismos pegando el borde común:



$\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1.$

Los cilindros $M \times [0, 1]$ se comportan como identidades (salvo difeo).

También podemos unir cobordismos:



$\mathbb{S}^1 \sqcup (\mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1) \to (\mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1) \sqcup \mathbb{S}^1.$

La variedad vacía $\varnothing$ se comporta como unidad: $M \sqcup \varnothing \equiv M$.

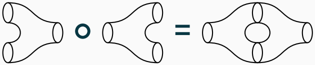
Existen giros intercambiando el orden de dos variedades:

$M \sqcup N \to N \sqcup M.$

Los n-cobordismos forman una categoría monoidal simétrica.

Pegando, uniendo y girando

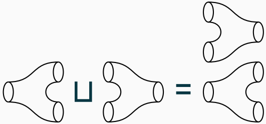
Podemos componer cobordismos pegando el borde común:



$$\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1.$$

Los cilindros $M \times [0, 1]$ se comportan como identidades (salvo difeo).

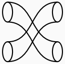
También podemos unir cobordismos:



$$\mathbb{S}^1 \sqcup (\mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1) \to (\mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1) \sqcup \mathbb{S}^1.$$

La variedad vacía $\varnothing$ se comporta como unidad: $M \sqcup \varnothing \equiv M$.

Existen giros intercambiando el orden de dos variedades:

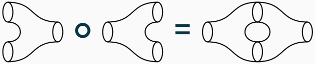


$$M \sqcup N \to N \sqcup M.$$

Los n-cobordismos forman una categoría monoidal simétrica.

Pegando, uniendo y girando

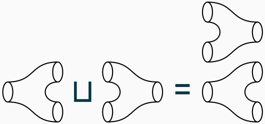
Podemos componer cobordismos pegando el borde común:



$$\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1.$$

Los cilindros $M \times [0,1]$ se comportan como identidades (salvo difeo).

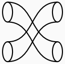
También podemos unir cobordismos:



$$\mathbb{S}^1 \sqcup (\mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1) \to (\mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1) \sqcup \mathbb{S}^1.$$

La variedad vacía $\varnothing$ se comporta como unidad: $M \sqcup \varnothing \equiv M$.

Existen giros intercambiando el orden de dos variedades:



$$M \sqcup N \to N \sqcup M.$$

Los n-cobordismos forman una categoría monoidal simétrica.

Teorías topológicas de campos cuánticos, muy rápido

Una ***TQFT*** asigna:

- «Espacio» M $\rightsquigarrow$ espacio vectorial de estados V.
- «Espacio-tiempo»  $\rightsquigarrow$ operador de evolución $V \otimes V \to V$.

Debe satisfacer ciertos axiomas.

No importa la métrica, solo la topología del espacio: a dos cobordismos difeomorfos se les asigna lo mismo.

Teorías topológicas de campos cuánticos, muy rápido

Una ***TQFT*** asigna:

- «Espacio» M $\rightsquigarrow$ espacio vectorial de estados V.
- «Espacio-tiempo»  $\rightsquigarrow$ operador de evolución $V \otimes V \to V$.

Debe satisfacer ciertos axiomas.

No importa la métrica, solo la topología del espacio: a dos cobordismos difeomorfos se les asigna lo mismo.

Teorías topológicas de campos cuánticos, algo más lento

Una ***TQFT*** es una regla $Z\colon \mathbf{Cob}_n \to \mathbf{Vect}_{\Bbbk}$ que asigna

- $(n-1)$-variedad cerrada M $\rightsquigarrow$ $\Bbbk$-espacio vectorial $Z(M)$.
- n-cobordismo $B\colon M \to N$ $\rightsquigarrow$ función $\Bbbk$-lineal $Z(B)\colon Z(M) \to Z(N)$.

De acuerdo a las siguientes reglas.

- Cobordismos difeomorfos comparten imagen: $B \cong B' \rightsquigarrow Z(B) = Z(B')$.
- Los cilindros $M \times [0,1]$ van a las identidades: $Z(\;) = \mathrm{id}_{Z(\mathbb{S}^1)}$.
- Pegar cobordismos es componer funciones: $Z(\;) = Z(\;) \circ Z(\;)$.

- Unión disjunta es producto tensorial: $Z\left(\;\right) = Z(\;) \otimes Z(\;)$.
- La variedad vacía va al cuerpo base: $Z(\varnothing) = \Bbbk$.

- Los intercambian el orden de los factores: $Z(\;)\colon m \otimes n \mapsto n \otimes m$.

Funtor monoidal simétrico.

Teorías topológicas de campos cuánticos, algo más lento

Una ***TQFT*** es una regla $Z\colon \mathbf{Cob}_n \to \mathbf{Vect}_{\Bbbk}$ que asigna

- $(n-1)$-variedad cerrada $M \rightsquigarrow \Bbbk$-espacio vectorial $Z(M)$.
- n-cobordismo $B\colon M \to N \rightsquigarrow$ función $\Bbbk$-lineal $Z(B)\colon Z(M) \to Z(N)$.

De acuerdo a las siguientes reglas.

- Cobordismos difeomorfos comparten imagen: $B \cong B' \rightsquigarrow Z(B) = Z(B')$.
- Los cilindros $M \times [0,1]$ van a las identidades: $Z($  $) = \mathrm{id}_{Z(\mathbb{S}^1)}$.
- Pegar cobordismos es componer funciones: $Z($  $) = Z($  $) \circ Z($  $)$.

- Unión disjunta es producto tensorial: $Z\Big($ $\Big) = Z($ $) \otimes Z($ $)$.
- La variedad vacía va al cuerpo base: $Z(\varnothing) = \Bbbk$.

- Los intercambian el orden de los factores: $Z($ $)\colon m \otimes n \mapsto n \otimes m$.

Funtor monoidal simétrico.

Teorías topológicas de campos cuánticos, algo más lento

Una ***TQFT*** es una regla $Z\colon \mathbf{Cob}_n \to \mathbf{Vect}_{\Bbbk}$ que asigna

- $(n-1)$-variedad cerrada M $\rightsquigarrow$ $\Bbbk$-espacio vectorial $Z(M)$.
- n-cobordismo $B\colon M \to N$ $\rightsquigarrow$ función $\Bbbk$-lineal $Z(B)\colon Z(M) \to Z(N)$.

De acuerdo a las siguientes reglas.

- Cobordismos difeomorfos comparten imagen: $B \cong B' \rightsquigarrow Z(B) = Z(B')$.
- Los cilindros $M \times [0,1]$ van a las identidades: $Z($  $) = \mathrm{id}_{Z(\mathbb{S}^1)}$.
- Pegar cobordismos es componer funciones: $Z($  $) = Z($  $) \circ Z($  $)$.

- Unión disjunta es producto tensorial: $Z\Big($ $\Big) = Z($ $) \otimes Z($ $)$.
- La variedad vacía va al cuerpo base: $Z(\varnothing) = \Bbbk$.

- Los intercambian el orden de los factores: $Z($ $)\colon m \otimes n \mapsto n \otimes m$.

Funtor monoidal simétrico.

Teorías topológicas de campos cuánticos, algo más lento

Una ***TQFT*** es una regla $Z\colon \mathbf{Cob}_n \to \mathbf{Vect}_{\Bbbk}$ que asigna

- $(n-1)$-variedad cerrada $M \rightsquigarrow$ $\Bbbk$-espacio vectorial $Z(M)$.
- n-cobordismo $B\colon M \to N \rightsquigarrow$ función $\Bbbk$-lineal $Z(B)\colon Z(M) \to Z(N)$.

De acuerdo a las siguientes reglas.

- Cobordismos difeomorfos comparten imagen: $B \cong B' \rightsquigarrow Z(B) = Z(B')$.
- Los cilindros $M \times [0,1]$ van a las identidades: $Z($  $) = \mathrm{id}_{Z(\mathbb{S}^1)}$.
- Pegar cobordismos es componer funciones: $Z($  $) = Z($  $) \circ Z($  $)$.

- Unión disjunta es producto tensorial: $Z\Big($  $\Big) = Z($  $) \otimes Z($  $)$.
- La variedad vacía va al cuerpo base: $Z(\varnothing) = \Bbbk$.

- Los intercambian el orden de los factores: $Z($ $)\colon m \otimes n \mapsto n \otimes m$.

Funtor monoidal simétrico.

Teorías topológicas de campos cuánticos, algo más lento

Una ***TQFT*** es una regla $Z\colon \mathbf{Cob}_n \to \mathbf{Vect}_{\Bbbk}$ que asigna

- $(n-1)$-variedad cerrada $M \rightsquigarrow \Bbbk$-espacio vectorial $Z(M)$.
- n-cobordismo $B\colon M \to N \rightsquigarrow$ función $\Bbbk$-lineal $Z(B)\colon Z(M) \to Z(N)$.

De acuerdo a las siguientes reglas.

- Cobordismos difeomorfos comparten imagen: $B \cong B' \rightsquigarrow Z(B) = Z(B')$.
- Los cilindros $M \times [0,1]$ van a las identidades: $Z(\ ) = \mathrm{id}_{Z(\mathbb{S}^1)}$.
- Pegar cobordismos es componer funciones: $Z(\ ) = Z(\ ) \circ Z(\ )$.

- Unión disjunta es producto tensorial: $Z\left(\ \right) = Z(\ ) \otimes Z(\ )$.
- La variedad vacía va al cuerpo base: $Z(\varnothing) = \Bbbk$.

- Los intercambian el orden de los factores: $Z(\ )\colon m \otimes n \mapsto n \otimes m$.

Funtor monoidal simétrico.

Teorías topológicas de campos cuánticos, algo más lento

Una ***TQFT*** es una regla $Z\colon \mathbf{Cob}_n \to \mathbf{Vect}_{\Bbbk}$ que asigna

- $(n-1)$-variedad cerrada $M \rightsquigarrow \Bbbk$-espacio vectorial $Z(M)$.
- n-cobordismo $B\colon M \to N \rightsquigarrow$ función $\Bbbk$-lineal $Z(B)\colon Z(M) \to Z(N)$.

De acuerdo a las siguientes reglas.

- Cobordismos difeomorfos comparten imagen: $B \cong B' \rightsquigarrow Z(B) = Z(B')$.
- Los cilindros $M \times [0,1]$ van a las identidades: $Z(\ ) = \mathrm{id}_{Z(\mathbb{S}^1)}$.
- Pegar cobordismos es componer funciones: $Z(\ ) = Z(\ ) \circ Z(\ )$.

- Unión disjunta es producto tensorial: $Z\left(\ \right) = Z(\ ) \otimes Z(\ )$.
- La variedad vacía va al cuerpo base: $Z(\varnothing) = \Bbbk$.

- Los intercambian el orden de los factores: $Z(\ )\colon m \otimes n \mapsto n \otimes m$.

Funtor monoidal simétrico.

Teorías topológicas de campos cuánticos, algo más lento

Una ***TQFT*** es una regla $Z\colon \mathbf{Cob}_n \to \mathbf{Vect}_{\Bbbk}$ que asigna

- $(n-1)$-variedad cerrada $M \rightsquigarrow$ $\Bbbk$-espacio vectorial $Z(M)$.
- n-cobordismo $B\colon M \to N \rightsquigarrow$ función $\Bbbk$-lineal $Z(B)\colon Z(M) \to Z(N)$.

De acuerdo a las siguientes reglas.

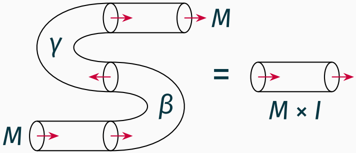
- Cobordismos difeomorfos comparten imagen: $B \cong B' \rightsquigarrow Z(B) = Z(B')$.
- Los cilindros $M \times [0,1]$ van a las identidades: $Z($$) = \mathrm{id}_{Z(\mathbb{S}^1)}$.
- Pegar cobordismos es componer funciones: $Z($$) = Z($$) \circ Z($$)$.

- Unión disjunta es producto tensorial: $Z\Big($$\Big) = Z($$) \otimes Z($$)$.
- La variedad vacía va al cuerpo base: $Z(\varnothing) = \Bbbk$.

- Los  intercambian el orden de los factores: $Z($$)\colon m \otimes n \mapsto n \otimes m$.

Funtor monoidal simétrico.

El Lema del Zorro: descomponiendo cilindros



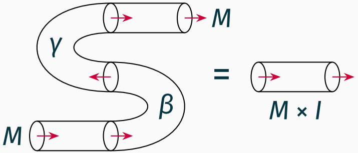
$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, equal] & (M \sqcup \overline{M}) \sqcup M \arrow[r, "\beta \sqcup \mathrm{id}"] & \varnothing \sqcup M \arrow[d, equal] \\ M \sqcup \varnothing \arrow[r, "\mathrm{id} \sqcup \gamma"'] & M \sqcup (\overline{M} \sqcup M) \arrow[u, phantom, "\cong" sloped] & M \end{tikzcd} \quad = \quad M \times I.$$

Ahora, evaluamos una TQFT Z en este diagrama.
Sean $V \coloneqq Z(M)$ y $W \coloneqq Z(\overline{M})$, y también $\mathrm{ev} \coloneqq Z(\beta)$ y $\mathrm{coev} \coloneqq Z(\gamma)$:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, equal] & (V \otimes W) \otimes V \arrow[r, "\mathrm{ev} \otimes \mathrm{id}"] & \mathbb{k} \otimes V \arrow[d, equal] \\ V \otimes \mathbb{k} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \mathrm{coev}"'] & V \otimes (W \otimes V) \arrow[u, phantom, "\cong" sloped] & V \end{tikzcd} \quad = \quad \mathrm{id}_V.$$

Es decir, $V \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{coev}} V \otimes W \otimes V \xrightarrow{\mathrm{ev} \otimes \mathrm{id}} V$ es $\mathrm{id}_V : V \to V$.

El Lema del Zorro: descomponiendo cilindros

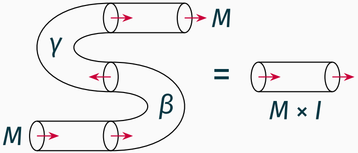


$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, equal] & (M \sqcup \overline{M}) \sqcup M \arrow[r, "\beta\sqcup\mathrm{id}"] \arrow[d, phantom, "\cong"] & \varnothing \sqcup M \arrow[d, equal] \\
M \sqcup \varnothing \arrow[r, "\mathrm{id}\sqcup\gamma"'] & M \sqcup (\overline{M} \sqcup M) & M
\end{tikzcd} \quad = \quad M \times I.$$

Ahora, evaluamos una TQFT Z en este diagrama.
Sean $V \coloneqq Z(M)$ y $W \coloneqq Z(\overline{M})$, y también $\mathrm{ev} \coloneqq Z(\beta)$ y $\mathrm{coev} \coloneqq Z(\gamma)$:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[d, equal] & (V \otimes W) \otimes V \arrow[r, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, phantom, "\cong"] & \Bbbk \otimes V \arrow[d, equal] \\
V \otimes \Bbbk \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{coev}"'] & V \otimes (W \otimes V) & V
\end{tikzcd} \quad = \quad \mathrm{id}_V.$$

Es decir, $V \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mathrm{coev}} V \otimes W \otimes V \xrightarrow{\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}} V$ es $\mathrm{id}_V : V \to V$.



$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, equal] & (M \sqcup \overline{M}) \sqcup M \arrow[r, "\beta\sqcup\mathrm{id}"] \arrow[d, equal] & \varnothing \sqcup M \arrow[d, equal] \\ M \sqcup \varnothing \arrow[r, "\mathrm{id}\sqcup\gamma"'] & M \sqcup (\overline{M} \sqcup M) & M \end{tikzcd} \quad = \quad M \times I.$$

Ahora, evaluamos una TQFT Z en este diagrama.
Sean $V \coloneqq Z(M)$ y $W \coloneqq Z(\overline{M})$, y también ev $\coloneqq Z(\beta)$ y coev $\coloneqq Z(\gamma)$:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, equal] & (V \otimes W) \otimes V \arrow[r, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, equal] & \mathbb{k} \otimes V \arrow[d, equal] \\ V \otimes \mathbb{k} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{coev}"'] & V \otimes (W \otimes V) & V \end{tikzcd} \quad = \quad \mathrm{id}_V.$$

Es decir, $V \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mathrm{coev}} V \otimes W \otimes V \xrightarrow{\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}} V$ es $\mathrm{id}_V \colon V \to V$.

El Lema del Zorro: finito-dimensionalidad

La composición $V \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mathrm{coev}} V \otimes W \otimes V \xrightarrow{\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}} V$ es id_V.
Esto va a forzar que V tenga dimensión finita. Veámoslo.

- $\mathrm{coev}\colon \Bbbk \to W \otimes V$ está determinada por la imagen en 1, digamos

$$\mathrm{coev}(1) =: \sum_{i=1}^{n} w_i \otimes v_i.$$

- Evaluamos la composición $V \to V \otimes W \otimes V \to V$ en un $v \in V$ genérico:

$$v \longmapsto \sum_{i=1}^{n} v \otimes (w_i \otimes v_i) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \mathrm{ev}(v \otimes w_i) \cdot v_i = v.$$

Notar que $\mathrm{ev}(v \otimes w_i) \in \Bbbk$, así que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es base de V. $\square$

El Lema del Zorro: finito-dimensionalidad

La composición $V \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{coev}} V \otimes W \otimes V \xrightarrow{\mathrm{ev} \otimes \mathrm{id}} V$ es id_V.
Esto va a forzar que V tenga dimensión finita. Veámoslo.

- $\mathrm{coev}: \Bbbk \to W \otimes V$ está determinada por la imagen en 1, digamos
$$\mathrm{coev}(1) =: \sum_{i=1}^{n} w_i \otimes v_i.$$
- Evaluamos la composición $V \to V \otimes W \otimes V \to V$ en un $v \in V$ genérico:
$$v \longmapsto \sum_{i=1}^{n} v \otimes (w_i \otimes v_i) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \mathrm{ev}(v \otimes w_i) \cdot v_i = v.$$

Notar que $\mathrm{ev}(v \otimes w_i) \in \Bbbk$, así que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es base de V. $\square$

El Lema del Zorro: finito-dimensionalidad

La composición $V \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mathrm{coev}} V \otimes W \otimes V \xrightarrow{\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}} V$ es id_V.
Esto va a forzar que V tenga dimensión finita. Veámoslo.

- $\mathrm{coev}\colon \mathbb{k} \to W \otimes V$ está determinada por la imagen en 1, digamos

$$\mathrm{coev}(1) =: \sum_{i=1}^{n} w_i \otimes v_i.$$

- Evaluamos la composición $V \to V \otimes W \otimes V \to V$ en un $v \in V$ genérico:

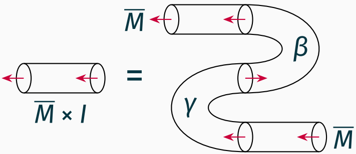
$$v \longmapsto \sum_{i=1}^{n} v \otimes (w_i \otimes v_i) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \mathrm{ev}(v \otimes w_i) \cdot v_i = v.$$

Notar que $\mathrm{ev}(v \otimes w_i) \in \mathbb{k}$, así que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es base de V. $\square$

El Signo del Zorro

Mediante argumentos similares, se identifica $W \equiv V^*$.

Aquí hace falta el diagrama dual (la “Z”):



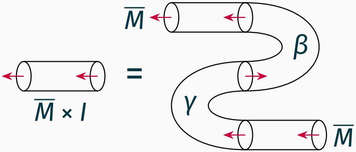
Lema del Zorro

Los espacios vectoriales imagen de una TQFT tienen dim. finita, y $Z(\overline{M}) \equiv Z(M)^*$.

El Signo del Zorro

Mediante argumentos similares, se identifica $W \equiv V^*$.

Aquí hace falta el diagrama dual (la "Z"):



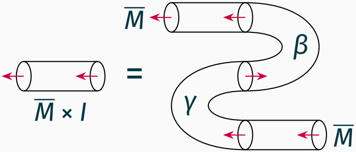
Lema del Zorro

Los espacios vectoriales imagen de una TQFT tienen dim. finita, y $Z(\overline{M}) \equiv Z(M)^*$.

El Signo del Zorro

Mediante argumentos similares, se identifica $W \equiv V^*$.

Aquí hace falta el diagrama dual (la "Z"):



Lema del Zorro

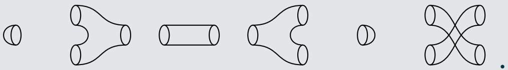
Los espacios vectoriales imagen de una TQFT tienen dim. finita, y $Z(\overline{M}) \equiv Z(M)^*$.

TQFTs 2D y álgebras de Frobenius

Generadores

Teorema

$\mathbf{Cob}_2$ *está generada monoidalmente por los morfismos*



Es decir: todo cobordismo 2D se puede obtener pegando y tomando unión de las seis piezas básicas.

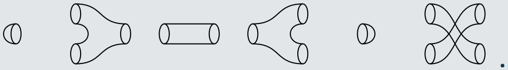
Demostración:
Teoría de Morse.

Función de Morse: $f\colon B \to [0,1]$ suave sin puntos críticos degenerados y sin valores críticos repetidos. (Siempre existen).

Generadores

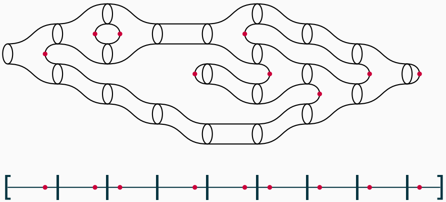
Teorema

$\mathbf{Cob}_2$ *está generada monoidalmente por los morfismos*



Es decir: todo cobordismo 2D se puede obtener pegando y tomando unión de las seis piezas básicas.

Demostración:
Teoría de Morse.



Función de Morse: $f\colon B \to [0,1]$ suave sin puntos críticos degenerados y sin valores críticos repetidos. (Siempre existen).

Relaciones

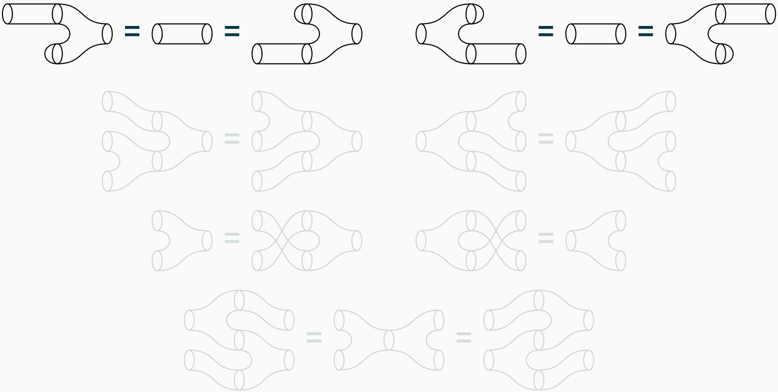
Las siguientes relaciones bastan (ignorando las de y).

Teorema

$\mathbf{Cob}_2$ es equivalente a la categoría monoidal simétrica generada por los morfismos , , , y sujeta a estas relaciones.

Relaciones

Las siguientes relaciones bastan (ignorando las de y).

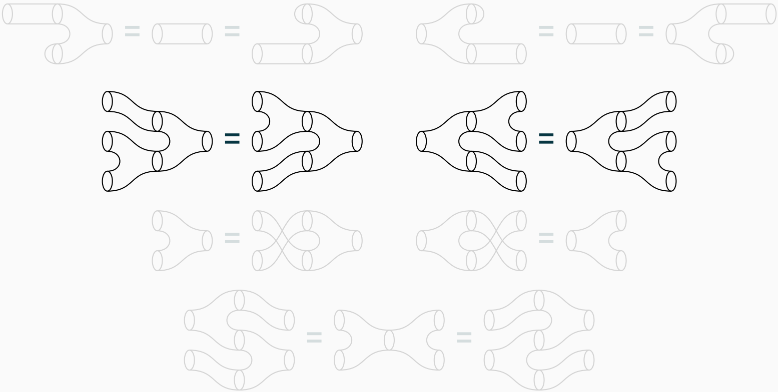


Teorema

***Cob**$_2$ es equivalente a la categoría monoidal simétrica generada por los morfismos , , , y sujeta a estas relaciones.*

Relaciones

Las siguientes relaciones bastan (ignorando las de y).

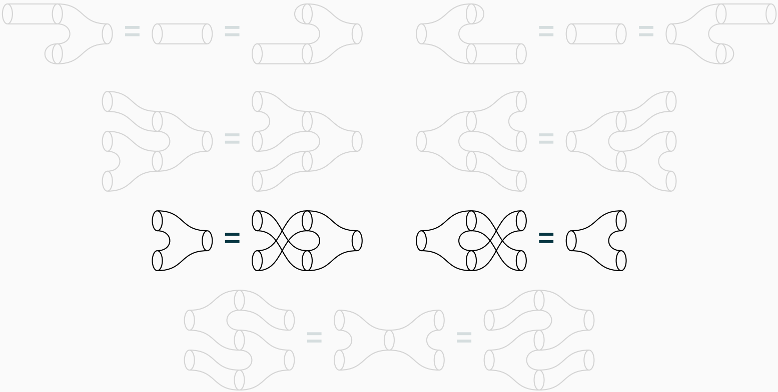


Teorema

$\mathbf{Cob}_2$ es equivalente a la categoría monoidal simétrica generada por los morfismos , , , y sujeta a estas relaciones.

Relaciones

Las siguientes relaciones bastan (ignorando las de y).

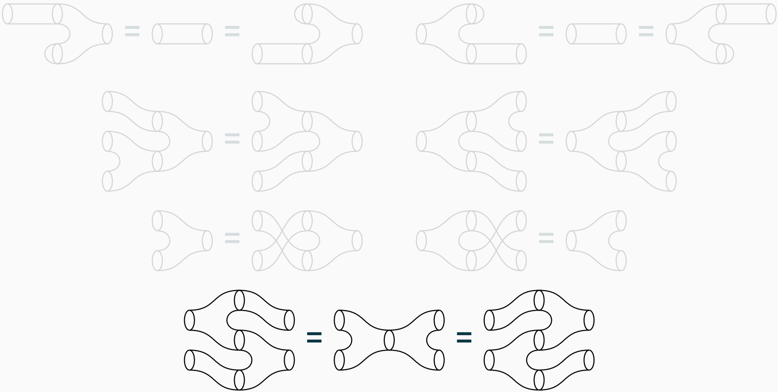


Teorema

Cob$_2$ *es equivalente a la categoría monoidal simétrica generada por los morfismos , , , y sujeta a estas relaciones.*

Relaciones

Las siguientes relaciones bastan (ignorando las de  y ).

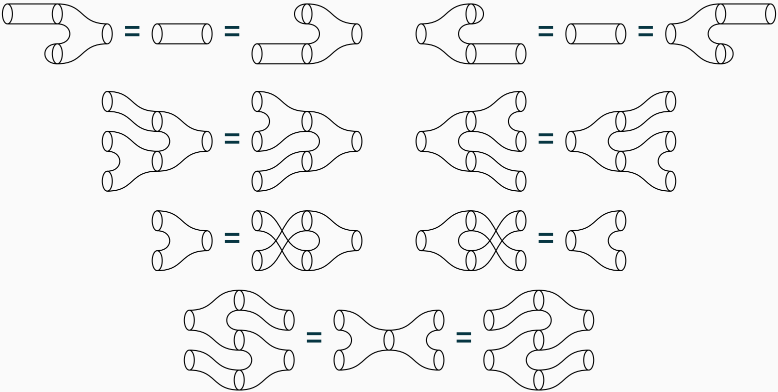


Teorema

$\mathbf{Cob}_2$ es equivalente a la categoría monoidal simétrica generada por los morfismos , , , y sujeta a estas relaciones.

Relaciones

Las siguientes relaciones bastan (ignorando las de y).



Teorema

$\mathbf{Cob}_2$ *es equivalente a la categoría monoidal simétrica generada por los morfismos , , , y sujeta a estas relaciones.*

Álgebras, gráficamente

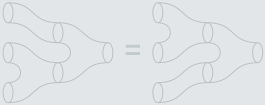
Todas las álgebras serán asociativas y con unidad, pero no necesariamente conmutativas.

Definición

Un ***álgebra*** sobre un cuerpo $\Bbbk$ es un $\Bbbk$-espacio vectorial A equipado con aplicaciones lineales

- multiplicación $\mu \colon A \otimes A \to A$ (dibujada ),
- unidad $\eta \colon \Bbbk \to A$ (dibujada ),

cumpliendo



$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,

$1 \cdot a = a = a \cdot 1.$

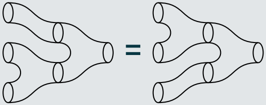
Todas las álgebras serán asociativas y con unidad, pero no necesariamente conmutativas.

Definición

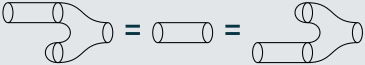
Un ***álgebra*** sobre un cuerpo $\Bbbk$ es un $\Bbbk$-espacio vectorial A equipado con aplicaciones lineales

- multiplicación $\mu \colon A \otimes A \to A$ (dibujada ),
- unidad $\eta \colon \Bbbk \to A$ (dibujada ),

cumpliendo



$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,



$1 \cdot a = a = a \cdot 1.$

Álgebras de Frobenius

Definición

Un ***álgebra de Frobenius*** (A, ε) es una $\Bbbk$-álgebra A equipada con una «traza» lineal $\varepsilon\colon A \to \Bbbk$ cuyo núcleo no contiene ideales no triviales.

Ejemplos:
- Matrices $n \times n$ con la traza $\mathrm{tr}\colon \mathrm{M}_{\Bbbk}(n) \to \Bbbk$.
- Complejos con la parte real $\mathfrak{Re}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$.

Sea (A, ε) un álgebra de Frobenius. Dibujamos ε como .
Definimos el ***pairing*** $\beta\colon A \otimes A \to \Bbbk$ (dibujado) como

$$\beta(x \otimes y) \coloneqq \varepsilon(x \cdot y).$$

El pairing es ***asociativo***:

$$\beta((x \cdot a) \otimes y) = \beta(x \otimes (a \cdot y)).$$

Álgebras de Frobenius

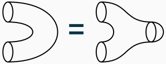
Definición

Un ***álgebra de Frobenius*** (A, ε) es una $\Bbbk$-álgebra A equipada con una «traza» lineal $\varepsilon\colon A \to \Bbbk$ cuyo núcleo no contiene ideales no triviales.

Ejemplos:
- Matrices $n \times n$ con la traza $\mathrm{tr}\colon \mathrm{M}_{\Bbbk}(n) \to \Bbbk$.
- Complejos con la parte real $\mathfrak{Re}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$.

Sea (A, ε) un álgebra de Frobenius. Dibujamos ε como .

Definimos el ***pairing*** $\beta\colon A \otimes A \to \Bbbk$ (dibujado ) como



$$\beta(x \otimes y) \coloneqq \varepsilon(x \cdot y).$$

El pairing es ***asociativo***:

$$\beta((x \cdot a) \otimes y) = \beta(x \otimes (a \cdot y)).$$

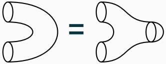
Álgebras de Frobenius

Definición

Un ***álgebra de Frobenius*** (A, ε) es una $\Bbbk$-álgebra A equipada con una «traza» lineal $\varepsilon \colon A \to \Bbbk$ cuyo núcleo no contiene ideales no triviales.

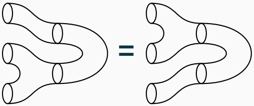
Ejemplos:
- Matrices $n \times n$ con la traza $\mathrm{tr} \colon \mathrm{M}_{\Bbbk}(n) \to \Bbbk$.
- Complejos con la parte real $\mathfrak{Re} \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$.

Sea (A, ε) un álgebra de Frobenius. Dibujamos ε como .
Definimos el ***pairing*** $\beta \colon A \otimes A \to \Bbbk$ (dibujado ) como



$$\beta(x \otimes y) \coloneqq \varepsilon(x \cdot y).$$

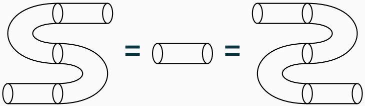
El pairing es ***asociativo***:



$$\beta((x \cdot a) \otimes y) = \beta(x \otimes (a \cdot y)).$$

Álgebras de Frobenius en términos de pairings

La aplicación $\beta =$  es un pairing ***no degenerado***:
existe un ***copairing*** $\gamma\colon \Bbbk \to A \otimes A$ (dibujado ) tal que



(Consecuencia de que $\operatorname{Ker} \varepsilon$ no contenga ideales no triviales).

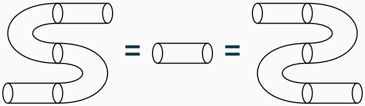
Caracterización

Un álgebra de Frobenius (A, β) es una $\Bbbk$-álgebra A equipada con un pairing $\beta\colon A \otimes A \to \Bbbk$ asociativo y no degenerado.

(Dado β, se define $\varepsilon = \beta(- \otimes 1_A)$ para recuperar la otra definición).

Álgebras de Frobenius en términos de pairings

La aplicación $\beta =$  es un pairing ***no degenerado***: existe un ***copairing*** $\gamma\colon \Bbbk \to A \otimes A$ (dibujado ) tal que



(Consecuencia de que $\operatorname{Ker} \varepsilon$ no contenga ideales no triviales).

Caracterización

Un álgebra de Frobenius (A, β) es una $\Bbbk$-álgebra A equipada con un pairing $\beta\colon A \otimes A \to \Bbbk$ asociativo y no degenerado.

(Dado β, se define $\varepsilon = \beta(- \otimes 1_A)$ para recuperar la otra definición).

Coálgebras

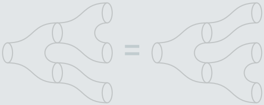
Es el concepto dual a «álgebra».

Definición

Un ***coálgebra*** sobre un cuerpo $\Bbbk$ es un $\Bbbk$-espacio vectorial A equipado con aplicaciones lineales

- comultiplicación $\delta\colon A \to A \otimes A$ (dibujada ),
- counidad $\varepsilon\colon A \to \Bbbk$ (dibujada ),

cumpliendo



(coasociatividad)

(counidad).

Coálgebras

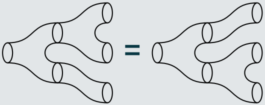
Es el concepto dual a «álgebra».

Definición

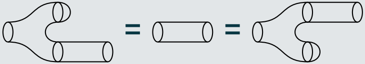
Un ***coálgebra*** sobre un cuerpo $\Bbbk$ es un $\Bbbk$-espacio vectorial A equipado con aplicaciones lineales

- comultiplicación $\delta\colon A \to A \otimes A$ (dibujada ),
- counidad $\varepsilon\colon A \to \Bbbk$ (dibujada ),

cumpliendo



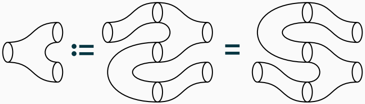
(coasociatividad)



(counidad).

Álgebras de Frobenius en términos de coálgebras

Dada (A, ε) álgebra de Frobenius, definimos la comultiplicación $\delta =$ 



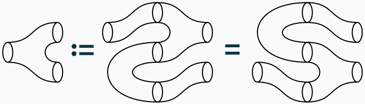
con counidad $\varepsilon =$ .

Caracterización

Un álgebra de Frobenius $(A, \mu, \eta, \delta, \varepsilon)$ es un $\Bbbk$-álgebra (A, μ, η) que también es $\Bbbk$-coálgebra (A, δ, ε), y tal que las dos estructuras satisfacen la ***relación de Frobenius****:*

Álgebras de Frobenius en términos de coálgebras

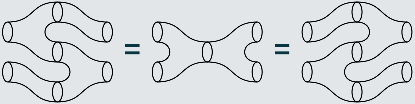
Dada (A, ε) álgebra de Frobenius, definimos la comultiplicación $\delta =$ 



con counidad $\varepsilon =$ .

Caracterización

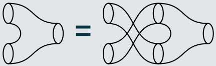
Un álgebra de Frobenius $(A, \mu, \eta, \delta, \varepsilon)$ es un $\Bbbk$-álgebra (A, μ, η) que también es $\Bbbk$-coálgebra (A, δ, ε), y tal que las dos estructuras satisfacen la ***relación de Frobenius****:*



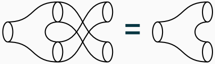
Álgebras de Frobenius conmutativas y simétricas

Definición

Un álgebra de Frobenius se dice ***conmutativa*** si es conmutativa:



Equivalente a que sea coálgebra ***coconmutativa***:



Definición

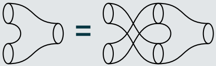
Un álgebra de Frobenius se dice ***simétrica*** si el pairing β es simétrico:

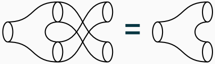
Equivalente a que el copairing γ sea ***simétrico***:

Álgebras de Frobenius conmutativas y simétricas

Definición

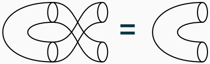
Un álgebra de Frobenius se dice ***conmutativa*** si es conmutativa:



Equivalente a que sea coálgebra ***coconmutativa***: 

Definición

Un álgebra de Frobenius se dice ***simétrica*** si el pairing β es simétrico:

Equivalente a que el copairing γ sea ***simétrico***: 

La correspondencia

Una TQFT 2D Z determina un álgebra de Frobenius conmutativa:

$$\mathbb{S}^1 \xmapsto{Z} A,$$

 $\longmapsto \mu : A \otimes A \to A,$

 $\longmapsto \eta : \Bbbk \to A,$

 $\longmapsto \delta : A \to A \otimes A,$

 $\longmapsto \varepsilon : A \to \Bbbk.$

Y viceversa: un álgebra de Frobenius conmutativa determina una TQFT.

Teorema (folklore)

*Existe una equivalencia natural entre **TQFTs 2D orientadas** y **álgebras de Frobenius conmutativas**, dada por la evaluación*

$Z \longmapsto (Z(\mathbb{S}^1), Z($ $), Z($ $), Z($ $), Z($ $)).$

La correspondencia

Una TQFT 2D Z determina un álgebra de Frobenius conmutativa:

$$\mathbb{S}^1 \overset{Z}{\longmapsto} A,$$

 $\longmapsto \mu\colon A \otimes A \to A,$

 $\longmapsto \eta\colon \mathbb{k} \to A,$

 $\longmapsto \delta\colon A \to A \otimes A,$

 $\longmapsto \varepsilon\colon A \to \mathbb{k}.$

Y viceversa: un álgebra de Frobenius conmutativa determina una TQFT.

Teorema (folklore)

Existe una equivalencia natural entre ***TQFTs 2D orientadas*** *y* ***álgebras de Frobenius conmutativas****, dada por la evaluación*

$Z \longmapsto (Z(\mathbb{S}^1), Z($  $), Z($$), Z($  $), Z($$)).$

Está todo en el (buenísimo) libro de Kock:

Kock, Joachim (2003). *Frobenius Algebras and 2D Topological Quantum Field Theories*. London Mathematical Society Student Texts 59. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. DOI: 10.1017/CBO9780511615443.

...y en mi TFM:

«2D Topological Quantum Field Theories, Frobenius Structures, and Higher Algebra» (2024). TFM. Madrid: Universidad Complutense de Madrid, 2024. DOI: 20.500.14352/105943.

¡Gracias por vuestra atención!