# Haces. ¿Por qué?

Santiago Pareja Pérez

3 de abril de 2024

# Motivación y definición

# El problema de Mittag–Leffler

**Definición**

Sea $X$ una superficie de Riemann y $p \in X$. Una ***parte principal*** en $p$ es la parte negativa de una serie de Laurent finita:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{(z-p)^k}.$$

Es un elemento del cociente $\mathcal{M}_p/\mathcal{O}_p$ (meromorfas/holomorfas).

Dados puntos $\{p_n\} \subset X$ y partes principales $f_n \in \mathcal{M}_{p_n}/\mathcal{O}_{p_n}$,
¿existe una $f \in \mathcal{M}(X)$ con polos $\{p_n\}$ y partes principales $f_n$?

¿Cuándo podemos pegar funciones meromorfas definidas localmente para obtener algo global?

Dos enfoques para caracterizar las obstrucciones:

- Cohomología de Čech.
- Cohomología de Dolbeault.

# El problema de Mittag–Leffler

**Definición**

Sea $X$ una superficie de Riemann y $p \in X$. Una ***parte principal*** en $p$ es la parte negativa de una serie de Laurent finita:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{(z-p)^k}.$$

Es un elemento del cociente $\mathcal{M}_p / \mathcal{O}_p$ (meromorfas/holomorfas).

Dados puntos $\{p_n\} \subset X$ y partes principales $f_n \in \mathcal{M}_{p_n} / \mathcal{O}_{p_n}$, ¿existe una $f \in \mathcal{M}(X)$ con polos $\{p_n\}$ y partes principales $f_n$?

¿Cuándo podemos pegar funciones meromorfas definidas localmente para obtener algo global?

Dos enfoques para caracterizar las obstrucciones:

- Cohomología de Čech.
- Cohomología de Dolbeault.

# El problema de Mittag–Leffler

**Definición**

Sea $X$ una superficie de Riemann y $p \in X$. Una ***parte principal*** en $p$ es la parte negativa de una serie de Laurent finita:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{(z-p)^k}.$$

Es un elemento del cociente $\mathcal{M}_p / \mathcal{O}_p$ (meromorfas/holomorfas).

Dados puntos $\{p_n\} \subset X$ y partes principales $f_n \in \mathcal{M}_{p_n}/\mathcal{O}_{p_n}$, ¿existe una $f \in \mathcal{M}(X)$ con polos $\{p_n\}$ y partes principales $f_n$?

¿Cuándo podemos pegar funciones meromorfas definidas localmente para obtener algo global?

Dos enfoques para caracterizar las obstrucciones:

- Cohomología de Čech.
- Cohomología de Dolbeault.

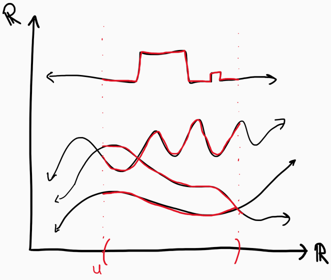
# Motivación

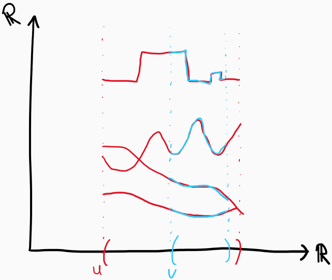
Necesitamos un modo de organizar información local y global.

Y también queremos tener modos de relacionar lo local con lo global:

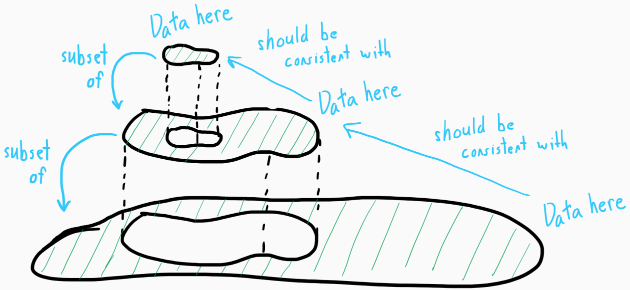
- global → local: información sobre la restricción de datos.
- local → global: axiomas de pegado de datos.

Ejemplo modelo: funciones continuas/diferenciables/meromorfas...



# Idea de haz



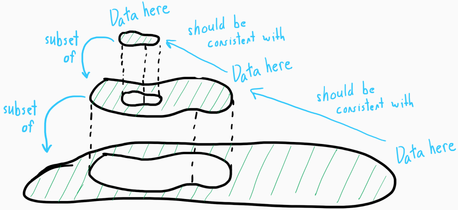

Es una colección de datos subordinada a un orden parcial.

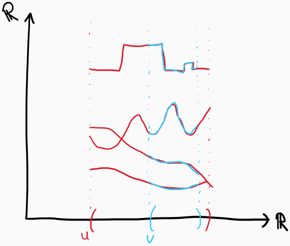
Lo habitual: abiertos de un espacio topológico $X$ ordenados por la inclusión $\subset$, que llamaremos **Open**($X$).

(Se pueden definir sobre grafos, complejos simpliciales y celulares...)

Organizan una cantidad masiva de información. Esto es bueno y malo.

# Datos de un haz




Ejemplo: haces de funciones continuas/diferenciables/meromorfas.

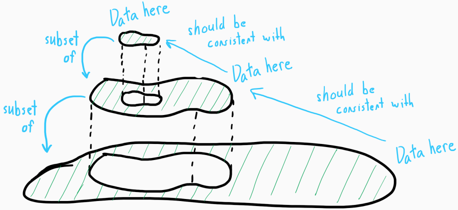
Un haz $\mathcal{F}$ en un e.t. $X$ es una colección de datos:

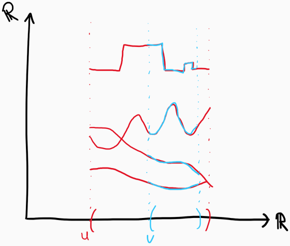
I) Para cada $U \in \mathbf{Open}(X)$, un conjunto de secciones $\mathcal{F}(U) \in \mathbf{Set}$.

II) Para cada $V \subset U$, una aplicación restricción $\rho_{V,U} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$.

Satisfaciendo ciertos axiomas.

# Datos de un haz




Ejemplo: haces de funciones continuas/diferenciables/meromorfas.

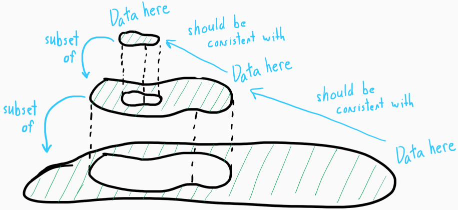
Un haz $\mathcal{F}$ en un e.t. $X$ es una colección de datos:

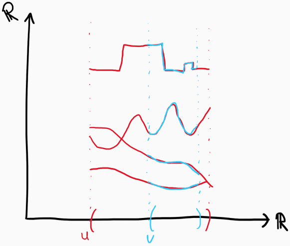
I) Para cada $U \in \mathbf{Open}(X)$, un conjunto de secciones $\mathcal{F}(U) \in \mathbf{Set}$.

II) Para cada $V \subset U$, una aplicación restricción $\rho_{V,U} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$.

Satisfaciendo ciertos axiomas.

# Datos de un haz




Ejemplo: haces de funciones continuas/diferenciables/meromorfas.

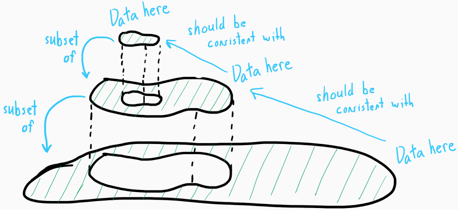
Un haz $\mathcal{F}$ en un e.t. $X$ es una colección de datos:

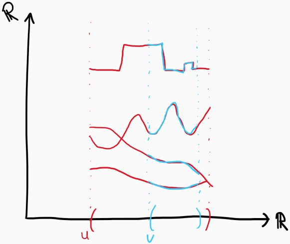
i) Para cada $U \in \mathbf{Open}(X)$, un conjunto de secciones $\mathcal{F}(U) \in \mathbf{Set}$.

ii) Para cada $V \subset U$, una aplicación restricción $\rho_{V,U} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$.

Satisfaciendo ciertos axiomas.

# Datos de un haz




Ejemplo: haces de funciones continuas/diferenciables/meromorfas.

Un haz $\mathcal{F}$ en un e.t. $X$ es una colección de datos:

i) Para cada $U \in \textbf{Open}(X)$, un conjunto de secciones $\mathcal{F}(U) \in \textbf{Set}$.
ii) Para cada $V \subset U$, una aplicación restricción $\rho_{V,U} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$.

Satisfaciendo ciertos axiomas.

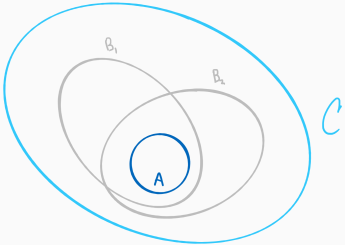
# Restricción de secciones

Axiomas de las restricciones:

i) $\rho_{U,U}$ es la identidad.

ii) No importa el orden en el que restrinjamos:

$W \subset V \subset U \Rightarrow \rho_{W,V} \circ \rho_{V,U} = \rho_{W,U}$.




Por lo tanto, podemos escribir $f|_V := \rho_{V,-}(f)$ sin ambigüedad.

Hasta aquí, es un prehaz: un funtor contravariante **Open**$(X) \to$ **Set**.

Un haz satisface dos condiciones más.

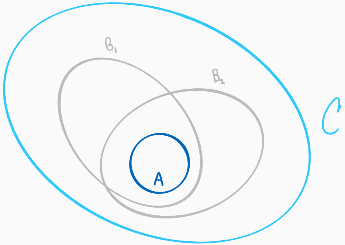
# Restricción de secciones

Axiomas de las restricciones:

I) $\rho_{U,U}$ es la identidad.

II) No importa el orden en el que restrinjamos:

$W \subset V \subset U \Rightarrow \rho_{W,V} \circ \rho_{V,U} = \rho_{W,U}$.




Por lo tanto, podemos escribir $f|_V \coloneqq \rho_{V,-}(f)$ sin ambigüedad.

Hasta aquí, es un funtor contravariante **Open**$(X) \to$ **Set**.

Un haz satisface dos condiciones más.

# De prehaces a haces

Sea $\mathcal{U} \coloneqq \{U_i\}$ un recubrimiento de $U$.

Condición de localidad/identidad:

III) Dos secciones en $U$ que coinciden al restringirlas a cada $U_i$ son la misma.

$$s,\ t \in \mathcal{F}(U) \text{ tales que } s|_{U_i} = t|_{U_i}\ \forall\, U_i \in \mathcal{U} \implies s = t.$$

Condición de pegado:

IV) Dadas secciones en cada $U_i$ compatibles dos a dos, existe una (única) sección en $U$ que restringe a las dadas.

$$s_i \in \mathcal{F}(U_i) \text{ tales que } s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \implies \exists s \in \mathcal{F}(U) \text{ con } s|_{U_i} = s_i.$$

# De prehaces a haces

Sea $\mathcal{U} \coloneqq \{U_i\}$ un recubrimiento de $U$.

Condición de localidad/identidad:

iii) Dos secciones en $U$ que coinciden al restringirlas a cada $U_i$ son la misma.

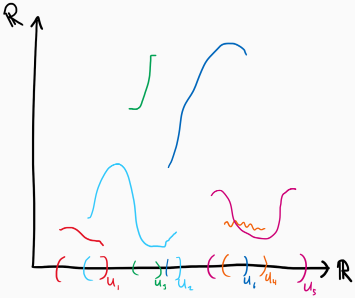
$$s,\ t \in \mathcal{F}(U) \text{ tales que } s|_{U_i} = t|_{U_i}\ \forall\, U_i \in \mathcal{U} \implies s = t.$$

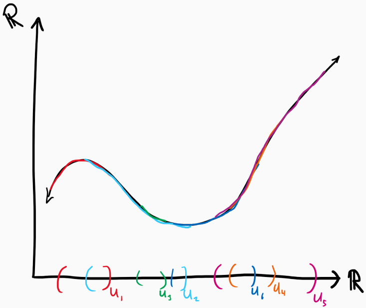
Condición de pegado:

iv) Dadas secciones en cada $U_i$ compatibles dos a dos, existe una (única) sección en $U$ que restringe a las dadas.

$$s_i \in \mathcal{F}(U_i) \text{ tales que } s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \implies \exists s \in \mathcal{F}(U) \text{ con } s|_{U_i} = s_i.$$

# Secciones compatibles



# Haces con valores en otras categorías

Apenas hemos usado propiedades de **Set**. Podemos cambiarla por otra categoría sin problemas.

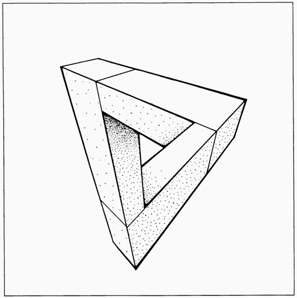
Es interesante el caso de grupos abelianos.

Aquí los haces forman una categoría abeliana $\mathbf{Sh}(X)$: se pueden tomar núcleos y conúcleos, y se puede hablar de sucesiones exactas.

Es el lugar adecuado para una teoría de cohomología.

# Cohomología de Čech

# Sobre la Cohomología de Figuras Imposibles

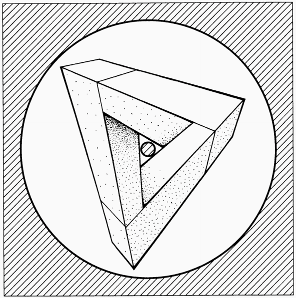


Hay ambigüedad inherente al dibujo: la distancia de cada punto al observador.

$$d_{ij} = \frac{\text{distancia del punto } A_{ij} \in O_i \text{ a } E}{\text{distancia del punto } A_{ji} \in O_j \text{ a } E}$$

Para poder pegar, queremos mover las piezas de modo que los tres ratios $d_{ij}$ sean 1.

¿Existen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tales que $d_{ij} = \lambda_i / \lambda_j$? (No).



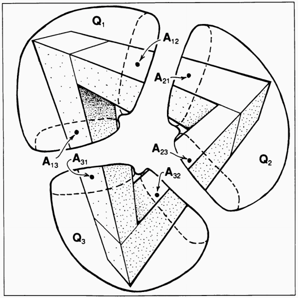
Hay ambigüedad inherente al dibujo: la distancia de cada punto al observador.

$$d_{ij} = \frac{\text{distancia del punto } A_{ij} \in O_i \text{ a } E}{\text{distancia del punto } A_{ji} \in O_j \text{ a } E}$$

Para poder pegar, queremos mover las piezas de modo que los tres ratios $d_{ij}$ sean 1.

¿Existen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tales que $d_{ij} = \lambda_i / \lambda_j$? (No).

## Sobre la Cohomología de Figuras Imposibles

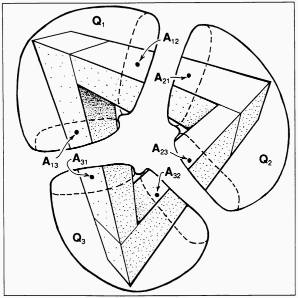



Hay ambigüedad inherente al dibujo: la distancia de cada punto al observador.

$$d_{ij} = \frac{\text{distancia del punto } A_{ij} \in O_i \text{ a } E}{\text{distancia del punto } A_{ji} \in O_j \text{ a } E}$$

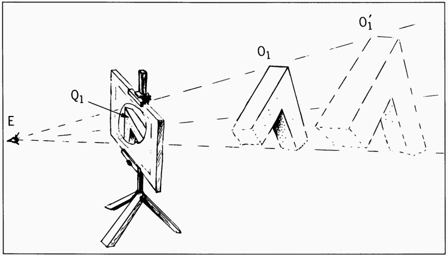
Para poder pegar, queremos mover las piezas de modo que los tres ratios $d_{ij}$ sean 1.

¿Existen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tales que $d_{ij} = \lambda_i / \lambda_j$? (No).




Hay ambigüedad inherente al dibujo: la distancia de cada punto al observador.

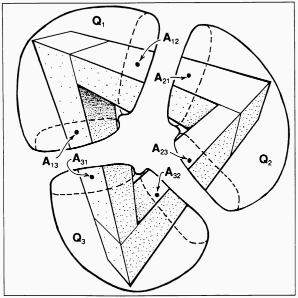
$$d_{ij} = \frac{\text{distancia del punto } A_{ij} \in O_i \text{ a } E}{\text{distancia del punto } A_{ji} \in O_j \text{ a } E}$$




Para poder pegar, queremos mover las piezas de modo que los tres ratios $d_{ij}$ sean 1.

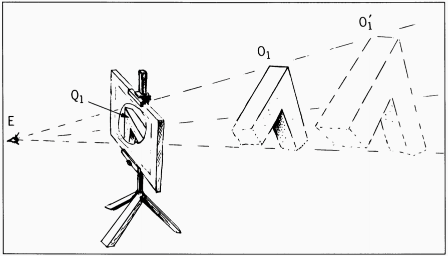
¿Existen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tales que $d_{ij} = \lambda_i / \lambda_j$? (No).

# Sobre la Cohomología de Figuras Imposibles




Hay ambigüedad inherente al dibujo: la distancia de cada punto al observador.

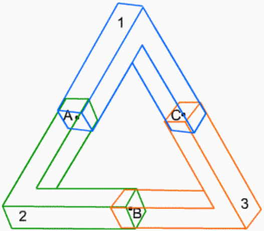
$$d_{ij} = \frac{\text{distancia del punto } A_{ij} \in O_i \text{ a } E}{\text{distancia del punto } A_{ji} \in O_j \text{ a } E}$$

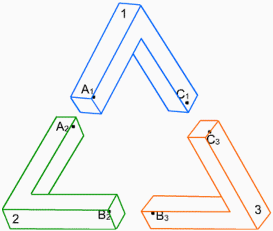



Para poder pegar, queremos mover las piezas de modo que los tres ratios $d_{ij}$ sean 1.

¿Existen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tales que $d_{ij} = \lambda_i / \lambda_j$? (No).

# El triángulo de Penrose es un cociclo en la cohomología de Čech



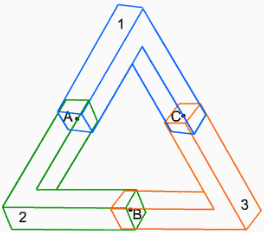



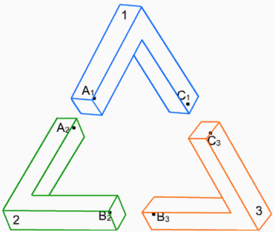

El triángulo de Penrose es un problema de pegado imposible: es localmente trivial, pero no admite solución global.

Es un cociclo no trivial de $\check{H}^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{R}}^+)$.

- $\mathcal{U}$ es el recubrimiento por 3 abiertos de la corona circular.
- $\underline{\mathbb{R}}^+$ es el grupo multiplicativo de reales positivos. Contiene los $d_{ij}$. (En realidad, es un haz con valor constante $\mathbb{R}^+$).
- $\check{H}^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{R}}^+)$ es el primer grupo de cohomología de Čech.

# El triángulo de Penrose es un cociclo en la cohomología de Čech




El triángulo de Penrose es un problema de pegado imposible: es localmente trivial, pero no admite solución global.

Es un cociclo no trivial de $\check{H}^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{R}}^+)$.

- $\mathcal{U}$ es el recubrimiento por 3 abiertos de la corona circular.
- $\underline{\mathbb{R}}^+$ es el grupo multiplicativo de reales positivos. Contiene los $d_{ij}$.
  (En realidad, es un haz con valor constante $\mathbb{R}^+$).
- $\check{H}^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{R}}^+)$ es el primer grupo de cohomología de Čech.

# Complejo de Čech

Sea $X$ e.t., $\mathcal{U} = \{U_i\}$ recubrimiento y $\mathcal{F}$ haz sobre $X$. Sean $\mathcal{U}_J = \bigcap_{i \in J} U_i$.

El ***complejo de Čech*** del recubrimiento $\mathcal{U}$ viene dado por

$$
\begin{aligned}
\check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &= \prod_{|J|=1} \mathcal{F}(\mathcal{U}_J) \\
\check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &= \prod_{|J|=2} \mathcal{F}(\mathcal{U}_J) \\
&\vdots \\
\check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &= \prod_{|J|=k+1} \mathcal{F}(\mathcal{U}_J) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Es decir, $\check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{|J|=k+1} \mathcal{F}(U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k})$.

# Operador coborde

La inclusión

$$U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_{k+1}} \longrightarrow U_{i_0} \cap \cdots \cap \hat{U}_{i_j} \cap \cdots \cap U_{i_{k+1}}$$

induce un morfismo restricción

$$\mathcal{F}(U_{i_0} \cap \cdots \cap \hat{U}_{i_j} \cap \cdots \cap U_{i_{k+1}}) \longrightarrow \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_{k+1}}).$$

El operador coborde $\delta$ es suma alternada de estos morfismos.

$$\begin{aligned} \delta \colon \check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &\longrightarrow \check{C}^{k+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ \sigma &\longmapsto (\delta\sigma)_{i_0,\dots,i_{k+1}} := \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^k \sigma_{i_0,\dots,\hat{i}_j,\dots,i_{k+1}}|_{U_{i_0},\dots,U_{i_{k+1}}}. \end{aligned}$$

La ***cohomología de Čech*** es la cohomología de este complejo:

$$\check{Z}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \operatorname{Ker} \delta_k, \qquad \check{B}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \operatorname{Im} \delta_{k-1}, \qquad \check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \frac{\check{Z}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})}{\check{B}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})}.$$

# Operador coborde

La inclusión

$$U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_{k+1}} \longrightarrow U_{i_0} \cap \cdots \cap \hat{U}_{i_j} \cap \cdots \cap U_{i_{k+1}}$$

induce un morfismo restricción

$$\mathcal{F}(U_{i_0} \cap \cdots \cap \hat{U}_{i_j} \cap \cdots \cap U_{i_{k+1}}) \longrightarrow \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_{k+1}}).$$

El operador coborde $\delta$ es suma alternada de estos morfismos.

$$\begin{aligned} \delta\colon \check{\mathrm{C}}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &\longrightarrow \check{\mathrm{C}}^{k+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ \sigma &\longmapsto (\delta\sigma)_{i_0,\dots,i_{k+1}} := \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^k \sigma_{i_0,\dots,\hat{i}_j,\dots,i_{k+1}}|_{U_{i_0},\dots,U_{i_{k+1}}}. \end{aligned}$$

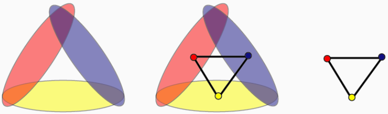
La ***cohomología de Čech*** es la cohomología de este complejo:

$$\check{\mathrm{Z}}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \operatorname{Ker} \delta_k, \qquad \check{\mathrm{B}}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \operatorname{Im} \delta_{k-1}, \qquad \check{\mathrm{H}}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \frac{\check{\mathrm{Z}}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})}{\check{\mathrm{B}}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})}.$$

# Relación con otras cohomologías

A partir de un recubrimiento $\mathcal{U}$, podemos construir un complejo simplicial llamado el ***nervio*** $\mathcal{N}(\mathcal{U})$.

- Vértices: abiertos $U_i \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.
- Aristas: intersecciones de dos abiertos $U_i \cap U_j \in \check{C}^2(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.
- Caras: intersecciones de tres abiertos $U_i \cap U_j \cap U_k \in \check{C}^3(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.
- $\vdots$



Dado un recubrimiento suficientemente fino, parece razonable que la cohomología de Čech coincida con las usuales. Y así es:

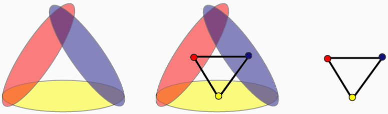
- $X$ CW-complejo: $\check{H}^*(X, \mathbb{Z})$ es la singular.
- $X$ variedad diferenciable: $\check{H}^*(X, \mathbb{R})$ es la de de Rham.

Para espacios más raros, no siempre. Ej: círculo polaco.

# Relación con otras cohomologías

A partir de un recubrimiento $\mathcal{U}$, podemos construir un complejo simplicial llamado el ***nervio*** $\mathcal{N}(\mathcal{U})$.

- Vértices: abiertos $U_i \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.
- Aristas: intersecciones de dos abiertos $U_i \cap U_j \in \check{C}^2(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.
- Caras: intersecciones de tres abiertos $U_i \cap U_j \cap U_k \in \check{C}^3(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.
- $\vdots$



Dado un recubrimiento suficientemente fino, parece razonable que la cohomología de Čech coincida con las usuales. Y así es:

- $X$ CW-complejo: $\check{H}^*(X, \mathbb{Z})$ es la singular.
- $X$ variedad diferenciable: $\check{H}^*(X, \mathbb{R})$ es la de de Rham.

Para espacios más raros, no siempre. Ej: círculo polaco.

# El problema de Mittag–Leffler, de nuevo

¿Existe una $f \in \mathcal{M}(S)$ con polos $\{p_n\}$ y partes principales $f_n$?

Reescribimos el problema en términos de cohomología de Čech.

$X$ superficie de Riemann. $\mathcal{O}_X$ haz de funciones holomorfas. $\mathcal{K}_X$ haz de funciones meromorfas. Tomamos un recubrimiento $\mathcal{U} = \{U_i\}$ tal que cada $U_i$ contiene a lo sumo un único polo $p_n$.

**Definición**

Una ***distribución de Mittag–Leffler*** es una $\mu \coloneqq (f_i) \in \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{K}_X)$ tal que las diferencias $f_{ij} \coloneqq f_i - f_j$ son holomorfas en $U_i \cap U_j$.
Es decir, $\delta\mu = (f_{ij}) \in \check{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)$.

Dar una distribución de Mittag–Leffler es lo mismo que dar un problema de Mittag–Leffler.

# El problema de Mittag–Leffler, de nuevo

¿Existe una $f \in \mathcal{M}(S)$ con polos $\{p_n\}$ y partes principales $f_n$?

Reescribimos el problema en términos de cohomología de Čech.

$X$ superficie de Riemann. $\mathcal{O}_X$ haz de funciones holomorfas. $\mathcal{K}_X$ haz de funciones meromorfas. Tomamos un recubrimiento $\mathcal{U} = \{U_i\}$ tal que cada $U_i$ contiene a lo sumo un único polo $p_n$.

**Definición**

Una ***distribución de Mittag–Leffler*** es una $\mu \coloneqq (f_i) \in \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{K}_X)$ tal que las diferencias $f_{ij} \coloneqq f_i - f_j$ son holomorfas en $U_i \cap U_j$.
Es decir, $\delta\mu = (f_{ij}) \in \check{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)$.

Dar una distribución de Mittag–Leffler es lo mismo que dar un problema de Mittag–Leffler.

# Resolviendo el problema de Mittag–Leffler

Tenemos $\quad \mu \coloneqq (f_i) \in \check{\mathrm{C}}^0(\mathcal{U}, \mathcal{K}_X), \qquad (\delta\mu)_{ij} = f_{ij} \coloneqq f_i - f_j \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j).$

Tomando intersecciones $U_i \cap U_j \cap U_k$ de tres abiertos, $f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} = 0$.

Buscamos $(g_i \in \mathcal{O}(U_i))$ tales que $f_{ij} = g_j - g_i$.

Entonces, $f \coloneqq f_i + g_i \in \mathcal{M}(X)$ es solución global bien definida.

Notar que

$$\{(f_{ij}) \mid f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} = 0\} = \operatorname{Ker} \delta_1 = \check{\mathrm{Z}}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X),$$
$$\{(f_{ij}) \mid f_{ij} = g_j - g_i \text{ para algún } g_i \in \mathcal{O}(U_i)\} = \operatorname{Im} \delta_0 = \check{\mathrm{B}}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X).$$

El problema tiene solución si y solo si $[\delta\mu] = 0 \in \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X) = \frac{\check{\mathrm{Z}}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)}{\check{\mathrm{B}}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)}$.

# Resolviendo el problema de Mittag–Leffler

Tenemos $\quad \mu := (f_i) \in \check{\mathrm{C}}^0(\mathcal{U}, \mathcal{K}_X), \qquad (\delta\mu)_{ij} = f_{ij} := f_i - f_j \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j).$

Tomando intersecciones $U_i \cap U_j \cap U_k$ de tres abiertos, $f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} = 0$.

Buscamos $(g_i \in \mathcal{O}(U_i))$ tales que $f_{ij} = g_j - g_i$.

Entonces, $f := f_i + g_i \in \mathcal{M}(X)$ es solución global bien definida.

Notar que

$$\{(f_{ij}) \mid f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} = 0\} = \operatorname{Ker} \delta_1 = \check{\mathrm{Z}}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X),$$
$$\{(f_{ij}) \mid f_{ij} = g_j - g_i \text{ para algún } g_i \in \mathcal{O}(U_i)\} = \operatorname{Im} \delta_0 = \check{\mathrm{B}}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X).$$

El problema tiene solución si y solo si $[\delta\mu] = 0 \in \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X) = \frac{\check{\mathrm{Z}}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)}{\check{\mathrm{B}}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)}$.

# El Teorema de Mittag–Leffler

**Teorema**

*Una distribución de Mittag–Leffler* $\mu$ *tiene solución si y solo si su clase de cohomología es cerrada*: $[\delta\mu] = 0 \in \check{H}^1(X, \mathcal{O}_X)$.

La obstrucción al problema está en la primera clase de cohomología:

**Corolario**

*Si* $\check{H}^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, *todo problema de Mittag–Leffler admite solución.*

Utilizando maquinaria pesada (dualidad de Serre), se puede probar:

**Proposición**

*Para cada* $\xi \in \check{H}^1(X, \mathcal{O}_X)$, *existe una distribución M–L* $\mu$ *con* $[\delta\mu] = \xi$.

**Corolario**

*Si* $X$ *es compacta, existen problemas de Mittag–Leffler sin solución.*

# El Teorema de Mittag–Leffler

**Teorema**

*Una distribución de Mittag–Leffler $\mu$ tiene solución si y solo si su clase de cohomología es cerrada:* $[\delta\mu] = 0 \in \check{\mathrm{H}}^1(X, \mathcal{O}_X)$.

La obstrucción al problema está en la primera clase de cohomología:

**Corolario**

*Si* $\check{\mathrm{H}}^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$*, todo problema de Mittag–Leffler admite solución.*

Utilizando maquinaria pesada (dualidad de Serre), se puede probar:

**Proposición**

*Para cada* $\xi \in \check{\mathrm{H}}^1(X, \mathcal{O}_X)$*, existe una distribución M–L* $\mu$ *con* $[\delta\mu] = \xi$.

**Corolario**

*Si $X$ es compacta, existen problemas de Mittag–Leffler sin solución.*

¡Gracias por vuestra atención!

# Bibliografía

# Bibliografía


[Agr22] M. Agrios. ***A Very Elementary Introduction to Sheaves.*** 2022. arXiv: 2202.01379 [math.AG].

[GH94] P. Griffiths y J. Harris. ***Principles of Algebraic Geometry.*** Wiley, 1994. DOI: 10.1002/9781118032527.

[Pen92] R. Penrose. **«On the Cohomology of Impossible Figures».** En: *Leonardo* 25.3/4 (1992), págs. 245-247. DOI: https://doi.org/10.2307/1575844.

[Phi14] T. Phillips. ***The Topology of Impossible Spaces.*** AMS Feature Column. 2014. URL: https://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fc-2014-10.

[Sch20] M. Schmidt. ***Cohomological Obstructions for Mittag-Leffler Problems.*** 2020. arXiv: 2010.11812 [math.CV].