Variedades de representaciones y de caracteres

Santiago Pareja Pérez

19 de enero de 2024

Representaciones de grupos y variedades de caracteres

Grupos algebraicos

Definición

Un ***grupo algebraico*** G es una variedad algebraica que también es grupo de manera compatible:

- El producto $m: G \times G \to G$ dado por $(g, h) \mapsto g \cdot h$ es morfismo.
- La inversión $i: G \to G$ dada por $g \mapsto g^{-1}$ es morfismo.

Nosotros nos centraremos en grupos algebraicos afines.

Ejemplos: Grupos de Lie analíticos (por GAGA). $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$...

Sea G grupo algebraico "bueno" fijo (usaremos grupos de matrices).

Sea Γ grupo finitamente generado.

Una ***representación*** de Γ en G es un homomorfismo $\Gamma \to G$.

Es un modo de ver Γ dentro de G, quizás con pérdida de información.

Estudiamos un grupo «difícil» a partir de otro que conocemos bien.

Algunos ejemplos:

$$\begin{aligned} \Gamma &\longrightarrow G \\ \gamma &\longmapsto 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{G}_m := (\mathbb{C}\setminus\{0\}, \cdot) \\ \xi^m &\longmapsto e^{\frac{2m\pi}{n}i} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{G}_m^2 &\longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \\ (a,b) &\longmapsto \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La ***variedad de representaciones*** $\mathcal{R}_G(\Gamma)$ de Γ en G es $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ dotado de cierta estructura algebraica. (Será distinta al Spec).

Representaciones de grupos

Sea G grupo algebraico "bueno" fijo (usaremos grupos de matrices).

Sea Γ grupo finitamente generado.

Una ***representación*** de Γ en G es un homomorfismo $\Gamma \to G$.

Es un modo de ver Γ dentro de G, quizás con pérdida de información.

Estudiamos un grupo «difícil» a partir de otro que conocemos bien.

Algunos ejemplos:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \longrightarrow G & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{G}_{\mathrm{m}} := (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot) & \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2 \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \\ \gamma \longmapsto 1 & \xi^m \longmapsto e^{\frac{2m\pi}{n} i} & (a, b) \longmapsto \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \end{array}$$

La ***variedad de representaciones*** $\mathcal{R}_G(\Gamma)$ de Γ en G es $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ dotado de cierta estructura algebraica. (Será distinta al Spec).

Sea G grupo algebraico "bueno" fijo (usaremos grupos de matrices).

Sea Γ grupo finitamente generado.

Una ***representación*** de Γ en G es un homomorfismo $\Gamma \to G$.

Es un modo de ver Γ dentro de G, quizás con pérdida de información.

Estudiamos un grupo «difícil» a partir de otro que conocemos bien.

Algunos ejemplos:

$$\begin{aligned} \Gamma &\longrightarrow G \\ \gamma &\longmapsto 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \coloneqq (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot) \\ \xi^m &\longmapsto e^{\frac{2m\pi}{n} i} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2 &\longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \\ (a,b) &\longmapsto \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La ***variedad de representaciones*** $\mathcal{R}_G(\Gamma)$ de Γ en G es $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ dotado de cierta estructura algebraica. (Será distinta al Spec).

Variedad de representaciones

Variedad de representaciones $\mathcal{R}_G(\Gamma)$ de Γ en G: $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ + estructura.

Sea Γ finitamente generado. Escogemos una presentación.

$$\Gamma = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \mid R_\alpha(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = 1 \rangle.$$

Tenemos el monomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} \psi\colon\ \mathrm{Hom}(\Gamma, G) &\longrightarrow G^n \\ \rho &\mapsto (\rho(\gamma_1), \dots, \rho(\gamma_n)). \end{aligned}$$

Identificamos $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ con la variedad imagen.

$$\operatorname{Im}\psi = \{(g_1, \dots, g_n) \in G^n \mid R_\alpha(g_1, \dots, g_n) = 1\}.$$

No depende de la presentación de Γ escogida. Definimos así estructura de variedad en $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$.

Tenemos un bifuntor $\mathrm{GruposFG} \times \mathrm{GruposAlg} \to \mathrm{VariedadesAlg}$.

Variedad de representaciones

Variedad de representaciones $\mathcal{R}_G(\Gamma)$ de Γ en G: $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ + estructura.

Sea Γ finitamente generado. Escogemos una presentación.

$$\Gamma = \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_n \mid R_\alpha(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = 1 \rangle.$$

Tenemos el monomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} \psi\colon\ \mathrm{Hom}(\Gamma, G) &\longrightarrow G^n \\ \rho &\mapsto (\rho(\gamma_1), \ldots, \rho(\gamma_n)). \end{aligned}$$

Identificamos $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ con la variedad imagen.

$$\mathrm{Im}\,\psi = \{(g_1, \ldots, g_n) \in G^n \mid R_\alpha(g_1, \ldots, g_n) = 1\}.$$

No depende de la presentación de Γ escogida. Definimos así estructura de variedad en $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$.

Tenemos un bifuntor GruposFG × GruposAlg → VariedadesAlg.

Stack de caracteres

$\mathcal{R}_G(\Gamma)$ tiene mucha redundancia. Queremos hacerla más manejable.

Colapsamos las representaciones isomorfas entre sí: cocientamos por la acción por conjugación.

$$\begin{aligned} G \times \mathcal{R}_G(\Gamma) &\longrightarrow \mathcal{R}_G(\Gamma) \\ (g, \rho) &\longmapsto \rho^g := \gamma \mapsto g \cdot \rho(\gamma) \cdot g^{-1}. \end{aligned}$$

La acción no es libre ni propia, en general.

El cociente es un stack: el ***stack de caracteres*** de Γ en G.

No queremos trabajar con stacks. Vamos a ver un modo de construir algo parecido a este cociente.

Stack de caracteres

$\mathcal{R}_G(\Gamma)$ tiene mucha redundancia. Queremos hacerla más manejable.

Colapsamos las representaciones isomorfas entre sí: cocientamos por la acción por conjugación.

$$\begin{aligned} G \times \mathcal{R}_G(\Gamma) &\longrightarrow \mathcal{R}_G(\Gamma) \\ (g, \rho) &\longmapsto \rho^g \coloneqq \gamma \mapsto g \cdot \rho(\gamma) \cdot g^{-1}. \end{aligned}$$

La acción no es libre ni propia, en general.

El cociente es un stack: el ***stack de caracteres*** de Γ en G.

No queremos trabajar con stacks. Vamos a ver un modo de construir algo parecido a este cociente.

¿Cómo podemos hacer más manejable este cociente? (1/2)

Nos olvidamos por un momento de las representaciones.

Un cociente malo: $\mathbb{C}^2$ y la acción del grupo multiplicativo $\mathbb{G}_m = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_m \times \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (\lambda, (x, y)) &\longmapsto (\lambda x, \lambda^{-1} y). \end{aligned}$$

Las órbitas son el origen, los ejes y las hipérbolas $xy = a$.

Tenemos un punto múltiple en el origen. Pero se parece a $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$.

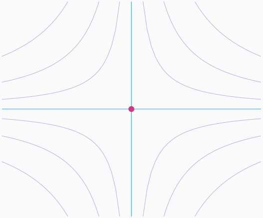
¿Cómo podemos hacer más manejable este cociente? (1/2)

Nos olvidamos por un momento de las representaciones.

Un cociente malo: $\mathbb{C}^2$ y la acción del grupo multiplicativo $\mathbb{G}_m = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_m \times \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (\lambda, (x, y)) &\longmapsto (\lambda x, \lambda^{-1} y). \end{aligned}$$

Las órbitas son el origen, los ejes y las hipérbolas $xy = a$.



Tenemos un punto múltiple en el origen. Pero se parece a $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$.

¿Cómo podemos hacer más manejable este cociente? (2/2)

Identificamos dos órbitas si sus clausuras se intersecan.

Más algebraicamente:

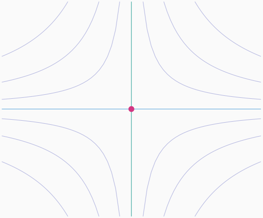
Las funciones continuas G-invariantes no son capaces de diferenciar el punto múltiple. $\big(f(gp) = f(p)\big)$.

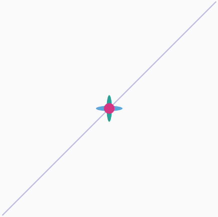
Consideramos el álgebra de funciones G-invariantes $A(X)^G \subset A(X)$.

Tomamos su Spec. En este caso, es $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[xy] \cong \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$.

Obtenemos así el llamado ***cociente GIT*** (Geometric Invariant Theory).

¿Cómo podemos hacer más manejable este cociente? (2/2)





Identificamos dos órbitas si sus clausuras se intersecan.

Más algebraicamente:

Las funciones continuas G-invariantes no son capaces de diferenciar el punto múltiple. $(f(gp) = f(p))$.

Consideramos el álgebra de funciones G-invariantes $A(X)^G \subset A(X)$.

Tomamos su Spec. En este caso, es $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[xy] \cong \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$.

Obtenemos así el llamado ***cociente GIT*** (Geometric Invariant Theory).

El cociente GIT

El ***cociente GIT*** $\pi\colon X \to X/\!\!/G$ se define mediante propiedad universal:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & Z \\ X/\!\!/G \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

con π, f funciones regulares G-invariantes.

Existe (como esquema), y es $X/\!\!/G \coloneqq \operatorname{Spec} A(X)^G$.

(El álgebra $A(X)^G$ puede tener infinitos generadores).

Teorema (M. Nagata, 1963)

Si X es variedad afín y G es reductivo, $A(X)^G$ es finitamente generada.

Corolario

Si X es variedad afín y G es reductivo, entonces $X/\!\!/G$ es variedad afín.

Ejemplos de grupos reductivos: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$...

El cociente GIT

El ***cociente GIT*** $\pi\colon X \to X/\!\!/G$ se define mediante propiedad universal:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & Z \\ X/\!\!/G \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

con π, f funciones regulares G-invariantes.

Existe (como esquema), y es $X/\!\!/G \coloneqq \operatorname{Spec} A(X)^G$.

(El álgebra $A(X)^G$ puede tener infinitos generadores).

Teorema (M. Nagata, 1963)

Si X es variedad afín y G es reductivo, $A(X)^G$ es finitamente generada.

Corolario

Si X es variedad afín y G es reductivo, entonces $X/\!\!/G$ es variedad afín.

Ejemplos de grupos reductivos: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$...

Variedades de caracteres

Recordar que el stack de caracteres es el cociente $\mathcal{R}_G(\Gamma)/G$.

Definición

La ***variedad de caracteres*** de Γ en G es el cociente GIT

$$\mathcal{C}_G(\Gamma) \coloneqq \mathcal{R}_G(\Gamma)/\!\!/G.$$

En general, son esquemas, por lo mismo que antes.

Corolario (M. Nagata, 1963)

Si X es variedad afín y G es reductivo, entonces $X/\!\!/G$ es variedad afín.

Corolario

Si G es grupo algebraico afín y reductivo, entonces $\mathcal{C}_G(\Gamma)$ es var. afín.

Ejemplos de grupos buenos: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$...

Variedades de caracteres

Recordar que el stack de caracteres es el cociente $\mathcal{R}_G(\Gamma)/G$.

Definición

La ***variedad de caracteres*** de Γ en G es el cociente GIT

$$\mathcal{C}_G(\Gamma) \coloneqq \mathcal{R}_G(\Gamma) /\!\!/ G.$$

En general, son esquemas, por lo mismo que antes.

Corolario (M. Nagata, 1963)

Si X es variedad afín y G es reductivo, entonces $X /\!\!/ G$ es variedad afín.

Corolario

Si G es grupo algebraico afín y reductivo, entonces $\mathcal{C}_G(\Gamma)$ es var. afín.

Ejemplos de grupos buenos: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$...

¿Por qué “de caracteres”?

Sea $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ un grupo lineal.

Definición

El ***carácter*** de una representación $\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ es la función

$$\begin{aligned} \chi_\rho : \Gamma &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \gamma &\longmapsto \operatorname{tr} \rho(\gamma). \end{aligned}$$

Sería más adecuado definir la variedad de caracteres como el conjunto de caracteres de Γ en G, equipado con estructura algebraica.

Para grupos adecuados, esto es equivalente al cociente GIT $\mathcal{R}_G(\Gamma)/\!/G$. Por ejemplo, lo es para $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, pero no para $\mathrm{SO}_2(\mathbb{C})$.

En la segunda parte trabajaremos sobre $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

¿Por qué “de caracteres”?

Sea $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ un grupo lineal.

Definición

El ***carácter*** de una representación $\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ es la función

$$\begin{aligned} \chi_\rho : \Gamma &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \gamma &\longmapsto \operatorname{tr} \rho(\gamma). \end{aligned}$$

Sería más adecuado definir la variedad de caracteres como el conjunto de caracteres de Γ en G, equipado con estructura algebraica.

Para grupos adecuados, esto es equivalente al cociente GIT $\mathcal{R}_G(\Gamma) /\!\!/ G$. Por ejemplo, lo es para $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, pero no para $\mathrm{SO}_2(\mathbb{C})$.

En la segunda parte trabajaremos sobre $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

¿Por qué hacer todo esto?

Las variedades de caracteres son ubicuas.

Móduli de conexiones planas Fibrados holomorfos Móduli de fibrados de Higgs Skein modules Conexiones de Yang-Mills Simetría especular (G, X)-estructuras A-polinomio Invariantes de nudos Variedades hiperbólicas Teoría de Hodge no abeliana Cuantización Redes de espín Programa de Langlands Geométrico Teoría de cuerdas Teorías topológicas de campos cuánticos

El A-polinomio de un nudo

Nudos

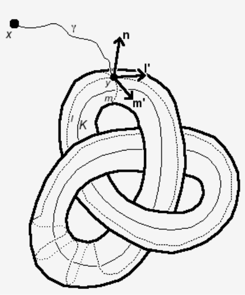
Definición

Un ***nudo*** (manso) es la imagen de un encaje suave $K\colon \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^3$.

El ***exterior*** de un nudo es el complementario de un entorno tubular abierto suyo: $X = \mathbb{S}^3 - \eta(K)$. Es una 3-variedad con borde compacta.

El ***grupo*** de un nudo es el grupo fundamental de su exterior: $\pi_1(X)$.

La frontera de X es un toro $\mathbb{T} = \partial X$.
Llamamos ***subgrupo periférico*** a $\pi_1(\mathbb{T}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, y *longitud* y *meridiano* a sus dos generadores. Dichos generadores se intersecan (transversalmente) en un único punto.



Nudos

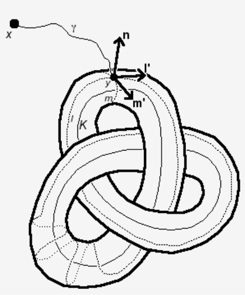
Definición

Un ***nudo*** (manso) es la imagen de un encaje suave $K\colon \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^3$.

El ***exterior*** de un nudo es el complementario de un entorno tubular abierto suyo: $X = \mathbb{S}^3 - \eta(K)$. Es una 3-variedad con borde compacta.

El ***grupo*** de un nudo es el grupo fundamental de su exterior: $\pi_1(X)$.

La frontera de X es un toro $\mathbb{T} = \partial X$.
Llamamos ***subgrupo periférico*** a $\pi_1(\mathbb{T}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, y *longitud* y *meridiano* a sus dos generadores.
Dichos generadores se intersecan (transversalmente) en un único punto.



Invariantes de nudos

Dos nudos se consideran *equivalentes* si son isótopos ambientales. ($\exists$ homotopía $h : \mathbb{S}^3 \times I \to \mathbb{S}^3$ t.q. $h_0 = \mathrm{Id}$, $h_1 \circ K_1 = K_2$, $h_t \in \mathrm{Homeo}\,\mathbb{S}^3$).

Un invariante es ***completo*** si resuelve el problema de clasificación.

Teorema (Waldhausen, 1968)

El encaje $\pi_1(\partial X) \hookrightarrow \pi_1(X)$ es un invariante de nudos completo.

Es muy potente, pero es (*muy*) difícil de computar.

La mayoría de invariantes de nudos son incompletos (pierden información), pero a cambio son más sencillitos de computar.

El grupo fundamental es sencillo de calcular: la presentación de Wirtinger da un algoritmo para computarlo a partir de su diagrama.

Invariantes de nudos

Dos nudos se consideran *equivalentes* si son isótopos ambientales.
($\exists$ homotopía $h : \mathbb{S}^3 \times I \to \mathbb{S}^3$ t.q. $h_0 = \mathrm{Id}$, $h_1 \circ K_1 = K_2$, $h_t \in \mathrm{Homeo}\,\mathbb{S}^3$).

Un invariante es ***completo*** si resuelve el problema de clasificación.

Teorema (Waldhausen, 1968)

El encaje $\pi_1(\partial X) \hookrightarrow \pi_1(X)$ es un invariante de nudos completo.

Es muy potente, pero es (*muy*) difícil de computar.

La mayoría de invariantes de nudos son incompletos (pierden información), pero a cambio son más sencillitos de computar.

El grupo fundamental es sencillo de calcular: la presentación de Wirtinger da un algoritmo para computarlo a partir de su diagrama.

Representaciones de grupos de nudos en $SL_2(\mathbb{C})$

Trabajaremos con representaciones sobre $SL_2(\mathbb{C})$.

- ¿Por qué $SL_2(\mathbb{C})$?

Porque es el más estudiado en este contexto.

- ¿Por qué es el más estudiado?

Muchos nudos son *hiperbólicos*, admiten una métrica de curvatura constante negativa en su complementario.

Es decir, son cociente de $\mathbb{H}^3$ por un subgrupo de $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3) \cong PSL_2(\mathbb{C})$.

Representaciones de grupos de nudos en $SL_2(\mathbb{C})$

Trabajaremos con representaciones sobre $SL_2(\mathbb{C})$.

- ¿Por qué $SL_2(\mathbb{C})$?

Porque es el más estudiado en este contexto.

- ¿Por qué es el más estudiado?

Muchos nudos son *hiperbólicos*, admiten una métrica de curvatura constante negativa en su complementario.

Es decir, son cociente de $\mathbb{H}^3$ por un subgrupo de $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3) \cong PSL_2(\mathbb{C})$.

Representaciones de grupos de nudos en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$

Trabajaremos con representaciones sobre $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

- ¿Por qué $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$?

Porque es el más estudiado en este contexto.

- ¿Por qué es el más estudiado?

Muchos nudos son *hiperbólicos*, admiten una métrica de curvatura constante negativa en su complementario.

Es decir, son cociente de $\mathbb{H}^3$ por un subgrupo de $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

El A-polinomio de un nudo (1/2)

Sea un nudo K y sea X su exterior. Elegimos generadores de su subgrupo periférico $\pi_1(\partial X)$: longitud L y meridiano M. (Base $B = (L, M)$).

Proyectamos $\mathcal{R}(K) \coloneqq \mathcal{R}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}(\pi_1(X))$ a otra variedad más pequeña: restringimos cada representación $\rho\colon \pi_1(X) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ a $\pi_1(\partial X)$.

$$\begin{aligned} r\colon \mathcal{R}(K) &\longrightarrow \mathcal{R}(\partial X) \\ \rho &\longmapsto \rho|_{\pi_1(\partial X)}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} r\colon \mathcal{C}(K) &\longrightarrow \mathcal{C}(\partial X) \\ [\rho] &\longmapsto [\rho|_{\pi_1(\partial X)}]. \end{aligned}$$

Sea $\Delta \in \mathcal{R}(\partial X)$ la subvariedad de representaciones diagonales.

Cada $\rho \in \Delta$ está determinado por las imágenes de los generadores:

$$\rho(L) = \begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & l^{-1} \end{bmatrix}, \qquad \rho(M) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m^{-1} \end{bmatrix}.$$

Tenemos así un isomorfismo $\Delta \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2$ dado por $\rho \mapsto (l, m)$.

Sea $\pi_{\partial X}\colon \mathcal{R}(\partial X) \to \mathcal{C}(\partial X)$ la proyección. Restringe a $\pi_\Delta\colon \Delta \to \mathcal{C}(\partial X)$.

El A-polinomio de un nudo (1/2)

Sea un nudo K y sea X su exterior. Elegimos generadores de su subgrupo periférico $\pi_1(\partial X)$: longitud L y meridiano M. (Base $B = (L, M)$).

Proyectamos $\mathcal{R}(K) \coloneqq \mathcal{R}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}(\pi_1(X))$ a otra variedad más pequeña: restringimos cada representación $\rho \colon \pi_1(X) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ a $\pi_1(\partial X)$.

$$\begin{aligned} r\colon \mathcal{R}(K) &\longrightarrow \mathcal{R}(\partial X) \\ \rho &\longmapsto \rho|_{\pi_1(\partial X)}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} r\colon \mathcal{C}(K) &\longrightarrow \mathcal{C}(\partial X) \\ [\rho] &\longmapsto [\rho|_{\pi_1(\partial X)}]. \end{aligned}$$

Sea $\Delta \in \mathcal{R}(\partial X)$ la subvariedad de representaciones diagonales.

Cada $\rho \in \Delta$ está determinado por las imágenes de los generadores:

$$\rho(L) = \begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & l^{-1} \end{bmatrix}, \qquad \rho(M) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m^{-1} \end{bmatrix}.$$

Tenemos así un isomorfismo $\Delta \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2$ dado por $\rho \mapsto (l, m)$.

Sea $\pi_{\partial X} \colon \mathcal{R}(\partial X) \to \mathcal{C}(\partial X)$ la proyección. Restringe a $\pi_\Delta \colon \Delta \to \mathcal{C}(\partial X)$.

El A-polinomio de un nudo (2/2)

Ahora, vamos a definir una curva D_K en $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2 \cong \Delta \subset \mathcal{R}(\partial X)$. La clausura de esta curva en $\mathbb{C}^2$ quedará determinada por un único ideal principal: estará generada por un único polinomio entero en dos variables.

Este será el ***A-polinomio*** del nudo K, $A_K(l, m)$, que se define salvo multiplicación por constante.

La construcción es algo técnica.

Tomamos la unión X' de las componentes irreducibles Y' de $\mathcal{C}(K)$ tales que la clausura de $r(Y')$ tiene dimensión 1.

Para cada componente Z' de X', sea Z la curva $\pi_\Delta^{-1}(\overline{r(Y')}) \subset \Delta \cong \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2$. Definimos D_K como la unión de estas curvas a lo largo de las componentes de X'.

No vamos a dar aquí los detalles de los pasos farragosos. Véase **«Plane Curves Associated to Character Varieties of 3-Manifolds»** (Cooper et al., 1994).

El A-polinomio de un nudo (2/2)

Ahora, vamos a definir una curva D_K en $\mathbb{G}_\mathrm{m}^2 \cong \Delta \subset \mathcal{R}(\partial X)$. La clausura de esta curva en $\mathbb{C}^2$ quedará determinada por un único ideal principal: estará generada por un único polinomio entero en dos variables.

Este será el ***A-polinomio*** del nudo K, $A_K(l, m)$, que se define salvo multiplicación por constante.

La construcción es algo técnica.

Tomamos la unión X' de las componentes irreducibles Y' de $\mathcal{C}(K)$ tales que la clausura de $r(Y')$ tiene dimensión 1.

Para cada componente Z' de X', sea Z la curva $\pi_\Delta^{-1}(\overline{r(Y')}) \subset \Delta \cong \mathbb{G}_\mathrm{m}^2$. Definimos D_K como la unión de estas curvas a lo largo de las componentes de X'.

No vamos a dar aquí los detalles de los pasos farragosos. Véase **«Plane Curves Associated to Character Varieties of 3-Manifolds»** (Cooper et al., 1994).

Algunas propiedades del A-polinomio

Detecta al nudo trivial: $A_{\text{trivial}}(l, m) = 1$, y es no constante para cualquier otro nudo.

Es invariante por cambios de orientación del nudo.

No es invariante por cambios de orientación del espacio ambiente: convierte $A_K(l, m)$ en $A_K(l, m^{-1})$.

Es decir: distingue nudos de sus imágenes especulares.

Existen métodos numéricos para calcular el A-polinomio de un nudo. Están censados al menos unos 350 nudos (todos hasta 8 cruces y bastantes de 9 y 10 cruces).

Algunas propiedades del A-polinomio

Detecta al nudo trivial: $A_{\text{trivial}}(l, m) = 1$, y es no constante para cualquier otro nudo.

Es invariante por cambios de orientación del nudo.

No es invariante por cambios de orientación del espacio ambiente: convierte $A_K(l, m)$ en $A_K(l, m^{-1})$.

Es decir: distingue nudos de sus imágenes especulares.

Existen métodos numéricos para calcular el A-polinomio de un nudo. Están censados al menos unos 350 nudos (todos hasta 8 cruces y bastantes de 9 y 10 cruces).

Algunas propiedades del A-polinomio

Detecta al nudo trivial: $A_{\text{trivial}}(l,m) = 1$, y es no constante para cualquier otro nudo.

Es invariante por cambios de orientación del nudo.

No es invariante por cambios de orientación del espacio ambiente: convierte $A_K(l,m)$ en $A_K(l,m^{-1})$.

Es decir: distingue nudos de sus imágenes especulares.

Existen métodos numéricos para calcular el A-polinomio de un nudo. Están censados al menos unos 350 nudos (todos hasta 8 cruces y bastantes de 9 y 10 cruces).

¡Gracias por vuestra atención!

Bibliografía

Bibliografía i

[ABL18] C. Ashley, J.-P. Burelle y S. Lawton. **«Rank 1 Character Varieties of Finitely Presented Groups».** En: *Geometriae Dedicata* 192.1 (2018), págs. 1-19.

[CL98] D. Cooper y D. Long. **«Representation Theory and the A-polynomial of a Knot».** En: *Chaos, Solitons & Fractals* 9.4-5 (1998), págs. 749-763. DOI: `10.1016/S0960-0779(97)00102-1`.

[Coo+94] D. Cooper, M. Culler, H. Gillet, D. D. Long y P. B. Shalen. **«Plane Curves Associated to Character Varieties of 3-Manifolds».** En: *Inventiones Mathematicae* 118.1 (1994), págs. 47-84. DOI: `10.1007/BF01231526`.

Bibliografía ii

[GLM21] Á. González-Prieto, M. Logares y V. Muñoz. **«Representation Variety for the Rank One Affine Group».** En: *Mathematical Analysis in Interdisciplinary Research*. Springer Optimization and Its Applications. Cham: Springer International Publishing, 2021, págs. 381-416. DOI: `10.1007/978-3-030-84721-0_18`.

[LS17] S. Lawton y A. S. Sikora. **«Varieties of Characters».** En: *Algebras and Representation Theory* 20.5 (2017), págs. 1133-1141.

[Mar22] A. Maret. **«A Note on Character Varieties».** 2022. URL: `https://arnaudmaret.com/files/character-varieties.pdf`.

[Nag63] M. Nagata. **«Invariants of Group in an Affine Ring».** En: *Kyoto Journal of Mathematics* 3.3 (1963). DOI: `10.1215/kjm/1250524787`.

Bibliografía iii

[Nak00] K. Nakamoto. **«Representation Varieties and Character Varieties».** En: *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences* 36.2 (2000), págs. 159-189. DOI: 10.2977/prims/1195143100.

[New12] P. E. Newstead. ***Introduction to Moduli Problems and Orbit Spaces.*** Col. de T. I. of Fundamental Research. Lectures on Mathematics / Tata Institute of Fundamental Research 51. New Delhi: Narosa Publ. House, 2012. ISBN: 978-81-8487-162-3.

[Por17] J. Porti. **«Character Varieties and Knot Symmetries».** En: *Winter Braids Lecture Notes* 4 (2017), pág. 21. DOI: 10.5802/wbln.18.

Grupos reductivos

Grupos reductivos

Hay varias definiciones y terminologías históricas no completamente equivalentes. Damos la del capítulo 3 de ***Introduction to Moduli Problems and Orbit Spaces*** (Peter E. Newstead).

Definición

Un grupo algebraico lineal G se dice ***reductivo*** si para cada acción de G en $\mathbb{C}^n$, y cada punto fijo $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$, existe un polinomio homogéneo G-invariante f de grado ≥ 1 tal que $f(v) \neq 0$.

Todo grupo algebraico (semi-)simple es reductivo.

No todo grupo es reductivo: por ejemplo,

$$H = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} < \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}).$$

no es reductivo. Tampoco lo es $(\mathbb{C}, +)$ (pero sí $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot) =: \mathbb{G}_m$).