

La clasificación de los orbifolds bidimensionales compactos

Trabajo final de asignatura de Geometría de Superficies Topológicas

Santiago Pareja Pérez

28 de diciembre de 2023

1. Motivación y definición

1.1. ¿Por qué orbifolds?

La noción de *orbifold* aparece naturalmente al considerar cocientes de variedades por acciones de grupo. Recordar que las acciones de grupo libres y propias sobre una variedad (quizás diferenciable o riemanniana) poseen una propiedad útil: el cociente por ellas sigue siendo variedad (y también diferenciable o riemanniana).¹ Sin embargo, que una acción de grupo sea *libre* es una condición moderadamente fuerte; aparecen en la práctica muchos problemas donde resulta natural considerar acciones de grupo que quizás no lo sean.

Por ejemplo, vimos ya en la hoja 2 de problemas el cociente del toro por una acción particular de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (figura 1), que era una esfera con 3 puntos singulares. Este es un ejemplo particular del cociente de un recubrimiento ramificado por su grupo Deck de transformaciones, que es una construcción que resulta bastante razonable considerar. Y otro lugar donde también aparecen a menudo cocientes «imperfectos» es al construir espacios de móduli: se ilustra (en la figura 2)² el móduli de estructuras complejas sobre el toro, donde aparecen dos puntos singulares. Este es también el móduli de curvas elípticas complejas, salvo isomorfismo.

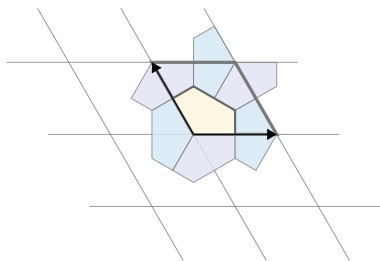


Figura 1: Cociente del toro por la acción por rotación de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (ejercicio 5 de la hoja 2).

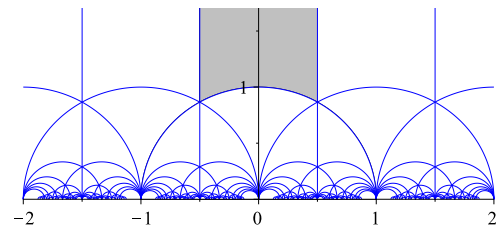


Figura 2: Dominio fundamental de la acción del grupo modular sobre el semiplano \mathbb{H}^2 .

Dada esta tesitura, un matemático tiene dos caminos a seguir: o bien ignorar en la medida de lo posible las singularidades, y realizar un estudio caso por caso cuando sea imposible esquivarlas; o bien integrar dichas singularidades en la teoría como parte fundamental de la estructura a estudiar. Ambos enfoques son válidos y tienen sus ventajas y desventajas; la preferencia de uno sobre otro dependerá de las circunstancias del problema. La noción de *orbifold* se sitúa en el segundo de estos caminos, y este trabajo consistirá en una introducción a su estudio.

Como hemos insinuado al principio, el ejemplo paradigmático de orbifold será el del cociente de una variedad (quizás diferenciable o riemanniana) por una acción de grupo propia, pero

¹Si la acción era compatible con la estructura, claro está; esto es, las traslaciones por la acción de grupo deben ser, respectivamente, continuas, diferenciables o preservantes de la métrica riemanniana (isometrías).

²Diagrama realizado por los usuarios Kilom691 y Alexander Hulpke de Wikimedia Commons. Licencia CC BY-SA 4.0. URL: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:ModularGroup-FundamentalDomain.svg>.

no necesariamente libre. Pero, como suele ocurrir en matemáticas, resulta conveniente para desarrollar la teoría generalizar ligeramente esta noción.

1.2. La definición de orbifold

Del mismo modo que una variedad es un espacio topológico localmente modelado por abiertos de un espacio afín, un *orbifold* es un espacio topológico localmente modelado por cocientes de (abiertos de) dicho espacio afín por la acción de un grupo finito (figura 3). Para la definición formal, utilizaremos el concepto de *orbi-atlas*³ en analogía con el atlas de una variedad.

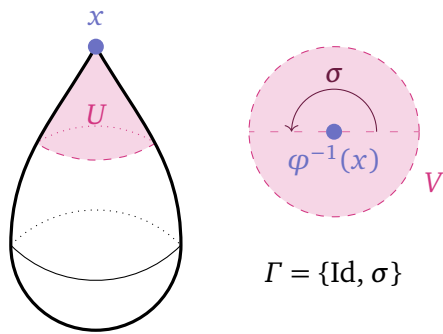


Figura 3: Una orbi-carta de la «lágrima de orden 2».

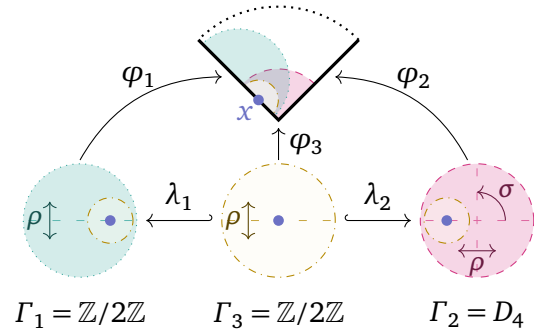


Figura 4: Cambio de orbi-cartas.

Definición 1.1. Una *orbi-carta* sobre un espacio topológico X es una tupla (U, V, Γ, φ) , donde

- $U \subset X$ es un abierto;
- $V \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto y Γ es un grupo finito que actúa fiel y continuamente sobre V ;
- $\varphi: V \rightarrow U$ es una aplicación continua que factoriza como la composición $\varphi: V \xrightarrow{\pi} V/\Gamma \xrightarrow{\tilde{\varphi}} U$, donde $\tilde{\varphi}: V/\Gamma \rightarrow U$ es un homeomorfismo.

Como las cartas van de \mathbb{R}^n en el orbifold, quizás sería más adecuado llamarlas (orbi-)parametrizaciones, pero no es lo usual.⁴ Como de costumbre, hay que pedirles una condición de compatibilidad a los cambios de cartas, algo técnica de enunciar pero bastante razonable.

Definición 1.2. Un *encaje* entre dos orbi-cartas $\{(U_i, V_i, \Gamma_i, \varphi_i)\}_{i=1,2}$ es un encaje $\lambda: V_1 \hookrightarrow V_2$ que conmuta con las cartas: $\varphi_2 \circ \lambda = \varphi_1$. Dos orbi-cartas se dicen *compatibles* si para cada punto $x \in U_1 \cap U_2$ existe una orbi-carta $(U_3, V_3, \Gamma_3, \varphi_3)$ en un entorno abierto del punto (es decir, $x \in U_3 \subset U_1 \cap U_2$) que admite encajes λ_1, λ_2 en las otras dos. Esto es, este diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} V_3 & \xrightarrow{\lambda_1} & V_1 \\ \lambda_2 \downarrow & \searrow \varphi_3 & \downarrow \varphi_1 \\ V_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & U_3 \subset U_1 \cap U_2 \subset X \end{array}$$

Ilustramos esto en la figura 4. Finalmente, las últimas dos definiciones son rutinarias.

³Esta nomenclatura es original de este trabajo; en la literatura en inglés, simplemente se habla de *orbifold atlas*. Nos hemos tomado la libertad de introducirla, ya que resulta más breve que la alternativa «atlas de orbifolds». Del mismo modo para el resto de nomenclaturas análogas que utilizaremos. En ocasiones, cuando se sobreentienda por contexto, ignoraremos el prefijo «orbi-».

⁴Se puede escribir una definición equivalente mediante aplicaciones $U \rightarrow V$, que justifique la nomenclatura de «carta», y así la dio Thurston originalmente [Thu79, sec. 13.2]. Sin embargo, con esta definición resultan más incómodas de enunciar muchas propiedades importantes; nos suele interesar no solo cómo son homeomorfos U y V/Γ , sino cómo se levanta dicho homeomorfismo a un (orbi-)recubrimiento $V \rightarrow V/\Gamma \xrightarrow{\sim} U$. Como en general esta aplicación no será inyectiva, no podemos invertirla sin más, como estamos acostumbrados a hacer en variedades.

Definición 1.3. Un *orbi-atlas* sobre un espacio X es una colección de orbi-cartas compatibles cubriendo X . Se dice *maximal* si toda carta compatible con el atlas está ya en el atlas.

Definición 1.4. Un *orbifold* es un espacio topológico Hausdorff y paracompacto equipado con un orbi-atlas maximal.

Un pequeño comentario sobre esta definición, antes de continuar.

Observación 1.5. Hemos creado esta definición contrastando las que aparecen en varias fuentes (en orden de relevancia, [Car22; Dav11; Mar23; Thu79]), intentando adaptarla en la medida de lo posible a la notación a la que estamos acostumbrados. Pueden existir detalles técnicos que no la hagan equivalente a las consultadas, para algún caso patológico. Este mismo aviso aplica a la mayoría de definiciones formales que daremos; no somos expertos en el tema.

En realidad, dado el enfoque informal y mayoritariamente gráfico de este trabajo, muchas definiciones formales no son estrictamente necesarias. De hecho, veremos más adelante que la mayoría de los ejemplos que nos interesan (los orbifolds *buenos*)⁵ los podemos definir *globalmente* como el cociente de una variedad por una acción de grupo, de modo que las condiciones de compatibilidad se heredan de las propiedades de las cartas de nuestra variedad. Sin embargo, nos parece interesante dar cierta idea de los detalles a considerar si se quisiera buscar un enfoque más riguroso.

Del mismo modo que hacemos con variedades, podemos definir orbifolds *diferenciables* o *riemannianos* cambiando ligeramente la condición de compatibilidad: basta pedir que los grupos Γ_i actúen diferenciablemente (o isométricamente) sobre los abiertos V_i , y que los cambios de cartas sean diferenciables (o isometrías). Algunos autores asumen que la palabra «orbifold» implica una estructura diferenciable. Esto puede estar relacionado con el hecho de que en dimensión muy baja (≤ 3) al espacio topológico subyacente a un orbifold se le puede dotar siempre de estructura de variedad topológica (quizas con borde), luego lo que se vuelve especialmente interesante es la estructura geométrica adicional.

Aparte de los ejemplos ya comentados en la sección 1.1, notar que toda variedad (quizás con borde o con esquinas) admite canónicamente estructura de orbifold:

$$\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n / \{1\}, \quad \mathbb{H}^n \cong \mathbb{R}^n / (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), \quad \mathbb{R}_{\geq 0}^n \cong \mathbb{R}^n / (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n;$$

luego un espacio modelado localmente por abiertos de estos espacios (una variedad sin borde, con borde o con esquinas) es en particular un espacio modelado localmente por cocientes de abiertos de \mathbb{R}^n por acciones de grupos finitos (un orbifold). La acción de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ consiste en «plegar» \mathbb{R}^n por la mitad: su único generador es la simetría $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_n)$ sobre la primera variable. Del mismo modo, la acción de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ está generada por las n simetrías distintas $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ sobre la i -ésima variable.

Dado un orbifold Q y un punto $q \in Q$ en él, definimos el **grupo de isotropía** (o grupo local) del punto como $\Gamma_q := \{g \in \Gamma \mid gp = p\}$, con $p \in \varphi^{-1}(q)$ y (U, V, Γ, φ) una carta cualquiera; esto es, fijada una carta y una antiimagen p por la carta de nuestro punto, Γ_q es el subgrupo de isotropía Γ_p del grupo Γ en el punto p : los elementos del grupo que fijan al punto. Esto está bien determinado, salvo isomorfismo de grupos. (Equivalentemente, mediante límite directo, se puede definir como el grupo Γ asociado a una carta alrededor del punto q cuando el entorno de definición de la carta se vuelve arbitrariamente pequeño). Definimos el **singular locus** del orbifold como el lugar geométrico de sus puntos singulares: $\Sigma_Q = \{p \in Q \mid \Gamma_p = \{1\}\}$. Identificaremos al orbifold Q con una variedad cuando sea $\Sigma_Q = \emptyset$. (El espacio topológico subyacente puede seguir siendo variedad, aunque el orbifold tenga puntos singulares; ya hemos visto el ejemplo de la figura 1).

⁵Aquí la palabra «bueno» tiene una definición técnica, que significa precisamente la propiedad que enunciamos. Pero estamos adelantando acontecimientos; lo veremos en la sección 2.2.

1.3. El origen del nombre «orbifold»

No es raro, cuando se introducen los orbifolds a una nueva audiencia, aprovechar para comentar la anécdota que dio lugar al nombre. Finalizamos esta sección, pues, reproduciendo íntegramente dos citas que detallan este peculiar origen [Thu79, sec. 13.2; Dav11, págs. 5-6].

This terminology should not be blamed on me. It was obtained by a democratic process in my course of 1976–77. An orbifold is something with many folds; unfortunately, the word “manifold” already has a different definition. I tried “foldamani”, which was quickly displaced by the suggestion of “manifolded”. After two months of patiently saying “no, not a manifold, a manifolded”, we held a vote, and “orbifold” won.

—William P. Thurston (1979)

Near the beginning of his graduate course in 1976, Bill Thurston wanted to introduce a word to replace Satake’s “V-manifold” [...]. His first choice was “manifolded”. This turned out not to work for talking—the word could not be distinguished from “manifold”. His next idea was “foldimani”. People didn’t like this. So Bill said we would have an election after people made various suggestions for a new name for this concept. Chuck Giffen suggested “origam”, Dennis Sullivan “spatial dollop” and Bill Browder “orbifold”. There were many other suggestions. The election had several rounds with the names having the lowest number of votes being eliminated. Finally, there were only 4 names left, origam, orbifold, foldimani and one other (maybe “V-manifold”). After the next round of voting “orbifold” and the other name were to be eliminated. At this point, I spoke up and said something like “Wait you can’t eliminate orbifold because the other two names are ridiculous.” So “orbifold” was left on the list. After my impassioned speech, it won easily in the next round of voting.

—Michael W. Davis (2011)

Personalmente, agradecemos que no se eligiera «foldamani», pero lamentamos la pérdida de «origam» y de «spatial dollop».

2. Propiedades algebraicas de los orbifolds

Nuestro objetivo en esta sección es adaptar una serie de técnicas y conceptos del ámbito de la topología algebraica de variedades al estudio de orbifolds.

2.1. Orbi-recubrimientos

Como comenta Davis [Dav11, pág. 6], el gran logro de Thurston en esta teoría fue adaptar adecuadamente la teoría de espacios recubridores a orbifolds. El modelo local para un recubrimiento entre variedades es la identidad, $\text{Id}: V \xrightarrow{\sim} V$, en un abierto afín $V \subset \mathbb{R}^n$. Para respetar la estructura, el modelo local natural para un *orbi-recubrimiento* es la sumersión $V/\Gamma' \rightarrow V/\Gamma$ inducida por la relación de subgrupo $\Gamma' \subset \Gamma$ (figura 5)⁶.

La definición completa es también análoga a la de recubrimiento entre variedades.

Definición 2.1. Un *orbi-recubrimiento* $\pi: Q' \rightarrow Q$ es una aplicación continua tal que cada punto $p \in Q$ posee un entorno coordinado U cumpliendo que su fibra $\pi^{-1}(U) = \sqcup_i U_i$ es la unión disjunta de abiertos en los que la restricción $\pi|_{U_i}: U_i \rightarrow U$ es de la forma del modelo local.

⁶Muy a mi pesar, no he podido encontrar la fuente original de este diagrama. Lo encontré reproducido sin atribución en un trabajo universitario, lo cual explica también la cuestionable calidad de la imagen, y no he podido encontrarlo entre las referencias citadas. Tampoco he sido capaz de recrearlo digitalmente. Siento las molestias. URL: https://cpb-us-w2.wpmucdn.com/sites.wustl.edu/dist/a/1437/files/2018/05/Artu_Report-q83neh.pdf (fig. 3.3, pág. 6).

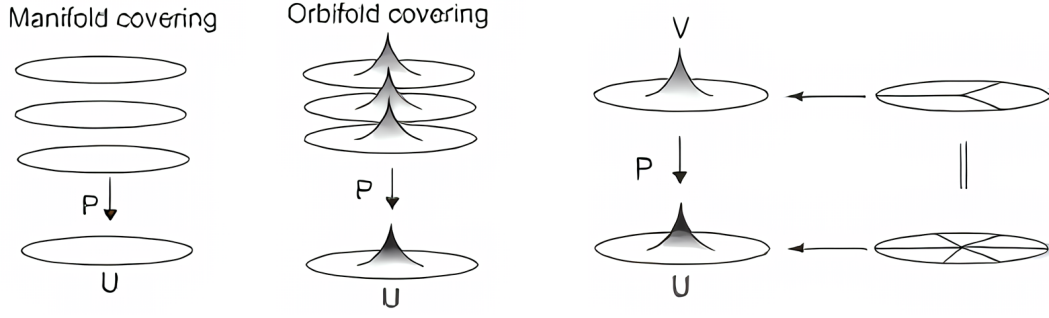


Figura 5: Recubrimientos de variedades vs orbi-recubrimientos.

Cuando decimos «es de la forma de» nos referimos a que existen homeomorfismos $U_i \cong V_i/\Gamma'_i$ y $U_i \cong V_i/\Gamma_i$ (que respeten las proyecciones) de modo que identificamos $\pi|_{U_i}$ con el modelo local. Desarrollando las definiciones, esto significa que el siguiente diagrama debe conmutar.

$$\begin{array}{ccccccc}
 V_i & \xrightarrow{\varphi_i} & U_i & \xrightarrow{\pi|_{U_i}} & U & \xleftarrow{\varphi} & V & \xleftarrow{\psi_i} & V_i \\
 & \searrow & \downarrow \tilde{\varphi}_i & & \uparrow & & \downarrow \tilde{\varphi}^{-1} \circ \psi_i^{-1} & & \swarrow \\
 & & V_i/\Gamma'_i & \longrightarrow & V_i/\Gamma_i & & & &
 \end{array}$$

Esto no es más que un modo más formal de escribir la figura 5.

Como de costumbre, definimos el número de hojas (o **grado**) de un orbi-recubrimiento $\pi: Q' \rightarrow Q$ como el número de antiimágenes de un punto (no singular) $q \in Q$.

Por supuesto, todo recubrimiento entre variedades es un ejemplo de orbi-recubrimiento, tomando todos los grupos Γ_i triviales. También lo son los recubrimientos ramificados, con la estructura de orbifold heredada en el espacio base por acción del grupo Deck del recubridor.

Volviendo a nuestro ejemplo inicial, sea $\Gamma \curvearrowright M$ una acción propia del grupo Γ sobre una variedad M . Entonces, $\pi: M \rightarrow M/\Gamma$ es un orbi-recubrimiento; y del mismo modo, si $\Gamma' < \Gamma$ es un subgrupo, $M/\Gamma' \rightarrow M/\Gamma$ es también orbi-recubrimiento.

Como último ejemplo, comentamos el recubridor doble de una variedad con borde o esquinas (figura 6): es el recubridor obtenido pegando dos copias de la variedad por su borde, y de este modo eliminando el borde y convirtiendo las esquinas (localmente modeladas por cocientes por el grupo diédrico D_n) en conos (localmente modelados por cocientes por el grupo cíclico $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ actuando por rotaciones).

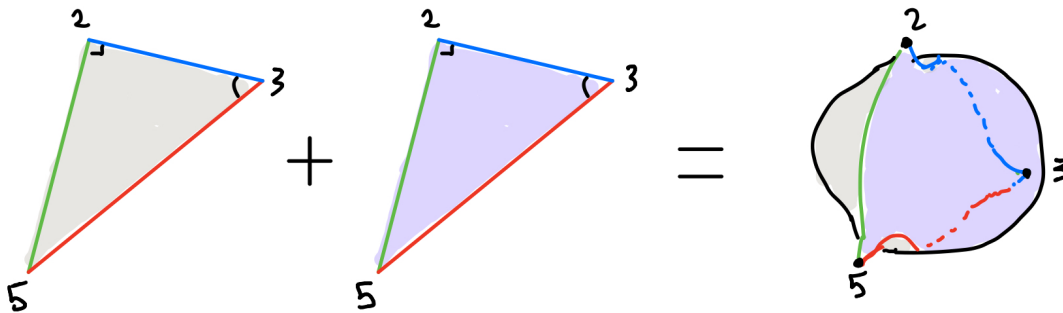


Figura 6: Recubridor doble de un triángulo con esquinas de órdenes 2, 3 y 5 [Lim21c].

2.2. El orbi-recubridor universal

Podemos utilizar la misma propiedad universal usada para definir el recubridor universal de un espacio topológico para adaptar esta noción a orbifolds.

Definición 2.2. Fijado un punto base (no singular) $p \in Q$, el **orbi-recubridor universal** de un orbifold conexo Q es el único recubridor conexo $\tilde{\pi}: (\tilde{Q}, \tilde{p}) \rightarrow (Q, p)$ (salvo isomorfismo) tal que, dado otro orbi-recubrimiento conexo $\pi: (Q', p') \rightarrow (Q, p)$, existe un levantamiento $\varpi: (\tilde{Q}, \tilde{p}) \rightarrow (Q', p')$ de π a un recubridor de O' .

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Q} & & \\ \downarrow \varpi & \searrow \tilde{\pi} & \\ Q' & \xrightarrow{\pi'} & Q \end{array}$$

Una demostración de su existencia se da en [Thu79, Prop. 13.2.4, pág. 305].

Definición 2.3. Un orbifold es **bueno** si es cociente de una variedad por una acción de grupo. Si el grupo es finito, diremos que el orbifold es **muy bueno**. Un orbifold es **malo** si no es bueno.

Equivalentemente, un orbifold es bueno si se puede recubrir por una variedad; o aún más, si su recubridor universal es una variedad. Por lo tanto, un orbifold es malo si y solo si su recubridor universal no es una variedad. Ya hemos visto varios ejemplos de orbifolds muy buenos. Los ejemplos de orbifolds malos los daremos en la sección 2.3, donde podremos probar su «maldad».

No lo usaremos, pero resulta interesante ver cómo se generaliza el concepto de *grupo fundamental* del ámbito topológico a orbifolds.

Definición 2.4. El **grupo orbi-fundamental** de un orbifold Q se define como el grupo Deck de transformaciones de su recubridor universal: $\pi_1^{\text{orb}}(Q) = \text{Deck}(\tilde{Q}) = \{f \in \text{Difeo}(\tilde{Q}) \mid \tilde{\pi} \circ f = \tilde{\pi}\}$.

Se puede dar una definición más geométrica, por clases de homotopía de lazos, pero requiere definir correctamente esas nociones.

Se tiene también una correspondencia de Galois: el conjunto de clases de isomorfismo de recubridores de Q está en correspondencia con el conjunto de clases de conjugación de subgrupos de $\pi_1^{\text{orb}}(Q)$ [Cho12, Prop 4.6.4, pág. 89].

2.3. Orbi-característica de Euler–Poincaré

La característica de Euler–Poincaré en variedades tiene una propiedad muy importante: es multiplicativa respecto de los recubrimientos, por factor el número de hojas del recubrimiento. Esto es, si M' recubre a M con d hojas, entonces $\chi(M') = d \cdot \chi(M)$.

Vamos a generalizar esto a los orbifolds; para ello, necesitamos introducir una noción adecuada de orbi-característica. Como queremos que siga cumpliendo esta propiedad, en vez de un entero deberá ser un número racional. Por ejemplo, la acción por rotación del grupo cíclico $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sobre el disco con borde \mathbb{D}^2 (generada por $z \mapsto \lambda \cdot z$, con $\lambda = \exp(2\pi i/n)$ raíz n -ésima de la unidad) nos induce un recubrimiento de n hojas $\mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, luego el cociente (el cono de orden n con borde) debe tener característica $\chi^{\text{orb}}(\mathbb{D}^2)/n = 1/n$.

Asumamos que podemos celular nuestro orbifold como CW-complejo de modo que el grupo de isotropía local sea constante en el interior de cada celda. Entonces, definimos la orbi-característica del modo usual «caras menos aristas más vértices», pero dividiendo en cada término por el orden del grupo local.

Definición 2.5. La **orbi-característica de Euler–Poincaré** de un orbifold viene dada por

$$\chi^{\text{orb}}(Q) = \sum_{\text{celda } c} \frac{(-1)^{\dim(c)}}{|\Gamma_c|} \in \mathbb{Q}.$$

Se tiene el resultado que queríamos, que extiende la fórmula de Riemann–Hurwitz para recubridores ramificados:

Teorema 2.6. Si Q' orbi-recubre a Q con d hojas, entonces $\chi^{\text{orb}}(Q') = d \cdot \chi^{\text{orb}}(Q)$.

Finalmente, vamos a dar algunos ejemplos de orbifolds malos, como prometimos en la sección 2.2. El primero son las *lágrimas de orden n* , como vimos en la figura 3; se trata de esferas con un punto crítico con forma de cono de orden n . (Por supuesto, $n \geq 2$). Podemos celularlas mediante una 0-celda (en el punto crítico) a la que pegamos una 2-celda (identificamos todo el borde con dicho punto).

La (orbi-)característica de Euler–Poincaré de la lágrima L_n es, por lo tanto, $1/n + 1$. Sus recubridores tendrán que cumplir

$$\chi^{\text{orb}}(Q) = d \cdot \chi^{\text{orb}}(L_n) = d \cdot \frac{n+1}{n}.$$

Si queremos que Q sea variedad, tendrá que ser $\chi(Q) = \chi^{\text{orb}}(Q)$ y por lo tanto número entero. Luego d debe ser múltiplo de n , y entonces $\chi(Q) \geq n + 1$. Pero $n \geq 2$, y no existen superficies compactas conexas con característica de Euler mayor que 2. Luego la lágrima de orden n es un orbifold malo.

El segundo ejemplo son los *husos* (o peonzas, o limones) de biorden (n, m) . En este caso, las esferas tienen dos puntos críticos, con conos de órdenes n y m en dichos puntos. En el caso $n = m$, se trata del orbifold obtenido como cociente de la esfera por la acción por rotación de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, y por lo tanto un orbifold muy bueno. Pero en el caso $n \neq m$, el huso $H_{n,m}$ es malo, por exactamente la misma razón que las lágrimas.

Celulándolos con dos 0-celdas (puntos singulares), dos 1-celdas (pegadas con las 0-celdas formando un meridiano) y dos 2-celdas (pegadas al meridiano), se calcula que tienen orbi-característica $\chi^{\text{orb}}(H_{n,m}) = 1/n + 1/m - 2 + 2 = 1/n + 1/m$. Si $n \neq m$, los podemos asumir coprimos entre sí: escribiendo $c := \text{mcd}(n, m)$, el huso $H_{n/c, m/c}$ recubre a $H_{n,m}$ (es el cociente por la acción por rotación de $\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$). Ahora, si Q recubre a $H_{n,m}$ con un número finito d de hojas, se deberá tener $\chi^{\text{orb}}(Q)/\chi^{\text{orb}}(H_{n,m}) = d \in \mathbb{N}$. Pero entonces $d = \chi^{\text{orb}}(Q) \cdot nm/(n+m)$, y se puede comprobar que no hay modo de que este número sea entero (y positivo) con $\chi^{\text{orb}}(Q)$ también entero (y ≤ 2) cuando n y m son coprimos entre sí (basta aplicar el mismo argumento que para la lágrima). Luego los husos $H_{n,m}$ son malos, para $n \neq m$.

De hecho, estos son esencialmente todos los orbifolds malos bidimensionales compactos. Existen otras dos familias, que son el resultado de «partir» estos dos por la mitad: tomar cociente por una acción adecuada de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ por reflexión, de modo que topológicamente obtenemos discos (con borde), con esquinas singulares en los puntos donde había singularidades cónicas. Es decir, las lágrimas y los husos forman los recubridores dobles de estas otras dos familias.

Trataremos con más detalle esta clasificación en la siguiente sección.

3. Clasificación de los orbifolds bidimensionales compactos

Una vez motivado el problema y vistas las herramientas necesarias para este estudio, procedemos a clasificar las orbi-superficies compactas. Comentaremos primero el caso de los orbifolds no hiperbólicos, ya que el caso hiperbólico es significativamente más complicado.

3.1. Clasificación previa

Podemos realizar una primera clasificación rudimentaria, según la orbi-característica de Euler–Poincaré y la «bondad» del orbifold. Dado un orbifold bueno Q , diremos que es elíptico si $\chi^{\text{orb}}(Q) > 0$, plano (o parabólico) si $\chi^{\text{orb}}(Q) = 0$ e hiperbólico si $\chi^{\text{orb}}(Q) < 0$.

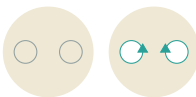
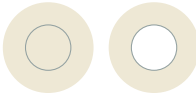

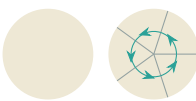

Por supuesto, esto es análogo a la clasificación que surge al clasificar las variedades riemannianas de curvatura constante. De hecho, el recubridor universal de un orbifold bueno será \mathbb{S}^2 , \mathbb{RP}^2 o \mathbb{H}^2 según si es elíptico, plano o hiperbólico, y podremos dotar a este orbifold de una métrica de curvatura constante (salvo en los puntos singulares) sin más que considerar la métrica inducida al tomar el cociente del recubridor por su grupo Deck.

Resulta, además, que todos los orbifolds malos (bidimensionales y compactos) tienen característica estrictamente positiva [Cho12, sec. 5.1.6, págs. 103-105; Mar23, Tª. 6.2.5, pág. 164].

Tras esta burda clasificación, nos acercamos a nuestra tienda de orbifolds preferida del barrio.

3.2. La tienda de orbifolds

Hemos obtenido, como regalo de Navidad, un orbifold. Eso es bueno, pero podría ser mejor; nuestro orbifold no es más que la esfera \mathbb{S}^2 . Y ni siquiera es una esfera picuda: su estructura es la de la esfera de toda la vida, con grupos de isotropía triviales en cada punto. Esto la convierte en una aburrida variedad, cuando nosotros queríamos un orbifold más raro. Por suerte, podemos acercarnos a la tienda de orbifolds (cuadro 1), donde por un módico precio nos venderán accesorios para orbifolds: asas, espejos, boinas, conos y gajos. Gracias al poder del capitalismo mercantil, podemos convertir nuestra triste esfera en el orbifold de nuestros sueños. Pero nuestra situación económica no es la mejor, así que solo podemos permitirnos gastar 2€ en piezas; quizás no sea suficiente para el orbifold de nuestros sueños (los orbifolds hiperbólicos son artículos de coleccionista), pero disponemos de alternativas bastante asequibles.⁷

Accesorio	Colección	Foto (antes/después)	Precio (€)	Identificador
Asa	Variedades		2	o
Espejo	Variedades con borde		1	*
Boina	Variedades		1	×
Cono (orden n)	Orbifolds		$\frac{n-1}{n}$	$n \cdots *$
Gajo (orden n)	Orbifolds con borde		$\frac{n-1}{2n}$	$* \cdots n$

NOTA AL CONSUMIDOR: Para instalar un gajo necesitas haber instalado previamente un espejo.

Cuadro 1: La tienda de orbifolds.

La pregunta «¿Qué accesorios para orbifolds podemos comprar con 2€ o menos?» nos proporciona, de hecho, la clasificación de los orbifolds bidimensionales compactos no hiperbólicos, que detallaremos en la sección 3.3. Este es el llamado *Teorema Mágico de Conway*. Esto es así ya que cada accesorio no es más que una operación que podemos realizar sobre nuestro orbifold, y su precio es la variación que realiza dicha operación en la característica de Euler–Poincaré: $\chi^{\text{orb}}(Q) = 2 - \text{Precio}(Q)$.

La ventaja de razonar sobre el precio (o déficit, con la nomenclatura de [CH02]) de un orbifold en vez de directamente con su característica de Euler–Poincaré es puramente cosmética; hace que los números empiecen en 0 y sean estrictamente positivos, en vez de empezar en 2 y disminuir desde ahí. Pero lo más importante de escribir las operaciones a modo de tienda es que nos hemos limitado a una serie de operaciones que solo *aumentan* el precio, mientras que las operaciones que se nos podrían ocurrir realizar pueden variar la característica de un modo menos robusto (por ejemplo, la operación básica de eliminar un asa *disminuye* el precio).

Habría que comprobar, claro está, que estas operaciones son suficientes para obtener cualquier orbifold que queramos. También hace falta tener cuidado de cuándo dos compras distintas nos proporcionan el mismo orbifold; por poner un ejemplo hiperbólico, el hecho de

⁷Las sucursales internacionales de la tienda (fundada originalmente en Minneapolis en 1991, véase [Con+91]) tomaron la decisión de convertir los precios siguiendo la convención de $\$1 = 1\text{€}$ en vez de ajustarse al cambio de divisas, lo cual perjudica al público europeo. Milagrosamente, estos precios se han resistido a la inflación desde entonces. No sabemos cómo ha logrado mantenerse a flote esta tienda, pero nos alegramos de que siga aquí.

que $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \cong \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}^2$ se traduce en que $\times \times \times$ debe representar lo mismo que $\circ \times$. No entraremos en demasiado detalle, pero comentaremos cómo se resuelven estas cuestiones en el caso general en las secciones 3.3 y 3.4. La segunda de ellas es especialmente sutil; para el caso particular que nos involucra, y especialmente para el caso plano (que es finito), es fácil convencerse de ello informalmente.

Notar que los 3 primeros accesorios de la tienda corresponden a operaciones de variedades (con borde, en el caso de los espejos), luego en particular se tiene la clasificación de superficies compactas con borde que admiten métricas elípticas o planas (que ya conocíamos). De hecho, el número de asas es el género de la superficie, el número de espejos es el número de componentes conexas del borde y el número de boinas es lo que a veces se llama *demigénero* de una superficie no orientable. Esto se suele escribir como la identidad $\chi(M) = 2 - 2g - b - k$, o las relacionadas (por ejemplo, $2 - 2g$ para superficies orientables o $2 - k$ para superficies no orientables, en ambos casos sin borde).

Este mismo argumento puede usarse para clasificar los tipos de simetría de la esfera y del plano: cada accesorio corresponde a un tipo de transformación del espacio, y obtenemos nuestro orbifold como el cociente \tilde{Q}/Γ de su recubridor universal \tilde{Q} (aquí \mathbb{S}^2 ó \mathbb{R}^2) por el subgrupo de transformaciones $\Gamma \subset \text{Isom } \tilde{Q}$ que estemos considerando. En el cuadro 2 damos un diccionario entre los accesorios de la tienda de orbifolds, las transformaciones del plano euclídeo a las que corresponden y la nomenclatura peculiar que utiliza Conway (por ejemplo en [CBG08]).

Accesorio	Transformación	Conway	Precio	Notación
Asa	Doble traslación	<i>Wonder</i>	2	\circ
Espejo	Reflexión ($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)	<i>Mirror</i>	1	$*$
Boina	Reflexión con deslizamiento	<i>Miracle</i>	1	\times
Cono	Rotación (interior, cíclico $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)	<i>Gyration</i>	$\frac{n-1}{n}$	$n \cdots *$
Gajo	Rotación (borde, diédrico D_n)	<i>Kaleidoscope</i>	$\frac{n-1}{2n}$	$* \cdots n$

Cuadro 2: Diccionario de nomenclatura y notación.

Notar también que podemos usar la clasificación que nos proporciona la tienda en el orden inverso: podemos identificar un accesorio, marcarlo y eliminarlo de nuestro orbifold o de nuestro tipo de simetría. Tenemos por lo tanto un *algoritmo* clasificador, si bien puede resultar algo tedioso.

Pasamos, ahora, al principal resultado de este trabajo.

3.3. Clasificación de los orbifolds bidimensionales compactos no hiperbólicos

¿Por qué la tienda de orbifolds tenía tan solo 5 accesorios? Es sencillo: porque las asas y las boinas son rasgos puramente topológicos, y los otros tres son los únicos *modelos locales* posibles de un orbifold bidimensional [Thu79, Prop 13.3.1, pág. 308].

Vamos a comentar algo más sobre este resultado, principalmente porque no todos los días se tiene la oportunidad de citar un teorema de da Vinci. Primero, una reducción del problema.

Teorema 3.1. Todo orbifold Q es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n/Γ , con Γ un subgrupo finito de $O_{\mathbb{R}}(n)$ (el grupo ortogonal de orden n actuando por isometrías sobre \mathbb{R}^n).

Teorema 3.2 (da Vinci). Cualquier subgrupo finito de $O_{\mathbb{R}}(2)$ es conjugado a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ o a D_n .

Dudamos que Leonardo da Vinci lo enunciara así, pero cosas más raras se dicen de él.

En cualquier caso, esto resuelve el primero de nuestros problemas: la tienda de orbifolds no necesita expandirse, por el momento.

Habiendo detallado que estas 5 partes son suficientes, podemos pasar a tabular las posibles compras por un valor menor o igual a 2€. Basta con listarlas mecánicamente; aquí aún no se

manifiesta el problema de que dos firmas distintas representen el mismo orbifold (salvo los casos obvios, como ciertas reordenaciones de símbolos).

En la figura 7 damos los 17 grupos cristalográficos planos posibles, salvo isomorfismo. El cociente del plano \mathbb{R}^2 por cada uno de ellos nos proporciona un orbifold, de modo que esta es también la clasificación de orbi-superficies planas compactas (salvo isomorfismo). De izquierda a derecha y de arriba a abajo, los 4 primeros son variedades (algunas con borde), y corresponden a las superficies compactas de curvatura constante nula: el toro, el cilindro, la banda de Möbius y la botella de Klein. El siguiente es un plano proyectivo con 2 puntos singulares (conos de orden 2). Los 8 siguientes son topológicamente discos con borde, y los 4 últimos son esferas. De hecho, la última fila corresponde a los recubridores dobles de la fila anterior, como vimos en la sección 2.1. Y también son recubridores de la segunda fila: 222 recubre 22*2 (cuádruple) y 22* (doble), 333 recubre 3*3 (doble) y 442 recubre 4*2 (doble).

Ya de paso, comentar que el primer ejemplo de orbifold que dimos (figura 1) corresponde al orbifold de signatura 333; es una «almohada» triangular equilátera.

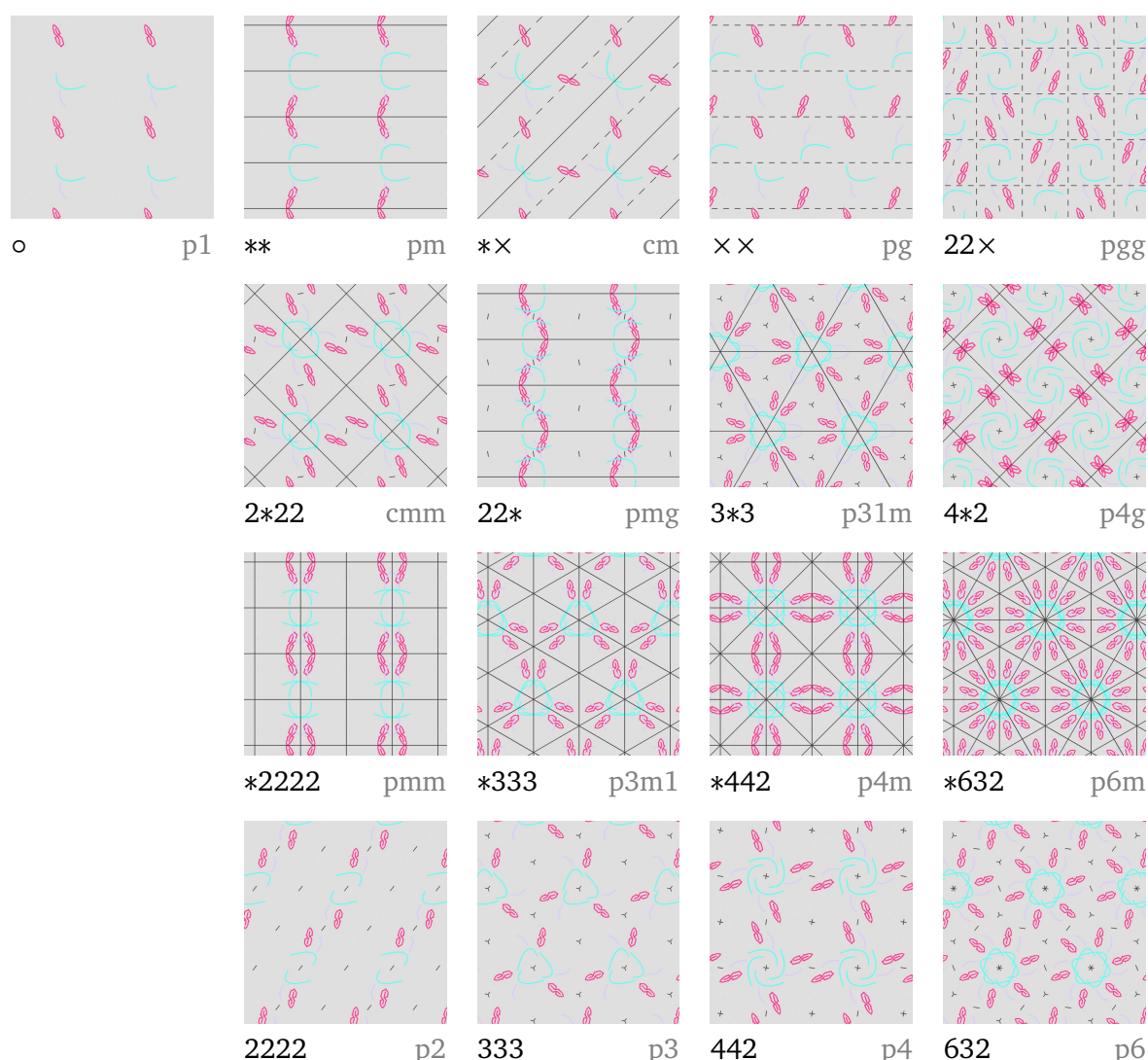


Figura 7: Los 17 grupos cristalográficos planos, en notación orbifold y de Hermann–Mauguin. Patrones realizados mediante la aplicación KaleidoPaint v.2.8.1 para Android (Jeffrey R. Weeks, 2016).

Licencia GPLv2. URL: <https://www.geometrygames.org/KaleidoPaint/index.html.en>.

Del mismo modo, podemos clasificar sin mucha dificultad los orbifolds malos y los orbifolds elípticos (aunque aquí empiezan a aparecer familias infinitas). Concluimos así con nuestro resul-

tado principal: la clasificación de los orbifolds bidimensionales compactos no hiperbólicos⁸ (cuadro 3, adaptado de [Thu79, T^a 13.3.6] con la notación de [CH02]).⁹

Tipo	Topología	Signaturas
Malo	\mathbb{S}^2	n, nm (con $n \neq m$)
Malo	\mathbb{D}^2	$*n, *nm$ (con $n \neq m$)
Elíptico	\mathbb{S}^2	$nn, 22n, 332, 432, 532$
Elíptico	\mathbb{D}^2	$n*, 3*2, 2*n, *nn, *22n, *332, *432, *532$
Elíptico	\mathbb{RP}^2	$n \times$
Plano	\mathbb{S}^2	$2222, 333, 442, 632$
Plano	\mathbb{D}^2	$2*22, 22*, 3*3, 4*2, *2222, *333, *442, *632$
Plano	\mathbb{RP}^2	$22 \times$
Plano	\mathbb{T}^2	\circ
Plano	Klein	$\times \times$
Plano	$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$	$**$
Plano	Möbius	$* \times$

Cuadro 3: Clasificación de los orbifolds bidimensionales compactos no hiperbólicos.

3.4. Sobre la clasificación de los orbifolds bidimensionales compactos hiperbólicos

Justificar los resultados de esta sección está muy lejos del alcance de este trabajo, así que nos limitaremos a enunciar algunos resultados importantes del capítulo 18 de [CBG08]. Por comodidad, usaremos la nomenclatura de Conway; véase el diccionario del cuadro 2.

Sea un grupo de simetrías hiperbólicas, en notación orbifold (es decir, su *signatura*):

$$\cdots \circ \circ \circ ABC \cdots *a_1 b_1 c_1 \cdots *a_2 b_2 c_2 \cdots *a_n b_n c_n \cdots \times \times \times \cdots.$$

Las siguientes operaciones no cambian el tipo de isotopía, y por lo tanto permiten crear un algoritmo que determine un representante canónico para cada clase de equivalencia.

- Intercambiar un \circ y un \times por $\times \times \times$.
- Permutar los dígitos A, B, C, \dots (giraciones).
- Permutar *cíclicamente* los dígitos a_k, b_k, c_k, \dots de un caleidoscopio.
- Permutar las porciones $*a_1 b_1 c_1 \cdots, *a_2 b_2 c_2 \cdots, \dots, *a_n b_n c_n \cdots$ de la signatura correspondientes a cada caleidoscopio individual.
- Invertir *simultáneamente* el orden cíclico de cada una de las n porciones caleidoscópicas.
- Si la signatura contiene un \times (es decir, la orbi-superficie es no orientable), podemos invertir *independientemente* el orden cíclico de cualquier porción caleidoscópica (en contraposición a la regla anterior).

Estas operaciones bastan: dos signaturas representan grupos de transformaciones isotópos si y solo si se puede pasar de una a otra mediante estas reglas. En particular, si dos orbifolds

⁸El caso hiperbólico, como de costumbre, es más complicado: no tenemos limitaciones de precio, y podemos comprar tantas partes como queramos en nuestra tienda. Adentrarse en la clasificación de los grupos cristalográficos hiperbólicos (o NEC) está lejos del alcance de este trabajo, pero reproduciremos algunos resultados importantes en la sección 3.4.

⁹En el caso de las familias infinitas puede tomarse $n = 1$, que normalmente se obviaría en la notación, ya que esto corresponde a una rotación trivial (la acción de grupo de $\mathbb{Z}/1\mathbb{Z} = \{1\}$). Por ejemplo, la esfera \mathbb{S}^2 se puede cocientar por la acción de grupo nn con $n = 1$, y esto es equivalente a no hacer nada; o por la acción de grupo $n*$ con $n = 1$, que no es más que identificar dos hemisferios entre sí.

son homeomorfos de un modo que preserva el orden de sus conos y de sus gajos, de hecho son isotópos. (La definición de isotopía es la que uno espera, generalizando la de variedades).

Notar que, salvo los casos obvios de permutaciones de dígitos, ninguna de estas reglas es relevante para los casos no hiperbólicos; no tenemos suficiente presupuesto como para que puedan aparecer múltiples espejos con gajos asociados o espejos con más de 3 gajos (donde comienza a ser importante que las permutaciones sean cíclicas).

Otro resultado llamativo, aunque no tan relacionado, que se comenta en [CBG08, pág. 237]: dada una signatura en notación orbifold, el espacio de móduli de grupos de transformaciones con dicha signatura es homeomorfo a \mathbb{R}^n , donde $n = -3 \cdot \chi_3^{\text{orb}}$ con χ_3^{orb} la característica de Euler–Poincaré de la signatura obtenida cambiando todos los números por treses. Hay unas pocas excepciones ($*nn$, $n*$, $n\times$, nn , $**$, $*\times$, $\times\times$ y \circ), que no son difíciles de estudiar por separado. Por ejemplo, el móduli de cada una de las tres almohadas triangulares (333, 442, y 632) tendrá dimensión 0 (luego será un único punto), mientras que el móduli de almohadas cuadradas (2222) tendrá dimensión 2 (como se podría esperar: tenemos libertad sobre las dimensiones del rectángulo, tanto altura como anchura).

Armados con el resultado que nos permite deducir cuándo dos signaturas son equivalentes, no debería resultar difícil enumerar los orbifolds hiperbólicos compactos. Solo hay un problema: son infinitos grupos, así que necesitamos un modo coherente de ordenarlos. Para esto, se pueden emplear ordinales transfinitos, que tienen la ventaja de permitir enumerar los números racionales en orden monótono; en particular, podemos ordenar las posibles características de Euler–Poincaré de modo decreciente. Y por supuesto, en cada característica tendremos tan solo un número finito de orbifolds posibles, luego esto nos proporciona una enumeración completa.

Las primeras ω entradas (esto es, los números finitos) corresponden a los orbifolds elípticos (con características empezando en 2 y decreciendo), la entrada número ω corresponde a los 17 grupos cristalográficos planos (es decir, característica 0) y las entradas posteriores corresponden a orbifolds hiperbólicos cada vez más complejos.

Se puede consultar la tabla en [CBG08, págs. 239-240] (o reproducida parcialmente en Wikipedia¹⁰, aunque sin los ordinales correspondientes). Preferimos no reproducirla aquí.

Bibliografía

Realizamos aquí algunos comentarios sobre las principales fuentes consultadas.

Por supuesto, cabe destacar en primer lugar la obra que introdujo la nomenclatura «orbifold»: las notas mecanografiadas y nunca publicadas¹¹ de Thurston, [Thu79], que circularon por Princeton a principios de los 80. Un detalle: la edición consultada data de 2002, y se trata de una versión digital compuesta en $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ por Sheila Newbery, más cómoda de leer que la original.¹²

Consultamos como obra principal, también, [Dav11], donde se sigue un enfoque más moderno.

La estructura de la exposición está inspirada en un seminario de doctorandos impartido por Willie Rush Lim, [Lim21a], que a su vez se desarrolla por escrito en las entradas de su blog [Lim21b; Lim21c]. Esta sigue mayoritariamente la estructura de las dos referencias ya comentadas, pero con ciertas simplificaciones útiles. Hemos partido de esta base, y expandido o resimplificado ciertas secciones.

Buscando más información sobre la clasificación, llegamos inevitablemente a Conway.

Por una parte, [Con+91] se trata de una serie de suplementos (notas y ejercicios) para un taller impartido en junio de 1991. Aquí se introduce por primera vez (hasta donde hemos podido comprobar) la famosa tienda de orbifolds, pero no se incluyen las demostraciones relevantes.

Finalmente, tenemos el libro [CBG08], altísimamente recomendado y que logra ser tan divulgativo e informal como minucioso y profundo. Lo relevante para nosotros es la primera

¹⁰URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Orbifold_notation#Hyperbolic_plane

¹¹Hasta 2022, cuando se publicaron sus obras completas: [Thu22].

¹²El «manuscrito» original, mecanografiado, se puede consultar en Internet Archive: <http://archive.org/details/ThurstonTheGeometryAndTopologyOfThreeManifolds>.

parte, capítulos 1–9, donde se utiliza el Teorema Mágico para demostrar varios problemas de clasificación: la de los 17 tipos de simetría plana (o, si se prefiere, grupos cristalográficos planos u orbifolds compactos planos), los 14 tipos de simetría esférica¹³ y los 7 tipos de frisos. Se justifican, después, mediante la característica de Euler–Poincaré y la clasificación de las superficies compactas con borde (para la que se utiliza la famosa *ZIP Proof* de Conway). Conforme avanza el libro, se vuelve más y más técnico; por ejemplo, el capítulo 18 (de 26 totales) trata la clasificación *completa* de grupos hiperbólicos bidimensionales (es más, define un orden completo en el conjunto de tales grupos), y no voy a fingir haber entendido este contenido más allá de lo superficial.

Un enfoque más escueto (y un pelín menos colorido en pos del rigor académico, pero manteniendo aún así el maravilloso estilo de Conway) de la primera parte se encuentra en [CH02].

Bibliografía principal

- [CBG08] J. H. CONWAY, H. BURGIEL y C. GOODMAN-STRAUSS. *The Symmetries of Things*. New York: A K Peters/CRC Press, 2008. DOI: [10.1201/b21368](https://doi.org/10.1201/b21368).
- [Dav11] M. W. DAVIS. «Lectures on Orbifolds and Reflection Groups». 2011. URL: <https://people.math.osu.edu/davis.12/papers/lectures%20on%20orbifolds.pdf>.
- [Lim21a] W. R. LIM. «What is... an Orbifold?» Stony Brook University Math Graduate Student Seminar (Stony Brook University). 2021. URL: https://www.youtube.com/watch?v=AuHZgJ_k9os.
- [Thu79] W. P. THURSTON. «Orbifolds». En: *The Geometry And Topology Of Three-Manifolds*. 1979, págs. 297-355. URL: <https://library.slmath.org/books/gt3m/>.

Bibliografía adicional

- [Bae08] J. C. BAEZ. *Week 267*. This Week's Finds in Mathematical Physics. 2008. URL: <https://math.ucr.edu/home/baez/week267.html>.
- [Car22] F. C. CARAMELLO JR. *Introduction to Orbifolds*. 2022. arXiv: [1909.08699](https://arxiv.org/abs/1909.08699) [math.DG].
- [CH02] J. H. CONWAY y D. H. HUSON. «The Orbifold Notation for Two-Dimensional Groups». En: *Structural Chemistry* 13.3 (2002), págs. 247-257. DOI: [10.1023/A:1015851621002](https://doi.org/10.1023/A:1015851621002).
- [Cho12] S. CHOI. *Geometric Structures on 2-Orbifolds: Exploration of Discrete Symmetry*. Mathematical Society of Japan Memoirs 27. Tokio: The Mathematical Society of Japan, 2012. DOI: [10.2969/msjmemoirs/027010000](https://doi.org/10.2969/msjmemoirs/027010000).
- [Con+91] J. H. CONWAY, P. G. DOYLE, J. P. GILMAN y W. P. THURSTON. *Geometry and the Imagination in Minneapolis*. The Geometry Center. 1991. URL: <http://www.geom.uiuc.edu/docs/doyle/mpis/handouts/handouts.html>.
- [Lim21b] W. R. LIM. *Orbifolds*. 2021. URL: <https://willierushrush.github.io/posts/2021/02/orbifolds>.
- [Lim21c] W. R. LIM. *Classification of 2-D Orbifolds*. 2021. URL: <https://willierushrush.github.io/posts/2021/02/classification-of-2-d-orbifolds>.
- [Mar23] B. MARTELLI. *An Introduction to Geometric Topology*. 3.^a ed. 2023. URL: https://people.dm.unipi.it/martelli/geometric_topology.html.
- [Thu22] W. P. THURSTON. *The Geometry and Topology of Three-Manifolds: With a Preface by Steven P. Kerckhoff*. Vol. IV. Collected Works 27. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2022. ISBN: 978-1-4704-6391-5.

¹³Sería más apropiado decir que hay $7 \cdot \infty + 7$ tipos de simetría esférica: existen 7 familias infinitas y 7 tipos aislados.