Bài 3
Giới thiệu về xác suất

Nội dung

- Tóm tắt
  - Định nghĩa xác suất, 3 tiên đề, 5 tính chất
  - Tính xác suất, phương pháp đếm
  - Tính xác suất của biến cố hợp, biến cố giao

  - Từ khóa
  - Xác suất (probability), biến cố (event), không gian mẫu (sample space)

Thuật ngữ

Thí nghiệm (random experiment): một tiến trình ngẫu nhiên (hậu quả của nó không thể biết trước được)

Ví dụ:

a) Thí nghiệm tung đồng xu.
b) Thí nghiệm xem 1 người oẳn tù xì
c) Thí nghiệm tung xí ngầu.
d) Thí nghiệm rút lá bài tây.
e) Thí nghiệm đo khoảng thời gian giữa 2 cuộc gọi liên tiếp đến tổng đài 1080
f) Thí nghiệm chọn ngẫu nhiên một linh kiện trong một lô hàng để kiểm tra chất lượng của linh kiện.
g) Thí nghiệm bắn súng vào bia cho đến khi bắn trật thì dừng.

Thuật ngữ

- Hậu quả (outcome): kết quả của thí nghiệm
  a) Ví dụ: Tung được đồng xu mặt sấp.
  b) Oẳn tù xì ra kéo.
  c) Tung xí ngầu được 2 điểm.
  d) Rút lá bài tây được con ách cơ.
  e) Đo được khoảng thời gian là 1 phút
  f) Linh kiện kiểm tra bị lỗi.
  g) Bắn 2 viên trúng, 1 viên trật rồi dừng.

Thuật ngữ

- Không gian mẫu (sample space): **tập hợp** tất cả các hậu quả có thể xảy ra của một thí nghiệm. Ký hiệu: S

  Ví dụ:

  a) Không gian mẫu của thí nghiệm tung đồng xu là {mặt sấp, mặt ngửa}

  e) Giả sử biết rằng khoảng thời gian giữa 2 cuộc gọi đến tổng đài 1080 có khả năng là giá trị bất kỳ nào trong khoảng [10 giây, 600 giây]. Không gian mẫu của thí nghiệm này là khoảng giá trị [10 giây, 600 giây]

  g) Không gian mẫu của thí nghiệm bắn súng vào bia là: {1 viên trật rồi dừng, 1 viên trúng-1 viên trật-dừng, 2 viên trúng-1 viên trật-dừng, 3 viên trúng-1 viên trật- dừng,…}

  - Không gian mẫu rời rạc (discrete)
    - Không gian mẫu hữu hạn: ví dụ a)
    - Không gian mẫu vô hạn đếm được: ví dụ g)
  - Không gian mẫu liên tục (continuous): ví dụ e)

Thuật ngữ

- Biến cố (event): một **tập hợp con** của không gian mẫu. Ký hiệu: A, B, C,…
  - Ví dụ: a) Cho không gian mẫu S={sấp, ngửa}

    A={sấp} là một biến cố, B={sấp, ngửa} là biến cố, C=Ø là biến cố
- Biến cố rời rạc: biến cố hữu hạn hoặc vô hạn đếm được
  - Ví dụ: a) A, B là biến cố hữu hạn
  - g) C=số viên bắn trúng là số chẵn={0 trúng-1 trật, 2 trúng-1 trật, 4 trúng-1 trật,…} là biến cố vô hạn đếm được
- Biến cố liên tục
  - e) D=khoảng thời gian gọi ít hơn 1 phút=[10 giây, 60 giây) là biến cố liên tục

Thuật ngữ

- Biến cố rỗng: biến cố không chứa bất kỳ hậu quả nào. Ký hiệu **Ø**

Ví dụ: C={nằm nghiêng}= Ø, D={2 đồng xu mặt sấp}= Ø

- Biến cố bù (complement event) của biến cố A trong không gian mẫu S: là biến cố chứa tất cả các hậu quả có trong S nhưng không có trong A. Ký hiệu: A^c

Ví dụ: A^c = {ngửa}

Thuật ngữ

- Biến cố hợp (union): Hợp của hai biến cố A và B là biến cố chứa tất cả các thành phần của A và B. Ký hiệu: $A \cup B$, $A+B$

Ví dụ: A+B={sấp, ngửa}

- Biến cố giao (intersection): Giao của hai biến cố A và B là biến cố chứa các thành phần vừa thuộc A vừa thuộc B. Ký hiệu: $A \cap B$, AB, $A \times B$

Ví dụ: AB={sấp}

Thuật ngữ

- Hai biến cố tách rời (disjoint events, mutually exclusive events) A và B: nếu AB= Ø

  Ví dụ: A, A^c là 2 biến cố tách rời

- Hai biến cố độc lập A và B (independent events): biến cố A xảy ra không ảnh hưởng đến khả năng biến cố B xảy ra và ngược lại.
  - Ví dụ: Thí nghiệm tung đồng xu 2 lần.

  A=biến cố tung đồng xu lần 1 được mặt ngửa: luôn là 50% khả năng xảy ra

  B=biến cố tung đồng xu lần 2 được mặt ngửa: luôn là 50% khả năng xảy ra

Bài tập

- Xét thí nghiệm (d) (f). Xác định:
  - Hậu quả có thể có của thí nghiệm
  - Không gian mẫu của thí nghiệm. Phân loại không gian mẫu: rời rạc/ liên tục
  - Cho 2 ví dụ về biến cố của thí nghiệm. Phân loại biến cố: rời rạc/ liên tục. Xác định biến cố bù của biến cố vừa cho ví dụ. Xác định biến cố hợp của 2 biến cố ví dụ. Xác định biến cố giao của 2 biến cố ví dụ.
  - Cho 2 ví dụ về biến cố rỗng của thí nghiệm.
- Cho ví dụ về 2 biến cố độc lập.

Định nghĩa

- Khái niệm **xác suất** của biến cố: là một *số thực* diễn tả khả năng xảy ra của một *biến cố*.
  - Ví dụ: Trong trận bóng Việt Nam-Lào sắp tới, *95%* khả năng Việt Nam sẽ thắng.
  - Chiều nay *70%* khả năng trời sẽ mưa.
- Định nghĩa xác suất: là một số thực thỏa các tiên đề sau:
  - Với mọi biến cố A, 0≤Pr(A) ≤ 1.
  - Pr(S) = 1.
  - Với dãy vô hạn các biến cố tách rời A_1, A_2, … thì :

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(A_i)$$

Mệnh đề (Trường hợp rời rạc, hữu hạn) $\Pr(A) = \sum_{a \in A} \Pr(a)$

Lưu ý: Trường hợp biến cố liên tục $\Pr(A) = \int \Pr(a)$

Ví dụ

g) Xét thí nghiệm bắn súng vào bia

S={1 trật, 1 trúng-1 trật, 2 trúng-1 trật, …} là không gian mẫu.

$$Pr(S) = 1$$

A_1={1 trật} ; A_2={1 trúng-1 trật}; A_3={2 trúng-1 trật}; A_4={3 trúng-1 trật}; ….

là dãy vô hạn các biến cố tách rời nhau đôi một. Khả năng xảy ra biến cố hợp của các biến cố trên:

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(A_i)$$

e) D=khoảng thời gian gọi ít hơn 1 phút=[10 giây, 60 giây) là biến cố liên tục

$$\Pr(D) = \int_{d=10}^{60} \Pr(d)$$

Tính chất

$0 \leq \Pr(A) \leq 1$, $\forall$ biến cố A.

$\Pr(\varnothing) = 0$

$\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A)$, $\forall$ biến cố A.

Nếu $A \subset B$ thì $\Pr(A) \leq \Pr(B)$.

Cho dãy n biến cố tách rời $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i)$$

$\forall$ biến cố A, B,

$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(AB)$.

Ví dụ

a) C={nằm nghiêng}= Ø,

Pr(C) = Pr(Ø) = 0

A={sấp}

Pr(A)=1/2

$Pr(A^c)=1-Pr(A)=1-1/2=1/2$

$A \subset S \Rightarrow Pr(A) < Pr(S)$ (đúng vì ½ < 1)

$Pr(A \cup A^c)=Pr(A)+Pr(A^c)=1/2 + 1/2 =1$

$Pr(A \cup S) = Pr(A) + Pr(S) – Pr(AS)=1/2 + 1 –$ Pr({sấp})=1/2+1-1/2=1

Phương pháp tính xác suất

$$\Pr(A) = \sum_{a \in A} \Pr(a)$$

- Trường hợp các hậu quả có xác suất xảy ra là như nhau (khi đó không gian mẫu S được gọi là *không gian mẫu tự nhiên*).

  Pr(a) = 1/|S|

$$\Pr(A) = \sum_{a \in A} \Pr(a) = \frac{|A|}{|S|}$$

  => Cần xác định: Kích thước không gian mẫu & Kích thước biến cố

  => ***Phương pháp đếm để xác định kích thước tập hợp***

- Lưu ý: trong trường hợp không gian mẫu là liên tục

$$\Pr(A) = \int_a \Pr(a)$$

Một số phương pháp đếm

- Liệt kê: ghi ra tất cả các khả năng có thể có của một biến cố
- Quy tắc nhân: $n_1 \times n_2 \times \dots$

->Áp dụng: thí nghiệm chia làm nhiều giai đoạn

- Chỉnh hợp (hoán vị) (Permutation)

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

->Áp dụng: lấy mẫu có thứ tự, không lặp lại

- Tổ hợp (Combination)

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

->Áp dụng: lấy mẫu không có thứ tự

Ví dụ

- Xét thí nghiệm xem 1 người chơi oẳn tù xì. Xác định xác suất người đó không ra bao.

Không gian mẫu S = {kéo, búa, bao} => |S|=3

Gọi A = biến cố không ra bao

$\Rightarrow$A={kéo, búa} => |A|=2

$$\Pr(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{2}{3}$$

Ví dụ

- Xét thí nghiệm xem 3 người chơi oẳn tù xì cùng lúc. Xác định xác suất cả 3 người đều ra kéo.

A = biến cố cả 3 người đều ra kéo = {(kéo, kéo, kéo)} => |A|=1

Xác định kích thước không gian mẫu S bằng quy tắc nhân:

Xét người 1: có n_1=3 khả năng: kéo, búa, bao

Xét người 2: có n_2=3 khả năng: kéo, búa, bao

Xét người 3: có n_3=3 khả năng: kéo, búa, bao

$\Rightarrow$Có tổng cộng $n_1 \times n_2 \times n_3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$ khả năng => |S|=27

$\Rightarrow$Pr(A)=1/27

Ví dụ

- Một hộp gồm có 5 viên bi khác nhau. Xét thí nghiệm **lần lượt** chọn 3 viên bi bất kỳ. Xác định kích thước của không gian mẫu S.

  |S| = số cách chọn lần lượt 3 viên bi từ hộp 5 viên bi = số chỉnh hợp 5 chọn 3

$$P_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

Ví dụ

- Một hộp gồm có 5 viên bi khác nhau. Xét thí nghiệm chọn **cùng lúc** 3 viên bi bất kỳ. Xác định kích thước của không gian mẫu S.

  |S| = số cách chọn cùng lúc 3 viên bi từ hộp 5 viên bi (thứ tự 3 viên bi được chọn không quan trọng) = số tổ hợp 5 chọn 3

$$C_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!3!} = 10$$

Bài tập

- Có 2 con đường từ thành phố A qua thành phố B, 3 con đường từ thành phố B qua thành phố C. Giả sử trong tất cả các con đường, chỉ có duy nhất 1 con đường ngắn nhất.
- Bạn An chọn ngẫu nhiên 1 con đường để đi từ A đến C. Xác định xác suất An chọn ngẫu nhiên đúng ngay con đường ngắn nhất.

Bài tập

- Trong lớp có 25 sinh viên. Xác định
  a) Giả sử lớp cần chọn ra 1 lớp trưởng bằng cách chọn ngẫu nhiên.

  Xác định không gian mẫu.

  Xác định xác suất bạn Bình (là sinh viên trong lớp) được chọn làm lớp trưởng.

  a) Giả sử lớp cần chọn 1 lớp trưởng và 1 lớp phó bằng cách chọn ngẫu nhiên. Xác định xác suất Bình được chọn làm lớp trưởng, An được chọn làm lớp phó.

  b) Giả sử lớp cần chọn 1 lớp trưởng và 1 lớp phó bằng cách chọn ngẫu nhiên. Xác định xác suất Bình được chọn làm lớp trưởng.

Xác suất của biến cố phức hợp

- Khái niệm
- Tính xác suất của biến cố hợp
- Tính xác suất của biến cố giao

Biến cố hợp - biến cố giao

Khái niệm biến cố phức hợp:

- Biến cố hợp (union): Hợp của hai biến cố A và B là biến cố chứa tất cả các thành phần của A và B. Ký hiệu: $A \cup B$, $A+B$
- Biến cố giao (intersection): Giao của hai biến cố A và B là biến cố chứa các thành phần vừa thuộc A vừa thuộc B. Ký hiệu: $A \cap B$, AB, $A \times B$

Tính xác suất của biến cố hợp

Luật cộng (additional rule):

$\Pr(A_1 \cup A_2) = \Pr(A_1) + \Pr(A_2) - \Pr(A_1 A_2)$

$\Pr(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \Pr(A_1) + \Pr(A_2) + \Pr(A_3)$

$- [\Pr(A_1 A_2) + \Pr(A_2 A_3) + \Pr(A_1 A_3)]$

$+ \Pr(A_1 A_2 A_3)$

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i) - \sum_{i<j} \Pr(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} \Pr(A_i A_j A_k)$$

$$- \sum_{i<j<k<l} \Pr(A_i A_j A_k A_l) + \ldots$$

$$+ (-1)^{n+1} \Pr(A_1 A_2 \ldots A_n).$$

Trường hợp các biến cố tách rời: tính chất 4

Ví dụ

- Một công ty kiểm tra chất lượng của 130 bóng đèn dựa trên 2 tiêu chí: kiểu dáng, cường độ sáng. Kết quả như sau.

		Kiểu dáng	
		Đạt	Không đạt
Cường độ sáng	Đạt	117	3
	Không đạt	8	2

- Chọn ngẫu nhiên 1 bóng đèn. Xác định xác suất bóng đèn không thỏa ít nhất 1 trong 2 tiêu chí trên.

Ví dụ

- Gọi A là biến cố bóng đèn đạt tiêu chí về cường độ sáng

=> $Pr(A)=(117+3)/130=120/130$

$\Rightarrow Pr(A^c)=1-120/130=10/130$

Gọi B là biến cố bóng đèn đạt tiêu chí về kiểu dáng

$\Rightarrow Pr(B)=(117+8)/130=125/130$

$\Rightarrow Pr(B^c)=5/130$

Biến cố bóng đèn không thỏa ít nhất 1 trong 2 tiêu chí trên: A^c+B^c

$Pr(A^c+B^c)=Pr(A^c)+Pr(B^c)-Pr(A^cB^c)=10/130 + 5/130 - 2/130=13/130$

Tính xác suất của biến cố giao

- Trường hợp các biến cố độc lập

$\Pr(A_1A_2) = \Pr(A_1) \times \Pr(A_2)$

$\Pr(A_1A_2\ A_3) = \Pr(A_1) \times \Pr(A_2) \times \Pr(A_3)$

$\Pr(A_1\ \ldots A_n) = \Pr(A_1) \times \ldots \times \Pr(A_n)$

Trường hợp biến cố không độc lập: Công thức xác suất có điều kiện (bài 3 – học sau)

Ví dụ

- Chọn ngẫu nhiên 1 bóng đèn để kiểm tra. Sau đó để lại bóng đèn đó vào vị trí cũ. Sau đó thực hiện lặp lại: chọn 1 bóng đèn để kiểm tra. Xác định xác suất cả 2 lần kiểm tra đều có kết quả không đạt.
- Gọi A là biến cố lần kiểm tra 1 có kết quả không đạt: Pr(A)=10/130

Gọi B là biến cố lần kiểm tra 2 có kết quả không đạt: Pr(B)=10/130

=> Xác suất cả 2 lần đều không đạt:

Pr(AB)=Pr(A)Pr(B)=10/130 . 10/130

Ví dụ

- Ví dụ về bài toán phong bì và thư

n lá thư khác nhau

n phong bì khác nhau

Hỏi: Xác định xác suất có ít nhất 1 lá thư đặt đúng phong bì

Biến cố A_i = lá thư thứ i đặt đúng phong bì

Biến cố A = có ít nhất 1 lá thư đặt đúng phong bì

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_i$$

A là biến cố hợp

Áp dụng

- Công thức biến cố hợp

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i) - \sum_{i<j} \Pr\left(A_i A_j\right) + \sum_{i<j<k} \Pr\left(A_i A_j A_k\right)$$

$$- \sum_{i<j<k<l} \Pr\left(A_i A_j A_k A_l\right) + \ldots + (-1)^{n+1} \Pr\left(A_1 A_2 \ldots A_n\right).$$

- Tính $\Pr(A_iA_j)$: áp dụng lấy mẫu không lặp lại

Xác suất để lá thư thứ i đặt đúng phong bì: 1/n

Sau khi lá thư thứ i đặt đúng phong bì, xác suất để lá thư thứ j đặt đúng phong bì: 1/(n-1)

$$\Pr\left(A_i A_j\right) = \frac{1}{n(n-1)}; \sum_{i<j} \Pr\left(A_i A_j\right) = C_n^2 \frac{1}{n(n-1)}$$

Bài tập

d) Giả sử trong lớp gồm 12 nữ, 13 nam. Lớp có 15 bạn là đoàn viên, trong đó có 7 bạn nam, 8 bạn nữ. Lớp cần chọn ngẫu nhiên 1 lớp trưởng.

Xác định xác suất lớp trưởng là nam hay là đoàn viên.

Xác định xác suất lớp trưởng là nữ hay là không phải đoàn viên.

Xác định xác suất lớp trưởng là nam và là đoàn viên.

Xác định xác suất lớp trưởng là nữ và không phải là đoàn viên.

Tóm tắt và từ khóa

- Tóm tắt
  - Định nghĩa xác suất, 3 tiên đề, 5 tính chất
  - Tính xác suất, phương pháp đếm
  - Tính xác suất của biến cố hợp, biến cố giao

  - Từ khóa
  - Xác suất (probability), biến cố (event), không gian mẫu (sample space)

Bài tập 1

- Trong một nhóm k người bạn ($2 \leq k \leq 365$). Tính xác suất để có ít nhất 2 người trong nhóm có cùng ngày sinh (cùng ngày, cùng tháng, có thể khác năm sinh), với giả thiết là trong nhóm không có các cặp sinh đôi, sinh ba,…và ngày 29 tháng 2 được xem như ngày 1 tháng 3.

Bài tập 2

Trong số 200 sinh viên đăng ký chuyên ngành có 137 sinh viên đăng ký Kỹ thuât Phần mềm (KTPM), 50 sinh viên đăng ký Khoa học máy tính (KHMT) và 124 sinh viên đăng ký Hệ thống thông tin (HTTT). Số sinh viên đăng ký cả 2 ngành KTPM và KHMT là 33, KHMT và HTTT là 29, KTPM và HTTT là 92 và số sinh viên đăng ký cả 3 ngành là 18. Hỏi xác suất một sinh viên bất kỳ (trong số 200 sinh viên) đăng ký ít nhất 1 trong 3 ngành?

Hướng dẫn

- Bài tập 1
  - Áp dụng luật bù
- Bài tập 2
  - Áp dụng công thức tính xác suất hợp