學號：B04901015 系級： 電機三 姓名：傅子興

請實做以下兩種不同feature的模型，回答第 (1) ~ (3) 題：

(1) 抽全部9小時內的污染源feature的一次項(加bias)

(2) 抽全部9小時內pm2.5的一次項當作feature(加bias)

備註：

a. NR請皆設為0，其他的數值不要做任何更動

b. 所有 advanced 的 gradient descent 技術(如: adam, adagrad 等) 都是可以用的

1. (2%)記錄誤差值 (RMSE)(根據kaggle public+private分數)，討論兩種feature的影響

	(1)	(2)
error	6.549355	6.621766

Discussion: 在public set 中， 只抽9小時內PM2.5的一次項feature效果比較好；不過在private set中卻是反過來。兩模型的誤差各自做完平均後，以抽取全部feature的training 所做出的模型error比較低。不過，因為我是以固定跑100萬次iteration作為termination的依據，所以時間上來說只抽取PM2.5會快很多。而且另外在自己實做的模型中，減少部相關的feature確實會使誤差減少。我自己試出最好的模型其實只有用到7個feature(其中五個是有到二次)。另外，檢測這結果發生的原因，可能單純是因為參數變多而使誤差下降，抽取全feature使誤差減小。

2. (1%)將feature從抽前9小時改成抽前5小時，討論其變化(根據kaggle public+private分數)

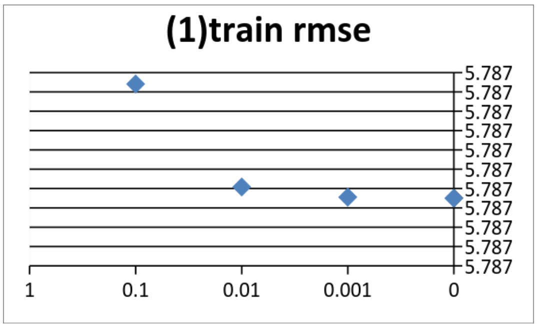
	(1)	(2)
9hr	6.549355	6.621766
5hr	6.645715	6.759839

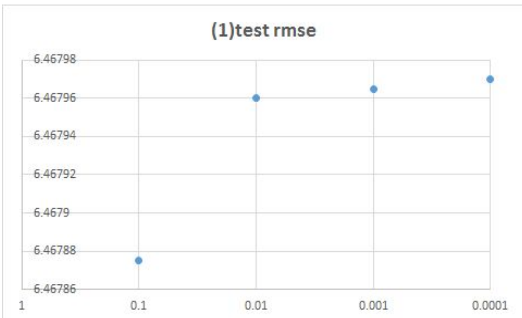
Discussion: 相比於9小時的兩個模型，5小時的兩個模型其實都相對誤差比較大，不論是在public 或是private set。推測其可能原因，有可能是因為參數變少使誤差上升，也有可能是因為6~9小時前的各項feature對於預測下一小時的PM2.5都有一定的相關性。整體而言，取較多小時的資料會使預測變精確，但也會使運算時間增長。 此外，兩的誤差上升比率1.47%，(2) 的誤差上升比率2.09% ，以(1)上升較少。

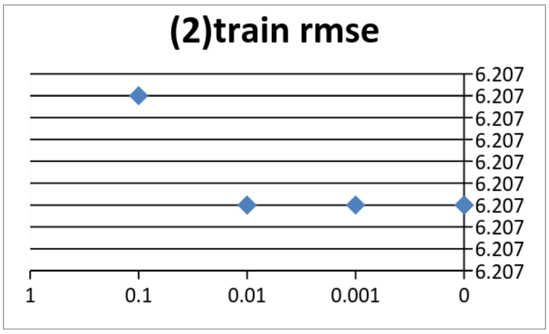
3. (1%)Regularization on all the weight with λ=0.1、0.01、0.001、0.0001，並作圖

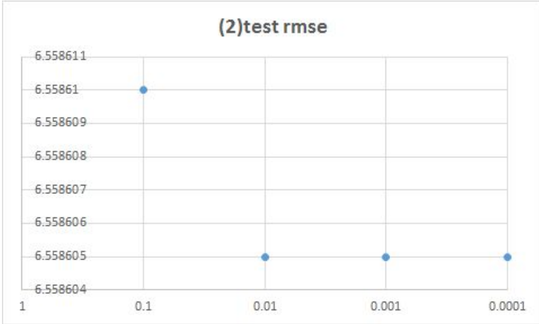
(training set err/ testing set err)

	(1)	(2)
0.1	5.78719881699/6.467875	6.20711447202/6.55861
0.01	5.78718816526/6.46796	6.20711447201/6.558605
0.001	5.78718710541/6.467965	6.20711447201/6.558605
0.0001	5.78718699948/6.46797	6.20711447201/6.558605









Discussion: 隨著λ越來越高，代表輸出的回歸線要越平滑，因此在training set 的error會越來越大；然而，在(2)中test set 上竟然也越來越大，這個與理論所學不甚相符，究所學應該會有最佳的λtest set error最小，但是在這次作業中似乎無法觀察到此現象。而在(1)，就比較符合預期的結果，有成功使test set 的error隨著λ上升而減少。

4. (1%)在線性回歸問題中，假設有 N 筆訓練資料，每筆訓練資料的特徵 (feature) 為一向量 x^n，其標註(label)為一存量 y^n，模型參數為一向量w (此處忽略偏權值 b)，則線性回歸的損失函數(loss function)為 $\sum_{n=1}^{N}(y^n - x^n \cdot w)^2$ 。若將所有訓練資料的特徵值以矩陣 $X = [x^1\ x^2 \ldots x^N]^T$ 表示，所有訓練資料的標註以向量 $y = [y^1\ y^2 \ldots y^N]^T$表示，請問如何以 X 和 y 表示可以最小化損失函數的向量 w ？請寫下算式並選出正確答案。(其中X^TX為invertible) Ans: (c)

(a) $(X^TX)X^Ty$
(b) $(X^TX)^{-0}X^Ty$
(c) $(X^TX)^{-1}X^Ty$
(d) $(X^TX)^{-2}X^Ty$

let $\hat{y} = X \cdot w$

$$\sum_j(\hat{y}(x_j)-y_j)^2 = (\hat{y}(x_1)-y_1, \ldots, \hat{y}(x_n)-y_n)\begin{pmatrix}\hat{y}(x_1)-y_1\\ \vdots \\ \hat{y}(x_n)-y_n\end{pmatrix} = (\hat{y}-y)^T(\hat{y}-y)$$

$$\hat{y} = \begin{pmatrix}\hat{y}(x_1)\\ \vdots \\ \hat{y}(x_n)\end{pmatrix} = X\cdot w \quad \Rightarrow \quad \sum_j(\hat{y}(x_j)-y_j)^2 = (Xw-y)^T(Xw-y)$$

$$\frac{d}{dw}(Xw-y)^T(Xw-y) = \frac{d}{dw}(w^TX^TXw - w^TX^Ty - y^TXw + y^Ty)$$

$$= 2X^TXw - 2X^Ty = 0 \quad \Rightarrow \quad X^TXw - X^Ty = 0$$

$$\Rightarrow \quad w = (X^TX)^{-1}X^Ty \quad (\text{if } X^TX \text{ is invertible})$$