Zadanie 11 (Nie liczy się do podstawy). Pokaż, że symetryczna macierz $n \times n$ liczb rzeczywistych jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy ma same dodatnie wartości własne.

Wskazówka: Wiemy, że dla macierzy symetrycznej suma krotności geometrycznych jej wartości własnych to n. Rozpatrz macierz Grama dla bazy ortogonalnej.

Rozwiązanie Wiemy, że macierz symetryczna (liczb rzewczywustych) ma n niezależnych (rzeczywistych) wektorów własnych. Jeśli $\vec{V}_i$, $\vec{V}_j$ są wektorami własnymi dla różnych wartości własnych, to są do siebie prostopadłe (Zadanie 2 z Listy 9). Jeśli są wektorami własnymi dla tej samej wartości własnej to nie musi to jednak być prawda. Zauważmy jednak, że dla ustalonej przestrzeni wektorów własnych $\mathbb{V}_\lambda$ możemy wybrać bazę ortnormalną. Biorąc sumę (mnogościową) po wszystkich podprzestrzeniach własnych dostajemy bazę ortonormalną B całej przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Niech $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie iloczynem skalarnym zadanym przez M, tj.

$$\left\langle \vec{U}, \vec{V} \right\rangle = \vec{U}^T M \vec{V}$$

Iloczyn ten wyraźmy w bazie B, wyraża się on wtedy jako

$$\left\langle \vec{U}, \vec{V} \right\rangle = (\vec{U})_B^T M^B (\vec{U})_B$$

gdzie M^B to macierze Grama wektorów z bazy B. Jako, że jest to układ ortonormalny, dostajemy, że $M^B = \mathrm{Id}$. Ale wtedy

$$\begin{aligned} M &= M^E && \text{bo } M \text{ zadaje iloczyn skalarny wyrażony w bazie standardowej} \\ &= M_{EB}^T M^B M_{EB} && \text{zmiana bazy} \\ &= M_{EB}^T M_{EB} && \text{bo } M^B = \mathrm{Id} \end{aligned}$$

Ale to pokazuje, że M jest postaci $A^T A$ dla odwracalnego A, czyli jest dodatnio określona.