Z3

$$x = \left(r + \sqrt{q^3 + r^2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(r - \sqrt{q^3 + r^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Problemy:

- gdy $r^2 \gg q^3$, wtedy ~~…~~ możemy przekształcić:

$$\left(r - \sqrt{q^3 + r^2}\right) = \left(\frac{-q^3}{r + \sqrt{q^3 + r^2}}\right)$$

↑ zagrożenie utraty cyfr

- gdy $\sqrt{q^3} \gg r$; wtedy możemy przekształcić:

$$\left(r + \sqrt{q^3 + r^2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(r - \sqrt{q^3 + r^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2r}{\left(r + \sqrt{q^3 + r^2}\right)^{\frac{2}{3}} + q + \left(r - \sqrt{q^3 + r^2}\right)}$$

Aby uniknąć liczenia $\sqrt[3]{\ }$ podwójnie:

Niech $p_1 = \left(r - \sqrt{q^3 + r^2}\right)^{\frac{2}{3}}$, wtedy

$$p_2 = \left(r + \sqrt{q^3 + r^2}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{-q^3}{r - \sqrt{q^3 + r^2}}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{(-q^3)^{\frac{2}{3}}}{p_1} = \frac{q^2}{p_1}.$$

Z6)

Niech $l_i = \ln(4^{-i} \cdot x)$ $\quad fl(\ln(x)) = x(1+\varepsilon_{\ln x}) \quad \varepsilon_{\ln x} \leq 2^{-t}$

mnożenie (Niech $\beta_1 = 0$) dodawanie

$$fl(S) = \Big(\big((y_1 \cdot l_1 (1+\varepsilon_{\ln_1}))(1+\alpha_1) + y_2 \cdot l_2 (1+\varepsilon_{\ln_2})(1+\alpha_2)\big)(1+\beta_2) +$$

$$y_3 \cdot l_3 (1+\varepsilon_3)(1+\alpha_3)\Big)(1+\beta_3) + y_4 \cdot l_4 (1+\varepsilon_4)(1+\alpha_4)\Big)(1+\beta_4) =$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \left(y_i \cdot l_i (1+\varepsilon_i)(1+\alpha_i) \prod_{j=i}^{4} (1+\beta_j) \right) = (*)$$

Niech $\prod_{j=i}^{4} (1+\beta_j) = (1+B_i)$, $|B_i| \leq (4-i) \cdot 2^{-t}$

$$(*) = \sum_{i=1}^{4} y_i \cdot l_i \cdot \underbrace{\overset{\leq i \cdot 2^{-t}}{(1+\varepsilon_i)} \overset{\leq i \cdot 2^{-t}}{(1+\alpha_i)} \overset{\leq (4-i) \cdot 2^{-t}}{(1+B_i)}} = (**)$$

$$|E_i| \leq (4-i+2\cdot i) = (4+i) \cdot 2^{-t}$$

$$(**) = \sum_{i=1}^{4} y_i \cdot l_i (1+E_i)$$

Czyli mamy lekko zaburzony wynik, dla lekko zaburzonych danych, czyli Algorytm Numerycznie Poprawny.