Z7]

Powołując się na artykuł J. R. Seumlga, mamy poniższą metodę:

Wiele pochodnych wzorów oraz oznaczeń:

x_n - n-ty element ciągu , $r \to$ granica ciągu x_n , α - rząd zbieżności;
λ - stała

$g(x) \to x_{n+1} = g(x_n)$

1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - r|}{|x_n - r|^{\alpha}} = \lambda$$

2) $$g(x) = g(r) + g'(r)(x-r) + \frac{g''(\xi)}{2}(x-r)^2 \quad , \quad g'(r) \neq 0 \quad \xi \in (x, r)$$

$$x_{n+1} = r + g'(r)(x_n - r) + \frac{g''(\xi)}{2}(x_n - r)^2 \qquad g(r) = r$$

Oznaczmy $e_n = x_n - r$ jako błąd przy szukaniu pierwiastka metodą jednokrokową.

z (1) mamy, że

$$|e_{n+1}| \approx \lambda |e_n|^{\alpha} \quad ; \quad |e_n| \approx \lambda |e_{n-1}|^{\alpha}$$

czyli

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} \approx \frac{\lambda |e_n|^{\alpha}}{\lambda |e_{n-1}|^{\alpha}} \approx \left|\frac{e_n}{e_{n-1}}\right|^{\alpha}$$

Stąd

(3) $$\alpha \approx \frac{\log\left|\frac{e_{n+1}}{e_n}\right|}{\log\left|\frac{e_n}{e_{n-1}}\right|} = \frac{\log\left|\frac{x_{n+1} - r}{x_n - r}\right|}{\log\left|\frac{x_n - r}{x_{n-1} - r}\right|}$$

korzystając z (2) mamy

(4) $$x_{n+1} = r + g'(r)(x_n - r) + \frac{g''(\xi_1)}{2}(x_n - r)^2$$

(5) $$x_n = r + g'(r)(x_{n-1} - r) + \frac{g''(\xi_2)}{2}(x_{n-1} - r)^2$$

$\lim_{n\to\infty} \left((4) - (5) \quad | : (x_n - x_{n-1})\right)$ daje nam

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left| g'(r) + \frac{g''(\xi_1)}{2}\cdot\frac{(x_n-r)^2}{(x_n-x_{n-1})} - \frac{g''(\xi_2)(x_{n-1}-r)^2}{2\cdot(x_n-x_{n-1})}\right| =$$

$$= |g'(r)|$$

bo $(x_n-r)^2$ i $(x_{n-1}-r)^2$ dążą do zera szybciej niż

$x_n - x_{n-1}$

Zatem

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{x_{n+1}-r}{x_n-r} \approx \frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}$$ dla odpowiednio dużych n

Z czego otrzymujemy

$$\alpha \approx \frac{\log\left|\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}\right|}{\log\left|\frac{x_n-x_{n-1}}{x_{n-1}-x_{n-2}}\right|}$$