Zadanie9.

Definicje (Wikipedia)

sprzezenie - odbicie wektora liczby zespolonej wzgledem osi OX; inaczej dla $z = a + bi$ jego sprzezenie to $\overline{z} = a - bi$.
Wlasnosci:

- liczba sprzezona do liczby rzeczywistej jest ona sama: $\overline{a} = a$
- liczba sprzezona do sumy liczb jest suma liczb sprzezanych: $\overline{w+z} = \overline{w} + \overline{z}$
- liczba sprzezona do iloczynu liczb jest iloczyn liczb sprzezanych $\overline{w \cdot z} = \overline{w} \cdot \overline{z}$
- sprzezenie macierzy to sprzezenie kazdego z jej elementow
- dla liczby zespolonej a i macierzy M zachodzi $\overline{a \cdot M} = \overline{a} \cdot \overline{M}$

Rozwiazanie

Niech w bedzie wielomianem o wspolczynnikach rzeczywistych. Pokazemy, ze $w(\overline{\alpha}) = \overline{w(\alpha)}$.

„Wchodzimy" ze sprzężeniem pod mnożenia

$$\overline{w(\alpha)} = \overline{a_0 + a_1\alpha + ... + a_n\alpha^n} =$$

$$= \overline{a_0} + \overline{a_1\alpha} + ... + \overline{a_n\alpha^n} = \cancel{a_0 + a_1\overline{\alpha} + ... + a_n\overline{\alpha^n} = w(\overline{\alpha})}.$$

$= \overline{a_0} + \overline{a_1} \cdot \overline{\alpha} + \dots + \overline{a_n} \cdot \overline{\alpha}^n$

$= a_0 + a_1 \cdot \overline{\alpha} + \dots + a_n \cdot \overline{\alpha}^n$

$= w(\overline{\alpha})$

Korzystamy z założeń o współczynnikach w

Poniewaz $0 = \overline{0}$, to dla takiego z, ze $w(z) = 0$, mamy $w(z) = \overline{w(z)} = 0$, czyli z powyzszego $w(\overline{z}) = 0$. (Inne wartosci nie przejda na 0, bo operacja sprzezenia to z def. odbicie wzgledem OX)

Wielomian charakteryst. macierzy o współczynnikach rzeczywistych też będzie miał współczynniki rzeczywiste.

Stad, dla funkcji wielomianowej φ_M macierzy M o wspolczynnikach rzeczywistych, oraz λ takiego, ze $\varphi_M(\lambda) = 0$, otrzymujemy $\varphi_M(\lambda) = \overline{\varphi_M(\lambda)} = 0 \iff \varphi_M(\overline{\lambda}) = 0$.

Trochę nie wiadomo, skąd się bierze ta równość!
Klarowniej:
- β jest pierwiastkiem, więc $w(\beta) = 0$
- sprzęgamy stronami: $\overline{w(\beta)} = \overline{0}$
- wiemy, że $\overline{0} = 0$ i $\overline{w(\beta)} = w(\overline{\beta})$, więc $w(\overline{\beta}) = 0$
- zatem $\overline{\beta}$ jest pierwiastkiem.

Wezmy wektor wlasny macierzy M, o wspolczynnikach zespolonych $\vec{V} = [v_1, ..., v_n]^T$. Pokazemy, ze jesli $\vec{V}$ jest wektorem wlasnym dla zespolonej wartosci wlasnej β, to $\overline{\vec{V}}$ jest wektorem wlasnym dla zespolonej wartosci wlasnej $\overline{\beta}$. Inaczej mowiac, z Lematu 8.14, mamy pokazac, ze $\vec{V} \in ker(M - \beta Id) \Rightarrow \overline{\vec{V}} \in ker(M - \overline{\beta} Id)$.

$$\vec{V} \in ker(M - \beta Id) \iff (M - \beta Id)\vec{V} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{(M - \beta Id)\vec{V}} = 0 \Rightarrow (M - \overline{\beta} Id)\overline{\vec{V}} = 0 \iff \overline{\vec{V}} \in ker(M - \overline{\beta} Id).$$

Cnd.

Klarowniej:
- zał. $M\vec{v} = \beta\vec{v}$
- sprzęgamy stronami: $\overline{M\vec{v}} = \overline{\beta\vec{v}}$
- „wchodzimy pod mnożenie": $\overline{M}\overline{\vec{v}} = \overline{\beta}\overline{\vec{v}}$
- korzystamy z $M = \overline{M}$: $M\overline{\vec{v}} = \overline{\beta}\overline{\vec{v}}$

Tu robimy to w każdym współczynniku, a dla mnożenia macierzy oznacza to

$\overline{[AB]_{ij}} = \overline{\sum_k a_{ik} b_{kj}} = \sum_k \overline{a_{ik} b_{kj}} = \sum_k \overline{a_{ik}} \cdot \overline{b_{kj}} = [\overline{A}\,\overline{B}]_{ij}$