Mathematik für Informatiker
Algebraische Strukturen
Übungsblatt 9

Abgabetermin Donnerstag, den 09.01.2025 bis 23:59 in OpenOlat.

1. Schreiben Sie

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix},$$

   $\sigma \circ \tau$ und $\tau \circ \sigma$ sowohl als Produkt disjunkter Zykel, als auch als Produkt von Transpositionen. Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Darstellungen Ordnung und sign für σ, τ, $\sigma \circ \tau$ und $\tau \circ \sigma$.

2. Welche Ordnungen treten bei den Elementen von S_6 auf?

3. Ein Graph ist ein Tupel (V, E) aus einer Menge V und einer Teilmenge E der Menge $\binom{V}{2}$ der zweielementigen Teilmengen von V. Dabei heisst V Menge der Vertices und E Menge der Kanten des Graphen.

   (a) Zeigen Sie: Es gibt genau $2^{\binom{n}{2}}$ Graphen auf n Vertices.

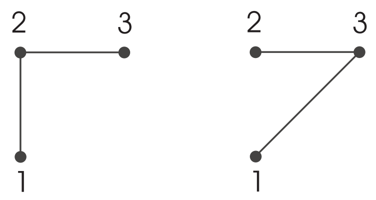
   (b) Bestimmen Sie alle Graphen auf $n = 4$ Vertices.

4. Zwei Graphen (V_1, E_1) und (V_2, E_2) heißen isomorph, wenn eine bijektive Abbildung $\varphi : V_1 \to V_2$ existiert, sodass

$$\{v, w\} \in E_1 \Longleftrightarrow \{\varphi(v), \varphi(w)\} \in E_2$$

   für alle $v, w \in V_1$.

   (a) Sind die folgenden Graphen isomorph? Falls ja, geben Sie einen Isomorphismus an.



   (b) Die S_n operiert auf der Menge der Graphen mit n Vertices durch Permutation der Vertices. Zeigen Sie: Zwei Graphen sind isomorph genau dann, wenn sie in derselben Bahn liegen.

   (c) Bestimmen Sie die Bahnen der Operation der S_3 auf der Menge M der Graphen mit 3 Vertices. Wählen Sie für jede Bahn einen Repräsentanten und bestimmen Sie jeweils dessen Stabilisator und Orbit.

5. (4 Zusatzpunkte) Zeigen Sie, dass es genau 11 Isomorphieklassen von Graphen mit 4 Vertices gibt.

   Hinweis: Bestimmen Sie für die Bahnen der S_4 auf der Menge M der Graphen mit 4 Vertices jeweils einen Repräsentanten, dessen Stabilisator und mit der Bahnenformel die Länge der Bahn. Folgern Sie schliesslich, dass Ihre Liste von Bahnen komplett ist.

6. (4 Zusatzpunkte)

   (a) Schreiben Sie jedes Element der S_4 als Produkt disjunkter Zykel.

   (b) Ordnen Sie jedem $\sigma \in S_4$ eine Partition von 4 zu (d.h. eine Summe $4 = p_1 + ... + p_r$ mit $p_i \geq 1$). Diese Partition nennt man Zykeltyp von σ.

   (c) Interpretieren Sie jeden Zykeltyp geometrisch, indem Sie die S_4 als Symmetriegruppe des Tetraeders auffassen.