$$I = \begin{cases} 1 & V_1^2 + V_2^2 \leq 1 \\ \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

entonces, como observamos en el ejemplo 3a, $E[I] = \pi/4$.
El uso de promedio de valores sucesivos de I para estimar $\pi/4$ se puede mejorar utilizando $E[I|v_1]$ en vez de I. Ahora,

$$\begin{aligned} E[I|V_1 = v] &= P\{V_1^2 + V_2^2 \leq 1 | V_1 = v\} \\ &= P\{v^2 + V_2^2 \leq 1 | V_1 = v\} \\ &= P\{V_2^2 \leq 1 - v^2\} \text{ , por la independencia de } V_1 \text{y } V_2 \\ &= P\{-(1-v^2)^{1/2} \leq V_2 \leq (1-v^2)^{1/2}\} \\ &= \int_{-(1-v^2)^{1/2}}^{(1-v^2)^{1/2}} \left(\frac{1}{2}\right) dx \text{ , pues } V_2 \text{ es uniforme en (-1,1)} \\ &= (1-v^2)^{1/2} \end{aligned}$$

Por lo tanto ,

$$E[I|V_1] = (1 - V_1^2)^{1/2}$$

de modo que el estimador $(1 - V_1^2)^{1/2}$ también tiene media $\pi/4$ y tiene menor varianza que I. Como

$$\begin{aligned} E[(1 - v_1^2)^{1/2}] &= \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{1/2} \left(\frac{1}{2}\right) dx \\ &= \int_0^1 (1 - x^2)^{1/2} \, dx \\ &= E[(1 - U^2)^{1/2}] \end{aligned}$$

podemos simplificar un poco utilizando el estimador $(1 - U^2)^{1/2}$, donde U es un número aleatorio.
Para determinar con facilidad la mejora en la varianza obtenida nos valemos del estimador $(1 - U^2)^{1/2}$ en relación con el estimador I.

$$\begin{aligned} \text{Var}[(1 - U^2)^{1/2}] &= E[1 - U^2] - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \\ &= \frac{2}{3} - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 0{,}0498 \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad utiliza la identidad $\text{Var}(W) = E[W^2] - (E[W])^2$. Por otro lado, como I es una variable aleatoria Bernoulli con media $\pi/4$, tenemos

$$\text{Var}(I) = \left(\frac{\pi}{4}\right)\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}1686$$

lo cual muestra que el condicionamiento produce una reducción de 70,44 % en la varianza.

Como es claro que la función $(1-u^2)^{1/2}$ es una función monótona decreciente de u en la región $0 < u < 1$, esto implica que el estimador $(1-U^2)^{1/2}$ mejora utilizando variables antitéticas. Es decir, el estimador

$$\frac{1}{2}[(1-U^2)^{1/2} + (1-(1-U)^2)^{1/2}]$$

tiene menor varianza que $\frac{1}{2}[(1-U^2)^{1/2} + (1-(1-U_2^2)^{1/2}]$.
Otra forma de mejorar al estimador $(1-U)^2)^{1/2}$ es mediante una variable de control. Una variable de control natural en este caso es U^2 y, como $E[U^2] = \frac{1}{3}$, podríamos emplear un estimador del tipo

$$(1-U^2)^{1/2} + c\left(U^2 - \frac{1}{3}\right)$$

Podemos estimar la mejor c (a saber, $c^* = -\text{Cov}(1-U^2)^{1/2}, U^2)\text{Var}(U^2)$ realizando la simulación para estimar el término de covarianza (también podríamos tomar U como variable de control; esto es diferente, pues una correlación entre dos variables aleatorias es tan sólo una medida de su ”dependencia linealz no de su total dependencia, pero el uso de U^2 da una mejora mayor).