

# **ESTRUTURA DE DADOS**

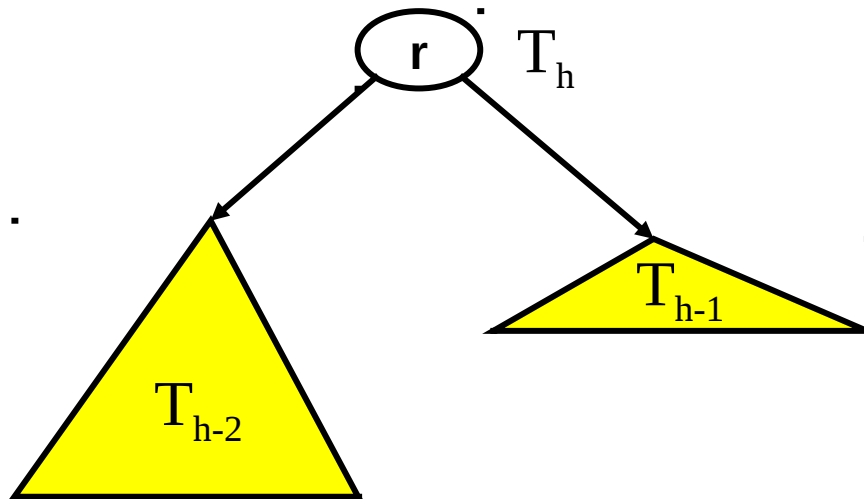
**Árvores AVL**

# Árvores AVL

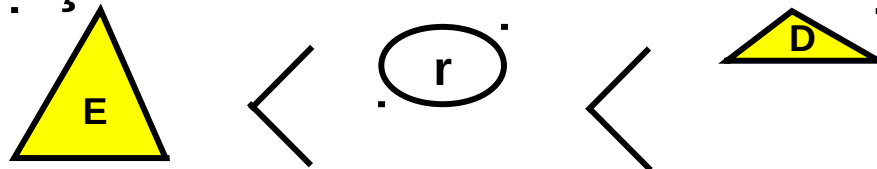
- **Árvore AVL: árvore binária de busca construída de tal modo que a altura de sua sub-árvore direita difere da altura da sub-árvore esquerda de no máximo 1 unidade**

# Árvore AVL Mínima

- Construção da árvore AVL Mínima:



- A relação continua válida:



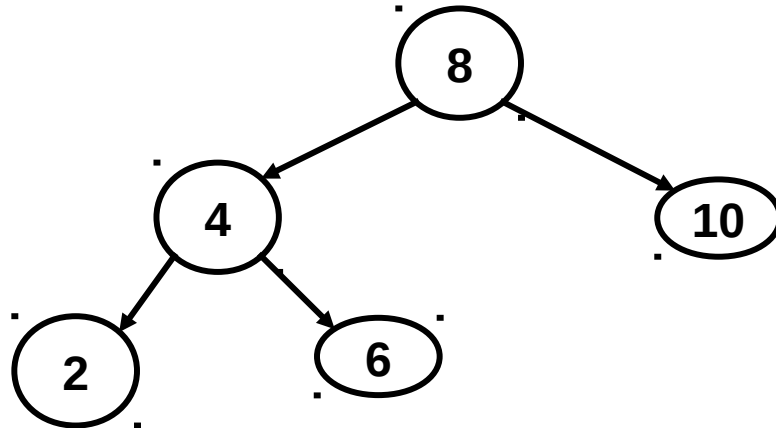
# Inserção AVL

- Dada uma raiz  $r$  com sub-árvores  $L$  (*left*) e  $R$  (*right*), e supondo que a inserção deve ser feita na sub-árvore da esquerda
- Existem 3 casos possíveis:
  1. Se  $hL = hR$ , então  $L$  e  $R$  ficam com alturas diferentes mas continuam balanceadas.
  2. Se  $hL < hR$ , então  $L$  e  $R$  ficam com alturas iguais e balanceamento foi melhorado.
  3. Se  $hL > hR$ , então  $L$  fica ainda maior e balanceamento foi violado.

# Inserção AVL

- Da mesma forma, dada uma raiz  $r$  com sub-árvores  $L$  (*left*) e  $R$  (*right*), e supondo que a inserção deve ser feita na sub-árvore da direita
- Existem 3 casos possíveis:
  1. Se  $hL = hR$ , então  $L$  e  $R$  ficam com alturas diferentes mas continuam balanceadas.
  2. Se  $hL > hR$ , então  $L$  e  $R$  ficam com alturas iguais e balanceamento foi melhorado.
  3. Se  $hL < hR$ , então  $L$  fica ainda maior e balanceamento foi violado.

# Exemplo



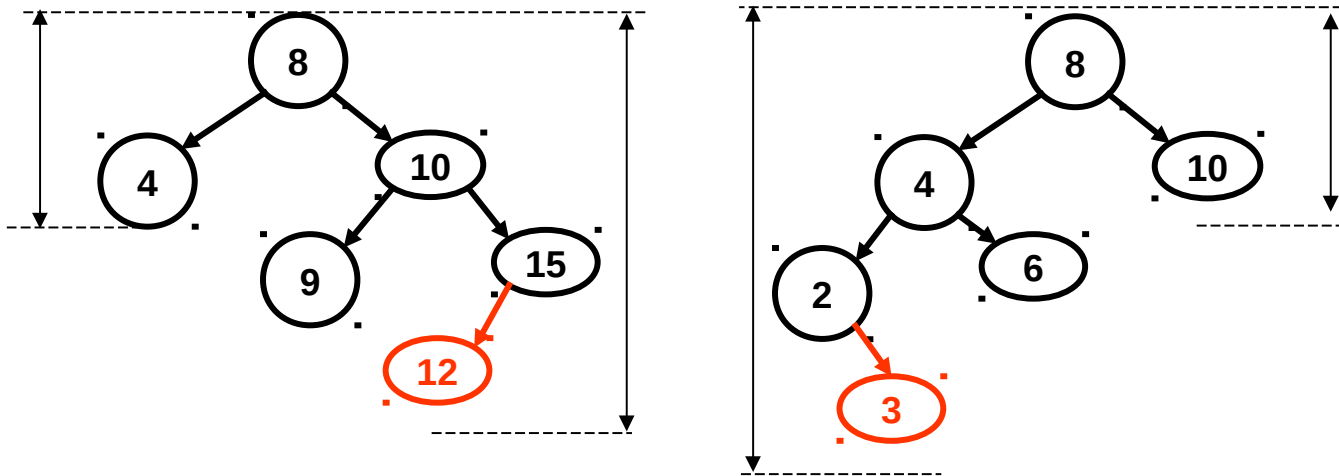
- Inserção de chaves 9 e 11 pode ser feita sem balanceamento (inclusive, melhorando o balanceamento da árvore)
- Inserção de chaves 1, 3, 5 e 7 exigem um re-balanceamento da árvore

# Rebalanceamento

- Fator de Balanceamento (FB) de um nó é a **altura** da sub-árvore **direita** do nó **menos** a **altura** da sub-árvore **esquerda** do nó
- Os problemas de balanceamento das árvores AVL podem ser mapeados em dois casos:
  - **Caso 1:** o nó raiz de uma sub-árvore tem  $FB=2$  (ou  $-2$ ) e tem um filho com  $FB = 1$  (ou  $-1$ ) o qual tem o mesmo sinal que o FB do nó pai.
  - **Caso 2:** o nó raiz de uma sub-árvore tem  $FB=2$  (ou  $-2$ ) e tem uma um filho com  $FB = -1$  (ou  $1$ ) o qual tem o sinal oposto ao FB do nó pai.

# Caso 1

- *Nó raiz da sub-árvore tem  $FB=2$  (ou  $-2$ ) e tem filho com  $FB=1$  (ou  $-1$ ) o qual tem o mesmo sinal que o  $FB$  do nó pai*



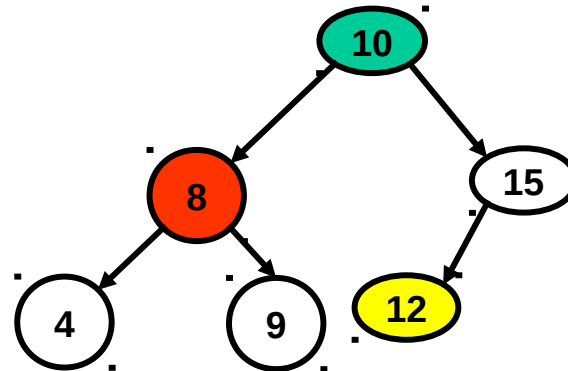
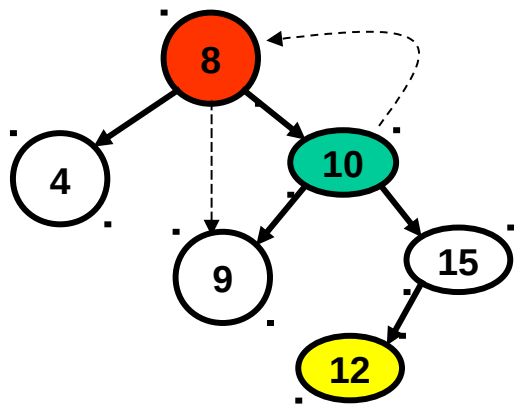
- **Solução**: rotação simples sobre o nó de  $FB=2$  ( $-2$ ).
  - Rotações são feitas à esquerda quando  $FB$  positivo e à direita quando  $FB$  negativo.



# Caso 1

$$\text{FB}(8) = 3 - 1 = 2$$

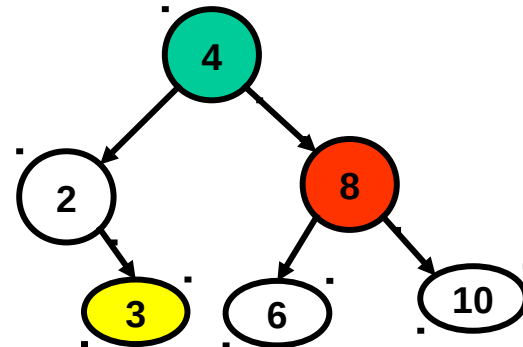
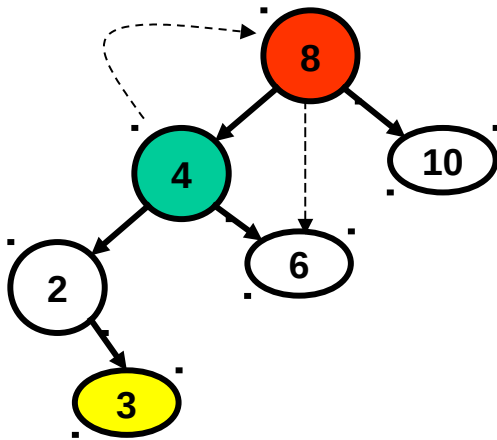
$$\text{FB}(10) = 1$$



# Caso 1

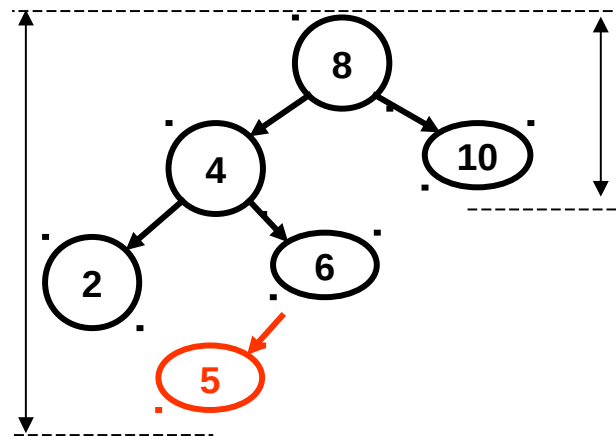
$$\text{FB}(8) = 1 - 3 = -2$$

$$\text{FB}(4) = -1$$



## Caso 2

- *Nó raiz da sub-árvore tem  $FB=2$  (ou  $-2$ ) e tem filho com  $FB=-1$  (ou  $1$ ) o qual tem o sinal oposto ao do  $FB$  do nó pai*

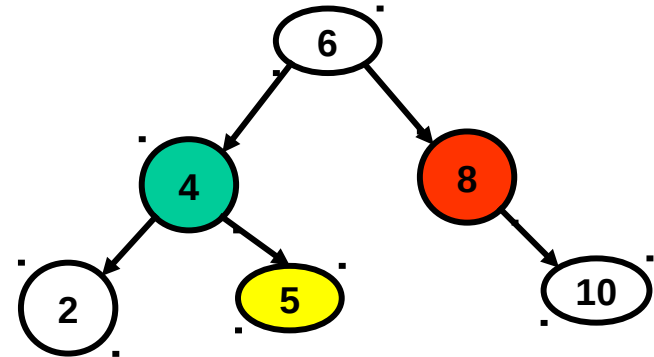
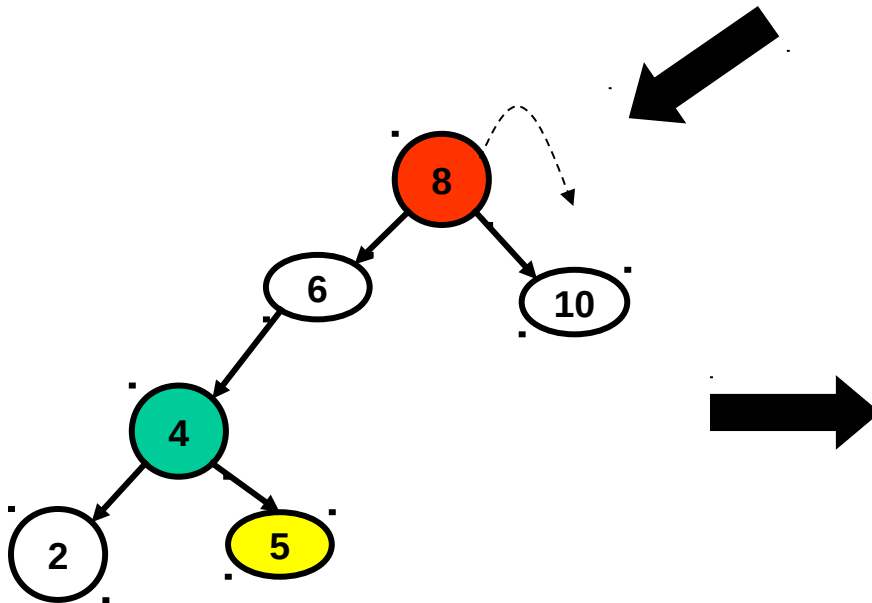
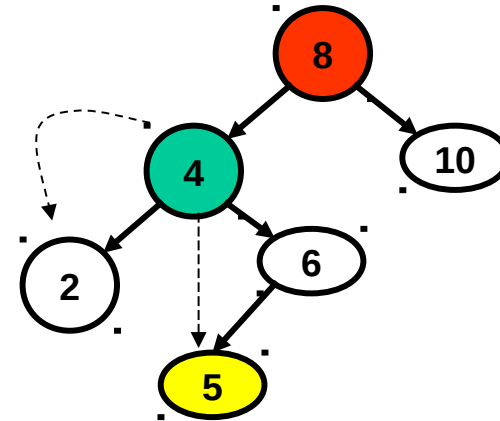


- **Solução: rotação dupla**
  - Primeiro a rotação sobre o nó com  $FB=1$  ( $-1$ ) na direção apropriada;
  - Em seguida, a rotação sobre o nó com  $FB=2$  na direção oposta.

## Caso 2

$$\text{FB}(8) = 1 - 3 = -2$$

$$\text{FB}(4) = 1$$



# Algoritmos para rotação à direita e à esquerda sobre um nó p (*pseudo-código*)

```
procedure rotacao_direita (var p:pno);
```

```
    var q, temp: Ponteiro;
```

```
begin
```

```
    q = esq(p);
```

```
    temp = dir(q);
```

```
    dir(q) = p;
```

```
    esq(p) = temp;
```

```
    p = q;
```

```
end;
```

```
procedure rotacao_esquerda(var p: pno);
```

```
    var q, temp: Ponteiro;
```

```
begin
```

```
    q = dir(p);
```

```
    temp = esq(q);
```

```
    esq(q) = p;
```

```
    dir(p) = temp;
```

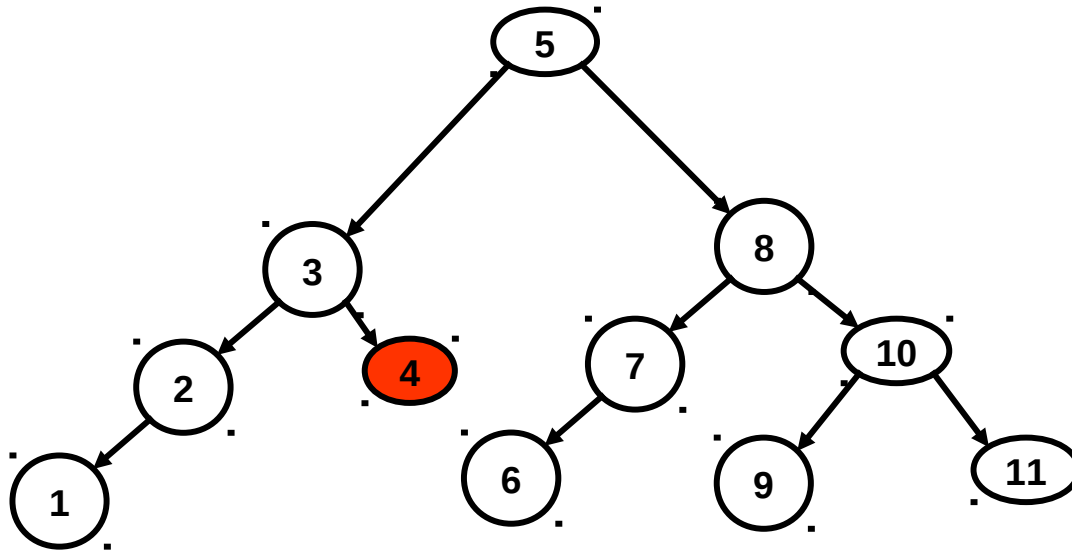
```
    p = q;
```

```
end;
```

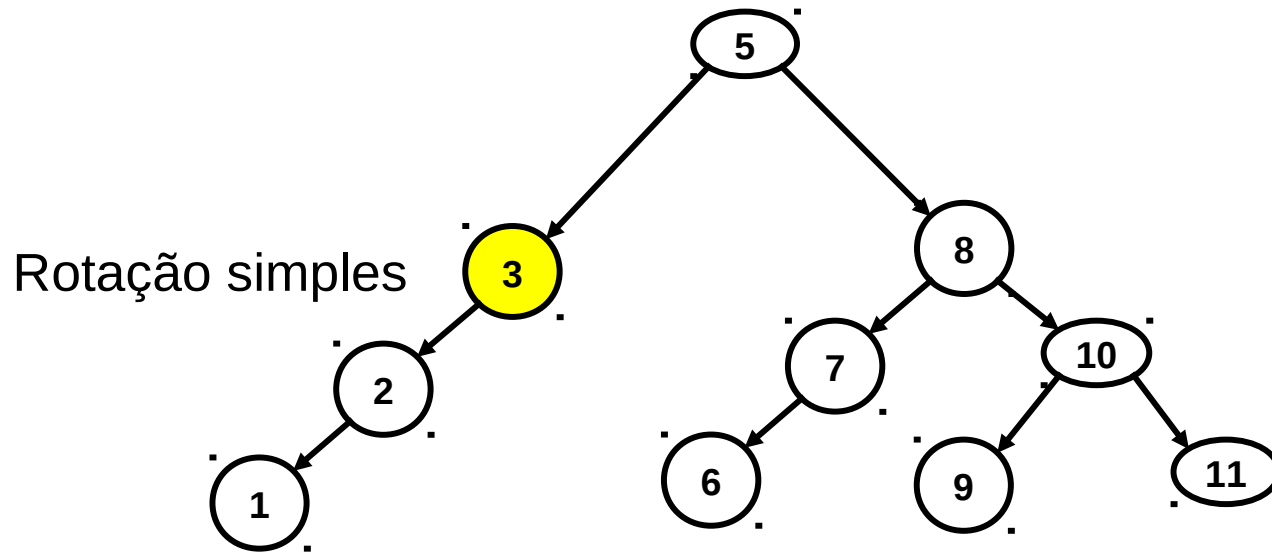
# Remoções

- Os problemas são semelhantes aos das inserções: podem ocorrer desbalanceamentos
- Existem duas situações possíveis:
  - **Caso 1:** simples, quando o nó removido é uma folha ou tem apenas 1 descendente.
  - **Caso 2:** o nó removido possui as duas sub-árvores.

# Exemplo: Remove 4

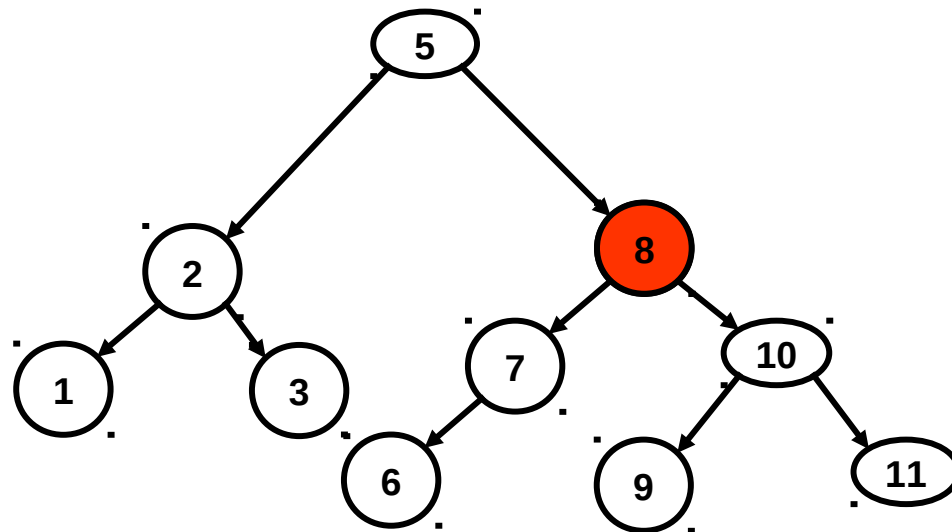


# Exemplo: Rotação sobre 3

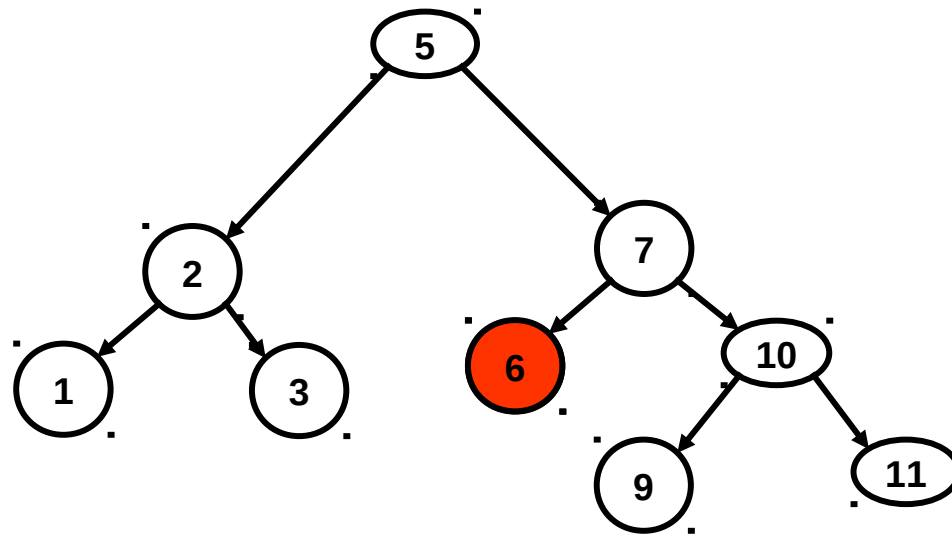




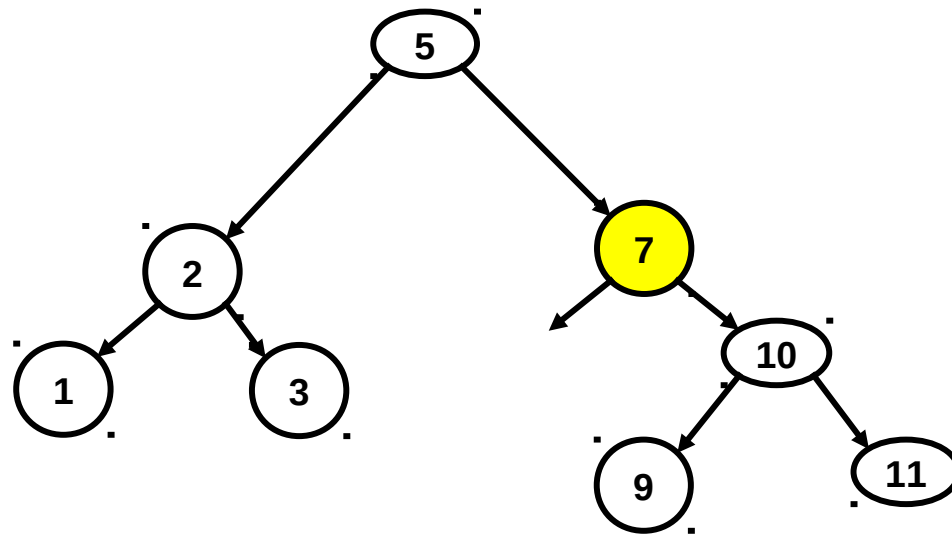
# Exemplo: Remove 8



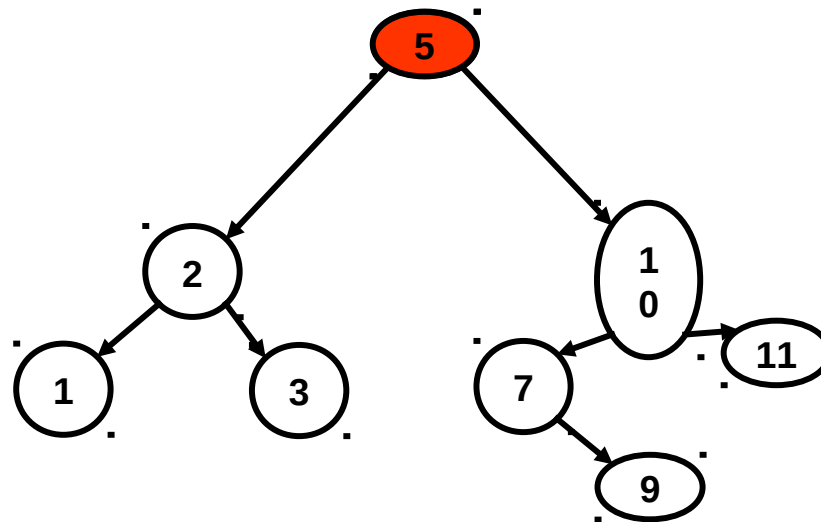
# Exemplo: Remove 6



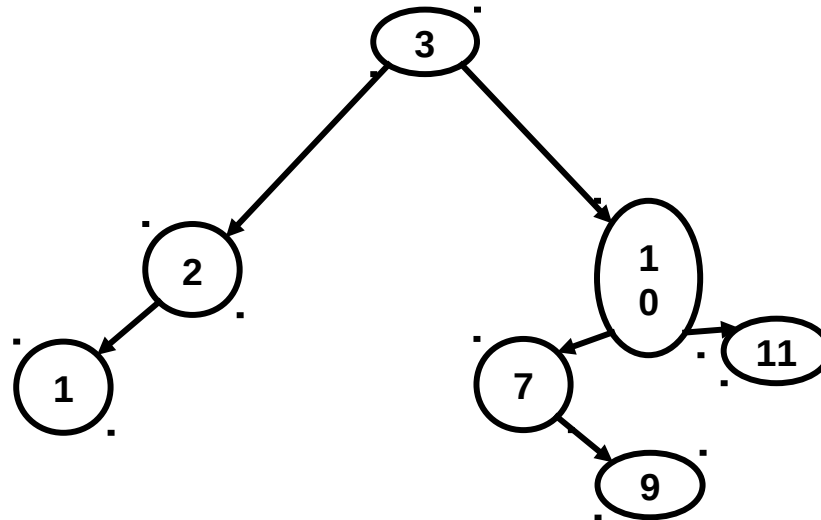
# Exemplo: Rotação a Esquerda de 7



# Exemplo: Remove 5



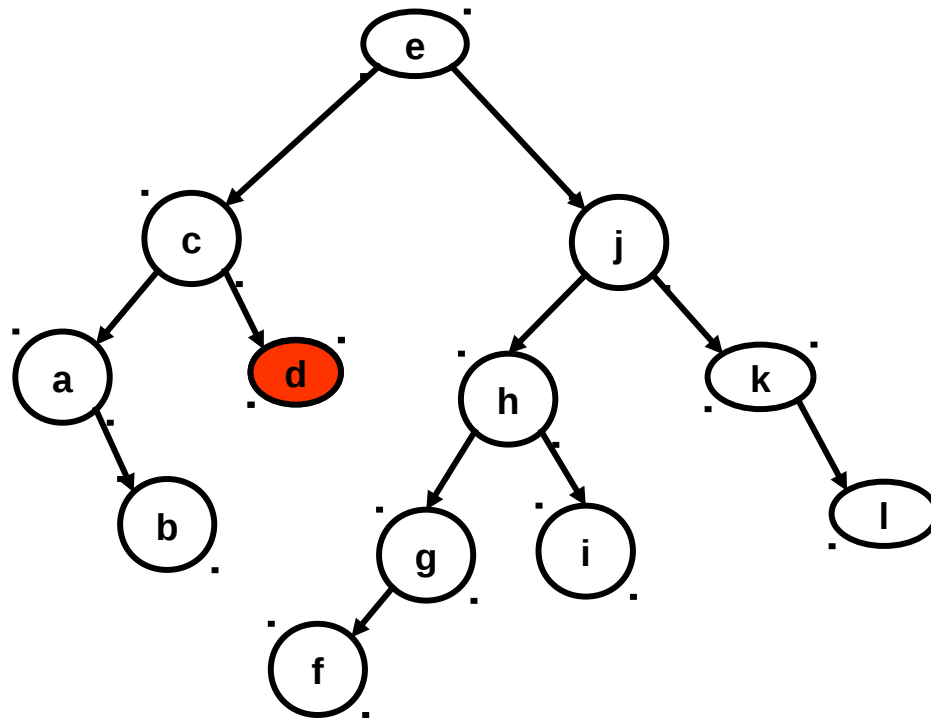
# Exemplo: Árvore AVL “Balanceada”



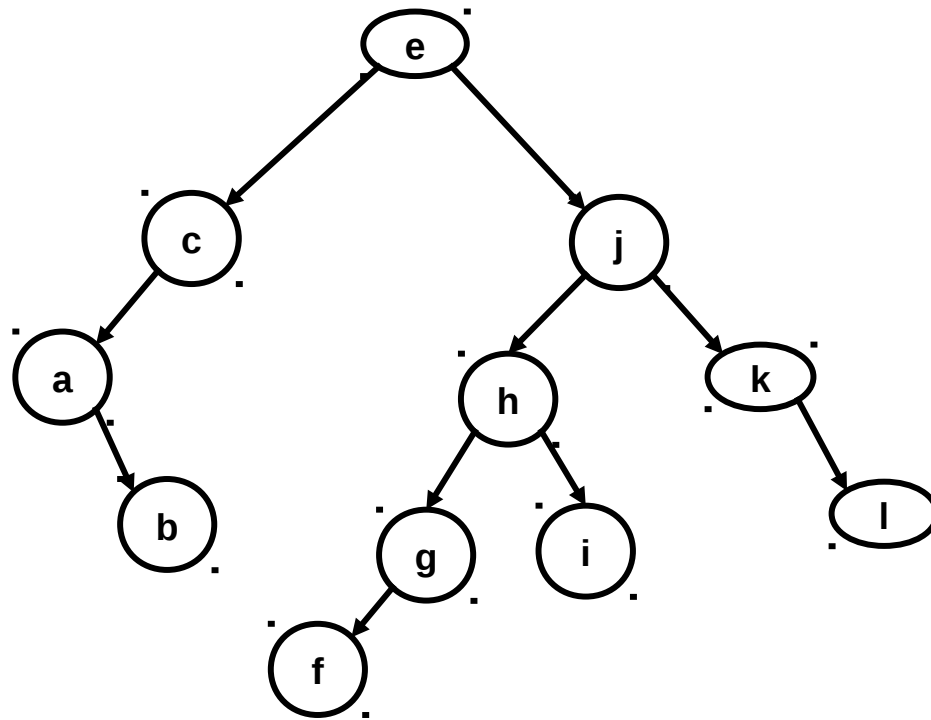
# Problemas com as Árvores AVL

- Nem sempre uma rotação simples (ou uma dupla) resolve o problema de desbalanceamento dos nós
- Podem existir casos em que o número de rotações exigido seja  $O(\log n)$  para tornar a árvore balanceada...
- Veja o exemplo a seguir, onde após a exclusão do nó **d**, diversas rotações são executadas na árvore...

# Excesso de Rotações na Árvore AVL



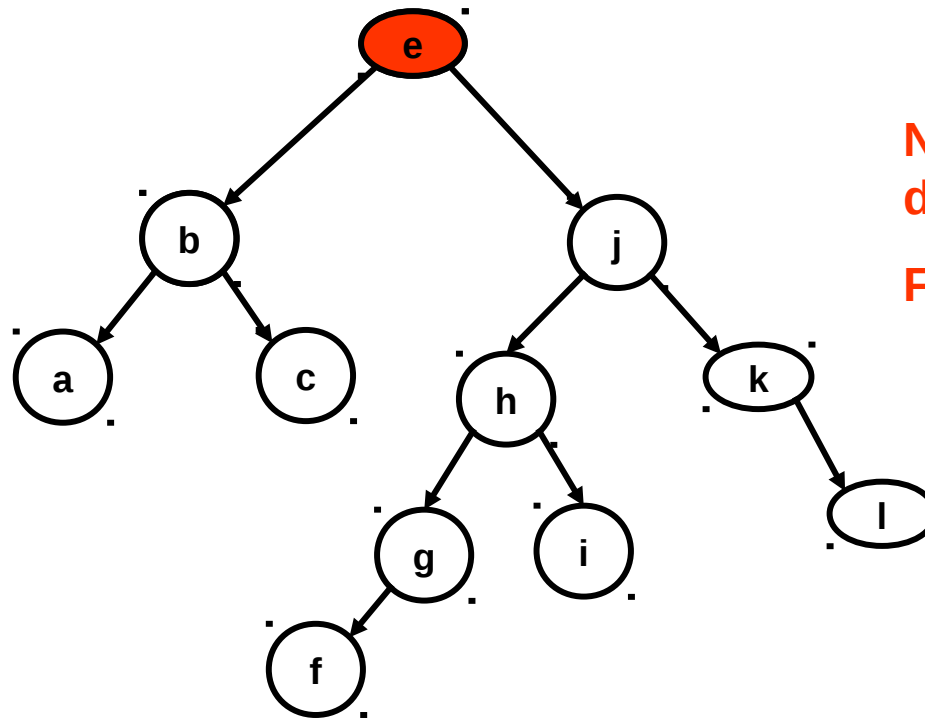
# Excesso de Rotações na Árvore AVL



Rotação dupla  
esq(a)+dir(c)



# Excesso de Rotações na Árvore AVL

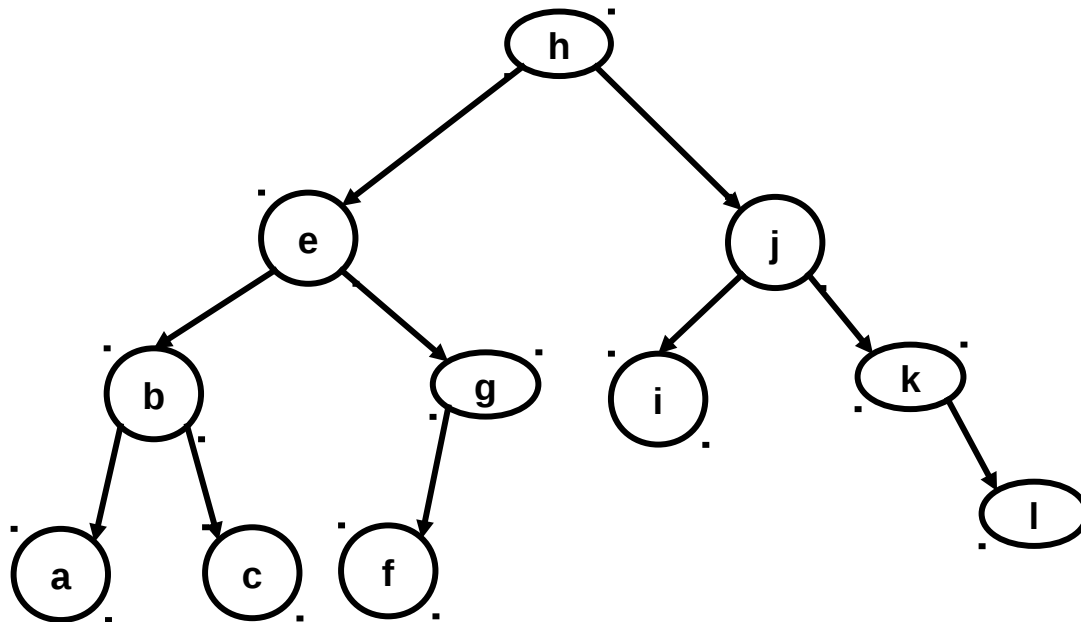


Nó e fica  
desbalanceado

$$FB(e) = 2$$

# Excesso de Rotações na Árvore AVL

Rotação simples:  
esq(e)



**FIM**