Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará

Engenharia de Computação 22/12/2016

Segunda avaliação de Lógica Matemática Professor Jânio Kléo

Aluno: Luis Felipe de Lima Sales Nota: 9,0

01. Para os átomos p e q, definimos a operação binária $\downarrow$, chamada de *negação conjunta*, com a seguinte regra de interpretação: $[p \downarrow q] = 1$ apenas quando $[p] = [q] = 0$. Mostre que, dada qualquer fórmula Ψ, existe uma fórmula Ω, equivalente a Ψ, que contém apenas a negação conjunta em sua formação. Em particular, expresse a fórmula $\Psi = \neg(p \rightarrow q)$ em termos da negação conjunta.

02. Seja $A = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ um conjunto de símbolos de proposição. Dizemos que conjunto de fórmulas $Z = \{\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_k\}$ é *logicamente completo* segundo A quando, dada qualquer fórmula Φ em que figuram apenas átomos de A, existe uma fórmula em Z que é equivalente a Φ. Qual a menor quantidade de elementos de um conjunto de fórmulas logicamente completo segundo o conjunto $B = \{p, q, r, s\}$?

03. Apresente uma fórmula que é equivalente a $\psi = ((p \vee q) \wedge r) \leftrightarrow (q \wedge r)$ que apresenta apenas implicações simples e negações em sua formação.

04. Encontre uma forma normal conjuntiva para a fórmula $\Sigma = (p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$. Use essa forma normal para dizer se Σ é uma contingência.

05. Escreva $[p \mid (q \mid r)]$ em função de $[p]$, $[q]$ e $[r]$

06. Dadas as fórmulas $\Gamma = (p \mid q) \wedge p$ e $\Lambda = \neg(p \rightarrow q)$, verifique que Γ implica logicamente Λ. A recíproca é verdadeira?

1 - Primeiramente, considerando que $[p \downarrow q] = 1$ somente quando $[p] = [q] = 0$, temos que, para $[p \downarrow p]$, temos a seguinte valoração:

$[p]$	$[p \downarrow p]$
0	1
1	0

Isso se justifica, pois também podemos concluir, do enunciado, que para $[p] = [q] = 1$, $[p \downarrow q] = 0$, com o mesmo podendo ser dito, portanto de $[p \downarrow p]$. Disso concluímos que $\neg p \Leftrightarrow (p \downarrow p)$.

Ademais, temos que $(p \to q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$, assim, pela tabela verdade de $(p \downarrow q)$, podemos também chegar à conclusão de que $(p \downarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$. Com essas duas equivalências, temos então ~~&~~ que, levando em conta também a primeira:

$$\psi = \neg(p \to q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \downarrow (\neg p \vee q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((p \downarrow p) \vee q) \downarrow ((p \downarrow p) \vee q).$$

Levando em conta que $(p \vee q) \Leftrightarrow ((p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q))$, visto que trata-se, por equivalência, de $\neg(p \downarrow q)$, temos:

$$((p \downarrow p) \vee q) \downarrow ((p \downarrow p) \vee q) \Leftrightarrow (((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)) \downarrow (((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q))$$

Dado que, pelas leis de De Morgan, podemos encontrar fórmulas com disjunções e negações equivalentes à com conjunções, por exemplo, é seguro afirmar que existe sempre uma fórmula Ω equivalente a uma ψ, usando apenas a negação conjunta.

2 - Tendo o conjunto $B = \{p, q, r, s\}$, temos que para elaborarmos uma tabela verdade usando tais elementos, usaremos 16 linhas. A valoração resultante do uso de tais elementos numa fórmula ψ, por exemplo, terá ~~2^{16} $16(2^2)$~~ 2^{16} possibilidades de preenchimento. ~~Isso é igual a $(2^4)(2^2) = 2$~~. Logo, temos que a menor quantidade de elementos de um conjunto de fórmulas logicamente completo segundo o conjunto B é $\{2^{16}\}$.

3

4 - Temos que para $\Sigma = (((p \wedge q) \to r) \to (p \to r))$ há a seguinte tabela verdade:

$[p]$	$[q]$	$[r]$	$[p \wedge q]$	$[(p \wedge q) \to r]$	$[p \to r]$	$[\Sigma]$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

A única valoração para a qual $[\Sigma] = 0$ é $[p] = 1$, $[q] = [r] = 0$. Com isso podemos construir uma fórmula equivalente a Σ, conjuntiva, e que por ser equivalente a Σ, havendo uma possibilidade para a qual sua valoração é 0. Tal fórmula será ψ, com $\psi \Leftrightarrow \Sigma$.

$$\boxed{\psi = (\neg p \vee q \vee r)}$$

5 - Dado que, em sala, a valoração atribuída a uma fórmula $(p|q)$ é a seguinte:

$[p]$	$[q]$	$[p\|q]$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Podemos então concluir que $(p|q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$. Visto isso, podemos reescrever $(p|(q|r))$ como $\neg(p \wedge \neg(q \wedge r))$, sendo a primeira equivalente à segunda. A tabela verdade de $\neg(p \wedge \neg(q \wedge r))$ é a seguinte:

$[p]$	$[q]$	$[r]$	$[\neg(q \wedge r)]$	$[p \wedge \neg(q \wedge r)]$	$[\neg(p \wedge \neg(q \wedge r))]$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1

Assim, como $(p|(q|r)) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg(q \wedge r))$, temos que só para $[p]=1$, $[q]=[r]=0$ ou para $[p]=1$, $[q]=0$, $[r]=1$ ou para $[p]=1$, $[q]=1$, $[r]=0$, a valoração da fórmula $p|(q|r)$ será 0.

4

2 - Primeiramente é possível estabelecer que a fórmula $\Gamma = (p|q) \wedge p \Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \wedge p$. Podemos então verificar se $\neg(p \wedge q) \wedge p \Rightarrow \Lambda$. Suponhamos haver uma interpretação das proposições tal que $[\neg(p \wedge q) \wedge p \to \Lambda] = 0$. Desta forma temos que $[\neg(p \wedge q) \wedge p] = 1$, $[\Lambda] = 0$. A única valoração para que $[\neg(p \wedge q) \wedge p] = 1$ é $[p] = 1$, $[q] = 0$, visto que com outras interpretações, a valoração será 0. Aplicando esta interpretação em Λ, temos que $[\neg(p \to 0)] = 1$, o que é uma contradição à nossa suposição inicial, logo $\Gamma \Rightarrow \Lambda$. Para descobrirmos se $\Lambda \Rightarrow \Gamma$, façamos essa mesma suposição, tal que $[\Lambda \to \Gamma] = 0$. Para isso $[\Lambda] = 1$ e $[\Gamma] = 0$, logo $[\neg(p \to q)] = 1$ e, por equivalência, $[\neg(p \wedge q) \wedge p] = 0$. Temos que, mais uma vez, para que $[\neg(p \to q)] = 1$, $[p] = 1$ e $[q] = 0$, obrigatoriamente. Aplicando essa interpretação na fórmula equivalente a Γ, $[\Gamma] = 1$, o que mais uma vez contradiz nossa suposição, logo $\Lambda \Leftrightarrow \Gamma$.

3 - Primeiramente temos que $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$, logo:

$$\psi \Leftrightarrow (((p \vee q) \wedge r) \to (q \wedge r)) \wedge ((q \wedge r) \to ((p \vee q) \wedge r)).$$

Temos também que $\neg p \Leftrightarrow p \to \neg p$ e $p \wedge q \Leftrightarrow \neg(p \to \neg q)$ e $p \vee q \Leftrightarrow \neg p \to q$. Logo:

$$\neg(\neg(\cancel{((\neg p \to q) \wedge \neg r) \to \neg(p \to \neg q)) \to \neg(\Lambda}$$

$$\neg((\neg(\neg p \to q) \to \neg r) \to \neg(q \to \neg r)) \to \neg(\neg(q \to \neg r) \to ((\neg p \to q) \to \neg r)) \Leftrightarrow \psi$$