Coordenadoria de Matemática
Professor: Roberto Carlos Feitosa
AP2- Cálculo I
Aluno(a) Francisco Lucas Lima da S. Nota 10,0

muito bem!!

Questões:

1. Calcule os seguintes limites: (4 escores cada)

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{1-\sqrt{x}}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen5x.sen3x}{x^2 cosx}$

2. Encontre as equações das assíntotas da curva $f(x) = \frac{x^3+2}{x^3-3x^2+2x}$. (4 escores)

3. Dada $f(x) = \begin{cases} x^2 - k \; se \; x > 2 \\ 2k - 3x \; se < 2 \end{cases}$, encontre o valor de k para que $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ exista.(4 escores)

4. Mostre $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{tgx}{x} \; se \; x \overset{<}{\cancel{>}} 0 \\ 2 - \sqrt[3]{x} \; se \; x \geq 0 \end{cases}$ é contínua em x = 0. (4 escores)

Resolução:

Obs.:1. utilize caneta de cor azul ou preta. Questões resolvidas a lápis não serão consideradas.

2. não escreva na folha de frente da prova.

1. a) 4 b) 4
2. 4
3 4
4. 4

20

Sucesso!

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{1-\sqrt{x}} = \lim\limits_{y\to 1} \dfrac{y+1}{-y^2-y-1} = \lim\limits_{y\to 1} \dfrac{2}{-3} = \boxed{-\dfrac{2}{3}}$

$f(1) = \dfrac{0}{0}$ (indeterm.)

$\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{1-\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt[3]{y^6}-1}{1-\sqrt{y^6}} = \dfrac{y^2-1}{1-y^3} = \dfrac{(y-1)(y+1)}{-(y^3-1)} = \dfrac{\cancel{(y-1)}(y+1)}{-\cancel{(y-1)}(y^2+y+1)} = \dfrac{y+1}{-y^2-y-1}$

$* \; x = y^6$

$x \to 1 \Rightarrow y \to 1$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x \cdot \operatorname{sen} 3x}{x^2 \cdot \cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{x} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x}$

$f(0) = \dfrac{0}{0}$ (indeterm.)

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x}$

$* \; y = 5x \; ; \; t = 3x$

$x \to 0 \Rightarrow y \to 0 \qquad x \to 0 \Rightarrow t \to 0$

$= \lim\limits_{x\to 0} 5 \cdot \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{5x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} 3 \cdot \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x}$

$= 5 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{5x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x} \cdot 3 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x}$

$\overset{*}{=} 5 \cdot \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} y}{y} \cdot 3 \cdot \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x}$

$= 5 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 = \boxed{15}$

02) $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x^3-3x^2+2x}$

A.V. ∴

$f(x) = \dfrac{k}{0}, \; k \neq 0$

$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

$x(x^2-3x+2) = 0$

$\underline{x=0}$ ou $x^2-3x+2=0$

$\Delta = 9 - 8 = 1$

$x = \dfrac{3 \pm 1}{2} \; \begin{cases} \underline{x' = 2} \\ \underline{x'' = 1} \end{cases}$

$f(0) = \dfrac{2}{0} \Rightarrow \dfrac{k}{0}, \; k \neq 0$

$f(1) = \dfrac{3}{0} \Rightarrow \dfrac{k}{0}, \; k \neq 0$

$f(2) = \dfrac{10}{0} \Rightarrow \dfrac{k}{0}, \; k \neq 0$

Logo, $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$ são assíntotas verticais.

AH.:

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = c$; $y = c$ é A.H.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3+2}{x^3-3x^2+2x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x \to \pm\infty} 1 = 1$$

Logo, $y = 1$ é assíntota horizontal

03) $f(x) = \begin{cases} x^2 - k & \text{se } x > 2 \\ 2k - 3x & \text{se } x < 2 \end{cases}$

$k = ?$; $\lim_{x \to 2} f(x)$ existir $\Rightarrow \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x)$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x^2 - k = 4 - k$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 2k - 3x = 2k - 6$

$4 - k = 2k - 6$

$3k = 10$

$\boxed{k = \frac{10}{3}}$

04) $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{tg\, x}{x} & \text{se } x < 0 \\ 2 - \sqrt[3]{x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ é contínua em $x = 0$.

I) $f(0) = 2 - \sqrt[3]{0} = 2$

II) $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 2 - \sqrt[3]{x} = 2 - \sqrt[3]{0} = 2$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 1 + \frac{tg\, x}{x} = 2$

III) $f(x) = \lim_{x \to 0} f(x)$

$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) \Rightarrow 2 = 2$

Logo, a função é contínua em 0.

* $\lim_{x \to 0^-} 1 + \frac{tg\, x}{x} = \lim_{x \to 0^-} 1 + \lim_{x \to 0^-} \frac{tg\, x}{x}$

$1 + \lim_{x \to 0^-} \frac{sen\, x}{cos\, x} \cdot \frac{1}{x} = 1 + \lim_{x \to 0^-} \frac{sen\, x}{x} \cdot \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{cos\, x} = 1 + 1 \cdot 1 = 2$