INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CEARÁ
Campus Fortaleza

Coordenadoria de Matemática
Professor: Roberto C. Feitosa
AP3 de Cálculo I
Aluno(a) Francisco Lucas Lima da D. Nota 10,0 / 25

muito bem!

Questões::

1) Encontre $\frac{dy}{dx}$: (3 escores cada)
   a) $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 + x + 1}$
   b) $y = \sin(\cos(tgx^2))$

2) Encontre a equação da reta tangente à curva $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$, no ponto de abscissa x = 2. (4 escores)

3) Considerando a função implícita $xy - x^2y^3 = y^2 - x^2$, calcule $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dx}{dy}$. (4 escores)

4) Prove que o produto de dois números que somam k (k uma constante real) é máximo quando esses números forem iguais. (4 escores)

5) Dada a função $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$, encontre os intervalos de crescimento e decrescimento, pontos de máximos e mínimos relativos, intervalos de concavidade negativa e positiva e pontos de inflexão se existirem.

Resolução:

Obs.: 1. utilize caneta de cor azul ou preta. Questões resolvidas a lápis não serão consideradas.
2. não escreva na folha de frente da prova.

1. $\begin{cases} a.\ 3 \\ b.\ 3 \end{cases}$
2. 4
3. 4
4. 4
5. 7

25

Sucesso!

Robertodg68@ifce.edu.br

a) $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 + x + 1}$

$$\frac{dy}{dx} = (3x^2 - 2x + 1) \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^3 - x^2 + x + 1)^2}} = \frac{3x^2 - 2x + 1}{3\sqrt[3]{(x^3 - x^2 + x + 1)^2}}$$

b) $y = \operatorname{sen}(\cos(\operatorname{tg} x^2))$

$y = \operatorname{sen} t$

$t = \cos u$

$u = \operatorname{tg} v$

$v = x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \cos t \cdot (-\operatorname{sen} u) \sec^2 v \cdot 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\cos(\cos(\operatorname{tg} x^2)) \cdot \operatorname{sen}(\operatorname{tg} x^2) \cdot \sec^2(x^2)\, 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -2x \cos(\cos(\operatorname{tg} x^2)) \operatorname{sen}(\operatorname{tg} x^2) \sec^2(x^2)$$

02) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 4x$

$f'(2) = 3 \cdot 4 - 4 \cdot 2 = 4$;

logo, $m_t = 4$

$P(2, f(2))$

• $f(2) = 8 - 8 + 1 = 1$

• $P(2, 1)$

Usando $y - y' = m(x - x')$,

$y - 1 = 4(x - 2)$

$y - 1 = 4x - 8$

$\boxed{y = 4x - 7}$

03) $xy - x^2y^3 = y^2 - x^2$; $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dx}{dy}$

$$y + x \cdot \frac{dy}{dx} - \left(2xy^3 + x^2\, 3y^2 \frac{dy}{dx}\right) = 2y \cdot \frac{dy}{dx} - 2x$$

$$y + x\frac{dy}{dx} - 2xy^3 - 3x^2y^2\frac{dy}{dx} = 2y \cdot \frac{dy}{dx} - 2x$$

$$x \cdot \frac{dy}{dx} - 3x^2y^2\frac{dy}{dx} - 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 2xy^3 - 2x - y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy^3 - 2x - y}{x - 3x^2y^2 - 2y}$$

Como $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$, então:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x - 3x^2y^2 - 2y}{2xy^3 - 2x - y}$$

04)

$f(x,y) = xy$

$x + y = K, \; K \in \mathbb{R}$ (const)

$y = K - x$

$P(x) = x(K-x)$

$P(x) = Kx - x^2, \; x \in [0, K]$

$P'(x) = 0$

$K - 2x = 0$

$2x = K \Rightarrow x = \frac{K}{2}$ (nº crítico)

* Testando em $P(x)$

$P(0) = 0$

$P\left(\frac{K}{2}\right) = K \cdot \frac{K}{2} - \frac{K^2}{4} = \frac{K^2}{2} - \frac{K^2}{4} = \frac{K^2}{4}$

$P(K) = 0$

→ Logo, $P(x)$ será máximo quando $x = \frac{K}{2}$. Como:

$y = K - x \Rightarrow y = K - \frac{K}{2} = \frac{K}{2}$ logo $y = \frac{K}{2}$ e, analogamente, $x = y$

05)

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$

$f'(x) = 3x^2 - 10x + 6$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 10x + 6 = 0$

$\Delta = 100 - 72$

$\Delta = 28 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{7}$

$x = \frac{10 \pm 2\sqrt{7}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{3}$; $x' = \frac{5 + \sqrt{7}}{3}$; $x'' = \frac{5 - \sqrt{7}}{3}$

$f'(x)$: + ↗ $\frac{5-\sqrt{7}}{3}$ − ↘ $\frac{5+\sqrt{7}}{3}$ + ↗ x

* f cresce em: $\left(-\infty, \frac{5-\sqrt{7}}{3}\right] \cup \left[\frac{5+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right)$

* f decresce em: $\left[\frac{5-\sqrt{7}}{3}, \frac{5+\sqrt{7}}{3}\right]$

* Ponto de máximo relativo: $M\left(\frac{5-\sqrt{7}}{3}, f\left(\frac{5-\sqrt{7}}{3}\right)\right)$

* Ponto de mínimo relativo: $m\left(\frac{5+\sqrt{7}}{3}, f\left(\frac{5+\sqrt{7}}{3}\right)\right)$

* Concavidade:

$f''(x) = 6x - 10$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 10 = 0$

$x = 10/6 = 5/3$

$f''(x)$: − $\cap$ $5/3$ + $\cup$ x

* f tem concav. positiva em: $[5/3, +\infty)$

* f tem concav. negativa em: $(-\infty, 5/3]$

* Ponto de inflexão: $I(5/3, f(5/3))$

$I(5/3, 20/27)$