INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ - IFCE

Disciplina: CÁLCULO I - LIMITES

Vizinhança: Em R chama-se **vizinhança completa de x_0** a um intervalo aberto I , tal que x_0 ε I. Uma vizinhança completa de x_0 é indicada por V (x_0) . P.e., I = ½ ; 5 [é uma vizinhança completa do nº 4, pois 4 ε I .

Observe que sendo a < b, o intervalo] a ; b [é uma vizinhança completa de x_0 se, e somente se, x_0 ε] a ; b [, isto é, $a < x_0 < b$

.Em R chama-se **vizinhança completa simétrica de x_0 de raio δ** , δ ε R_+^* ao intervalo aberto $]\ x_o - \delta\ ;\ x_o + \delta\ [$ e indica-se por $V\ (\ x_o\ ;\ \delta\ )$ .Para construirmos uma vizinhança simétrica basta tomar $\delta \le \min\{x_o - a\ ;\ b - x_o\}$.

Seja a vizinhança completa V(3) =]1 ; 4 [do número 3 .Se tomarmos $\delta \le \min\{3-1\ ;\ 4-3\} = \min\{\ 2\ ;\ 1\ \} = 1$, toda vizinhança simétrica V (3 ; δ) é tal que V (3 ; δ) c V(3) para δ = 1, temos a vizinhança V (3, 1).

Seja V (2) =] 1 ; 7/2 [uma vizinhança completa do número 2 . Determine uma vizinhança completa simétrica do número 2, V (2 ; δ) c V (2) R: Para δ = 1 a vizinhança é V (2, 1).

.Seja V (0) =] – 1/2 ; 2 [uma vizinhança completa do número 0 . Determine uma vizinhança completa simétrica do número 0, V (0 ; δ) c V(0) δ = 1/2

Noção intuitiva de limite

. Observações :

a).Para a existência de $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, o que interessa não é o particular valor que f (x) possa tomar no ponto x = a mas sim o conjunto de valores que f (x) possa assumir numa vizinhança reduzida de a.

$$\text{Ex.: } f(x) = \begin{cases} 2x+1, \text{ para } x \ne 1 \\ 4 \text{ , para } x = 1 \end{cases} \quad \text{neste caso } \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}(2x+1) = 3 \ne f\ (1)\ .$$

Mesmo que f (1) não estivesse definido, o valor do limite seria 3 .

b) Se as funções f (x) e g (x) são tais que : f(x) = g(x) , para x ≠ a e f (a) ≠ g(a) elas possuem o mesmo comportamento em relação ao cálculo do limite quando x tende a " a ". $F(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x-1}$ definida em R – { 1 } e g(x) = 2x + 1 definida em R, apresentam o mesmo limite quando x→1 .

c) O fato de se definir f (a) não implica na existência do $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

$$\text{Seja a função de R em R definida por: } f\ (\ x\ ) = \begin{cases} 2x+1 \text{ para } x \ge 1 \\ 2x - 1 \text{ para } x < 1 \end{cases}$$

d) Pode acontecer que não se defina f (a) e também não exista $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

$$\text{Ex.: Seja a função de R em R definida por: } f\ (\ x\ ) = \begin{cases} x \text{ para } x < 1 \\ 4 \text{ para } x > 1 \end{cases}$$

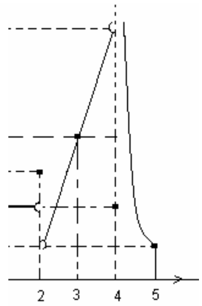
1) Considere a função f cujo gráfico é representado ao lado, calcule :

a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ e) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ i) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ m) $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ f) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ j) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$ n) $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ g) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ k) $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$ 0) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ h) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ l) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$



2) Sendo $f(x)=\begin{cases} x & \text{se } x<1 \\ 3 & \text{se } x=1 \\ x+5 & \text{se } x>1 \end{cases}$, encontre: a) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

3) Seja $h(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3}, & \text{se } x\neq 3 \\ 0, & \text{se } x=3 \end{cases}$. a) Faça o gráfico de h(x). b) Achar, se existir: $\lim\limits_{x\to 3^+} h(x)$, $\lim\limits_{x\to 3^-} h(x)$ e $\lim\limits_{x\to 3} h(x)$.

4) Seja $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & \text{se } x\neq 0 \\ 0, & \text{se } x=0 \end{cases}$. Mostrar que h(x) não tem limite no ponto 0.

5) Seja $f(x)=2+|5x-1|$. Calcule se existir :

(a) $\lim\limits_{x\to 1/5^+} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 1/5^-} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to 1/5} f(x)$ (d) Esboce o gráfico de f(x).

. DEFINIÇÃO : Dizemos que a função f tende ao limite L quando x tende a x_0 se , para qualquer número positvo ε, é possível encontrar um número positivo δ, tal que se $0<|x-x_0|<\delta$, então $|f(x)-L|<\varepsilon$

1) Seja f : R → R dada por f(x) = 2x – 5. Prove que $\lim\limits_{x\to 4}(2x-5)=3$

2) Seja f : R → R dada por f(x) = 1 – 3x. Prove que $\lim\limits_{x\to 2}(1-3x)=-5$

3)Seja F : R - { 3 } dada por f(x) $=\dfrac{x^2-9}{x-3}$. Prove que $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$

4) Seja F : R - { 1 } dada por f(x) $=\dfrac{2x^2+x+3}{x-1}$. Prove que $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{x-1}=5$

5) Seja f : R → R dada por $f(x) = x^2$. Prove que $\lim\limits_{x\to 5} x^2 = 25$

6) Seja f : R → R dada por $f(x) = x^2 + x + 1$. Prove que $\lim\limits_{x\to 1} x^2+x+1 = 3$

1. A lei de Ohm para circuitos elétricos, como na ilustração na fig. Abaixo, diz que **V = RI**. Nessa equação, V é uma voltagem constante, I é a corrente em ampéres e R **é** a resistência em ohms. Sua empresa recebeu um pedido para fornecer resistores para um circuito no qual V será 120V, sendo I = 5 ± 0,1A. Em qual intervalo R deve ficar para que I esteja a 0,1ª do valor alvo I_0 = 5A?

2.No circuito RC, (circuito onde a corrente varia com o tempo, contendo um capacitor) tem-se um capacitor de capacitância C que está inicialmente descarregado. Deseja-se encontrar a carga q deste capacitor em um determinado tempo q(t). Conforme a equação da carga do capacitor $q=C\varepsilon\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$ estabeleça:

a) A carga de um capacitor quando t = 0:

$q=C\varepsilon\left(1-e^{-\frac{0}{RC}}\right)$ = Cε (1-1) = 0 então: quando o tempo é igual a zero, a carga é igual a zero.

b) A carga do capacitor quando t cresce indefinidamente, ou seja, t → ∞

$$\lim_{t\to\infty} C\varepsilon\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right) = \lim_{t\to\infty} C\varepsilon\left(1-e^{-\frac{\infty}{RC}}\right) = \lim_{t\to\infty} C\varepsilon\left(1-\frac{1}{e^{\frac{\infty}{RC}}}\right) = \lim_{t\to\infty} C\varepsilon\,(1-0) = C\varepsilon$$

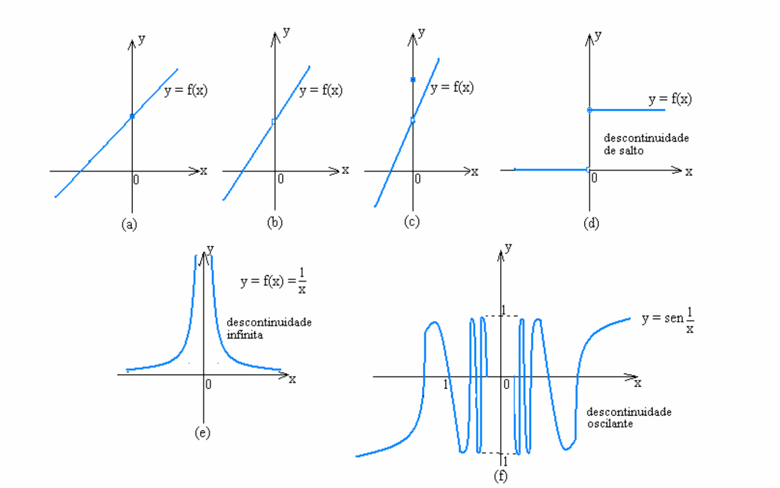
Portanto, quando t creste indefinidamente, a carga é igual a tensão x a capacitância.
ε→ força eletromotriz (tensão no RC) e **C**→ capacitância.

CONTINUIDADE DE LIMITES :

. Noções : uma função é contínua se o seu gráfico não é quebrado, ou seja, não tem saltos ou furos .

. Definição : Seja F : A $\to$ R uma função e seja x_0 um ponto de seu domínio ($x_0 \in$ A).

A função f é contínua em x_0 se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.



1) Mostre que a função definida por $f(x) = \begin{cases} ax - 2a..se....x > 2 \\ 0..........se....x = 2 \\ x^2 - 4....se.....2 > x \end{cases}$ é contínua para x = 2, qualquer que seja a

2) Mostre que a função definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ se } x > 1 \\ -2x \text{ se } x < 1 \end{cases}$ é descontínua para x = 1.

3)Determine todos os valores da constante *A* para que a seguinte função seja contínua para todos os valores de *x* .

$$f(x) = \begin{cases} A^2x - A\,, & \text{if } x \geq 3 \\ 4\,, & \text{if } x < 3 \end{cases}$$

4)Determine todos os valores das constantes A e B para que a função seja contínua para todos os valores de *x* .

$$f(x) = \begin{cases} Ax - B\,, & \text{if } x \leq -1 \\ 2x^2 + 3Ax + B\,, & \text{if } -1 < x \leq 1 \\ 4\,, & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

5) Calcule 1) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x+5}{x-1} = (11/2)$ 2) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2-\sqrt{x-1}}{x^2-25} = (-1/40)$ 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x} = (½)$

4) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+6x}-2x}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1} = 2$ 6) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-4x+3} = -½$ 7) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} = 1/3$

8) $\lim\limits_{r\to 64} \dfrac{\sqrt[3]{r}-4}{\sqrt{r}-8} = ½$ 9) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = 3/2$ 10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x+4}-\sqrt[3]{4}} = 3\sqrt[3]{16}$ 11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+1}-1} = 1/2$ 12) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^6-1}{x^3-1} = (2)$ 13) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x^2-9x} = (1/54)$ 14) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = (1/2)$ 15) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}} = \left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt[3]{4}}\right)$

16) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{x+3}-\sqrt[5]{3}}{\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{3}} = \left(\dfrac{3\sqrt[3]{9}}{5\sqrt[5]{81}}\right)$ 17) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = 1$ 18) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x-1} = n$ 19) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-4} = 3$

20) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n} = \left(\dfrac{ma^{m-n}}{n}\right)$ 21) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{h}}{x} = \left(3\sqrt[3]{x^2}\right)$ 22) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[4]{h}-1}{\sqrt[5]{h}-1} = (5/4)$

23) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2-\sqrt{4-t}}{t} = (1/4)$ 24) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$ 25) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^3-a^3}{x^2-a^2} = \dfrac{3a}{2}$ 26) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right) = -1$

27) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1-x^2}{1-|x|} = 2$ 28) Sendo a > 0, calcule $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)$

29) Sendo $\lim_{x\to 1} \dfrac{a\sqrt{x+1}-b}{x-1} = \sqrt{2}$, calcule a e b . ($a = 4$ e $b = 4\sqrt{2}$)

30) Calcule **a** e **b**, sendo $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-ax+8}{x^2-(2+b)x+2b} = \dfrac{1}{5}$ ($a = 6$ e $b = 12$)

31) Determine um polinômio f(x), de grau 3, sabendo que $\lim_{x\to -1} \dfrac{f(x)}{x+1} = 21$ e $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{x-2} = 6$

R.: $f(x) = (x + 1)(x - 2)(3x - 4)$

32) Calcule a) $\lim_{x\to 27} \dfrac{x-27}{x^{\frac{1}{3}}-3}$ (27) b) Calcule $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{1}{4}}-1}$ (4/3)

33.Calcule os limites das funções abaixo :

a) $\lim_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right] = -1$ b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x-1} = n$ c) $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

d) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}} = 1$ e) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+3x-4}{x^2-1} = \dfrac{5}{2}$ f) $\lim_{x\to 2} \dfrac{2x+3}{|x-2|} = +\infty$

g) $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{7-5x}{(x-2)^3} = -\infty$ h) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^4-3}} = 1$ i) $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$ j) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2} = \dfrac{1}{2}$

34)Seja $f : R \to R$ dada por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{x-1}, & \text{se } x \neq 1 \\ k, & \text{se } x = 1 \end{cases}$ determine k, para que f seja contínua no ponto $x_0 = 1$ Resp.:$k = -\dfrac{1}{2}$

Limites Laterais :

a) dizemos que a função f tende ao limite L quando x tende a x_0 pela esquerda se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que se $x_0 - \delta < x < x_0$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$, indicamos $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$

b) dizemos que a função f tende ao limite L quando x tende a x_0 pela direita se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que se $x_0 < x < x_0 + \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$, indicamos $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$

1) Sendo $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$, encontre: a) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 4$ b) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4$ c) $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$

2) $\lim_{x\to 5^-} \dfrac{x^2-5x+10}{x^2-25} = -\infty$ 3) $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{x^3-4x^2+x+6}{|2x^2-9x+10|} = (1/4)$ 4) $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{3x-4}{(x-2)^6} = +\infty$ 5) $\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} \dfrac{1+2x}{1-2x} = -\infty$

6) $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+8}{(2-x)^7} = +\infty$ 7) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{2x^2-x-6}{(1-x)^3} = +\infty$ 8) $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{2x^2-x-6}{(1-x)^3} = -\infty$ 9) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty$

07) Dada a função $F : R^* \to R$, $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ calcule os limites laterais para $x_o \to 0$.

08) Dada a função $F : R \to R$, $f(x) = [\,x\,]$ calcule os limites laterais para $x_o \to 2$

Limites Infinitos e no infinito:

Dizemos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ se, dado qualquer número $N > 0$, existe $\delta > 0$, tal que se $0 < |x - x_0| < \delta$, então $f(x) > N$ (definição para um dos vários casos). Ex.: Seja $f : R - \{2\} \to R$ e $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$, então $\lim_{x\to 2} = \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty$

Calcule os limites abaixo :

a) $\lim_{x\to -2} \dfrac{3-2x}{(x+2)^2}$ $+\infty$ b) $\lim_{x\to 3} \dfrac{2-x}{(x-3)^2} = -\infty$ c) $\lim_{x\to 2} \dfrac{2x+3}{|x-2|}$ $+\infty$ d) $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{3x+2}{x-2} = -\infty$

e) $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{7-5x}{(x-2)^3} = -\infty$ g) $\lim_{x\to a^+} \dfrac{x^4-a^4}{(x-a)^2}$, ($a > 0$) $+\infty$

Contração de Lorentz : " Na Teoria da Relatividade Especial, temos que o comprimento de um objeto é função de sua velocidade $L(v) = L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ onde L_0 é o comprimento do objeto em repouso e c é a velocidade da luz. A velocidade da luz é de aproximadamente 30 x 10^8 m/s . Da teoria da relatividade é conhecido que nenhum objeto pode ir além da velocidade da luz, logo $v \to c^-$: $\lim_{v\to c^-} L(v) = 0$.

Isto significa que para um observador parado o objeto desaparece.

" Na Teoria da Relatividade Especial, a massa de uma partícula é função de sua velocidade $M(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ onde m_0 é a massa da partícula em repouso e c é a velocidade da luz. A velocidade da luz é de aproximadamente 30 x 10^8 m/s .

Logo $v \to c^-$: $\lim_{v\to c^-} M(v) = +\infty$, isto é, se a velocidade de uma partícula aumenta, sua massa aumenta em relação a sua massa inicial m_0

"Sabemos que se uma quantia A_0 é investida a uma taxa r de **juros compostos**, capitalizados m vezes ao ano, o saldo A(t), após t anos é dado por $A(t) = A_0(1+\frac{r}{m})^{mt}$. Se os juros forem capitalizados continuamente, o saldo deverá ser :

$$A(t) = \lim_{m\to+\infty} A_0(1+\frac{r}{m})^{mt} = A_0 \lim_{m\to+\infty}\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^m\right]^t = A_0 e^{rt}$$

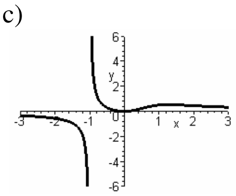
Ex. As companhias de investimento frequentemente usam o modelo de juros compostos continuamente para calcular o rendimento de um investimento. Use este método para rastrear o rendimento de \$ 100,00 investidos em 2000 com uma taxa de juros anual de 5,5%, em composição contínua. Resp.: \$ 124,61

1) Dadas as funções abaixo, pede-se:

a) Domínio; b) Assíntotas verticais e horizontais, e intersecções do gráfico com os eixos coordenados e com as assíntotas, se existem; c) Esboço do gráfico; d) Conjunto Imagem;

A) $f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$

c)



a) $\text{dom} = R - \{-1\}$

b) assíntota horizontal: $y = 0$; assíntota vertical: $x = -1$

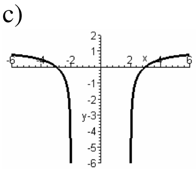
intersecção entre gráfico e eixo: $(0,0)$

intersecção entre gráfico e assíntota [$y = 0$]: $(0,0)$

d) $\text{im} = R$

B) $f(x) = \frac{x^2-9}{\sqrt{x^4-16}}$

c)



a) $\text{dom} = (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$

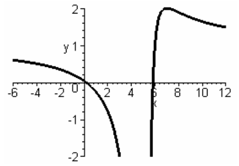
b) assíntota horizontal: $y = 1$; assíntotas verticais: $x = -2$ e $x = 2$

intersecção entre gráfico e eixo: $(-3,0)$ e $(3,0)$

intersecção entre gráfico e assíntota: não existe

d) $\text{im} = (-\infty,1)$

C) $f(x) = \frac{x^2-6x+1}{x^2-10x+25}$



c)

a) $\text{dom} = R - \{5\}$

b) assíntota horizontal: $y = 1$; assíntota vertical: $x = 5$

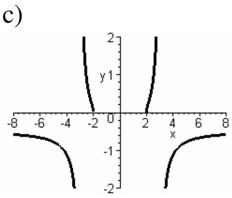
intersecção entre gráfico e eixo: $(3-2\sqrt{2},0)$ e $(3+2\sqrt{2},0)$

intersecção entre gráfico e assíntota [$y = 1$]: $(6,1)$

d) $\text{im} = (-\infty,2]$

D) $f(x) = \frac{\sqrt{x^4-16}}{18-2x^2}$

c)



a) $\text{dom} = (-\infty,-3)\cup(-3,-2]\cup[2,3)\cup(3,+\infty)$

b) assíntota horizontal: $y = -\frac{1}{2}$; assíntotas verticais: $x = -3$ e $x = 3$

intersecção entre gráfico e eixo: $(-2,0)$ e $(2,0)$

intersecção entre gráfico e assíntota: não existe

d) $\text{im} = (-\infty,-\frac{1}{2})\cup[2,+\infty)$

2) Determine as assíntotas verticais e horizontais das funções abaixo:

A) $f(x) = \dfrac{3x}{x-1}$ (R.: horizontal: $y = 3$, vertical: $x = 1$)

B) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$ (R.: horizontal: $y = \pm 2$, verticais: $\varnothing$)

C) $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{2x^2-3x}$ (R.: horizontal: $y = 1$, verticais: $x = 0, x = \dfrac{3}{2}$)

D) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$ (R.: horizontal: $y = \pm 1$, verticais: $x = \pm 2$)

E) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ (vertical: x = 0 ; oblíqua y = x)

Limites de Polinômios para $x \to \pm\infty$

Seja f : $R \to R$, f(x) ax^n ($a > 0$, $n \,\varepsilon\, N^*$) , sejas os limites $\lim\limits_{x\to+\infty} ax^n$ **e** $\lim\limits_{x\to-\infty} ax^n$ ($a > 0$)

$$\text{Se}\begin{cases} .\ x \to +\infty,\ \text{então}\ ax^n \to +\infty \\ .\ x \to -\infty\ \text{então} \begin{cases} \text{se n é par, } ax^n \to +\infty \\ \text{se n é impar, } ax^n \to -\infty \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Além disso é claro que : Se}\begin{cases} .\ ax^n \to +\infty\ \text{então}\ -ax^n \to -\infty \\ .\ ax^n \to -\infty\ \text{então}\ -ax^n \to +\infty \end{cases}$$

Função Polinômio : f : $R \to R$, $f(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ **($a \neq 0$)**. Considerando $x \neq 0$ e pondo $a_o x^n$ em evidência , vemos que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} a_o x^n$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x^3+4x^2-3x+1) = +\infty$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (3x^5+8x^2-7x+1) = -\infty$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-3x^4+4x^2-7x+1)$ $-\infty$

Limites da função Racional para $x \to \pm\infty$ (f : $A \to R$ dada por $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$)

..Limite da função racional é determinado pelo quociente de seus termos de maior grau.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} = \dfrac{3x^5+4x^2+2x-1}{2x^2+3x-4} = -\infty$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} = \dfrac{4x^2-3x+1}{3x^2+x-4} = \dfrac{4}{3}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} = \dfrac{x+1}{3x^2+2x-4}$ 1

d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt[3]{x^3-5x+27}}$, =1 e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+5}{\sqrt{2x^2-5}} = \sqrt{2}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+5}{\sqrt{2x^2+5}} = \sqrt{2}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+1}{3^n+1}$ =0 h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k = 2$ i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^3} \sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ = ⅓

Limites da função $\sqrt[n]{f(x)}$ quando $f(x) \to \pm\infty$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^3-3} = +\infty$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{1-x}$ =-1 c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}$ =1 d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ =2

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ f) Determine **a e b**, sabendo que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+x^2-x+2}{x^2+x+1} - ax - b\right) = 0$, $a = 1$, $b = 0$

Teorema do Confronto(SANDUICHE) : sejam **g, f e h** funções cujos domínios contêm ao menos uma vizinhança reduzida V^* de x_o. Supondo que:

1º) para todo $x \varepsilon V^*$ se tenha $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

2º) $\lim_{x \to x_o} g(x) = \lim_{x \to x_o} h(x) = L$, nestas condições $\lim_{x \to x_o} f(x) = L$

1) A) Calcule $\lim_{x\to\infty} \frac{2-\cos x}{3-2x}$ B) Calcule $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2(2+sen^2 x)}{x+100}$.

Funções Trigonométricas : Limite Trigonométrico Fundamental : $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$

1) Calcule: a) $\lim_{x \to a} \frac{\cos x - \cos a}{x-a}$ =-sen(a) b) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(2x)}{\text{sen}(3x)}$ =2/3 c) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ =1/2

d) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}(2x)}{x}$ =2 e) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{senx} = 1$ f) $\lim_{x\to a} \frac{x+a}{\cos x + \cos a} = \frac{a}{\cos a}$ g) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \text{sen}x}{x+\text{sen}x}$ =0

h) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - ax)}{x} = a$ i) $\lim_{x\to\pi} \frac{\text{sen}(\text{tg}x)}{\text{tg}x}$ =1 j) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}5x + \text{sen}x}{\text{sen}2x + \text{sen}4x}$ =1 k) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}x}{x}$ =1 l) $\lim_{x\to\pi} \frac{sen(\pi - x)}{\pi - x} = 1$

2) Pedrinho fez a seguinte demonstração que $\lim_{x\to 0} x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$:

$$\lim_{x\to 0} x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\lim_{x\to 0} \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(\lim_{x\to 0} x\right) = 0\left(\lim_{x\to 0} \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0.$$ Critique a demonstração dele.

Comentário: $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = \lim_{x\to 0} f(x) \lim_{x\to 0} g(x)$ nem sempre é verdadeiro: é necessário que ambos os limites do lado direito existam. Como $\lim_{x\to 0} \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ não existe, a primeira igualdade que Pedrinho escreveu é falsa. Além disso, o produto "$0 \cdot \nexists$" não faz sentido e assim, a última igualdade de Pedrinho também não está boa.

Funções exponenciais : $f : R \to R$, tal que $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

1. $f(x) = a^x$ **assume somente valores positivos**
2. se $a > 1$, $f(x) = a^x$ é crescente e conseqüentemente :
   a) se $a > 1$ e $x > 0$, tem-se $a^x > 1$ b) se $a > 1$ e $x < 0$, tem-se $0 < a^x < 1$
3. se $0 < a < 1$, $f(x) = a^x$ é decrescente e conseqüentemente :
   a) se $0 < a < 1$ e $x > 0$, tem-se $0 < a^x < 1$ b) se $0 < a < 1$ e $x < 0$, tem-se $a^x > 1$

   A função $f : R \to R$, $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$ é contínua em R, i. é, $\lim_{x\to x_o} a^x = a^{x_o}$.

   Teorema : a) Se $a > 1$, tem-se $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$

   b)Se $0 < a < 1$, tem-se $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$

a) $\lim_{x\to 1} 2^{\frac{x^3-1}{x-1}}$ =8 b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} 3^{1-\sqrt{3}\,\text{sen}\, x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\lim_{x\to 0} 5^{\frac{x-\text{sen}3x}{x}} = \frac{1}{25}$ d) $\lim_{x\to+\infty} 3^{\frac{1-x^2}{1-x}} = +\infty$

Funções logarítmicas : $f : R_+^* \to R$, tal que $f(x) = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Teorema : a) Se $a > 1$, tem-se $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$ **e** $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$

b)Se $0 < a < 1$, tem-se $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$ **e** $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$

1) $\lim\limits_{x\to 2} \log_{\frac{2}{3}} \dfrac{x^3-8}{x^3-2x^2+4x-8}$ =-1 2) $\lim\limits_{x\to 0} \log_2 \cos x$ =0 3) $\lim\limits_{x\to -\infty} \log_5 \dfrac{1}{|x|}$ = +∞ 4) $\lim\limits_{x\to -\infty} \log_3 \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = 0$

O número ´´e`` : f : $N^* \to R$, dada por $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$, prova-se que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$,

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+k} = e$, $k \in R$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x+k}\right)^{x+k} = e$, $k \in R$ c) $\lim\limits_{x\to 0} = (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

4. Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ então $\lim\limits_{x\to x_0} = \left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$

5. Se $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = \pm\infty$ então $\lim\limits_{x\to x_0} = \left(1+\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)^{v(x)} = e$

Teorema: sendo a > 0 $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a^h-1}{h} = \log_e^a$

Calcule:a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x = \mathbf{e^{-2}}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$ $=e^{-3}$ **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x = \mathbf{e^{-1}}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0} (1+\dfrac{4}{x})^{x+3}$

e) $\lim_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} = e^2$ f) $\lim_{x\to 0} (1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$ =2 g) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{5}{x}\right)^x = e^{-5}$ i) $\lim\limits_{x\to 0} (1+3tg^2 x)^{\cot g^2 x} = e^3$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-3x}-1}{x}$ = -3 k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ = 1 l) $\lim\limits_{x\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1), (a>0)$ = lna m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{-x}}{senx}$ = 1

Teorema do anulamento ou de Bolzano: "Se f for contínua no intervalo fechado [a ; b] e se f(a) e f(b) tiverem Sinais contrários, então existirá pelo menos um **c** em [a ; b] tal que f(c) = 0.

Teorema do Valor Intermediário: Se f for contínua num intervalo fechado $[a,b]$ e se k é um número entre $f(a)$ e $f(b)$, inclusive, então, existe no mínimo um ponto c, $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = k$.

Conseqüência do teorema acima: Se f for contínua em $[a,b]$ e $f(a)$ e $f(b)$ são não nulos e de sinais contrários, então existe, no mínimo, um ponto c, $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$. Ou seja, $y = f(x)$ tem pelo menos uma raiz real entre a e b.

Tal conseqüência do TVI é especialmente útil quando não é possível achar a raiz exatamente usando álgebra e temos que nos satisfazer com uma aproximação decimal da raiz através da identificação de um pequeno intervalo no qual existe no mínimo uma raiz real.

1.Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe pelo menos um valor de x com $0 \le x \le 1$ Solução da equação $x^5 + 4x^2 - x - 3 = 0$.

2. Prove que a equação $x^3 - 4x + 2 = 0$ admite três raízes reais distintas. [-3; -2] ; [0 ; 1] ; [1 ; 2]

3 .Uma esfera de raio desconhecido x consiste de um centro esférico e um revestimento de 1cm de espessura(ver figura anexa). Dado que o volume do revestimento e o volume do centro esférico são os mesmos, aproxime o raio da esfera com uma precisão em três casas decimais. Resp. x = 4,847 cm