

## LISTA 2 - Congruência - 26.3.2015

O que se segue é importante para a resolução dos exercícios.

Seja  $\mathbb{Z}_m$  o conjunto quociente da relação de equivalência em  $\mathbb{Z}$  **congruência módulo**  $m$ . Denotando por  $\bar{a}$  a classe de equivalência do elemento  $a$ , definimos em  $\mathbb{Z}_m$  uma adição e um produto da seguinte maneira:

$$\bar{a} + \bar{b} := \overline{a + b} \quad \text{e} \quad \bar{a} \cdot \bar{b} := \overline{a \cdot b}$$

Prova-se facilmente que essas definições não dependem dos representantes das classes. Lembre que

$$\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow n|a-b \Leftrightarrow a \text{ e } b \text{ deixam o mesmo resto na divisão por } n.$$

1. Calcule em  $\mathbb{Z}_8$ :
  - (a)  $\bar{3} + \bar{7}$
  - (b)  $\bar{2}(\bar{4} + \bar{5})$
  - (c)  $(\bar{3} + \bar{4})(\bar{5} + \bar{6})$
2. Seja  $\bar{x} \in \mathbb{Z}_m$ . Dado  $n \in \mathbb{N}$  defina  $n\bar{x}$  como sendo a soma  $\bar{x} + \bar{x} + \cdots + \bar{x}$  com  $n$  parcelas. Dizemos que  $n\bar{x}$  é um múltiplo de  $\bar{x}$ .
  - (a) Liste todos os múltiplos de  $\bar{3}$  em  $\mathbb{Z}_9$ .
  - (b) Liste todos os múltiplos de  $\bar{3}$  em  $\mathbb{Z}_8$ .
3. Construa as tabelas de adição e multiplicação para  $\mathbb{Z}_4$ .
4. Construa a tabela de multiplicação para  $\mathbb{Z}_{11}$ .

Os exercícios 30 a 32 lidam com o método de utilizar *dígitos verificadores* de números de **ISBN**. Antes de 2007 todo livro disponível comercialmente recebia um *International Standard Book Number* de 10 dígitos, geralmente impresso na contracapa ao lado do código de barras. O último caractere dessa sequência de 10 dígitos é um dígito especial usado para verificar erros de digitação no ISBN. Se os primeiros nove dígitos do ISBN são  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ , o décimo dígito é dado pela fórmula

$$a_{10} \equiv (1a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6 + 7a_7 + 8a_8 + 9a_9) \pmod{11}.$$

onde  $a_{10} = X$  caso  $a_{10} = 10$ .

5. Calcule o décimo dígito do ISBN cujos primeiros nove dígitos são 039481500.
6. Suponha que  $a_1a_2 \dots a_{10}$  é um ISBN válido. Mostre que

$$\left( \sum_{k=1}^{10} ka_k \right) \equiv 0 \pmod{11}$$

7. O número 0060324814 é um número de ISBN válido?
8. Para cada par de números inteiros  $a$  e  $b$  de números inteiros abaixo, calcule o máximo divisor comum  $MDC(a, b)$  e determine  $x$  e  $y$  inteiros tais que  $ax + by = MDC(a, b)$ .
  - (a) 14 e 35
  - (b) 252 e 180
  - (c) 6643 e 2873
  - (d) 272828282 e 3242