INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CEARÁ
Campus Fortaleza

Coordenadoria de Matemática
Professor: Roberto Carlos Feitosa
AP1- Cálculo I
Aluno(a) Luis [illegible] de Lima Sales Nota ~~18~~ 9,0

Questões:

Encontre os seguintes limites:(4 escores cada)

1) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^{10}-1}{x^4-1}\right)^3$

2) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{6x^4-2x^3-x}{-x^7+2x+4}\right)$

3) $\lim_{x\to 2^+}\frac{1+e^x}{x^2-5x+6}$

4) $\lim_{n\to +\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n-2}$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{5x}}{x}$

Resolução:

Obs.:1. utilize caneta de cor azul ou preta. Questões resolvidas a lápis não serão consideradas.

2. não escreva na folha de frente da prova.

1. 4
2. 4
3. 4
4. 4
5. 2

18

Sucesso!

5) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^{5x}}{x}$

Façamos o $f'(0)$:

$$f'(0) = \frac{e^{2 \cdot 0} - e^{5 \cdot 0}}{0} = \frac{e^{0} - e^{0}}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{indeterminação}$$

Façamos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{e^{2x}}{e^{2x}} - \frac{e^{5x}}{e^{2x}}}{\frac{x}{e^{2x}}} \rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{e^{5x}}{e^{2x}}}{x} \cdot \cancel{\frac{1}{e^{2x}}}$$

Multiplicando numerador e denominador por 3 temos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{3x}}{x} \cdot \frac{3}{3} = 3 \lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{3x}}{3x}$$

Isso encontra-se na forma $\ln a = \lim_{x \to 0} \frac{1 - a^{x}}{x}$. Logo:

$$3 \cdot \lim_{x \to 0} \ln e = 3 \cdot \ln e. \text{ Logo:}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - \cancel{e^{5x}} e^{5x}}{x} = \boxed{3 \cdot \ln e}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^{x} - 1}{x}$$

1) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^{10}-1}{x^4-1}\right)^3$

Primeiramente façamos $f(1)$:

$$f(1)=\left(\frac{1^{10}-1}{1^4-1}\right)^3 \iff f(1)=\left(\frac{1-1}{1-1}\right)^3 \iff f(1)=\left(\frac{0}{0}\right)^3$$

"Disso é uma indeterminação."

Considerando que x^n-1 pode ser fatorado na forma $(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1)$, façamos:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot\cancel{(x-1)}}{(x^3+x^2+x+1)\cancel{(x-1)}}\right)^3=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{10}{4}\right)^3=\cancel{f(1)}$$

Isso justifica-se pois, fazendo o $f(1)$ após a fatoração anteriormente demonstrada, $(x^9+x^8+\dots+x+1)$ é igual a 10 e (x^3+x^2+x+1) é igual a 4. Prosseguindo:

$$f(1)=\left(\frac{10}{4}\right)^3 \iff f(1)=\left(\frac{10}{4}\right)\left(\frac{10}{4}\right)\left(\frac{10}{4}\right)=\frac{1000}{64}=\frac{125}{8}$$

Assim, podemos afirmar que $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^{10}-1}{x^4-1}\right)^3=\boxed{\frac{125}{8}}$

2 - $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{6x^4-2x^3-x}{-x^7+2x+4}\right)$

Disso temos que:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{6x^4-2x^3-x}{-x^7+2x+4}\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{6x^4}{-x^7}\right)$$ → Mais uma vez chegamos a uma indeterminação.

Façamos a divisão pelo maior expoente, ficando:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{6x^4}{x^7}-\frac{2x^3}{x^7}-\frac{x}{x^7}}{-\frac{x^7}{x^7}+\frac{2x}{x^7}+\frac{4}{x^7}} \to \lim_{x\to +\infty}\frac{\overset{0}{\cancel{\frac{1}{6x^3}}}-\overset{0}{\cancel{\frac{1}{2x^4}}}-\overset{0}{\cancel{\frac{1}{x^6}}}}{-1+\overset{0}{\cancel{\frac{1}{2x^6}}}+\overset{0}{\cancel{\frac{4}{x^7}}}} \to$$

3 - $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{1 + e^x}{x^2 - 5x + 6}$

Encontramos que $f(2)$ é igual a:

$$f(2) = \frac{1 + e^2}{(2)^2 - 5 \cdot 2 + 6} \iff f(2) = \frac{1 + e^2}{0}$$, que está na forma de $\frac{K}{0}$, $K \neq 0$.

Logo, $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{1 + e^x}{x^2 - 5x + 6} = \pm \infty$. Para definirmos se tal limite é igual a $+\infty$ ou $-\infty$, façamos que:

- Raízes de $x^2 - 5x + 6$: 3, 2

- Imaginando o gráfico dessa função, e considerando que sua concavidade é voltada para baixo, temos que para $x > 3$, $f(x)$ é positivo. Para $x < 2$, $f(x)$ também é positivo. Para $3 > x > 2$, $f(x)$ é negativo. Assim:

Logo, para

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1 + e^x}{x^2 - 5x + 6} = \boxed{-\infty}$$

4 - $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^{n-2}$

Temos que:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n-2} \iff \lim_{n \to +\infty} (1)^{n}$$, que é uma indeterminação

Considerando que $e^K = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{K}{x}\right)^x$, temos:

Encontremos uma função g tal que $\lim_{n \to +\infty} g(x)$ seja igual ao limite proposto. g pode ser definido como:

$$g(x) = \frac{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^2}$$ → O numerador encontra-se na forma e^K.