Notas de Aula: **Aplicações das Derivadas**

APLICAÇÕES DA DERIVADA

Vimos, na seção anterior, que a derivada de uma função pode ser interpretada como o coeficiente angular da reta tangente ao seu gráfico. Nesta, vamos explorar este fato e desenvolver técnicas para o uso de derivadas para *auxiliar a construção de gráficos*. Estão incluídas, também, as aplicações da derivada a problemas típicos envolvendo *máximos e mínimos*, *taxas de variação* e *cálculo de limites*, que tem aplicações práticas nos mais diversos campos, como geometria, engenharia, física, biologia e economia. Na verdade, podemos resumir tudo isto dizendo que a derivada constitui uma ferramenta poderosa para o *estudo e análise de funções*.

Cabe observar que o conteúdo apresentado nesta seção não é exaustivo e o enfoque pretendido é, na medida do possível, eminentemente prático. Por outro lado, o leitor interessado em aprofundar sua base teórica, conhecendo os detalhes, os teoremas e as demonstrações que dão embasamento a este conteúdo deve consultar os livros de cálculo tradicionais.

Taxas de variação ou taxas relacionadas

Um problema envolvendo taxas de variação de variáveis relacionadas é chamado de problema de *taxas relacionadas*. Assim, se uma variável x é função do tempo t, a taxa de variação de x em relação ao tempo é dada por $\frac{dx}{dt}$. Quando duas ou mais variáveis, todas função de t, são relacionadas por uma equação, a relação entre suas taxas de variação pode ser obtida diferenciando a equação em relação a t.

Em problemas com taxas relacionadas, as variáveis têm uma relação específica para os valores de t, onde t é a medida do tempo. Essa relação é usualmente expressa na forma de uma equação. Os valores das variáveis e as taxas de variação das variáveis em relação à t são freqüentemente dados num determinado instante. Considere o exemplo a seguir:

Exemplo:

Um tanque tem a forma de um cone invertido com 16 m de altura e uma base com 4 m de raio. A água "flui" no tanque a uma taxa de 2 m^3/min. Com que velocidade o nível da água estará se elevando quando sua profundidade for de 5 m?

Solução:

Seja *t* o tempo medido em minutos decorridos desde que a água começou a fluir dentro do tanque; *h* a altura em metros do nível de água em *t* min; *r* a medida em metros do raio da superfície da água em *t* min; e *V* a medida, em metros cúbicos, do volume de água no tanque em *t* min.

Em qualquer instante, o volume de água no tanque pode ser expresso em termos do volume do cone (Fig. 1).

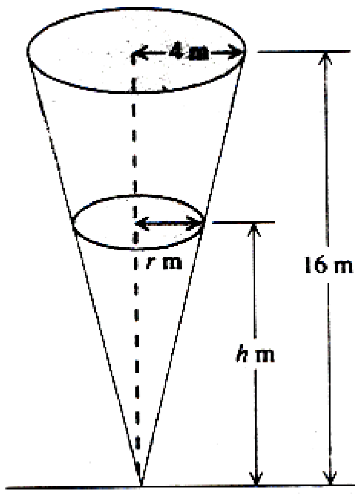


Fig 1. Tanque na forma de um cone

$$\Rightarrow V(t) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

V, r e h são todas funções de t. Como a água está fluindo no tanque a uma taxa de 2 m^3/min, $\frac{dV(t)}{dt} = 2\frac{m^3}{\text{min}}$. Queremos determinar $\frac{dh}{dt}$ quando h = 5m. Para expressar r em termos de h, temos, dos triângulos semelhantes,

$$\frac{r}{h} = \frac{4}{16} \Rightarrow r = \frac{1}{4}h$$

Logo,

$$\Rightarrow V(t) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{4}\right)^2 h \Rightarrow V(t) = \frac{1}{48}\pi h^3$$

Então,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{16}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

Substituindo $\frac{dV(t)}{dt} = 2$ e resolvendo:

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{32}{\pi h^2}$$

logo

$$\left.\frac{dh}{dt}\right]_{h=5} = \frac{32}{25\pi}$$

Assim sendo, o nível de água está subindo a uma taxa de $\frac{32}{25\pi}$ m/min quando a profundidade da água é de 5 m.

Os passos a seguir representam um *procedimento* possível para resolver problemas envolvendo *taxas relacionadas*.

1. Faça uma figura, se isso for possível.

2. Defina as variáveis. Em geral defina primeiro t, pois as outras variáveis usualmente dependem de t.

3. Escreva todos os fatos numéricos conhecidos sobre as variáveis e suas derivadas em relação à t.

4. Obtenha uma equação envolvendo as variáveis que dependem de t.

5. Derive em relação a t ambos os membros da equação encontrada na etapa 4.

6. Substitua os valores de quantidades conhecidas na equação da etapa 5 e resolva em termos da quantidade desejada.

TÉCNICAS DE CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS

Vimos que a interpretação geométrica de derivada de uma função é a inclinação da reta tangente ao gráfico da função em um ponto. Esse fato possibilita-nos aplicar derivadas como recurso auxiliar no esboço de gráficos. Por exemplo, podemos usar a derivada para determinar os pontos onde a reta tangente é horizontal; esses são os pontos onde a derivada é zero. A derivada também pode ser usada para encontrarmos os intervalos nos quais a função está acima ou abaixo da reta tangente. Discutiremos a seguir, de forma sucinta, a técnica para construção de gráficos com o auxílio das derivadas na análise de uma função.

Funções crescentes e decrescentes.

A taxa de variação de uma função $y = f(x)$ em relação a x, é dada por $y' = f'(x)$. Quando x cresce num intervalo, y cresce se y' for positiva e decresce se y' for negativa.

Na Fig.2, a curva $y = f(x)$ está subindo de **A** para **C**, de **D** para **F** e de **H** para **I**. É, claro que a função é *crescente* nos intervalos $a < x < c$, $d < x < f$, e $h < x < i$. Analogamente, a curva está descendo de **C** para **D** e de **F** para **H**, e a função é *decrescente* nos intervalos $c < x < d$ e $f < x < h$.

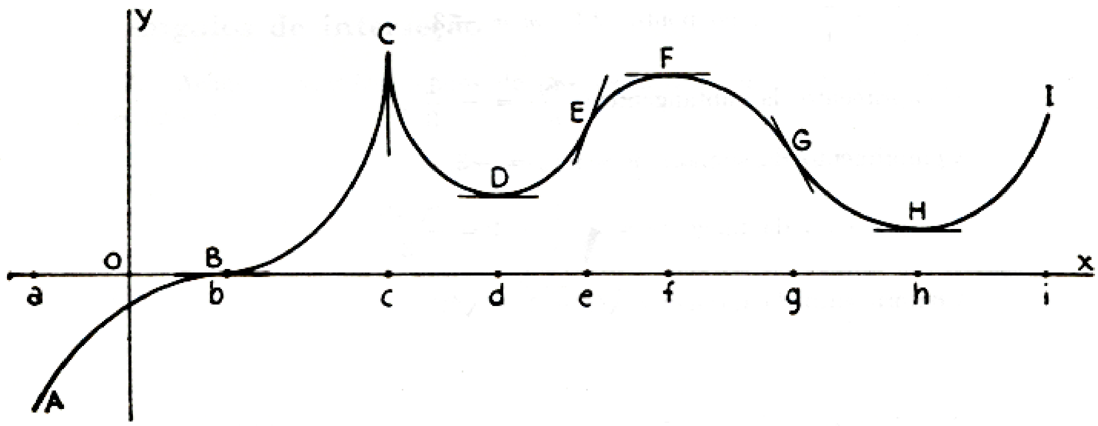


Fig 2.

Valores críticos e Máximos e Mínimos relativos

Os ***valores críticos*** para uma função y = f(x) são valores de x, para os quais a função é definida e nos quais y' = 0 ou se torna infinita. Na Fig. 2, **B**, **C**, **D**, **F** e **H** são *pontos críticos da curva* e suas abscissas x = b, x = c, x = d, x = f e x = h são valores críticos para a função.

Uma função y = f (x) tem um valor *máximo relativo* para $x = x_0$, se f (x_0) for maior do que os valores que imediatamente o precedem e sucedem na função. Quando x aumenta, passando por $x = x_0$, f (x) varia, passando de crescente para decrescente e f'(x) muda o sinal de positivo para negativo.

Uma função y = f (x) tem um valor *mínimo relativo* para $x = x_0$, se f (x_0) for menor do que os valores que imediatamente o precedem e sucedem na função. Quando x aumenta, passando por $x = x_0$, f (x) varia, passando de decrescente para crescente e f'(x) muda o sinal de negativo para positivo.

Na Fig. 2 **C** e **F** são pontos *máximos* e suas ordenadas são valores máximos da função correspondente. Do mesmo modo, **D** e **H** são pontos *mínimos* e suas ordenadas são valores mínimos da função. Pontos de *máximos e mínimos de uma curva* são ***pontos críticos***, porém um ponto crítico não é, necessariamente, um ponto de máximo ou mínimo; assim, **B** é um ponto crítico, porém, não é máximo nem mínimo.

Testes para máximos e mínimos de y=f(x)

Método da Primeira Derivada:

a) Achar f'(x) e os valores críticos.

b) Fazer x crescer passando pelos valores críticos. Para um valor crítico $x = x_0$,

f (x) passa por um *máximo* [= f (x_0)] se f' (x) passar de + para –;

f (x) passa por um *mínimo* [= f (x_0)] se f' (x) passar de – para +;

f (x) não passa por máximo nem mínimo se f' (x) não trocar de sinal

Método da Segunda Derivada.

a) Achar f'(x) e os valores críticos.

b) Achar a segunda derivada f''(x).

c) Para um valor crítico $x = x_0$

f(x) passa por um *máximo* [= f(x_0)] se f''(x_0) < 0

f(x) passa por um *mínimo* [= f(x_0)] se f''(x_0) > 0

O teste falha se f''(x) = 0 em $x = x_0$ ou se torna infinita.

Concavidade e ponto de inflexão

Um arco de uma curva é côncavo para cima se, em todos os pontos, o arco fica acima da tangente. Quando x aumenta ou y' não varia de sinal e é crescente (como no intervalo $b < x < c$), ou troca de sinal, passando de negativo para positivo (como nos intervalos $c < x < e$ e $g < x < i$). Em qualquer caso, a inclinação y' da curva é crescente e y'' é positiva.

Um arco de uma curva é côncavo para baixo se, em todos os pontos, o arco fica abaixo da tangente. Quando x aumenta, ou y' não varia de sinal e é decrescente (como no intervalo $a < x < b$), ou troca de sinal, passando de positivo para negativo (como no intervalo $e < x < g$). Em qualquer caso, a inclinação y' da curva é decrescente e y'' é negativa.

Ponto de inflexão é o ponto em que a curva muda de côncava para cima em côncava para baixo, ou vice-versa. Na Fig. 2, **B**, **E** e **G** são pontos de inflexão. Uma curva y = f (x) tem um *ponto de inflexão* em $x = x_0$, quando:

a) f(x_0) está definido.

b) f''(x_0) = 0 ou se torna infinito.

c) f''(x) troca de sinal quando x aumenta passando por $x = x_0$.

Então, parte do processo para se traçar um gráfico é o de encontrar extremos relativos da função em estudo. Resumidamente:

1] Encontre f'.

2] Encontre os pontos críticos para f; isto é,

(a) Encontre todos os pontos c do domínio de f para os quais f'(c) não existe.

(b) Encontre todos os pontos c para os quais f'(c) = 0.

3] Teste cada um dos pontos críticos para observar quando ele corresponde a um máximo relativo, um mínimo relativo, ou não é extremo relativo. Nesse caso, os testes da primeira ou segunda derivada podem ser usados.

Se f é uma função par ou ímpar, podemos começar examinando os pontos críticos não-negativos, então se usa a simetria do gráfico de f para tratar com os pontos restantes.

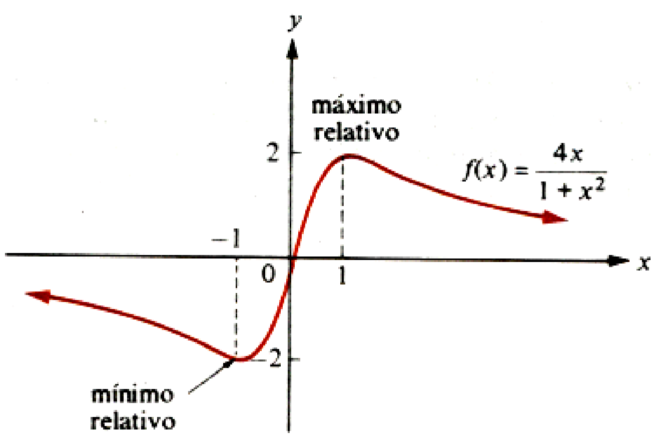
Exemplos do traçado de gráficos para uma curva y=f(x)

Use o processo acima para achar todos os pontos nos quais a função dada f possui um extremo relativo. Esboce o gráfico de f.

1) $f(x) = \dfrac{4x}{1+x^2}$

<u>*Solução:*</u> $$f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

Os pontos críticos são -1 e +1. se –1<x<1, então $f'(x) > 0$, enquanto se x>1, então $f'(x) < 0$. Portanto, pelo teste da 1ª derivada, f possui um máximo relativo em 1. Como f é uma função ímpar, seu gráfico possui simetria em relação à origem; então, f possui um mínimo relativo em –1.



2) $f(x)=\frac{1}{12}\left(x^4+6x^3-18x^2\right)$

Solução:

Temos

$$f'(x)=\tfrac{1}{12}(4x^3+18x^2-36x)=\tfrac{1}{6}x(2x^2+9x-18)$$
$$=\tfrac{1}{6}x(2x-3)(x+6).$$

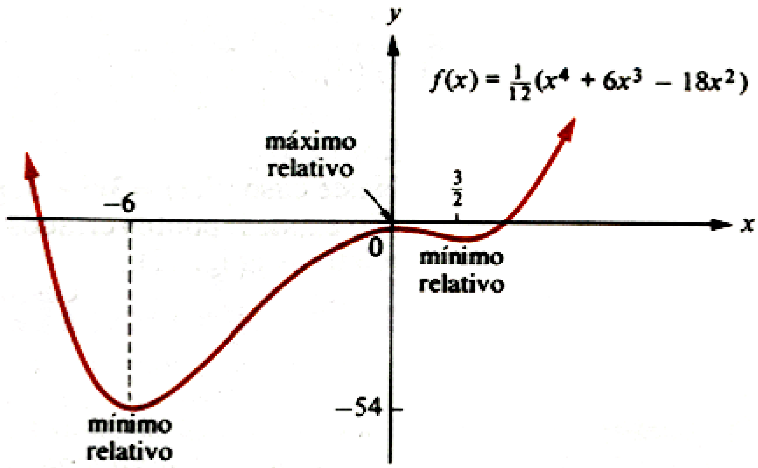
Deste modo, as raízes de $f'(x)=0$ são os pontos críticos $x=0$, $x={}^3/_2$ e $x=-6$. Agora,

$$f''(x)=\tfrac{1}{12}(12x^2+36x-36)$$
$$=x^2+3x-3,$$

por conseguinte

$$f''(-6)=15>0,$$
$$f''(0)=-3<0,\quad \text{e}$$
$$f''(\tfrac{3}{2})=\tfrac{15}{4}>0.$$

Pelo teste da derivada segunda, f possui um mínimo relativo em –6, um máximo relativo em 0, e um mínimo relativo em 3/2.



MÁXIMOS E MÍNIMOS: APLICAÇÕES

Dentre as importantes aplicações de máximos e mínimos destacamos os problemas que têm na sua estrutura o valor máximo ou mínimo de algumas variáveis tais como área, volume, força, potência, tempo, lucro ou custo. Na prática, estes problemas são bastante abrangentes, que vão desde problemas geométricos, até problemas que dizem respeito à física, engenharia, biologia, negócios e economia. De uma forma geral, estes problemas podem ser abordados através do seguinte processo, que sumarizamos a seguir:

1] Associe um símbolo adequado à grandeza a ser maximizada ou minimizada; para a finalidade desta discussão, chame-o de Q. Determine as grandezas restantes em variáveis em função de Q e associe símbolos a essas variáveis. Se for possível esboce um diagrama e marque as várias pontes com os símbolos correspondentes.

2] Expresse a quantidade Q cujo valor extremo é desejado em função das fórmulas em que figurem as variáveis das quais ela depende. Se na fórmula figurarem outras variáveis, use as condições dadas no enunciado do problema para achar relações entre essas variáveis que podem ser usadas para eliminar variáveis da fórmula.

3] Agora temos $Q = f(x)$, onde (para o propósito desta discussão) x denota a variável simples da qual Q foi considerada dependente, e f é a função determinada por esta dependência. Se houver restrição à quantidade x imposta pela natureza física do problema ou por outras considerações práticas, explique estas restrições explicitamente.

4] Aplique os métodos discutidos no tópico anterior (*construção de gráficos*) para determinar o extremo absoluto de $f(x)$ desejado sujeito às restrições impostas a x.

Na prática, a eliminação de todas as variáveis exceto uma, da qual Q depende no passo 2, é freqüentemente a parte mais astuciosa do processo. Algumas vezes isto não se pode executar totalmente porque nem todas as relações entre essas variáveis são dadas pelo enunciado do problema. Neste caso, o processo dado acima falha, e um método mais sofisticado precisa ser usado *(multiplicadores de Lagrange).*

Exemplos:

1) *Dividir o número 120 em duas partes tais que o produto P de uma pelo quadrado da outra, seja máximo.*

Solução:

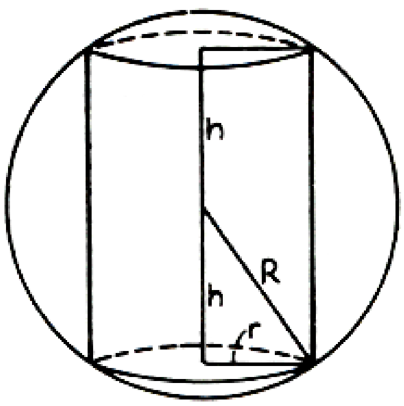
Seja x uma parte; a outra será (120 – x). Então P = (120 – x) x^2.

$\Rightarrow \frac{dP}{dx} = 3x(80 - x)$. Os valores críticos são x = 0 e x = 80.

O valor crítico x = 0 é excluído sem dificuldade.

As partes procuradas são x = 80 e x = 120 – x = 40.

2) Achar a altura do cilindro circular reto de volume V máximo que pode ser inscrito em uma esfera de raio R. Ver figura abaixo.



Solução:

Seja r o raio da base e 2h a altura do cilindro.

$$V = 2\pi r^2 h \qquad e \qquad r^2 + h^2 = R^2$$

Então,

$\frac{dV}{dr} = 2\pi\left(r^2 \frac{dh}{dr} + 2rh\right)$ e $2r + 2h\frac{dh}{dr} = 0$. Da última relação, $\frac{dh}{dr} = -\frac{r}{h}$.

Logo:

$$\frac{dV}{dr} = 2\pi\left(-\frac{r^3}{h} + 2rh\right)$$

Quando V for máximo,

$$\frac{dV}{dr} = 2\pi\left(-\frac{r^3}{h} + 2rh\right) = 0 \Rightarrow r^2 = 2h^2$$

Como $r^2 + h^2 = R^2$

$$\Rightarrow 2h^2 + h^2 = R^2 \Rightarrow h = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

A altura do cilindro será

$$2h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

LIMITES: FORMAS INDETERMINADAS

Nesse tópico, mostraremos como certos limites, cujos valores não são óbvios à primeira vista, podem ser encontrados utilizando a derivada de acordo com uma regra especial, denominada *Regra de L'Hôpital*.

Regra de L'Hôpital.

Se para x = a (finito ou infinito) f (x) e g (x) tendem para zero ou infinito, tomando, portanto, $\frac{f(x)}{g(x)}$, a forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, então

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

desde que o último limite exista quando x se aproximar de *a* por um dos lados ou por ambos.

Formas indeterminadas

As formas indeterminadas são:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\times\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty$$

Estes símbolos não têm, literalmente, interpretação; são simples abreviações.

Se uma função F(x) toma a forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ em $x = a$, $\lim_{x\to a} F(x)$ pode ser determinado diretamente com o emprego da regra de L'Hôpital.

<u>*Exemplo:*</u>

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{2x}{1}=8$$

Se uma função F(x) toma uma das formas indeterminadas $0 \times \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0 *ou* 1^∞, deve primeiro ser transformada, para tomar uma das formas $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

<u>*Exemplo:*</u>

$F(x) = x \ln x$, quando $x \to 0$ toma a forma $0 \times \infty$.

Porém $F(x) = x \ln x \equiv \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ que toma a forma $\frac{\infty}{\infty}$ para $x \to 0$.

Casos: 0^0, ∞^0 *e* 1^∞

Se f(x) > 0, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, diz-se que a expressão $f(x)^{g(x)}$ f(x) está associada a uma forma de indeterminação 0^0 em *a*. As expressões associadas às formas de indeterminação ∞^0 ou 1^∞ são definidas analogamente. Para calcular $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)}$ em tais casos de indeterminação, devemos adotar o seguinte procedimento:

<u>1º passo:</u> Calcula-se $\lim\limits_{x \to a} [g(x) \ln f(x)] = L$.

<u>2º passo:</u> Conclua que $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} = e^L$.

Este procedimento pode ser justificado pela observação de que

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^L$$