INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ – IFCE
CÁLCULO I – 2015-1

Limites de funções exponenciais : $f : R \to R$, tal que $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

1. $f(x) = a^x$ **assume somente valores positivos**
2. se $a > 1$, $f(x) = a^x$ é crescente e conseqüentemente :
   a) se $a > 1$ e $x > 0$, tem-se $a^x > 1$ b) se $a > 1$ e $x < 0$, tem-se $0 < a^x < 1$
3. se $0 < a < 1$, $f(x) = a^x$ é decrescente e conseqüentemente :
   a) se $0 < a < 1$ e $x > 0$, tem-se $0 < a^x < 1$ b) se $0 < a < 1$ e $x < 0$, tem-se $a^x > 1$

A função $f : R \to R$, $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$ é contínua em R, i. é, $\lim\limits_{x \to x_o} a^x = a^{x_o}$.

Teorema :

a) Se $a > 1$, tem-se $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$

b)Se $0 < a < 1$, tem-se $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$

Calcule

a) $\lim\limits_{x \to 1} 2^{\frac{x^3-1}{x-1}} = 8$ b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} 3^{1-\sqrt{3}\,sen\,x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} 5^{\frac{x-sen3x}{x}} = \frac{1}{25}$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} 3^{\frac{1-x^2}{1-x}} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} 5^{\frac{1-x}{1-x^2}} = 1$ f) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} (0{,}7)^{tgx} = +\infty$

g)Determine o limite de g(x) quando x se aproxima do valor indicado:

$\lim\limits_{x \to 0^+} (4g(x))^{1/3} = 2$ R. $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 2$

Limites de funções logarítmicas : $f: R_+^* \to R$, tal que $f(x) = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Teorema : a) Se $a > 1$, tem-se $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$

b)Se $0 < a < 1$, tem-se $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$

1) $\lim\limits_{x \to 2} \log_{\frac{2}{3}} \frac{x^3-8}{x^3-2x^2+4x-8} = -1$ 2) $\lim\limits_{x \to 0} \log_2 \cos x = 0$ 3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \log_5 \frac{1}{|x|} = +\infty$ 4) $\lim\limits_{x \to -\infty} \log_3 \frac{x^2+1}{x^2-1} = 0$

5) $\lim\limits_{x \to 3^+} \ln(t-3) = -\infty$ 6) $\lim\limits_{x \to -\infty} \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2} = +\infty$ 7) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \log_3(tgx) = +\infty$

O número ´´ e `` : $f : N^* \to R$, dada por $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, prova-se que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$,

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+k} = e$, $k \in R$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x+k}\right)^{x+k} = e$, $k \in R$ c) $\lim\limits_{x \to 0} = (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

4. Se $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \pm\infty$ então $\lim\limits_{x \to x_o} = \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$

5. Se $\lim\limits_{x \to x_o} u(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to x_o} v(x) = \pm\infty$ então $\lim\limits_{x \to x_o} = \left(1 + \frac{u(x)}{v(x)}\right)^{v(x)} = e$

Teorema: sendo a > 0 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h}=\log_e^a$

Calcule:a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x$ = $\mathbf{e^{-2}}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$ =e^{-3} **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$ **=** $\mathbf{e^{-1}}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{4}{x})^{x+3}$

e) $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$ = e^2 f) $\lim_{x\to 0}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$ =2 g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{x}\right)^x$ = e^{-5} i) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3tg^2x)^{\cot g^2x}=e^3$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-3x}-1}{x}$ = -3 k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ = 1 l) $\lim\limits_{x\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1),(a>0)$ = lna m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{senx}$ = 1

n) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$ = e^2 o) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$ = e^2 p) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{sen}x)^{\frac{1}{x}}$ = e q) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{2x+3}$ = e^2

r) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1}{x}$ = -1 s) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+10x)}{x}$ $=10\log e$ t) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{e^x}$ =1 u) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ = -1

Teorema do anulamento ou de Bolzano: “Se f for contínua no intervalo fechado [a ; b] e se f(a) e f(b) tiverem sinais contrários, então existirá pelo menos um **c** em [a ; b] tal que f(c) = 0.

Teorema do Valor Intermediário: Se *f* for contínua num intervalo fechado $[a,b]$ e se *k* é um número entre $f(a)$ e $f(b)$, inclusive, então, existe no mínimo um ponto $c,\ c\in(a,b)$ tal que $f(c)=k$.

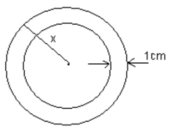
Conseqüência do teorema acima: Se *f* for contínua em $[a,b]$ e $f(a)$ e $f(b)$ são não nulos e de sinais contrários, então existe, no mínimo, um ponto $c,\ c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$. Ou seja, $y=f(x)$ tem pelo menos uma raiz real entre a e b.

Tal conseqüência do TVI é especialmente útil quando não é possível achar a raiz exatamente usando álgebra e temos que nos satisfazer com uma aproximação decimal da raiz através da identificação de um pequeno intervalo no qual existe no mínimo uma raiz real.

1.Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe pelo menos um valor de *x* com $0\le x\le 1$ Solução da equação $x^5+4x^2-x-3=0$.

2. Prove que a equação $x^3-4x+2=0$ admite três raízes reais distintas. [-3; -2] ; [0 ; 1] ; [1 ; 2]

3 .Uma esfera de raio desconhecido x consiste de um centro esférico e um revestimento de 1cm de espessura(ver figura anexa). Dado que o volume do revestimento e o volume do centro esférico são os mesmos, aproxime o raio da esfera com uma precisão em três casas decimais. Resp. x = 4,847 cm



4) Existe um número que é exatamente um a mais que seu cubo? Resp.: existe