Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará

Engenharia de Computação 01/12/2016

Primeira avaliação de Lógica Matemática Professor Jânio Kléo

Aluno: Luis Filipe de Lima Sales Nota: 8,0

01. As fórmulas Ψ e Γ são tais que vale $[\Psi]^2 + [\Gamma]^2 = 1$, para qualquer intepretação dos seus átomos. Mostre que $\Psi \leftrightarrow \Gamma$ é uma contradição.

02. Prove que as fórmulas $\Psi = p \rightarrow q$ e $\Lambda = \neg q \rightarrow \neg p$ são equivalentes.

03. Mostre que $\Omega = (\neg p \rightarrow q) \wedge (\neg p)$ implica logicamente $\Phi = (\neg p \wedge q) \vee (p \leftrightarrow q)$. A recíproca é verdadeira?

04. Apresente uma fórmula equivalente a $\Sigma = (p \rightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r)$ que apresenta apenas disjunções e negações em sua formação.

05. Determine o comprimento e apresente todas as subfórmulas das fórmulas

(a) $\Gamma = (\neg(p \rightarrow q) \vee (p \wedge r)) \leftrightarrow (p \wedge \neg r)$.

(b) $\Psi = \neg(\neg(p \wedge q)) \vee (p \rightarrow q)$.

06. A fórmula Φ contém os átomos p e q em sua formação e é verdadeira apenas quando p e q são ambas falsas. Determine os números reais a, b, c e d para os quais sempre vale a igualdade $[\Phi] = a + b.[p] + c.[q] + d.[p].[q]$.

"Eu era contra a crase até aprender a usá-la. Hoje, eu a defendo, para não concluir que perdi meu tempo."

(Luis Fernando Verissimo, escrito brasileiro)

1- Primeiramente se conclui que para qualquer interpretação, $[\psi]^2 = [\psi]$, assim como $[\Gamma]^2 = [\Gamma]$ visto que $0^2 = 0$ e $1^2 = 1$. Com isso em vista se conclui que $[\Gamma] \neq [\psi]$ pois $1+1 \neq 1$ e $0+0 \neq 1$. Com essas conclusões é visto que as únicas interpretações possíveis que satisfaçam $[\psi]^2 + [\Gamma]^2 = 1$ são $[\psi] = 1, [\Gamma] = 0$ ou $[\psi] = 0, [\Gamma] = 1$, logo $\psi \leftrightarrow \Gamma$ será sempre 0 pois para $[\psi] = 1$ e $[\Gamma] = 0$, $\psi \leftrightarrow \Gamma$ é 0 $(1 \leftrightarrow 0)$ e para $[\psi] = 0, [\Gamma] = 1$, $\psi \leftrightarrow \Gamma$ também é 0 $(0 \leftrightarrow 1)$, estando caracterizada assim a contradição.

2- ψ é equivalente a Λ, conforme a tabela verdade a seguir:

p	q	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Complementa-se a tabela verdade anterior com a seguinte, de $A \to B$:

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Conforme demonstrado anteriormente, é evidente que a valoração de uma implicação simples é 0 quando $[A] = 1$, $[B] = 0$. Analogamente podemos afirmar que $[p \to q] = 0$ quando $[p] = 1, [q] = 0$. Com isso em vista, também se pode afirmar que $[\neg p] = 0, [\neg q] = 1$. Assim, se chega à conclusão de que $[\neg q \to \neg p] = 0$ quando $[p] = 1$ e $[q] = 0$, ou seja, $(p \to q)$ e $(\neg q \to \neg p)$ só terão suas valorações iguais a 0 para uma mesma interpretação de p e q, estando provada assim a equivalência de ψ (que é $p \to q$) e Γ (que é $\neg q \to \neg p$).

3- Supondo haver uma interpretação de Ω e ϕ tal que $[\Omega \to \phi] = 0$, o que efetivamente demonstraria que Ω não implica logicamente ϕ, temos que para que $\Omega = (\neg p \to q) \wedge \neg p$ seja igual a 1, $[p] = 0$ e $[\neg p] = 1$. Ainda, para que $[(\neg p \to q)] = 1$, com $[\neg p] = 1$, $[q]$ teria de ser 0. Então, para que $\phi = (\neg p \wedge q) \vee (p \leftrightarrow q)$ seja 0, $[(\neg p \wedge q)] = 0$ e $[p \leftrightarrow q] = 0$. Com isso, ou $p = 1$ e $q = 0$ (o que não ocorre), ou $p = 0$ e $q = 1$. Com isso, $[\neg p \wedge q] = 1$ e $[p \leftrightarrow q] = 0$, assim, $\phi = 1$, o que efetivamente comprova a negação de minha suposição inicial, logo $\Omega \Rightarrow \phi$.

r - Dado $p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ e $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))$, temos:

$(p \to q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee ((\neg q) \wedge r))$.

Aplicando De Morgan:

$$\boxed{\neg((\neg p \vee q) \vee (\neg(\neg q \vee r) \vee \neg(q \vee (\neg r))}$$

5 - a) $\Gamma = (\neg(p \to q) \vee (p \wedge r)) \Leftrightarrow (p \wedge \neg r)$

$c(\Gamma) = c(p \to q) + 1 + c(p \wedge r) + 1 + c(p \wedge \neg r) + 1$

$c(p) + 1 + c(q) + 1 + c(p) + 1 + c(r) + 1 + c(p) + 1 + c(\neg r) + 1$

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + c(r) + 1$

$c(\Gamma) = \underline{13}$

b) $\psi = \neg(\neg(p \wedge q)) \vee (p \to q)$

$c(\psi) = 1 + c(\neg(p \wedge q)) + 1 + c(p \to q) =$

$= 1 + 1 + c(p \wedge q) + 1 + 1 + c(p) + c(q) =$

$= 1 + 1 + 1 + c(p) + c(q) + 1 + 1 + 1 + 1$

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 =$

$c(\psi) = \underline{9}$

subfórmulas?

6 - $\Phi = 1 \Leftrightarrow [p] = [q] = 0$. Para $[p] = [q] = 0$ temos:

$1 = a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + 0 \cdot 0 \cdot d$

$\boxed{a = 1}$

Para $[p] = 1, [q] = 0$ temos:

$0 = 1 + b \cdot 1 + c \cdot 0 + d \cdot 1 \cdot 0$

$0 = 1 + b$

$\boxed{b = -1}$

Para $[p] = 0, [q] = 1$ temos:

$0 = 1 + 1 \cdot 0 + c \cdot 1 + d \cdot 0 \cdot 1$

Para $[p] = 1, [q] = 1$ temos:

$0 = 1 - 1 - 1 + d$

$0 = -1 + d$

$\boxed{d = 1}$

Logo, $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$, $d = 1$