IFCE - CURSO: Engenharia de Mecatrônica/Licenciatura em Física – 2015-1
Cálculo I

VARIAÇÃO DE FUNÇÕES: ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DE UMA FUNÇÃO

Ponto Crítico
Um ponto c do domínio de uma função f é chamado de ponto crítico de f se f '(c) = 0, ou f '(c) não existe, ou c não é ponto interior do domínio de f.

Encontre os pontos críticos de f, sendo:

1) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ 2) $f(x) = x^4 - 2x^2+3$ 3) $f(x) = \sqrt[5]{x+3}$

4) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$ 5) $f(x) = x^3 - 6x + 4,\ x \in [-2,5]$

Função Crescente e Função Decrescente

Uma função f é dita **crescente** num intervalo I, se a medida que x cresce, o valor de f(x) também cresce e, uma função f é dita **decrescente** num intervalo I, se a medida que x cresce, o valor de f(x) decresce.

Determinação dos Intervalos de Crescimento e Decrescimento

Seja f uma função continua em [a,b] e derivável em (a,b).

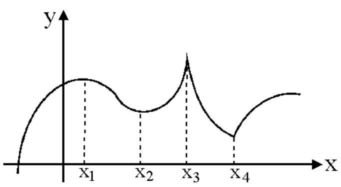
a) Se $f'(x)>0$ para todo $x \in (a,b)$ então f é crescente em [a,b]

b) Se $f'(x)< 0$ para todo $x \in (a,b)$ então f é decrescente em [a,b]

Determine os intervalos de crescimento e decrescimento das funções dadas por:

1) $f(x)=x^3 -5$ 2) $f(x)=x^4- 8x^2 - 5$ 3) $f(x)= 2x - 1$ 4) $f(x)= x^4- 4x^3$ 5) $f(x)= x(5-x)^4$

Observe o gráfico da função representada abaixo e localize os pontos no eixo x que você caracteriza como _pontos de máximo_ ou _pontos de mínimo relativos(locais)_ da função e os correspondentes _máximos e mínimo absolutos_ da função.



Esses pontos são chamados pontos extremos da função. Os pontos x_1 e x_3 são pontos de máximo relativos (ou local), enquanto que $f(x_1)$ e $f(x_3)$ são valores máximos relativos. Os pontos x_2 e x_4 são Chamados pontos de mínimo relativos (ou local), enquanto que $f(x_2)$ e $f(x_4)$ são os valores mínimos relativos. Além disso, observamos que f é crescente para $x < x_1$, $x \in (x_2, x_3)$ e $x > x_4$, e decrescente para $x \in (x_1, x_2)$ e $x \in (x_3, x_4)$.

Determinação dos Extremos Relativos de uma Função:
Teste da Derivada Primeira
Seja f uma função continua e derivável em (a,b), exceto possivelmente em $c \in (a,b)$

a) Se f ' passa de positiva para negativa em c então f(c) é máximo relativo de f

b) Se f ' passa de negativa para positiva em c então f(c) é mínimo relativo de f

c) Se f ' não muda de sinal em c então f(c) não é extremo relativo de f

Encontre os máximos e mínimos relativos das funções dadas por:

1) $f(x)= x^4 - 8x^2 + 1$ 2) $f(x)= x^3 + 3x^2 - 5$ 3) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 16$ 4) $f(x) = x^3 - 12x$

Teste da Derivada Segunda:

Seja f uma função derivável em (a,b) e $c \in (a,b)$, tal que $f'(c)= 0$

a) Se $f''(c) > 0$ então f(c) é mínimo relativo de f.

b) Se $f''(c) < 0$ então f(c) é máximo relativo de f.

c) Se $f''(c) = 0$, nada podemos concluir.

Encontre os máximos e mínimos relativos das funções dadas por:

1) $f(x)= x^3-12x+4$ 2) $f(x)=x^3-3x^2+5$ 3) $f(x)= x^4 - 8x^2 + 6$ 4) $f(x)= 3x^5- 5x^3$

Concavidade e Inflexão

Teste da Concavidade

Se $f''(x)$ existe em um intervalo (a,b) então o gráfico de f é

a) côncavo para baixo (CPB) se $f''(x) < 0, \forall x \in (a, b)$.

b) côncavo para cima (CPC) se $f''(x) > 0, \forall x \in (a, b)$.

Ponto de Inflexão

Um ponto c pertencente ao domínio da f é um ponto de inflexão de f se o gráfico de f muda a concavidade em c. Neste caso, (c,f(c)) é um ponto de inflexão do gráfico de f.

Encontre os intervalos de Concavidades para cima e para baixo das funções dadas por:

1) $f(x) = x^3 - 3x$ CPB: $(-\infty,0)$, CPC: $(0,+\infty)$ 2) $f(x) = 2x^4-12x^2$ CPB: $(-1,1)$, CPC: $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

3) $f(x) = 3x^4 - 12x^3 + 26$ CPB: $(0,2)$, CPC: $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

4) $f(x) = x^3+ 3x^2 - 9x -5$ CPB: $(-\infty,-1)$, CPC: $(-1,+\infty)$

Faça um estudo completo do comportamento das funções abaixo.

1) $f(x) = 3x^4-8x^3+6x^2$ Cresc.: $[0,+\infty)$, Decresc.: $(-\infty,0]$, Máx. Relativo: Não exist,

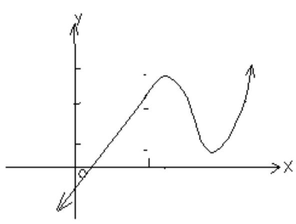
Mín. relativo : f(0) = 0 , Conc.p/baixo: $(\frac{1}{3},1)$, Conc. p/cima: $(-\infty,\frac{1}{3})\cup(1,+\infty)$, Pt.inflexão : $\frac{1}{3}$ e 1

2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$ 3) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 10$

4) $f(x) = x^2 - 4x + 6$ 5) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1$ 6) $f(x) = x^3 - 6x^2+ 12x - 4$

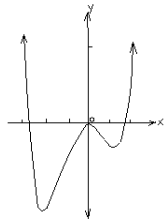
1)Dada a função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$, determine onde o gráfico é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo e o ponto de inflexão. . Faça um esboço gráfico.

Resp.: Pt. inflexão em x = 2; côncavo para baixo em x < 2; côncavo para cima em x > 2



2) Esboce o gráfico da função $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$ e ache os máximos e mínimos relativos

Resp.: máximo relativo em x = 0
mínimos relativos em x = -2 e x = 1



Máximos e Mínimos:

1) Encontre os valores absolutos máximo e mínimo da função:
a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ $-1/2 \le x \le 4$ b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$, [-1, 4] c) f(x) = senx + cosx , [0 , $\pi/3$]

1) Encontre os números críticos de $f(x) = x^{\frac{3}{5}}(4 - x)$

2) Determine os intervalos em que cada função definida a seguir é crescente e os intervalos em que é decrescente.

a) $f(x) = x + \dfrac{3}{x^2}$ **b)** $G(x) = \dfrac{3x^2 + 4x}{1 + x^2}$ **c)** $U(s) = \dfrac{s^2 - s + 1}{2(s-1)}$

R) a) a) Crescente: $]-\infty, 0[\cup]\sqrt[3]{6}, +\infty[$; Decrescente: $]0, \sqrt[3]{6}[$

b) Crescente: $\left]-\frac{1}{2}, 3\right[$; Decrescente: $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup]2, +\infty[$

c) Crescente: $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$; Decrescente: $]0, 2[$

3). Consideremos a função **f : R → R** definida por $f(x) = x^3 - 6x$.

a.) Determine os pontos em que f´ se anula a) $x = \pm\sqrt{2}$

b). Determine os intervalos onde f é crescente e onde f é decrescente.

R. $\begin{cases} \text{f é crescente nos intervalos }]-\infty; -\sqrt{2}] \text{...e.....} [\sqrt{2} \text{...;...} +\infty[\\ \text{f é decrescente no intervalo } [-\sqrt{2} \; ; \; \sqrt{2}] \end{cases}$

4) Seja a função **f : R → R** definida por $f(x) = 2x^3 - 24x + 8$.

a) Determine os pontos onde f se anula b).os intervalos onde f é crescente e decrescente.

5).Seja a função f definida por $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + mx^2 + x + 12$. Determine m de modo que a função seja crescente para todo **x ∈ R** $-1 < m < 1$

6)Encontre os valores absolutos máximo e mínimo da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ no intervalo $-\frac{1}{2} \le x \le 4$

7) Examine a curva $y = x^4 - 4x^3$ em relação a concavidade, pontos de inflexão, máximos e mínimos locais. Use esta informação para esboçar o gráfico da função.

8)Esboce o gráfico de: a) $g(x) = x^{2/3}(6 - x)^{1/3}$ b) $k(x) = xe^x$

9)Para quais valores de c o polinômio $P(x) = x^4 + cx^3 + x^2$ tem dois pontos de inflexão? Um ponto de inflexão? Nenhum?

Taxas Relacionadas

1) Dois lados paralelos de um retângulo aumentam a razão de 3 cm/s , enquanto os outros dois diminuem de tal modo que a área da figura permanece igual a 48 cm quadrados. Qual a taxa de variação do perímetro do retângulo quando o comprimento do lado que aumenta é 6 cm ? 1) -2 cm/s

2)Um triângulo isósceles tem os lados iguais com $12\ \text{cm}$ cada um. Se o ângulo θ entre eles, varia à razão de 2º por minuto, com que velocidade varia a área, quando $\theta = 30^o$? 2) $\frac{2\sqrt{3}}{5}\pi\ \text{cm}^2$

3)A área de um triângulo retângulo decresce a uma taxa de $10\ \text{cm}^2/\text{s}$. Sabendo que a altura decresce a uma taxa duas vezes maior que a base, determine a taxa de variação da base no instante em que o triângulo for isósceles, com catetos medindo $2\ \text{cm}$. 3) $-\frac{10}{3}\ \text{cm/s}$

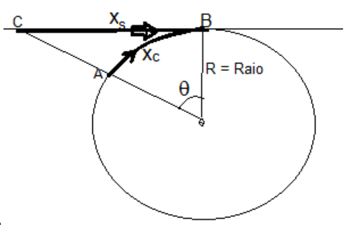
4)Um tanque horizontal tem $16\ \text{cm}$ de comprimento e suas laterais tem a forma de trapézios isósceles com $4\ \text{m}$ de altura, base menor igual a $4\ \text{m}$ e base maior igual a $6\ \text{m}$. Começa-se a encher o recipiente. Se o nível de água sobe à razão de $0{,}125\ \text{m/min}$, quando a profundidade é de $2\ \text{m}$, qual a taxa de entrada da água? R. $10\ \text{m}^3/\text{min}$

5)Uma partícula move-se ao longo da curva cuja equação é $y = \sqrt{x}$. Suponhamos que *x* aumenta a uma taxa de 4 unidades por minuto quando $x = 3$ unidades. Quão rapidamente cresce a distância entre a partícula e o ponto $(2,0)$ nesse instante? R.: 3 unidades $/\text{min}$

6)Um avião a uma altura de $3\ \text{km}$ voa ao longo de uma reta que o levará diretamente a um ponto acima de um observador no solo. Se em um dado instante, o observador nota que o ângulo de elevação é de 60º e aumenta à razão de $1^o/\text{seg}$, determine a velocidade do avião. 6) $80\pi\ \text{km/h}$

7)Um carro de corrida anda a uma velocidade constante de 90 milhas por hora sobre uma pista circular. Suponha que exista uma fonte de luz no centro da pista e um muro tangente a pista em um ponto C. Com que rapidez move-se a sombra do carro sobre o muro quando o carro percorreu $1/8$ da pista desde C?

R. $180\ \text{mi/h}$



Resolução:

$i)\ x_c = \theta r$ derivando em relação a t:

$$\frac{d(x_c)}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

considerando $\frac{d(x_c)}{dt} = V_c$ = velocidade do veículo na pista circular

Teremos: $\frac{d\theta}{dt} = \frac{V_c}{r}\ (I)$

$ii)\ x_S = r.tg\theta$ derivando em relação a t:

$$\frac{d(x_S)}{dt} = r\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}$$

considerando $\frac{d(x_S)}{dt} = V_S$ = velocidade da sombra do veículo

Teremos: $\frac{d\theta}{dt} = \frac{V_S}{r\sec^2\theta}$ (II)

Comparando (I) com (II), teremos: $\frac{V_S}{r\sec^2\theta} = \frac{V_c}{r} \therefore V_S = V_c\sec^2\theta$

Como $V_c = 90\,milhas;\ \theta = \frac{1}{8}2\pi = \frac{\pi}{4}$ então: $V_S = 90\sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 180\,mi/h$