7 – Séries de Fourier

7.1 – Introdução à Análise de Fourier 3
7.2 – Série trigonométrica de Fourier para sinais contínuos 5
7.3 – Teorema de Fourier 6
- Exemplo 7.1 7
7.4 – Uma interpretação da Série de Fourier 13
7.5 – Série exponencial de Fourier para sinais contínuos 17
- Exemplo 7.2 19
7.6 – Equivalência das séries trigonométrica e exponencial de Fourier 21
7.7 – Propriedades da Série de Fourier para sinais contínuos 23
- Linearidade 23
- Translação no tempo ("*time shifting*") 24
- Sinal reflectido / reversão no tempo ("*time reversal*") 25
- Escalonamento no tempo ("*time scaling*") 26
- Multiplicação 27
- Conjugação 27
- Translação na frequência ("*frequency shifting*") 28
- Convolução no período 29
- Derivada 30
- Integral 30
- Relação de Parseval 31
7.8 – Série trigonometria de Fourier para sinais discretos 31
- Exemplo 7.3 34
- Exemplo 7.4 40

- Exemplo 7.5 43
- Exemplo 7.6 44
- Exemplo 7.7 46

7.9 – Propriedades da Série de Fourier para sinais discretos 47

- Linearidade 47
- Translação no tempo (“*time shifting*”) 48
- Sinal reflectido / reversão no tempo (“*time reversal*”) 49
- Escalonamento no tempo (“*time scaling*”) 49
- Multiplicação 50
- Conjugação 51
- Translação na frequência (“*frequency shifting*”) 52
- Convolução no período 53
- Primeira diferença 53
- Soma acumulada 54
- Relação de Parseval 55

Séries de Fourier

7.1 – **Introdução à Análise de Fourier**

Neste capítulo e no próximo estudaremos a *Análise de Fourier* (também chamada de *Análise Harmónica*), que diz respeito à representação de sinais como uma *soma* (ou melhor dizendo, uma *combinação linear*) de sinais básicos como senos e co-senos, ou exponenciais complexas.

A série de Fourier, assim como a transformada de Fourier, são as importantes contribuições do matemático francês *Jean Baptiste Joseph* ***Fourier*** (1768-1830).

Fig. 7.1 – *Jean Baptiste Joseph* ***Fourier*** (1768-1830), francês.

A *Análise de Fourier* permite decompor um sinal nas suas componentes em frequência (harmónicos) e tem muitas aplicações no Processamento de sinal, no Processamento de imagem, na Física em várias aplicações, na Probabilidade e Estatística assim como em muitas outras áreas.

Antes de Fourier três físicos já tinham feito estudos preliminares em séries infinitas para resolverem problemas diversos da Física: suíço *Leonhard* ***Euler*** (1707-1783), o francês *Jean Le Rond* ***d'Alembert*** (1717-1783) e o holandês *Daniel* ***Bernoulli*** (1700-1782).

Entretanto, ***Fourier*** foi o primeiro a fazer um estudo sistemático das séries infinitas para resolver a equação da propagação do calor na Física, na publicação "*Mémoire sur la théorie de la chaleur*", embora ele não tenha expresso os seus resultados com grande formalismo.

Somente uns anos mais tarde que dois matemáticos: o alemão *Johann Peter Gustav Lejeune* ***Dirichlet*** (1805-1859) e o alemão *Georg Friedrich Bernhard* ***Riemann*** (1826-1866), expressaram os resultados de Fourier com mais rigor e precisão.

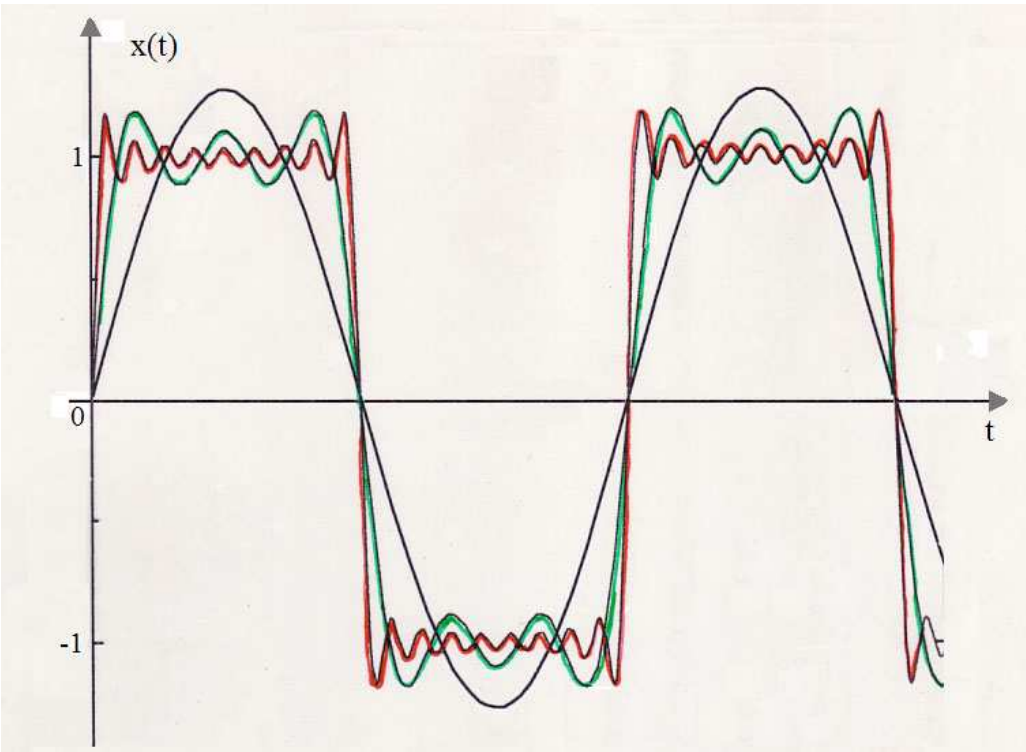

Fig. 7.2 – Série de Fourier (sinal periódico da onda quadrada).

7.2 – **Série trigonométrica de Fourier para sinais contínuos**

Considere um sinal periódico contínuo $x(t) \in \mathbb{R}$ {conjunto dos números reais}, $\forall$ t.
O sinal x(t) pode ser expresso como:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot k\,t \right) + b_k \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{T} \cdot k\,t \right) \right] =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot \cos(\omega_o\, k\,t) + b_k \cdot \mathrm{sen}(\omega_o\, k\,t) \right] \qquad \text{eq. (7.1)}$$

onde:

T = período fundamental do sinal x(t),

ω_o = frequência fundamental do sinal x(t),

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot k\,t \right) dt = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \cos(\omega_o\, k\,t)\, dt \qquad k = 0, 1, 2, \dots \qquad \text{eq. (7.2)}$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{T} \cdot k\,t \right) dt = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \mathrm{sen}(\omega_o\, k\,t)\, dt \qquad k = 1, 2, \dots \qquad \text{eq. (7.3)}$$

sendo que as integrais acima são tomadas ao longo do intervalo do período T do sinal periódico x(t).

Observe que existe a_o na série a_k [eq. (7.2)], mas não existe b_o na série b_k [eq. (7.3)].

Além disso, a_o (na eq. (7.2) fazendo k = 0), pode ser reescrito de forma mais simplificada pois, como

$$\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot k\,t \right) = \cos(\omega_o\, k\,t) = 1, \qquad \text{para } k = 0,$$

então,

$$a_o = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cdot dt$$

ou seja, a_o de certa forma representa um valor médio do sinal x(t) no intervalo de um período T.

Esta série é conhecida como <u>*série **trigonométrica** de Fourier*</u> pois contém termos com *senos* e *co-senos*.

A equação eq. (7.1) acima é conhecida como a

"*equação de síntese*"

e as equações eq. (7.2) e eq. (7.3) são conhecidas como as

"*equações de análise*"

da série trigonométrica de Fourier. Os a_k's e os b_k's são chamados de coeficientes da série trigonométrica de Fourier.

7.3 – **Teorema de Fourier**

<u>*Definição 7.1*</u>: x(t) é um sinal <u>*seccionalmente contínuo*</u> (ou, também chamado de "*contínuo por partes*") se x(t) tem um número limitado de descontinuidades em qualquer intervalo limitado.

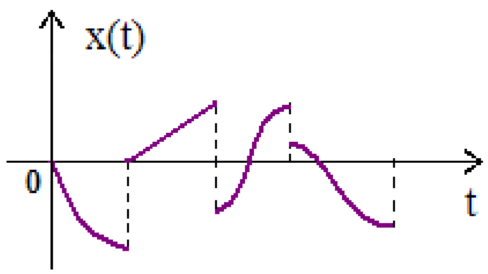

Fig. 7.3 – Um sinal seccionalmente contínuo.

<u>*Definição 7.2*</u>: x(t) é um sinal <u>*seccionalmente diferenciável*</u> se ambos x(t) e sua derivada x'(t) forem sinais *seccionalmente contínuos*.

Com estas definições podemos agora ver o Teorema de Fourier que estabelece os tipos de sinais que podem ser aproximados pela série de Fourier.

Teorema 7.1 (Teorema de Fourier):

Se x(t) é um sinal periódico *seccionalmente diferenciável* e de período T, então a série de Fourier [eq. (7.1)] converge em cada ponto t para:

a) $x(t)$, se o sinal $x(t)$ for contínuo no instante t ;

b) $\frac{1}{2}\,[\,x(t+0^+) + x(t+0^-)\,]$, o sinal $x(t)$ for descontínuo no instante t.

Um ponto positivo deste resultado é que a limitação do *Teorema de Fourier* acima é muito leve pois a grande maioria dos, ou quase todos, sinais de interesse prático são *seccionalmente diferenciáveis*.

Portanto, o *Teorema de Fourier* acima assegura que, para os sinais x(t) que forem aproximados pela série de Fourier, quanto mais termos da série (ou parcelas da soma) forem adicionados, melhor será a aproximação.

Ou seja, se chamarmos de $x_n(t)$ à série de Fourier com n termos, então:

$$x_n(t) \;\rightarrow\; x(t)$$

nos casos em que x(t) for um sinal contínuo no instante t; e

$$x_n(t) \;\rightarrow\; \frac{\left[x(t+0^+) \,+\, x(t+0^-)\right]}{2}$$

nos casos em que x(t) não for um sinal contínuo no instante t.

Exemplo 7.1:

Considere o sinal x(t) dado abaixo (onda quadrada), definido num intervalo (de t = –1 até t = 1) ilustrado na figura 7.4.

$$x(t) = \begin{cases} -1, & \text{se} \quad -1 < t < 0 \\ 1, & \text{se} \quad 0 < t < 1 \end{cases}$$

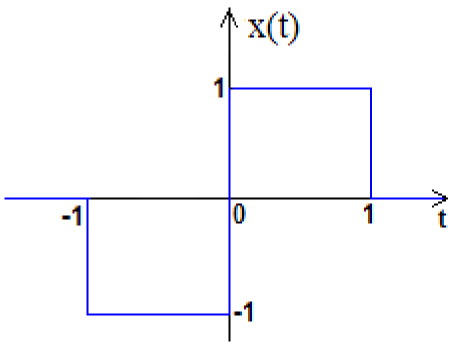

Fig. 7.4 – Sinal da onda quadrada em um período (de t = –1 até 1).

Repetindo-se (ou estendendo-se) este padrão para a direita de t = 1 e para esquerda de t = –1, obtemos um sinal periódico para ∀t (∞ < t < ∞).

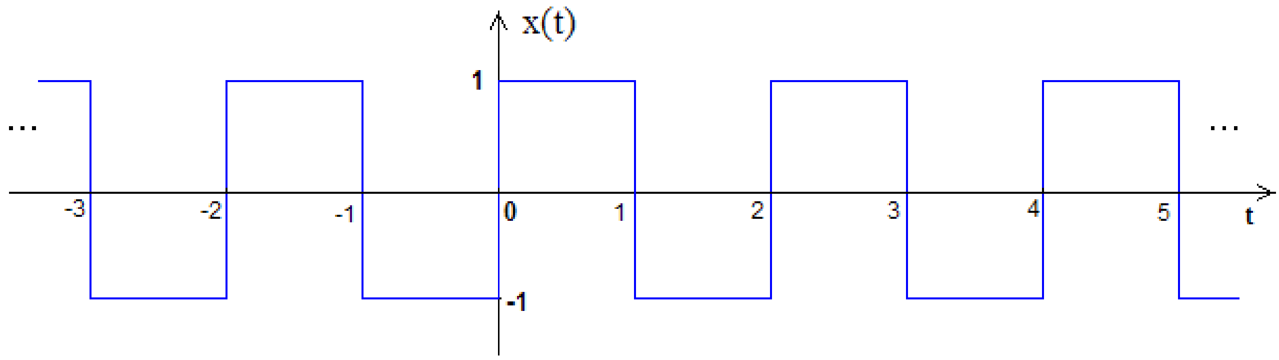

Fig. 7.5 – Sinal do Exemplo 7.1. Onda quadrada estendida para ∀t (∞ < t < ∞).

Agora x(t), sendo um sinal periódico ∀t (∞ < t < ∞) já pode ser aproximado por uma série de Fourier.

De forma semelhante podemos estender qualquer outro sinal definido em um determinado intervalo finito e torná-lo periódico de forma a podermos aproximá-lo por uma série de Fourier.

Calculando-se agora os coeficientes de Fourier para o sinal da onda quadrada definido acima temos, para a_o primeiramente,

$$a_o = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cdot dt = \int_{-1}^{0}(-1)\,dt + \int_{0}^{1}(1)\,dt = 0$$

Como o período fundamental é T = 2, então

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

e portanto,

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-1}^{1} x(t)\cdot\cos\big(k\,\pi\,t\big)\,dt =$$

$$= \int_{-1}^{0}(-1)\cdot\cos\big(k\,\pi\,t\big)\,dt + \int_{0}^{1} 1\cdot\cos\big(k\,\pi\,t\big)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi k}\Big(\big[-\operatorname{sen}(k\,\pi\,t)\big]_{-1}^{0} + \big[\operatorname{sen}(k\,\pi\,t)\big]_{0}^{1}\Big) =$$

$$= 0\,, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Logo os a_k's são todos iguais a zero $\forall$ k = 0, 1, 2, …

Quanto aos b_k's, temos que:

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-1}^{1} x(t)\cdot \operatorname{sen}(k\pi t)\,dt =$$

$$= \int_{-1}^{0} (-1)\cdot \operatorname{sen}(k\pi t)\,dt + \int_{0}^{1} 1\cdot \operatorname{sen}(k\pi t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi k}\left(\left[\cos(k\pi t)\right]_{-1}^{0} + \left[-\cos(k\pi t)\right]_{0}^{1} \right) =$$

e portanto,

$$b_k = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad k \text{ é par} \\[2ex] \dfrac{4}{\pi k}, & \text{se} \quad k \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Ou seja,

$$b_1 = \frac{4}{\pi}, \qquad b_5 = \frac{4}{5\pi}, \qquad b_9 = \frac{4}{9\pi},$$

$$b_2 = 0, \qquad b_6 = 0, \qquad b_{10} = 0,$$

$$b_3 = \frac{4}{3\pi}, \qquad b_7 = \frac{4}{7\pi}, \qquad b_{11} = \frac{4}{11\pi},$$

$$b_4 = 0, \qquad b_8 = 0, \qquad \text{etc.}$$

Logo, esta é uma série de Fourier só de senos e os primeiros termos da série são:

$$x(t) = \frac{4}{\pi}\operatorname{sen}(\pi t) + \frac{4}{3\pi}\operatorname{sen}(3\pi t) + \frac{4}{5\pi}\operatorname{sen}(5\pi t) +$$

$$+ \frac{4}{7\pi}\operatorname{sen}(7\pi t) + \frac{4}{9\pi}\operatorname{sen}(9\pi t) + \frac{4}{11\pi}\operatorname{sen}(11\pi t) + \ldots$$

As figuras 7.6 até 7.10 abaixo mostram esboços do sinal x(t) aproximado pela série de Fourier.

Primeiramente na figura 7.6, com apenas um termo (isto é, apenas k = 1), quando x(t) é simplesmente o seno

$$x(t) = b_1 \operatorname{sen}(\pi t) = (4/\pi) \operatorname{sen}(\pi t)$$

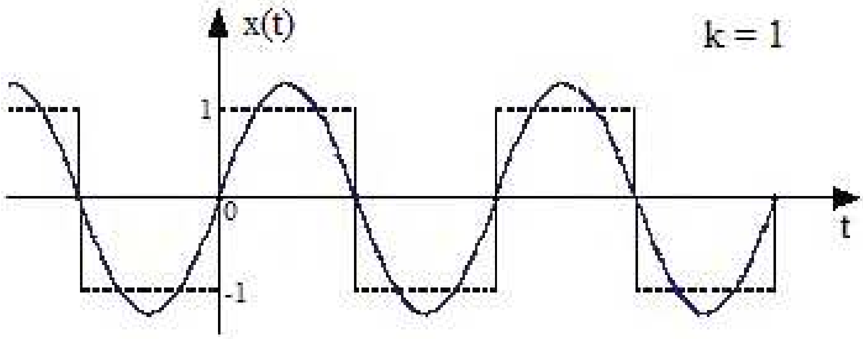

Fig. 7.6 – Sinal onda quadrada. Aproximação por série de Fourier com apenas um termo (k = 1).

Na figura 7.8 vemos que com 2 termos (os dois primeiros termos não nulos, até k = 3, pois $b_2 = 0$) temos a soma de 2 senos (e já nota-se 2 picos no sinal aproximado pela série):

$$x(t) = b_1 \operatorname{sen}(\pi t) + b_3 \operatorname{sen}(\pi t)$$

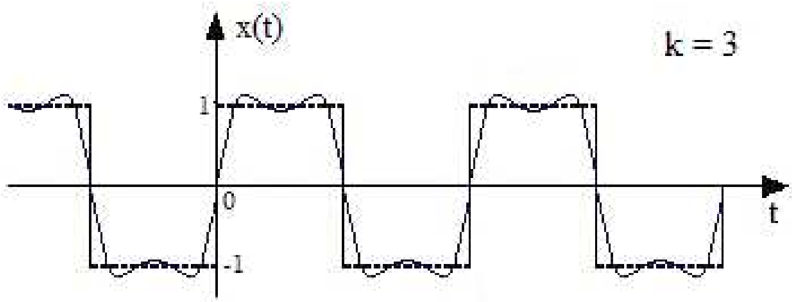

Fig. 7.7 – Sinal onda quadrada. Aproximação por série de Fourier com apenas dois termos (k = 1 e 3).

Depois, na figura 7.8, com 3 termos (os três primeiros termos não nulos, até k = 5, pois $b_2 = 0$ e $b_4 = 0$) temos a soma de 3 senos (e agora já nota-se 3 picos no sinal aproximado pela série):

$$x(t) = b_1 \operatorname{sen}(\pi t) + b_3 \operatorname{sen}(\pi t) + b_5 \operatorname{sen}(\pi t)$$

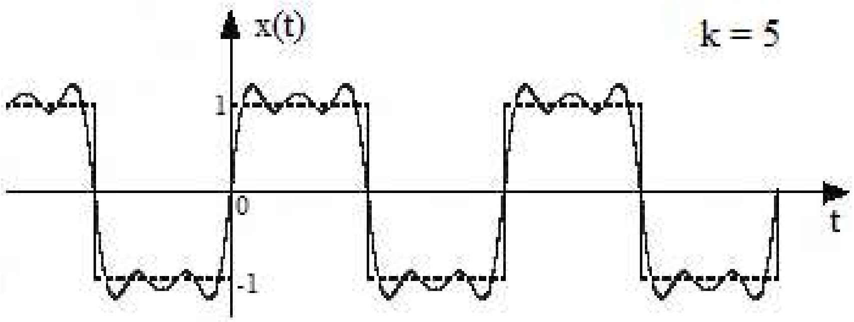

Fig. 7.8 – Sinal onda quadrada. Aproximação por série de Fourier com apenas três termos (k = 1, 3 e 5).

e assim por diante.

As duas últimas figuras (figuras 7.9 e 7.10) ilustram esta série até k = 11 (6 termos não nulos) e até k = 49 (25 termos não nulos), respectivamente.

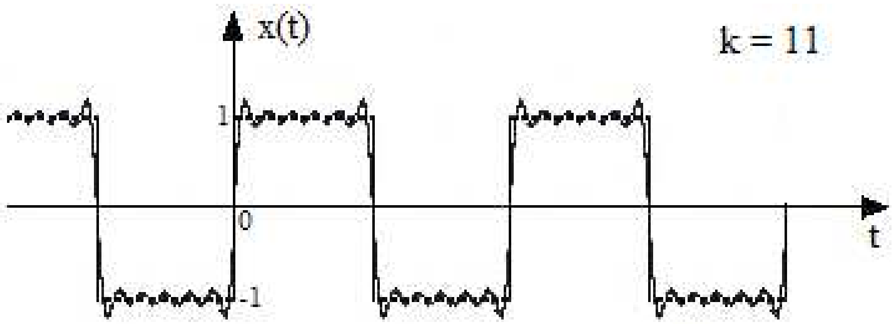

Fig. 7.9 – Sinal onda quadrada. Aproximação por série de Fourier com seis termos (k = 1, 3, 5, 7, 9 e 11).

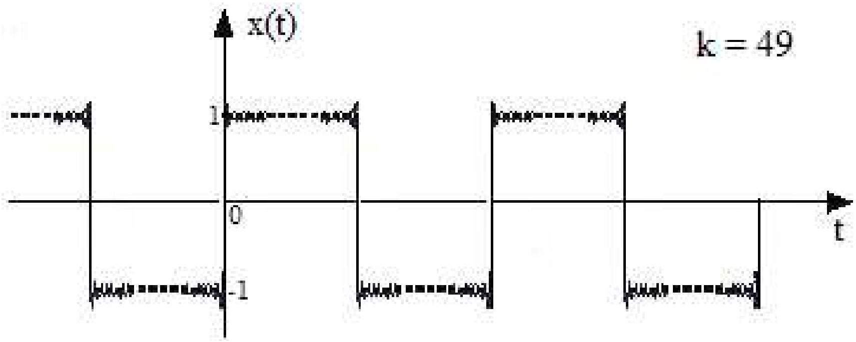

Fig. 7.10 – Sinal onda quadrada. Aproximação por série de Fourier com 25 termos (k = 1, 3, ..., 49).

Nota-se nitidamente que o sinal x(t) aproximado pela série de Fourier vai se tornando cada vez mais próximo do original, a onda quadrada.

Nos pontos t onde x(t) é um sinal contínuo esta série de Fourier converge para o próprio valor de x(t).

Por exemplo, para t = 0,5, sabemos que x(0,5) = 1. Pela série de Fourier,

$$x(0{,}5) = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{4}{\pi}\operatorname{sen}(0{,}5\pi)}_{1{,}6977} + \frac{4}{3\pi}\operatorname{sen}(1{,}5\pi)}_{0{,}8488} + \frac{4}{5\pi}\operatorname{sen}(2{,}5\pi)}_{1{,}1035} + \frac{4}{7\pi}\operatorname{sen}(3{,}5\pi)}_{0{,}9216} + \frac{4}{9\pi}\operatorname{sen}(4{,}5\pi)}_{1{,}0631} + \ldots$$

que de facto converge para 1.

Por outro lado, nos pontos t onde x(t) apresenta uma descontinuidade, esta série de Fourier converge para o valor médio de x(t), entre o imediatamente antes e o imediatamente depois de t.

Por exemplo, para t = 0^-, sabemos que x(0^-) = –1, e t = 0^-, e que x(0^+) = 1. Logo, o ponto médio é:

$$\frac{x(0^+) + x(0^-)}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$$

Pela série de Fourier,

$$x(0) = \frac{4}{\pi}\operatorname{sen}(0) + \frac{4}{3\pi}\operatorname{sen}(0) + \frac{4}{5\pi}\operatorname{sen}(0) + \frac{4}{7\pi}\operatorname{sen}(0) + \frac{4}{9\pi}\operatorname{sen}(0) + \ldots =$$

$$= \quad 0 + 0 + 0 + 0 + 0$$

que de facto converge para 0.

□

Mais adiante, nas *Propriedades da Série de Fourier*, veremos que:

Se x(t) é um sinal ***par***, então a série de Fourier para x(t) é uma série de ***co-senos***.

Se x(t) é um sinal ***ímpar***, então a série de Fourier para x(t) é uma série de ***senos***.

Isto pode ser visto pelas propriedades dos sinais *pares* e *ímpares*. Recorde-se que,

- A ***soma*** de 2 sinais **pares** é um sinal **par**.
- A ***soma*** de 2 sinais **ímpares** é um sinal **ímpar**.
- O ***produto*** de 2 sinais **pares** é um sinal **par**.
- O ***produto*** de 2 sinais **ímpares** é um sinal **par**.

Logo, se x(t) é um sinal ***par***, então os coeficientes b_k da série de Fourier para x(t) são todos iguais a zero:

$$b_k = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}\cdot k\,t\right)dt = 0\,, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

e portanto, a série de Fourier é uma série de ***co-senos***.

Mas se x(t) é um sinal ***ímpar***, então os coeficientes a_k da série de Fourier para x(t) são todos iguais a zero (incluindo a_o):

$$a_k = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot k\,t\right)dt = 0\,, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

e portanto, a série de Fourier é uma série de ***senos***.

De facto, no Exemplo 7.1 acima, como x(t) era um *sinal par*, então os a_k's eram todos iguais a zero $\forall$ k = 0, 1, 2, …, e a série de Fourier era uma série de ***senos***.

7.4 – Uma interpretação da Série de Fourier

A "*série de Fourier*" pode ser interpretada como uma forma de expressar um sinal x(t), em um espaço de sinais.

Recorde-se um vector **v** no espaço $\mathbb{R}^n$ é representado como a soma

$$v = \alpha_1\cdot e_1 + \alpha_2\cdot e_2 + \cdots + \alpha_n\cdot e_n$$

onde e_1, e_2, … e_n, são os vectores

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

ou seja, $\{e_1, e_2, \cdots e_n\}$, os chamados vectores canónicos e formam uma base do $\mathbb{R}^n$; e α_1, α_2, … α_n, são os coeficientes do vector v nesta base $\{e_1, e_2, \cdots e_n\}$.

Da mesma forma, um sinal x(t) pode ser representado semelhantemente na forma da eq. (7.1) como a soma infinita de senos e co-senos.

Note que aqui o espaço não é mais o espaço de vectores ($\mathbb{R}^n$, que tem dimensão n) mas sim um espaço de sinais, que terá dimensão infinita. A base do espaço não será mais formada pelos vectores e_1, e_2, … e_n , mas agora pelos sinais *senos* e *co-senos*

$$\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot k\,t\right) \qquad \text{e} \qquad \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{T}\cdot k\,t\right)$$

definidos nas equações de análise eq. (7.2) e eq. (7.3). Além disso, os coeficientes que representam o sinal x(t) nesta base não serão mais α_1, α_2, … α_n, mas agora serão os

$$a_k \qquad \text{e} \qquad b_k.$$

Em outras palavras, estes *senos* e *co-senos* formam uma base infinita de sinais.

Claro que a expressão da eq. (7.1) é definida apenas para sinais periódicos, Entretanto, já vimos no exemplo 7.1 que um sinal x(t) que seja definido em um intervalo finito qualquer pode ser estendido para ambos os lados deste intervalo, tornando-se assim periódico e desta forma pode ser descrito também na forma da eq. (7.1). As figuras 7.4 e 7.5 ilustravam isto.

Outro detalhe: no espaço $\mathbb{R}^n$ os próprios vectores da base e_1, e_2, … e_n eram representados (de forma única) como

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + \cdots + 1\cdot e_i + \cdots + 0\cdot e_n$$

ou seja, com coeficientes

$$\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \dots ,\alpha_i = 1,\ \dots\ \alpha_n = 0$$

isto é,

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_n\} = \{0,\ 0,\ \cdots,\ 1,\ \cdots,\ 0\}\ .$$

Aqui também temos que os sinais *senos* e *co-senos* da base são representados (de forma única) como

$$\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot \ell\, t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot k\,t\right) + b_k \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}\cdot k\,t\right)\right]$$

onde todos os a_k e b_k serão todos iguais a "*zero*" excepto o valor de a_k para $k = \ell$, ou seja:

$$a_k = 0,\ b_k = 0,\ \text{excepto } a_\ell = 1$$

e, além disso

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}\cdot \ell\, t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot k\,t\right) + b_k \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}\cdot k\,t\right)\right]$$

onde todos os a_k e b_k serão todos iguais a "*zero*" excepto o valor de b_k para $k = \ell$, ou seja:

$$a_k = 0,\ b_k = 0,\ \text{excepto } b_\ell = 1.$$

Isto ocorria porque o produto escalar entre 2 vectores 'e_m' e 'e_n', que pertençam à base, é

$$< e_m\ ,\ e_n > = 0,\ \text{se } m \neq n,$$

$$< e_m\ ,\ e_n > = 1,\ \text{se } m = n,$$

onde o produto escalar entre 2 vectores no espaço $\mathbb{R}^n$ era definido como

$$< v, \bar{v} > = \alpha_1 \cdot \bar{\alpha}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{\alpha}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \bar{\alpha}_n$$

sendo α_1, α_2, … α_n os coeficientes de v e $\cdot\, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \cdots, \bar{\alpha}_n$ os coeficientes de $\bar{v}$.

Devido a esta propriedade, dizemos que os vectores e_1, e_2, … e_n da base são "*ortogonais*" entre si.

Aqui, neste espaço de sinais cuja base é formada por *senos* e *co-senos*, o produto escalar entre 2 sinais pode ser definido como:

$$< x(t), \overline{x}(t) > = a_o \cdot \overline{a}_o \ + \cdots \ a_k \cdot \overline{a}_k \ + \ \cdots + b_1 \cdot \overline{b}_1 \ + \ \cdots \ \ b_k \cdot \overline{b}_k \ + \ \cdots$$

onde a_o, a_1, …, a_k, …, b_1, …, b_k são os coeficientes de x(t) na série de Fourier e $\overline{a}_o, \overline{a}_1, \cdots, \overline{a}_k, \cdots, \overline{b}_o, \overline{b}_1, \cdots, \overline{b}_k$ os coeficientes de $\overline{x}(t)$ na série de Fourier. Desta forma pode-se verificar que

$$< \cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot m\,t\right), \cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot n\,t\right) > = 0, \qquad \text{se } m \neq n,$$

$$< \cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot m\,t\right), \cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot n\,t\right) > = 1, \qquad \text{se } m = n,$$

$$< \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T}\cdot m\,t\right), \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T}\cdot n\,t\right) > = 0, \qquad \text{se } m \neq n, \text{ e}$$

$$< \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T}\cdot m\,t\right), \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T}\cdot n\,t\right) > = 1, \qquad \text{se } m = n.$$

ou seja, aqui os sinais da base também são ortogonais entre si. Isso se verifica observando-se as equações de análise eq. (7.2) e eq. (7.3) e devido ao facto que

$$\int_T \cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot m\,t\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot n\,t\right)dt = 0, \qquad \text{se } m \neq n$$

$$\int_T \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T}\cdot m\,t\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{2\pi}{T}\cdot n\,t\right)dt = 0, \qquad \text{se } m \neq n$$

e

$$\int_T \cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot m\,t\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot n\,t\right)dt = \frac{T}{2}, \qquad \text{se } m = n$$

$$\int_T \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T}\cdot m\,t\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{2\pi}{T}\cdot n\,t\right)dt = \frac{T}{2}, \qquad \text{se } m = n$$

um resultado bastante conhecido em matemática, da teoria do "Cálculo". Isto é, as integrais de *senos* e/ou *co-senos* de frequência diferentes multiplicados entre si são nulas. Os *senos* e *co-senos* são "*ortogonais*".

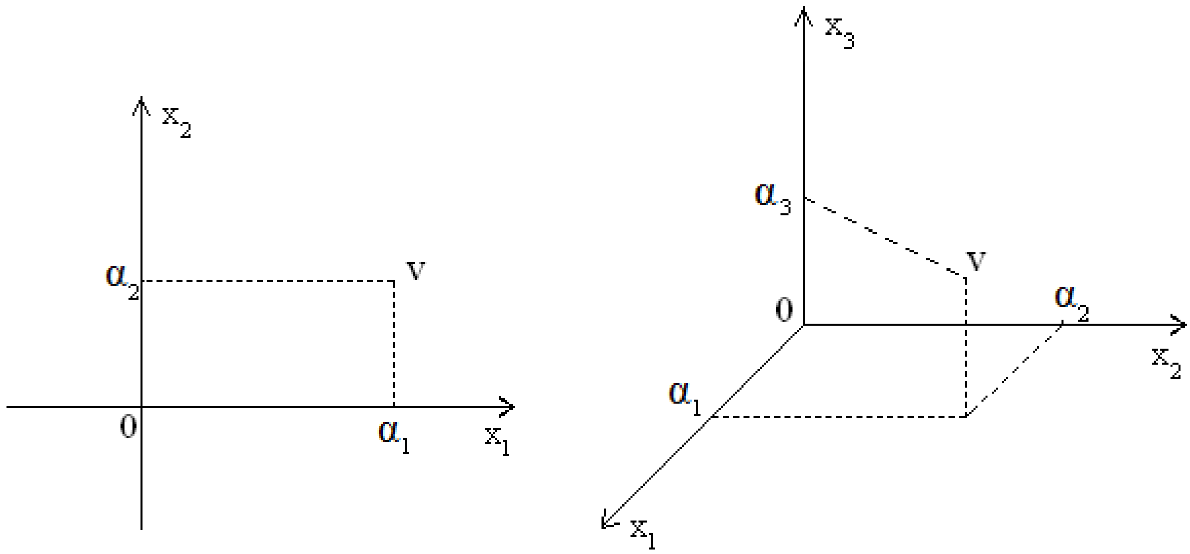

Fig. 7.11 – Projecções de um vector $v \in \mathbb{R}^2$ nos seus 2 eixos (à esquerda) e $v \in \mathbb{R}^3$ nos seus 3 eixos (à direita).

Uma propriedade importante verificada nos vectores no espaço $\mathbb{R}^n$ era que o produto escalar entre v e um elemento e_k da base era o próprio coeficiente α_k, ou seja,

$$< v , e_k > = \alpha_k$$

De certa forma isto significava que os α_k eram as projecções dos vectores do $\mathbb{R}^n$ nos seus diversos eixos, conforme ilustra a figura 7.11 para o $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Aqui no espaço de funções também verifica-se que

$$< x(t) , \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot k\, t\right) > = a_k \qquad \text{e} \qquad < x(t) , \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T} \cdot k\, t\right) > = b_k$$

o que também pode ser interpretado que os a_k e os b_k são uma espécie de projecção do sinal x(t) nos diversos sinais senos e co-senos componentes da base.

7.5 – **Série exponencial de Fourier para sinais contínuos**

Nesta secção estudaremos a "*série **exponencial** de Fourier*" é também chamada de "*série **complexa** de Fourier*".

Se o sinal $x(t) \in \mathbb{R}$, então a série exponencial de Fourier é a mesma que a série trigonométrica escrita de uma forma diferente, em termos de exponenciais do tipo

$$e^{\,j\omega_o t}$$

em vez de em termos de senos e co-senos.

Entretanto, considere agora

um sinal periódico contínuo $x(t) \in \mathbb{C}$ = {conjunto dos números complexos}

ou seja, o sinal x(t) tem valores complexos, com *parte real* e *parte imaginária*. A série exponencial de Fourier permite-nos aproximar x(t), o que não era possível com a série trigonométrica.

Na série *exponencial* (ou *complexa*) de Fourier um sinal periódico x(t) pode ser expresso como:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{\,j\left(\frac{2\pi}{T}\right)\cdot k\, t} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{\,j\,\omega_o \cdot k\; t} \end{aligned} \qquad \text{eq. (7.4)}$$

onde:

T = período fundamental do sinal x(t).

ω_o = frequência fundamental do sinal x(t).

e

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T}\int_T x(t)\cdot e^{-j\left(\frac{2\pi}{T}\right)\cdot k\, t}\cdot dt = \\ &= \frac{1}{T}\int_T x(t)\cdot e^{-j\omega_o \cdot k\, t}\cdot dt \end{aligned} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad \text{eq. (7.5)}$$

Portanto, a série *exponencial* (ou *complexa*) de Fourier generaliza a série trigonométrica de Fourier e tem também a vantagem de ser mais compacta.

Os c_k's são chamados de coeficientes da série exponencial de Fourier ou coeficientes espectrais.

Semelhantemente à série trigonométrica, a equação eq. (7.4) acima é conhecida como a

equação de síntese

enquanto que a equação eq. (7.5) é conhecida como a

equação de análise

da *série exponencial* (ou *complexa*) *de Fourier*.

Exemplo 7.2:

Tomemos novamente a onda quadrada x(t) em um período (de t = –1 até t = 1) ilustrada na figura 7.12.

$$x(t) = \begin{cases} -1, & \text{se} \quad -1 < t < 0 \\ 1, & \text{se} \quad 0 < t < 1 \end{cases}$$

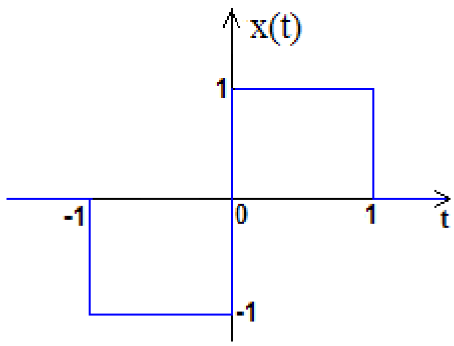

Fig. 7.12 – Sinal do Exemplo 7.2. Onda quadrada em um período (de t = –1 até 1).

E, repetindo-se (ou estendendo-se) este padrão para a direita de t = 1 e para esquerda de t = –1, obtemos um sinal periódico que pode ser aproximado pela série *exponencial* (ou *complexa*) de Fourier.

Novamente, o período fundamental é T = 2, e

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

e portanto, os coeficientes desta série *complexa* de Fourier para o sinal da onda quadrada acima são:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-1}^{1} x(t)\cdot e^{-j(k\pi t)}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} (-1)\cdot e^{-j(k\pi t)}\,dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} 1\cdot e^{-j(k\pi t)}\,dt = \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Fazendo-se as integrais, obtemos:

$$c_k = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\pi k j}\left(\left[e^{-j(k\pi t)}\right]_{-1}^{0}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)}{\pi k j}\left(\left[e^{-j(k\pi t)}\right]_{0}^{1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi k j}\left(1 - e^{jk\pi} - e^{-jk\pi} + 1\right) = \frac{1}{2\pi k j}\left(2 - e^{jk\pi} - e^{-jk\pi}\right)$$

Agora, usando-se as equações de Eüler temos que:

$$c_k = \frac{1}{2\pi k j}\left[2 - \cos(k\pi) - j\cdot \mathrm{sen}(k\pi) - \cos(k\pi) + j\cdot \mathrm{sen}(k\pi)\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi k j}\, 2\left(1 - \cos(k\pi)\right) =$$

$$= \frac{-j}{\pi k}\left(1 - \cos(k\pi)\right)$$

e portanto,

$$c_k = \begin{cases} 0\,, & \text{se } \; k = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots \\ \dfrac{-2}{\pi k}\, j\,, & \text{se } \; k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots \end{cases}$$

Logo,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{j\omega_o k t} =$$

$$= \sum_{k=\pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots}^{\infty} \left(\frac{-2}{\pi k} j\right) e^{jk\pi t} =$$

$$= \sum_{k=\pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots}^{\infty} \left(\frac{-2}{\pi k} j\right)\cdot\left[\cos(k\pi t) + j\cdot \mathrm{sen}(k\pi t)\right]$$

e, desmembrando-se a soma $k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$ em duas de $k = 1, 3, 5, \ldots$, como o seno é ímpar [sen (kπt) = –sen (–kπt), ∀k] e o co-seno é par [cos (kπt) = –cos(kπt) , ∀k], temos:

$$x(t) = \sum_{k=1,\,3,\,5,\,\ldots}^{\infty} \left(\frac{-2j}{\pi k}\right) \cos(k\pi t) \;+ \sum_{k=1,\,3,\,5,\,\ldots}^{\infty} \left(\frac{-2j}{\pi k}\right) j \cdot \text{sen}(k\pi t) \;+$$

$$+ \sum_{k=1,\,3,\,5,\,\ldots}^{\infty} \left(\frac{2j}{\pi k}\right) \cos(k\pi t) \;+ \sum_{k=1,\,3,\,5,\,\ldots}^{\infty} \left(\frac{-2j}{\pi k}\right) j \cdot \text{sen}(k\pi t)$$

e portanto os dois termos com co-senos se cancelam um ao outro, enquanto que os dois termos com senos são idênticos, logo podem se juntar ficando:

$$x(t) = 2 \cdot \left[\sum_{k=1,\,3,\,5,\,\ldots}^{\infty} \left(\frac{-2j}{\pi k}\right) j \cdot \text{sen}(k\pi t) \right] =$$

$$= \sum_{k=1,\,3,\,5,\,\ldots}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi k}\right) \text{sen}(k\pi t)$$

que é o mesmo resultado obtido no Exemplo 1 com a série trigonométrica de Fourier, ou seja:

$$x(t) = \frac{4}{\pi}\text{sen}(\pi t) + \frac{4}{3\pi}\text{sen}(3\pi t) + \frac{4}{5\pi}\text{sen}(5\pi t) +$$

$$+ \frac{4}{7\pi}\text{sen}(7\pi t) + \frac{4}{9\pi}\text{sen}(9\pi t) + \frac{4}{11\pi}\text{sen}(11\pi t) + \ldots$$

□

Isso acontece porque as séries *trigonométricas* e *complexa* (ou *exponencial*) de Fourier são equivalentes, um resultado que vamos ver a seguir na próxima secção.

7.6 – **Equivalência das séries trigonométrica e exponencial de Fourier**

Se o sinal x(t) for de valores reais, então existe uma relação entre a *série trigonométrica* e a *série complexa* (ou *exponencial*) *de Fourier*. Pode-se facilmente mostrar que:

$$\boxed{c_k = \frac{a_k - j\cdot b_k}{2}} \qquad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{eq. (7.6)}$$

e

$$\boxed{c_{-k} = \frac{a_k + j\cdot b_k}{2}} \qquad \text{para } k = 1, 2, \ldots \qquad \text{eq. (7.7)}$$

Embora o coeficiente b_o não exista, pois não foi definido, na eq. (7.6) assume-se que $b_o = 0$. Portanto, o coeficiente c_o pode ser expresso como:

$$c_o = \frac{a_o}{2}\,. \qquad \text{eq. (7.8)}$$

Note também que enquanto os coeficientes a_ks e b_ks são definidos nas eq. (7.2) e eq. (7.3) apenas para k = 0, 1, 2, …, os coeficientes c_ks são definidos nas eq. (7.6) e eq. (7.7) para k = 0, ±1, ±2, …

Observe também que a eq. (7. 7) é equivalentes a:

$$\boxed{c_k = \frac{a_{-k} + j\cdot b_{-k}}{2}} \qquad \text{para } k = -1, -2, \ldots \qquad \text{eq. (7.9)}$$

Sabemos, pelas eq. (7.2) e eq. (7.3) da série trigonométrica de Fourier, que não existe a_ks ou b_ks para k negativos, entretanto a_{-k} e b_{-k} estão bem definidos na eq. (7.9) pois nesta equação k = –1, –2, … e portanto os índices de a_{-k} e b_{-k} serão sempre positivos. Por exemplo:

a_{-k} para k = – 2 será o a_2,

ou

b_{-k} para k = – 5 será o b_5.

Os termos c_k para k positivos são os conjugados de c_k para k negativos, e vice-versa, isto é:

$$c_k = (c_{-k})^*\,, \qquad \forall\ k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$$

As equações acima permitem que se transforme uma *série trigonométrica* em uma *série exponencial*.

O inverso, ou seja, as equações que permitem transformar uma *série exponencial* em uma *série trigonométrica* são as seguintes:

$$\boxed{a_o = 2\, c_o} \qquad \text{eq. (7.10)}$$

$$\boxed{a_k = \ (c_k + c_{-k})} \qquad \text{para } k = 1, 2, \ldots \qquad \text{eq. (7.11)}$$

e

$$\boxed{b_k = \ j \cdot (c_k - c_{-k})} \qquad \text{para } k = 1, 2, \ldots \qquad \text{eq. (7.12)}$$

Com as relações acima é fácil de se mostrar que, quando x(t) é um sinal real, então:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{j\left(\frac{2\pi}{T}\right)\cdot k\,t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{j\,\omega_o \cdot k\,t}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot k\,t\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}\cdot k\,t\right)\right] =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(\omega_o\, k\,t) + b_k \operatorname{sen}(\omega_o\, k\,t)\right]$$

ou seja, as duas séries de Fourier, '*trigonométrica*' e '*exponencial*', são equivalentes.

7.7 – **Propriedades das séries de Fourier para sinais contínuos**

- ***Linearidade*:**

Suponha que

$x_1(t)$ é um sinal com período T e tem coeficientes de Fourier c'_k

$x_2(t)$ é um sinal com período T e tem coeficientes de Fourier c''_k

e que

$$y(t) \;=\; \alpha x_1(t) \;+\; \beta x_2(t)$$

então, mostra-se que:

y(t) tem período T ,

ou seja,

y(t) tem frequência fundamental $\omega_o = \dfrac{2\pi}{T}$,

e coeficientes de Fourier

$$\boxed{c_k = \alpha c'_k + \beta c''_k}$$

<u>Translação no tempo</u> (“*<u>time shifting</u>*”):

Suponha que

x(t) é um sinal com período T e tem coeficientes de Fourier c_k

e que

$$y(t) \;=\; x(t - t_o)$$

ou seja,

y(t) é o sinal x(t) com uma translação (*shift*) no tempo de t_o.

Então, mostra-se que:

y(t) tem período T ,

ou seja,

y(t) tem frequência fundamental $\omega_o = \dfrac{2\pi}{T}$,

e coeficientes de Fourier

$$\boxed{\begin{aligned}\tilde{c}_k &= e^{-jk\omega_o t_o} \cdot c_k = \\ &= e^{-jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t_o} \cdot c_k\end{aligned}}$$

Nota:

Como $\left| e^{j\theta} \right| = 1, \forall\theta$, tem-se que:

$$|\tilde{c}_k| = |c_k|$$

<u>Sinal reflectido</u> / <u>reversão no tempo</u> ("*<u>time reversal</u>*") em torno de t = 0**:**

Suponha que

x(t) é um sinal com período T e tem coeficientes de Fourier c_k

e que

$$y(t) = x(-t)$$

então, mostra-se que:

y(t) tem período T ,

ou seja

y(t) tem frequência fundamental $\omega_o = \dfrac{2\pi}{T}$,

e coeficientes de Fourier

$$\hat{c}_k = c_{-k}$$

Nota:

Como consequência desta propriedade pode-se concluir que:

Se x(t) é um ***sinal par*** ⇒ os coeficientes de Fourier c_k são, eles próprios, ***pares***; i.e.,

$$c_k = c_{-k}$$

Se x(t) é um ***sinal ímpar*** ⇒ os coeficientes de Fourier c_k são, eles próprios, ***ímpares***; i.e.,

$$c_k = -c_{-k}$$

- **Escalonamento no tempo (“*time scaling*”):**

Suponha que

x(t) é um sinal com período T e tem coeficientes de Fourier c_k

(portanto x(t) tem frequência fundamental $\omega_o = \dfrac{2\pi}{T}$)

e que

$$y(t) = x(\alpha t)$$

então, mostra-se que:

y(t) tem período $\dfrac{T}{\alpha}$,

ou seja

y(t) tem frequência fundamental $\hat{T} = \alpha\,\omega_o = \dfrac{2\alpha\pi}{T}$ e, além disso,

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{-jk\alpha\omega_o t} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{-jk\left(\frac{2\alpha\pi}{T}\right)t}$$

Note que a série de Fourier muda por causa da mudança da *frequência fundamental* (e do *período*). Entretanto os coeficientes c_k não mudam.

Multiplicação:

Suponha que

$x_1(t)$ é um sinal com período T e tem coeficientes de Fourier c'_k

$x_2(t)$ é um sinal com período T e tem coeficientes de Fourier c''_k

e que

$$y(t) \ = \ x_1(t) \cdot x_2(t)$$

então, mostra-se que:

y(t) tem período T , ou seja tem frequência fundamental $\omega_o = \dfrac{2\pi}{T}$,

e coeficientes de Fourier

$$c_k \ = \ \sum_{i=-\infty}^{\infty} c'_i \cdot c''_{k-i} \ =$$

$$= \ c'[\,k\,] * c''[\,k\,]$$

Ou seja, c_k é a convolução entre os sinais discretos $c'_k = c'[k]$ e $c''_k = c''[k]$.

$$c_k \ = \ \sum_{ij=-\infty}^{\infty} c'_i \cdot c''_{k-i} \ =$$

$$= \ c'_o \cdot c''_k + c'_1 \cdot c''_{k-1} + c'_{-1} \cdot c''_{k+1} + c'_2 \cdot c''_{k-2} + c'_{-2} \cdot c''_{k+2} + \cdots$$

Conjugação:

Suponha que

$x(t)$ é um sinal com período T e tem coeficientes de Fourier c_k

e que

$$y(t) \ = \ x^*(t)$$

então, mostra-se que:

y(t) tem período T , ou seja tem frequência fundamental $\omega_o = \dfrac{2\pi}{T}$,

e coeficientes de Fourier

$$\bar{c}_k = c^*_{-k}$$

Nota:
Como consequência desta propriedade pode-se concluir que:

Se x(t) ∈ $\mathbb{R}$, então

os coeficientes de Fourier $c_{-k} = c^*_k$;

$c_o \in \mathbb{R}$;

e

$$|c_k| = |c_{-k}|.$$

Além disso, as relações acima permitem ***mais uma vez*** concluir que:

Se x(t) ∈ $\mathbb{R}$ é um ***sinal par*** ⇒

os *coeficientes de Fourier* $c_k = c^*_k$; e

$c_k = c_{-k}$ (os *coeficientes de Fourier* são eles próprios *“**pares**”*).

Se x(t)∈ $\mathbb{R}$ é um ***sinal ímpar*** ⇒

os coeficientes de Fourier c_k são imaginários puros, $c_o = 0$ e

$c_k = -c_{-k}$ (os *coeficientes de Fourier* são eles próprios *“**ímpares**”*).

Translação na frequência (“*frequency shifting*”):

Suponha que

x(t) é um sinal com período T e tem coeficientes de Fourier c_k

e, para um m inteiro, constante, considere agora os coeficientes

$$\bar{\bar{c}}_k = c_{k-m}$$

ou seja,

$\bar{\bar{c}}_k$ são os coeficientes c_k desfasados de m.

Então, mostra-se que o sinal:

$$y(t) = e^{jm\omega_o t} \cdot x(t)$$

tem os coeficientes de Fourier $\bar{\bar{c}}_k$

Nota:

Esta propriedade é dual da translação no tempo (*time shifting*). Agora a translação (*shift*) foi aplicada aos c_k e não no tempo t.

Outro detalhe, como $\left| e^{j\theta} \right| = 1, \forall\theta$, então:

$$\left| \bar{\bar{c}}_k \right| = \left| c_k \right| \qquad\qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Convolução no período:

Suponha que

$x_1(t)$ é um sinal com período T e tem coeficientes de Fourier c'_k

$x_2(t)$ é um sinal com período T e tem coeficientes de Fourier c''_k

e que y(t) é a convolução (tomada no período T):

$$\begin{aligned} y(t) &= x_1(t) * x_2(t) \\ &= \int_T x_1(t-\tau) \cdot x_2(\tau)\, d\tau \end{aligned}$$

Então, mostra-se que:

y(t) tem período T , ou seja tem frequência fundamental $\omega_o = \dfrac{2\pi}{T}$,

e coeficientes de Fourier

$$\tilde{\tilde{c}}_k = T \cdot c'_k \cdot c''_k$$

Derivada:

Suponha que

x(t) é um sinal com período T e tem coeficientes de Fourier c_k

e que

$$y(t) = \frac{dx}{dt}$$

então, mostra-se que:

y(t) tem período T , ou seja tem frequência fundamental $\omega_o = \dfrac{2\pi}{T}$,

e coeficientes de Fourier

$$c'_k = jk\omega_o c_k = jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)c_k$$

Nota:

Para o caso de derivadas de ordem 2 ou mais, pode-se aplicar esta regra sucessivas vezes. Por exemplo, no caso da *segunda derivada*, se

$$y(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

os coeficientes de Fourier de y(t) são

$$c''_k = jk\omega_o c'_k = j^2 k^2 \omega_o^2 c_k = -k^2 \omega_o^2 c_k = -k^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 c_k \,.$$

Integral:

Suponha que

x(t) é um sinal com período T e tem coeficientes de Fourier c_k

e que

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt$$

então, mostra-se que:

y(t) tem período T , ou seja tem frequência fundamental $\omega_o = \dfrac{2\pi}{T}$,

e coeficientes de Fourier

$$\breve{c}_k = \frac{1}{jk\,\omega_o} \cdot c_k = \frac{1}{jk\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)} \cdot c_k$$

Nota:

No caso de $c_o = 0$, esta propriedade só é válida para sinais x(t) periódicos e com valores finitos.

Para o caso de integrais duplas, triplas, etc., pode-se aplicar esta regra sucessivas vezes.

Relação de Parseval:

Suponha que

x(t) é um sinal com período T e tem coeficientes de Fourier c_k

então, mostra-se que a potência média do sinal no intervalo de um período T:

$$P = \frac{1}{T}\int_T \left| x^2(t) \right| dt =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| c_k \right|^2$$

7.8 – **Série exponencial de Fourier para sinais discretos**

Já vimos, no capítulo 4 (sobre Sistemas), que um sinal discreto é periódico se

$$x[n] = x[n+N]$$

onde N é o período. Além disso, vimos que

N = período fundamental

se N for o menor inteiro para o qual a relação acima satisfaz. E neste caso:

$$\omega_o = \frac{2\pi}{N} = \text{frequência fundamental.}$$

O conjunto de todos os sinais discretos no tempo do tipo exponenciais complexos que são periódicos (com período N) é dado por

$$\phi_k[n] = e^{jk\omega_o n} = e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots \qquad \text{eq. (7.13)}$$

e todos estes sinais têm frequência fundamental que são múltiplas de

$$\frac{2\pi}{N}$$

e portanto são harmonicamente relacionados.

Existem apenas N sinais distintos no conjunto de funções $\phi_k[n]$ definido pela eq. (7.13) acima.

Isto é uma consequência do facto de que sinais discretos no tempo do tipo exponenciais complexas que diferem na frequência por um múltiplo de 2π são idênticos.
Ou seja, após N consecutivos, estes termos começam a repetir-se.

$$\begin{aligned}
\phi_o[n] &= \phi_N[n] \\
\phi_1[n] &= \phi_{N+1}[n] \\
\phi_2[n] &= \phi_{N+2}[n] \\
&\vdots \\
\phi_k[n] &= \phi_{k+N}[n] \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Esta situação é diferente do caso contínuo pois os coeficientes que aparecem na equação de síntese da série de Fourier para sinais contínuos:

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_o t} = e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t} \qquad k = 0, 1, 2, \dots,$$

são todos diferentes uns dos outros.

Portanto, a série de Fourier para sinais discretos terá apenas N termos, para N consecutivos valores de k,

de $k = \ell$ até $k = \ell + N - 1$.

e, semelhantemente, apenas N coeficientes c_k.

Logo, a série de Fourier para sinais discretos tem a expressão:

$$x[n] = \sum_{k=\ell,(\ell+1),\ldots}^{(\ell+N-1)} c_k \cdot e^{j\,k\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} = \sum_{k=\ell,(\ell+1),\ldots}^{(\ell+N-1)} c_k \cdot e^{j\,k\,\omega_o\,n} \qquad \text{eq. (7.14)}$$

onde, conforme já dito,

N = período fundamental do sinal x[n].

ω_o = frequência fundamental do sinal x[n].

A equação eq. (7.14) acima é conhecida como a

equação de síntese

da série de Fourier discreta.

Já os coeficientes c_k's no caso discreto são definidos por

$$c_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=\ell,(\ell+1),\ldots}^{(\ell+N-1)} x[n] \cdot e^{-j\,k\,\omega_o\,n} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=\ell,(\ell+1),\ldots}^{(\ell+N-1)} x[n] \cdot e^{-j\,k\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad \text{eq. (7.15)}$$

Os c_k's são chamados de "*coeficientes*" da série Fourier discreta ou "*coeficientes espectrais*".

A equação eq. (7.15) é conhecida como as

"equação de análise"

da série de Fourier discreta.

Exemplo 7.3:

Considere a seguinte onda quadrada x[n] discreta no tempo ilustrada na figura 7.13:

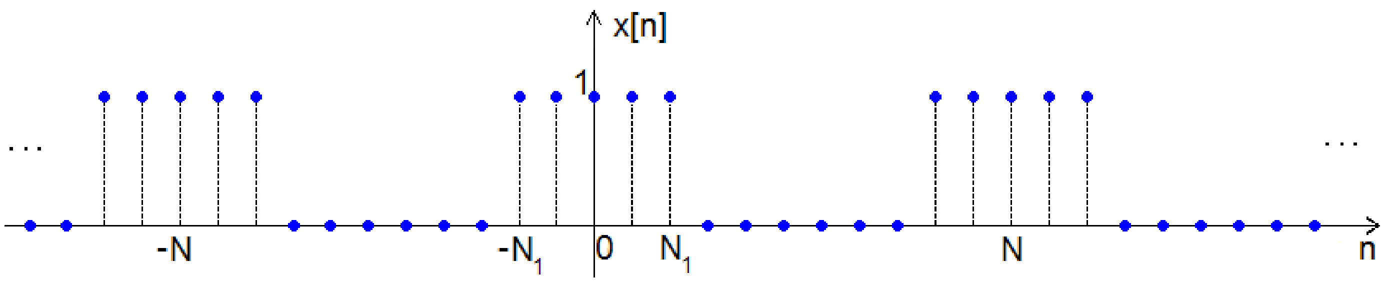

Fig. 7.13 – Onda quadrada discreta de período N. Sinal do Exemplo 7.3.

$$x[n] = \begin{cases} 1\,, & \text{se } -N_1 \le n \le N_1 \\ 0\,, & \forall \text{outros } \; n \text{ no intervalo } \; \text{de somação} \end{cases}$$

Neste caso os coeficientes espectrais c_k ficam:

$$c_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\,k\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \qquad \text{eq. (7.16)}$$

Se $k = 0, \pm N, \pm 2N, \cdots$ o somatório desta expressão de c_k acima fica

$$\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\,n\,2\pi} = \sum_{n=-N_1}^{N_1} 1 = (2N_1 + 1)$$

e portanto, a expressão de c_k da eq. (7.16) acima é facilmente expressa como:

$$c_k = \frac{2N_1 + 1}{N}, \qquad k = 0, \pm N, \pm 2N, \cdots$$

Entretanto, para $k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \cdots$ definimos

$$m = n + N_1$$

e então, fazemos uma mudança de índice no somatório, ficando

$$c_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)(m-N_1)} =$$

$$= \frac{1}{N} \, e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)N_1} \cdot \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)m} \,.$$

Agora, usando a fórmula da soma finita dos elementos de uma progressão geométrica, já vista no capítulo 6, eq. (6.3):

$$a_1 : a_2 : a_3 : \cdots : a_k : \cdots$$

$$a_2 = a_1 \cdot q, \quad a_3 = a_2 \cdot q, \quad \cdots \quad a_k = a_{k-1} \cdot q, \quad \cdots$$

que é dada por:

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1 (1 - q^n)}{(1 - q)}$$

pode-se substituir o somatório da expressão dos c_k acima, uma vez que é uma soma finita de uma progressão geométrica com

$$a_1 = 1, \qquad n = (2N_1 + 1) \qquad e, \qquad q = e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)}$$

obtendo-se:

$$c_k = \frac{1}{N} \, e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)N_1} \cdot \left[\frac{1 - e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)(2N+1)}}{1 - e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)}} \right] \qquad \text{para } k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \cdots$$

que, após multiplicação dos termos, pode facilmente ser expresso como

$$c_k = \frac{1}{N} \cdot \frac{e^{-jk\left(\frac{2\pi}{2N}\right)} \cdot \left[e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)\left(N_1+\frac{1}{2}\right)} - e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)\left(N_1+\frac{1}{2}\right)} \right]}{e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)} \cdot \left[e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)\left(\frac{2\pi}{2N}\right)} - e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)\left(\frac{2\pi}{2N}\right)} \right]}$$

para $k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \cdots$

e, usando Eüler, obtemos que

$$c_k = \frac{1}{N} \cdot \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{N} k \left(N_1 + \frac{1}{2} \right) \right]}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi k}{N} \right)}, \qquad \text{para } k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \cdots$$

Desta forma temos então todos os coeficientes espectrais c_k da onda quadrada discreta deste exemplo.

Resumindo:

$$c_k = \begin{cases} \dfrac{1}{N} \cdot \dfrac{\operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{N} k \left(N_1 + \frac{1}{2} \right) \right]}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi k}{N} \right)}, & \text{se } k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \cdots \\[2ex] \dfrac{2N_1 + 1}{N}, & \text{se } k = 0, \pm N, \pm 2N, \cdots \end{cases}$$

Para o caso particular de $N = 9$ e $N_1 = 2$, temos que:

$$(2N_1 + 1) = 5$$

que representa o número de pontos que assumem o valor 1 em cada período e conse-quentemente,

$$N - (2N_1 + 1) = 9 - 5 = 4$$

representa o número de pontos que é igual a 0 (zero) em cada período.

O gráfico deste x[n] pode ser visto na figura 7.14.

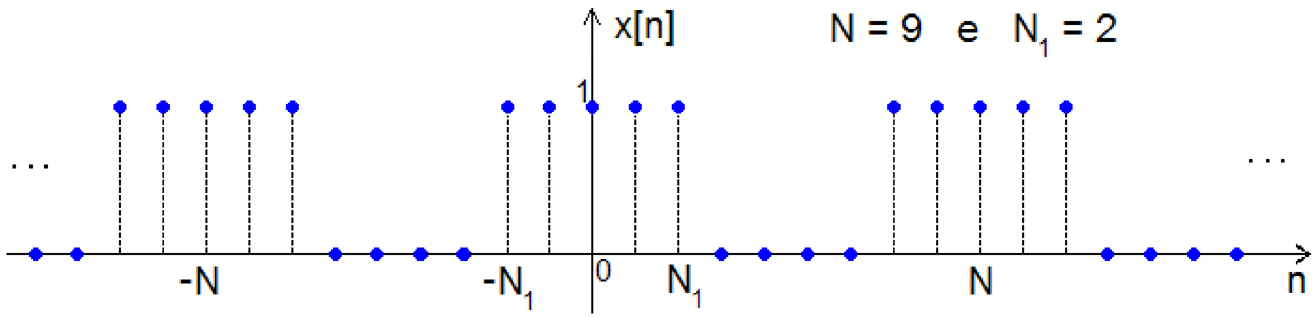

Fig. 7.14 – Sinal onda quadrada discreta. Caso particular N = 9 e N_1 = 2.

e os coeficientes c_k calculados pela expressão acima são:

$\vdots$	$c_2 = -0{,}0591$	$c_9 = 0{,}5556$
$c_{-4} = 0{,}0725$	$c_3 = -0{,}1111$	$c_{10} = 0{,}3199$
$c_{-3} = -0{,}1111$	$c_4 = 0{,}0725$	$c_{11} = -0{,}0591$
$c_{-2} = -0{,}0591$	$c_5 = 0{,}0725$	$c_{12} = -0{,}1111$
$c_{-1} = 0{,}3199$	$c_6 = -0{,}1111$	$c_{13} = 0{,}0725$
$c_o = 0{,}5556$	$c_7 = -0{,}0591$	$c_{14} = 0{,}0725$
$c_1 = 0{,}3199$	$c_8 = 0{,}3199$	$\vdots$

Observe que a cada N coeficientes eles se repetem. Isto é, a cada 9 c_k eles voltam a ser os mesmos valores.

$$
\begin{gathered}
\vdots \\
c_{-4} = c_5 = c_{14} = \cdots = 0{,}0725 \\
c_{-3} = c_6 = c_{15} = \cdots = -0{,}1111 \\
c_{-2} = c_7 = c_{16} = \cdots = -0{,}0591 \\
c_{-1} = c_8 = c_{17} = \cdots = 0{,}3199 \\
c_o = c_9 = c_{18} = \cdots = 0{,}5556 \\
c_1 = c_{10} = c_{19} = \cdots = 0{,}3199 \\
c_2 = c_{11} = c_{20} = \cdots = -0{,}0591 \\
\vdots
\end{gathered}
$$

e assim por diante.

Agora, com os valores dos coeficientes c_k, podemos escrever a série de Fourier, eq. (7.14).

Ao contrário do caso contínuo, em que tínhamos que acrescentar mais e mais termos para obter uma aproximação melhor, aqui no caso discreto é possível uma aproximação exacta com N = 9 termos consecutivos:

$$x[n] = \sum_{k=\ell,(\ell+1),\ldots}^{(\ell+8)} c_k \cdot e^{jk\left(\frac{2\pi}{9}\right)n}$$

Por exemplo, se tomarmos primeiramente apenas 3 termos consecutivos, k = –1, 0 e 1, teremos

$$\hat{x}_3[n] = \sum_{k=-1}^{1} c_k \cdot e^{jk\left(\frac{2\pi}{9}\right)n}$$

que nos dá uma primeira aproximação, ainda muito grosseira, do sinal x[n], como pode-se ver no gráfico de $\hat{x}_3[n]$ na figura 7.15 abaixo.

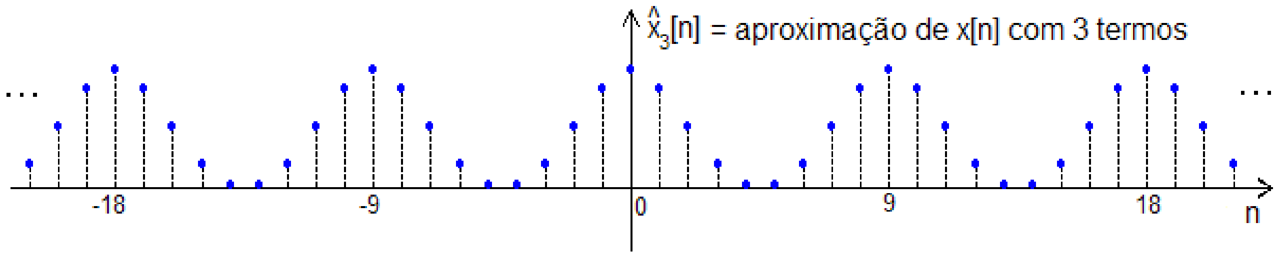

Fig. 7.15 – Sinal onda quadrada discreta. Caso particular N = 9 e N_1 = 2. Aproximação por série de Fourier com apenas 3 termos.

Se entretanto tomarmos 5 termos consecutivos, k = –2, –1, 0, 1 e 2, teremos então

$$\hat{x}_5[n] = \sum_{k=-2}^{2} c_k \cdot e^{jk\left(\frac{2\pi}{9}\right)n}$$

que nos dá uma aproximação um pouco melhor, mas ainda longe de perfeita, do sinal x[n], como pode-se ver no gráfico de $\hat{x}_5[n]$ na figura 7.16 abaixo.

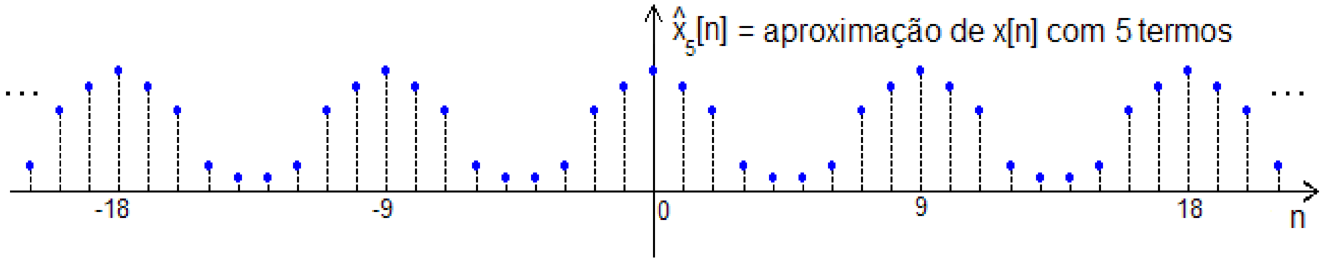

Fig. 7.16 – Sinal onda quadrada discreta. Caso particular N = 9 e N_1 = 2. Aproximação por série de Fourier com apenas 5 termos.

Se agora tomarmos 7 termos consecutivos, k = –3, –2, –1, 0, 1, 2 e 3, teremos então

$$\hat{x}_7[n] = \sum_{k=-3}^{3} c_k \cdot e^{jk\left(\frac{2\pi}{9}\right)n}$$

que já nos dá uma aproximação bem melhor, mas ainda não perfeita, do sinal x[n], como pode-se ver no gráfico de $\hat{x}_7[n]$ na figura 7.17 abaixo.

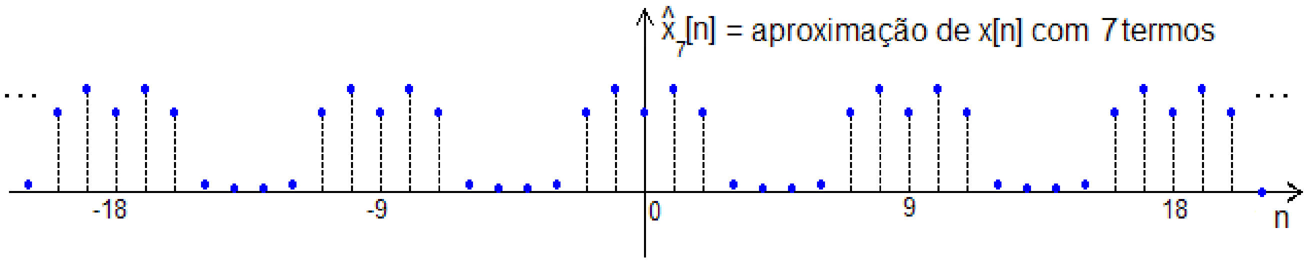

Fig. 7.17 – Sinal onda quadrada discreta. Caso particular N = 9 e N_1 = 2. Aproximação por série de Fourier com 7 termos.

Finalmente, se agora tomarmos 9 termos consecutivos, k = –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3 e 4, teremos então

$$\hat{x}_9[n] = x[n] = \sum_{k=-4}^{4} c_k \cdot e^{jk\left(\frac{2\pi}{9}\right)n}$$

que nos dá a aproximação perfeita, ou “exacta” do sinal x[n] pois N = 9. Ou seja,

$$\hat{x}_9[n] = x[n]$$

O gráfico de $\hat{x}_9[n]$, que é coincidente com x[n], pode ser visto na figura 7.18 abaixo.

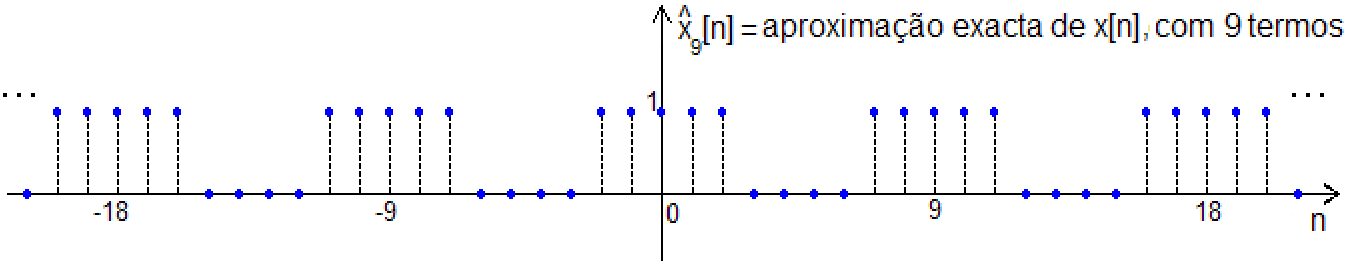

Fig. 7.18 – Sinal onda quadrada discreta. Caso particular N = 9 e N_1 = 2. Aproximação exacta por série de Fourier com 9 termos.

□

Exemplo 7.4:

Considere agora o sinal sinusoidal discreto

$$x[n] = \operatorname{sen}(\omega_o n)$$

Este sinal é periódico quando:

$$\frac{2\pi}{\omega_o} \text{ é um inteiro ou a razão de inteiros.}$$

Suponha que

$$\frac{2\pi}{\omega_o} = N$$

logo,

$$\omega_o = \frac{2\pi}{N}$$

e x[n] é então um sinal periódico com período fundamental N.

Usando-se a equação de Eüler podemos expandir este sinal x[n] como a soma de 2 termos exponenciais complexas, obtendo-se

$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} - \frac{1}{2j} e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

e vemos então que:

$$\begin{cases} c_{-1} = \dfrac{-1}{2j} = \dfrac{1}{2}\,j \\[2ex] c_{1} = \dfrac{-1}{2j} = \dfrac{-1}{2}\,j \\[2ex] c_{k} = 0, \qquad \text{para } \forall \text{ outros valores de k no intervalo de somação.} \end{cases}$$

Por exemplo, no caso particular de

$$N = 5$$

então

$$x[n] = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}n\right)$$

e os coeficientes de Fourier serão:

$$\vdots$$

$$c_{-3} = 0$$

$$c_{-2} = 0$$

$$c_{-1} = \frac{-1}{2j} = \frac{1}{2}\,j$$

$$c_{o} = 0$$

$$c_{1} = \frac{1}{2j} = -\frac{1}{2}\,j$$

$$c_{2} = 0$$

$$c_{3} = 0$$

$$c_{4} = \frac{-1}{2j} = \frac{1}{2}\,j$$

$$c_{5} = 0$$

$$c_{6} = \frac{1}{2j} = -\frac{1}{2}\,j$$

$$c_{7} = 0$$

$$c_{8} = 0$$

$$c_{9} = \frac{-1}{2j} = \frac{1}{2}\,j$$

$$c_{10} = 0$$

$$c_{11} = \frac{1}{2j} = -\frac{1}{2}\,j$$

$$c_{12} = 0$$

$$c_{13} = 0$$

$$c_{14} = \frac{-1}{2j} = \frac{1}{2}\,j$$

$$c_{15} = 0$$

$$c_{16} = \frac{1}{2j} = -\frac{1}{2}\,j$$

$$\vdots$$

e assim por diante.

Ou seja, a cada 5 coeficientes c_k, eles se repetem, i.e., voltam a ter os mesmos valores

$$\begin{array}{ccc} \vdots & \qquad & \vdots \\ c_{-3} = c_2 = c_7 = \cdots = 0 & & c_o = c_5 = c_{10} = \cdots = 0 \\ c_{-2} = c_3 = c_8 = \cdots = 0 & & c_1 = c_6 = c_{11} = \cdots = -0{,}5j \\ c_{-1} = c_4 = c_9 = \cdots = 0{,}5j & & c_2 = c_7 = c_{12} = \cdots = 0 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

e assim por diante.

O intervalo de somação pode ser quaisquer 5 coeficientes c_k consecutivos, como por exemplo:

de	$k = -1$	até	$k = 3$,	ou
de	$k = 0$	até	$k = 4$,	ou
de	$k = 1$	até	$k = 5$,	ou
de	$k = 2$	até	$k = 7$,	
	etc.		etc.	

Se tomarmos apenas 3 termos consecutivos, como por exemplo: k = 1, 2 e 3, teremos

$$\hat{x}_3[n] = \sum_{k=1}^{3} c_k \cdot e^{jk\left(\frac{2\pi}{5}\right)n}$$

que nos dá uma aproximação do sinal x[n].

Entretanto, se tomarmos 5 termos consecutivos, como por exemplo: k = 1, 2, 3, 4 e 5, teremos então

$$\hat{x}_5[n] = \sum_{k=1}^{5} c_k \cdot e^{jk\left(\frac{2\pi}{5}\right)n}$$

que nos dá a aproximação exacta do sinal x[n] pois N = 5. Ou seja,

$$\hat{x}_5[n] = x[n] = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{5} n\right).$$

□

Exemplo 7.5:

Considere novamente o sinal sinusoidal discreto

$$x[n] = \operatorname{sen}(\omega_o n)$$

mas agora suponha que

$$\frac{2\pi}{\omega_o} = \frac{N}{M} = \text{razão de 2 inteiros}$$

onde N e M são 2 inteiros que não têm factores comuns.

Logo,

$$\omega_o = \frac{2\pi}{N} \cdot M$$

Novamente x[n] é um sinal periódico e com período fundamental N.

Usando-se a equação de Eüler podemos também expandir este sinal x[n] como a soma de 2 termos exponenciais complexas, obtendo-se:

$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{jM\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} - \frac{1}{2j} e^{-jM\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

e portanto,

$$\begin{cases} c_{-M} = -\dfrac{1}{2j} = \dfrac{1}{2} \cdot j \\[2ex] c_M = \dfrac{1}{2j} = \dfrac{-1}{2} \cdot j \end{cases}$$

Além disso, como $c_{k+N} = c_{k-N}$ (os c_k's se repetem a cada N), então:

$$c_{N-M} = c_{-(N+M)} = \frac{1}{2} \cdot j \qquad \left(= c_{-M} \quad \text{também}\right)$$

e

$$c_{N+M} = c_{-N+M} = \frac{-1}{2} \cdot j \qquad \left(= c_M \quad \text{também}\right)$$

Entretanto,

$$c_k = 0, \qquad \text{para } \forall \text{ outros valores de k no intervalo de somação.}$$

□

Exemplo 7.6:

Neste exemplo anterior (Exemplo 7.5), se tomarmos o caso particular de

$$N = 5 \qquad \text{e} \qquad M = 3,$$

então

$$x[n] = \text{sen}\left(3 \cdot \frac{2\pi}{5} n\right) = \text{sen}\left(\frac{6\pi}{5} n\right) = \text{sen}\,(1{,}2 \cdot \pi \cdot n)$$

e os coeficientes de Fourier serão:

$$\begin{array}{lll}
\vdots & & \\
c_{-9} = 0 & c_1 = 0 & c_{11} = 0 \\
c_{-8} = \frac{1}{2} j & c_2 = \frac{1}{2} j & c_{12} = \frac{1}{2} j \\
c_{-7} = -\frac{1}{2} j & c_3 = -\frac{1}{2} j & c_{13} = -\frac{1}{2} j \\
c_{-6} = 0 & c_4 = 0 & c_{14} = 0 \\
c_{-5} = 0 & c_5 = 0 & c_{15} = 0 \\
c_{-4} = 0 & c_6 = 0 & c_{16} = 0 \\
c_{-3} = \frac{1}{2} j & c_7 = \frac{1}{2} j & c_{17} = \frac{1}{2} j \\
c_{-2} = -\frac{1}{2} j & c_8 = -\frac{1}{2} j & c_{18} = -\frac{1}{2} j \\
c_{-1} = 0 & c_9 = 0 & c_{19} = 0 \\
c_o = 0 & c_{10} = 0 & c_{20} = 0 \\
 & & \vdots
\end{array}$$

e assim por diante.

Ou seja, a cada 5 coeficientes c_k, eles se repetem, i.e., voltam a ter os mesmos valores

$$\begin{array}{c} \vdots \\ c_{-9} = c_{-4} = c_1 = c_6 = \cdots = 0 \\ c_{-8} = c_{-3} = c_2 = c_7 = \cdots = 0{,}5j \\ c_{-7} = c_{-2} = c_3 = c_8 = \cdots = -0{,}5j \\ \vdots \end{array} \qquad \begin{array}{c} \vdots \\ c_{-6} = c_{-1} = c_4 = c_9 = \cdots = 0 \\ c_{-5} = c_o = c_5 = c_{10} = \cdots = 0 \\ c_{-4} = c_1 = c_6 = c_{11} = \cdots = 0 \\ \vdots \end{array}$$

e assim por diante.

O intervalo de somação novamente pode ser quaisquer 5 coeficientes c_k consecutivos, como por exemplo:

de	$k = -1$	até	$k = 3$,	ou
de	$k = 0$	até	$k = 4$,	ou
de	$k = 1$	até	$k = 5$,	
	etc.		etc.	

Se tomarmos apenas 1, ou 2, ou 3, ou 4 termos consecutivos, teremos uma aproximação do sinal x[n]. Por exemplo: k = 1, 2 e 3,

$$\hat{x}_3[n] = \sum_{k=1}^{3} c_k \cdot e^{j\,k\left(\frac{6\pi}{5}\right)n}$$

Entretanto, se tomarmos 5 termos consecutivos, como por exemplo: k = 1, 2, 3, 4 e 5, teremos então

$$\hat{x}_5[n] = \sum_{k=1}^{5} c_k \cdot e^{j\,k\left(\frac{6\pi}{5}\right)n}$$

que nos dá a aproximação exacta do sinal x[n] pois N = 5. Ou seja,

$$\hat{x}_5[n] = x[n] = \mathrm{sen}\left(\frac{6\pi}{5}n\right)$$

□

Exemplo 7.7:

Novamente considerando o Exemplo 7.5, se tomarmos o caso particular de

$$N = 7 \qquad \text{e} \qquad M = 3,$$

então

$$x[n] = \operatorname{sen}\left(3 \cdot \frac{2\pi}{7} n\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi}{7} n\right) = \operatorname{sen}\left(0{,}8571 \cdot \pi \cdot n\right) = \operatorname{sen}\left(2{,}6928 \cdot n\right)$$

e os coeficientes de Fourier serão:

$$\begin{array}{lll}
\vdots & & \\
c_{-3} = \frac{1}{2} j & c_4 = \frac{1}{2} j & c_{11} = -\frac{1}{2} j \\
c_{-2} = 0 & c_5 = 0 & c_{12} = 0 \\
c_{-1} = 0 & c_6 = 0 & c_{13} = 0 \\
c_0 = 0 & c_7 = 0 & c_{14} = 0 \\
c_1 = 0 & c_8 = 0 & c_{15} = 0 \\
c_2 = 0 & c_9 = 0 & c_{16} = 0 \\
c_3 = -\frac{1}{2} j & c_{10} = -\frac{1}{2} j & c_{17} = -\frac{1}{2} j \\
 & & \vdots
\end{array}$$

e assim por diante.

Ou seja, a cada 7 coeficientes c_k, eles se repetem, i.e., voltam a ter os mesmos valores

$$\begin{array}{ll}
\vdots & \vdots \\
c_{-3} = c_4 = c_{11} = 0{,}5j = \cdots & c_o = c_7 = c_{14} = \cdots \; 0 \\
c_{-2} = c_5 = c_{12} = 0 = \cdots & c_1 = c_8 = c_{15} = \cdots \; 0 \\
c_{-1} = c_6 = c_{13} = 0 = \cdots & c_2 = c_9 = c_{16} = \cdots \; 0 \\
c_o = c_7 = c_{14} = 0 = \cdots & c_3 = c_{10} = c_{17} = \cdots \; -0{,}5j \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

e assim por diante.

O intervalo de somação agora pode ser quaisquer 7 coeficientes c_k consecutivos, como por exemplo:

de	$k = -1$	até	$k = 5$,	ou
de	$k = 0$	até	$k = 6$,	ou
de	$k = 1$	até	$k = 7$,	
	etc.		etc.	

Se tomarmos apenas 1, ou 2, ou 3, ou 4 termos consecutivos, teremos uma aproximação do sinal x[n]. Por exemplo: k = 1, 2, 3, 4 e 5,

$$\hat{x}_5[n] = \sum_{k=1}^{5} c_k \cdot e^{jk\left(\frac{6\pi}{7}\right)n}$$

Entretanto, se tomarmos 7 termos consecutivos, como por exemplo:

k = 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7,

teremos então

$$\hat{x}_7[n] = \sum_{k=1}^{7} c_k \cdot e^{jk\left(\frac{6\pi}{7}\right)n}$$

que nos dá a aproximação exacta do sinal x[n] pois N = 7. Ou seja,

$$\hat{x}_7[n] = x[n] = \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi}{7}n\right).$$

□

7.9 – **Propriedades da Série de Fourier para sinais discretos**

● ***Linearidade***:

Suponha que

$x_1[n]$ é um sinal com período N e tem coeficientes de Fourier c'_k

$x_2[n]$ é um sinal com período N e tem coeficientes de Fourier c''_k

e que

$$y[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$$

então, mostra-se que:

y[n] tem período N ,

ou seja,

y[n] tem frequência fundamental $\omega_o = \dfrac{2\pi}{N}$,

e coeficientes de Fourier

$$c_k = \alpha c'_k + \beta c''_k$$

<u>Translação no tempo</u> (“*<u>time shifting</u>*”):

Suponha que

x[n] é um sinal com período N e tem coeficientes de Fourier c_k

e que

$$y[n] = x[n - n_o]$$

ou seja, y[n] é o sinal x[n] com uma translação (*shift*) no tempo de n_o.

Então, mostra-se que:

y[n] tem período N ,

ou seja,

y[n] tem frequência fundamental $\omega_o = \dfrac{2\pi}{N}$,

e coeficientes de Fourier

$$\tilde{c}_k = e^{-j k \omega_o n_o} c_k =$$

$$= e^{-j k \left(\frac{2\pi}{N}\right) n_o} c_k$$

<u>Nota</u>:

Como $\left| e^{j\theta} \right| = 1, \quad \forall\theta$, tem-se que

$$|\tilde{c}_k| = |c_k|$$

Sinal reflectido / **reversão no tempo** (“*time reversal*”) em torno de n = 0:

Suponha que

$x[n]$ é um sinal com período N e tem coeficientes de Fourier c_k

e que

$$y[n] = x[-n]$$

então, mostra-se que:

$y[n]$ tem período N ,

ou seja,

$y[n]$ tem frequência fundamental $\omega_o = \dfrac{2\pi}{N}$,

e coeficientes de Fourier

$$\hat{c}_k = c_{-k}$$

Nota:

Como consequência desta propriedade pode-se concluir, (*semelhantemente ao caso contínuo*), que:

Se $x[n]$ é um ***sinal par*** $\Rightarrow$ os coeficientes de Fourier c_k são, eles próprios, ***pares***; i.e., $$c_k = c_{-k}$$

Se $x[n]$ é um ***sinal ímpar*** $\Rightarrow$ os coeficientes de Fourier c_k são eles próprios, ***ímpares***; i.e., $$c_k = -c_{-k} .$$

Escalonamento no tempo (“*time scaling*”):

Suponha que

$x[n]$ é um sinal com período N e tem coeficientes de Fourier c_k

(portanto $x[n]$ tem frequência fundamental $\omega_o = \dfrac{2\pi}{N}$)

e que

$$y[n] = \begin{cases} x\left[\dfrac{n}{m}\right], & \text{se n é múltiplo de m} \\ 0, & \text{se n não é múltiplo de m} \end{cases}$$

então, mostra-se que:

y[n] tem período $m \cdot N$,

ou seja,

y[n] tem frequência fundamental $\dfrac{\omega_o}{m} = \dfrac{2\pi}{m \cdot N}$, e além disso,

$$y[n] = \sum_{k=\ell,(\ell+1),\dots}^{(\ell+N-1)} c_k \cdot e^{-jk\left(\frac{\omega_o}{m}\right)n} =$$

$$= \sum_{k=\ell,(\ell+1),\dots}^{(\ell+N-1)} c_k \cdot e^{-jk\left(\frac{2\pi}{m \cdot N}\right)n}$$

Note que a série de Fourier muda por causa da mudança da frequência fundamental (e do período). Entretanto os coeficientes c_k não mudam.

Multiplicação:

Suponha que

$x_1[n]$ é um sinal com período N e tem coeficientes de Fourier c'_k
$x_2[n]$ é um sinal com período N e tem coeficientes de Fourier c''_k

e que

$$y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n]$$

então, mostra-se que:

y[n] tem período N , ou seja tem frequência fundamental $\omega_o = \dfrac{2\pi}{N}$,

e coeficientes de Fourier

$$c_k = \sum_{j=\ell,(\ell+1),\dots}^{(\ell+N-1)} c'_j \cdot c''_{k-j} \qquad\qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ou seja,

$$c_k = \sum_{j=\ell,(\ell+1),\dots}^{(\ell+N-1)} c'_j \cdot c''_{k-j} =$$

$$= c'_o \cdot c''_k + c'_1 \cdot c''_{k-1} + c'_2 \cdot c''_{k-2} + \cdots + c'_{N-1} \cdot c''_{(k-N+1)}$$

$$= c'_1 \cdot c''_{k-1} + c'_2 \cdot c''_{k-2} + c'_3 \cdot c''_{k-3} + \cdots + c'_N \cdot c''_{(k-N)}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

etc etc etc etc

Conjugação:

Suponha que

x[n] é um sinal com período N e tem coeficientes de Fourier c_k

e que

$$y[n] = x^*[n]$$

y[n] é o conjugado de x[n]; então, mostra-se que:

y[n] tem período N , ou seja tem frequência fundamental $\omega_o = \dfrac{2\pi}{N}$,

e coeficientes de Fourier

$$\bar{c}_k = c^*_{-k}$$

Nota:

Como consequência desta propriedade pode-se concluir que:

Se x[n] $\in \mathbb{R}$, então

os coeficientes de Fourier $c_{-k} = c_k^*$;

$$c_o \in \mathbb{R};$$

e

$$|c_k| = |c_{-k}|.$$

Além disso, as relações acima permitem ***mais uma vez*** concluir que:

Se $x[n] \in \mathbb{R}$ é um sinal par $\Rightarrow$

os coeficientes de Fourier $c_k = c_k^*$; e

$c_k = c_{-k}$ (os *coeficientes de Fourier* são eles próprios *“**pares**”*).

Se $x[n] \in \mathbb{R}$ é um sinal ímpar $\Rightarrow$

os coeficientes de Fourier c_k são imaginários puros, $c_o = 0$ e

$c_k = -c_{-k}$ (os *coeficientes de Fourier* são eles próprios *“**impares**”*).

<u>Translação na frequência</u> (“*<u>frequency shifting</u>*”):

Suponha que

x[n] é um sinal com período N e tem coeficientes de Fourier c_k

e, para um m inteiro, constante, considere agora os coeficientes

$$\bar{\bar{c}}_k = c_{k-m} \qquad\qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ou seja,

$\bar{\bar{c}}_k$ são os coeficientes c_k desfasados de m.

Então, mostra-se que o sinal:

$$y[n] = e^{j m \omega_0 n} \cdot x[n]$$

tem os coeficientes de Fourier $\bar{\bar{c}}_k$

Nota:

Esta propriedade é dual da translação no tempo (*time shifting*). Agora a translação (*shift*) foi aplicada aos c_k e não no tempo t.

Como $\left| e^{j\theta} \right| = 1, \quad \forall\theta$, então

$$\left| \bar{\bar{c}}_k \right| = \left| c_k \right|$$

Convolução no período:

Suponha que

$x_1[n]$ é um sinal com período N e tem coeficientes de Fourier c'_k

$x_2[n]$ é um sinal com período N e tem coeficientes de Fourier c''_k

e que y[n] é a convolução (tomada no período N):

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] =$$

$$= \sum_{k=\ell,(\ell+1),\dots}^{(\ell+N-1)} x_1[n-k] \cdot x_2[k]$$

Então, mostra-se que:

y[n] tem período N , ou seja tem frequência fundamental $\omega_o = \dfrac{2\pi}{N}$,

e coeficientes de Fourier

$$\tilde{\tilde{c}}_k = N \cdot c'_k \cdot c''_k$$

Primeira diferença:

Suponha que

x[n] é um sinal com período N e tem coeficientes de Fourier c_k

e que

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

então, mostra-se que:

$y[n]$ tem período N , ou seja tem frequência fundamental $\omega_o = \dfrac{2\pi}{N}$,

e coeficientes de Fourier

$$c'_k = \left(1 - e^{jk\omega_o}\right) \cdot c_k = \left(1 - e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)}\right) \cdot c_k$$

Nota:

Esta propriedade corresponde, no caso discreto, à propriedade para a "*derivada*" no caso contínuo.

Para o caso de diferenças de ordem 2 ou maior, pode-se aplicar esta regra sucessivas vezes. Por exemplo, no caso da *segunda diferença*, se

$$y[n] = x[n] - x[n-2]$$

os coeficientes de Fourier de y(t) são

$$c''_k = \left(1 - e^{jk\omega_o}\right)^2 \cdot c_k = \left(1 - e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)}\right)^2 \cdot c_k \,.$$

Soma acumulada:

Suponha que

$x[n]$ é um sinal com período N e tem coeficientes de Fourier c_k

e que

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

então, mostra-se que:

$y[n]$ tem período T , ou seja tem frequência fundamental $\omega_o = \dfrac{2\pi}{N}$,

e coeficientes de Fourier

$$\breve{c}_k = \frac{1}{\left(1 - e^{jk\omega_o}\right)} \cdot c_k = \frac{1}{\left(1 - e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)}\right)} \cdot c_k$$

Nota:

No caso de $c_o = 0$, esta propriedade só é válida para sinais x[n] periódicos e com valores finitos.

Esta propriedade corresponde, no caso discreto, à propriedade para a integral no caso contínuo.

Para o caso de integrais duplas, triplas, etc., pode-se aplicar esta regra sucessivas vezes.

Relação de Parseval:

Suponha que

x[n] é um sinal com período N e tem coeficientes de Fourier c_k

então, mostra-se que a potência média do sinal no intervalo de um período N:

$$P = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=\ell,(\ell+1),\dots}^{(\ell+N-1)} \left| x^2[n] \right| =$$

$$= \sum_{k=\ell,(\ell+1),\dots}^{(\ell+N-1)} | c_k |^2$$