11

Derivação implícita e taxas relacionadas

Sumário

11.1 Derivação implícita

Nas Unidades 9 e 10 aprendemos a derivar funções da forma $y = f(x)$. Nesse caso, dizemos que a função está definida *explicitamente*. No entanto, pode-se não derfinir explicitamente uma função, mas fornecer uma propriedade que permita encontrar sua derivada, admitindo que a derivada exista. Por exemplo, considere a

$$x^2 + y^2 = 4$$

Como sabemos, trata-se da equação de um círculo de centro na origem e raio 2. Podemos resolver explicitamente por:

$$y^2 = 4 - x^2 \implies y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

Há, portanto, duas possibilidades de funções, as duas com domínio $x \in (-2, 2)$:

$$y = f_1(x) = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{ou} \quad y = f_2(x) = -\sqrt{4 - x^2}$$

A derivada em cada caso é:

$$f_1'(x) = \frac{1}{2}(4 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = -\frac{x}{f_1(x)}$$
$$f_2'(x) = -\frac{1}{2}(4 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{-x}{-\sqrt{4 - x^2}} = -\frac{x}{f_2(x)}$$

Logo, nos dois casos,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \, .$$

Por outro lado, admitindo a existência de uma função $y = f(x)$ derivável que satisfaça a relação $x^2 + y^2 = 4$, podemos derivar diretamente a relação:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ 2x + 2y.\frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \end{aligned}$$

Encontramos o mesmo resutado que antes, mas sem a necessidade de explicitar a definição da função. Observe o uso da regra da cadeia, quando fazemos

$$\frac{dy^2}{dx} = 2y\frac{dy}{dx} \, .$$

Em resumo, admitindo a existência de uma função derivável $y = f(x)$ e dada uma equação em x e y, é possível encontrar $f'(x)$ derivando a equação, mesmo sem explicitar a definição de $y = f(x)$.

Observe que dada uma equação entre x e y pode ser muito difícil ou mesmo impossível encontrar a definição explícita $y = f(x)$. Pode também acontecer de mais de uma função satisfazer a equação, como no caso acima. No entanto, admitindo a existência de função derivável $y = f(x)$, a relação pode permitir o cálculo da derivada $f'(x)$. Esta técnica é conhecida como *derivação implícita*.

Exemplo 1

Seja $y = f(x)$ função derivável satisfazendo a equação $y^3 - xy = 1$. Encontre $\frac{dy}{dx}$.

Derivando $y^3 - xy = 1$ obtemos:

$$\begin{aligned}
&3y^2\frac{dy}{dx} - (1.y + x.\frac{dy}{dx}) = 0\\
&3y^2\frac{dy}{dx} - y - x.\frac{dy}{dx} = 0\\
&\frac{dy}{dx}\left(3y^2 - x\right) = y\\
&\frac{dy}{dx} = \frac{y}{3y^2 - x}
\end{aligned}$$

Portanto, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{3y^2 - x}$ é a derivada de $f(x)$ para os pontos onde $3y^2 - x \neq 0$.

Exemplo 2

Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de

$$y^3 - 3x^2y + x^3 = 11$$

no ponto $(2, 3)$.

Observe que o ponto $(2, 3)$ satisfaz à equação: $3^3 - 3(2^2)3 + 2^3 = 27 - 24 + 8 = 11$.

Admitindo a existência de uma função $y = f(x)$ derivável que satisfaça a equação, podemos obter sua derivada por derivação implícita.

$$\begin{aligned}
&y^3 - 3x^2y + x^3 = 11\\
&3y^2\frac{dy}{dx} - 3\left(2xy + x^2\frac{dy}{dx}\right) + 3x^2 = 0\\
&3y^2\frac{dy}{dx} - 6xy - 3x^2\frac{dy}{dx} + 3x^2 = 0\\
&\frac{dy}{dx}\left(3y^2 - 3x^2\right) = 6xy - 3x^2\\
&\frac{dy}{dx} = \frac{6xy - 3x^2}{3y^2 - 3x^2} = \frac{2xy - x^2}{y^2 - x^2}
\end{aligned}$$

Portanto, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy - x^2}{y^2 - x^2}$ é a derivada de $f(x)$ para os pontos onde $y^2 - x^2 \neq 0 \implies y \neq \pm x$.

Para o ponto $(2,3)$, obtemos:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = \frac{2\cdot 2\cdot 3 - 2^2}{3^2 - 2^2} = \frac{8}{5}$$

Portanto, a reta tangente em $x = 2$ tem coeficiente angular $\frac{8}{5}$. A equação da reta é $y = \frac{8}{5}x + b$ e passa por $(2,3)$, logo $3 = \frac{8}{5}\cdot 2 + b \implies b = -\frac{1}{5}$. A reta tangente tem equação

$$y = \frac{8}{5}x - \frac{1}{5}$$

Exemplo 3

Encontre a equação da reta tangente à hipérbole $xy = 1$ passando pelo ponto (u,v), em que (u,v), $u \neq 0$ é um ponto qualquer da hipérbole.

$$xy = 1 \implies y + x\frac{dy}{dx} = 0 \implies \frac{dy}{dx} = -\frac{v}{u}\ .$$

O coeficiente angular da tangente é $-v/u$. Logo, a reta tem equação $y = -\dfrac{v}{u}x + b$ e passa pelo ponto (u,v).

Resulta que $v = -\dfrac{v}{u}u + b \implies b = 2v$. Assim, a reta tangente tem equação

$$y = -\frac{v}{u}x + 2v\ .$$

☞ Para Saber Mais - Teorema da função implícita - Clique para ler

11.2 Exercícios

Encontre a derivada $\frac{dy}{dx}$ para a função derivável $y = f(x)$ que satisfaz cada uma das seguintes equações:

1. $xy + y^2 = 1$

2. $y^3 + xy^2 + y = 3$

3. $x^2 - y^2 = 1$

4. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$

5. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

Seja $y = f(x)$ uma função derivável que satisfaz cada uma das equações abaixo. Ache a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto P indicado.

7. $x^2 + xy + y^2 = 7,\ P = (1, 2)$

8. $x^3 + 2xy + y^2 = 4,\ P = (1, 1)$

9. $\operatorname{sen}(xy) = \frac{\sqrt{2}}{2}x,\ P = (1, \frac{\pi}{4})$

10. Encontre a equação da reta tangente à elipse $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$ passando pelo ponto $(1, 2)$.

11.3 Problemas de taxa de variação

Vimos na Unidade 9 que a velocidade (instantânea) de um objeto é definida por

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

em que $s = s(t)$ é a função posição do objeto. A velocidade mede a taxa de variação (instantânea) da posição do objeto com o tempo.

De maneira geral,

Definição 4
Taxa de variação

Se x e y são duas grandezas sujeitas a uma relação funcional $y = y(x)$, então a *taxa de variação* de y em relação a x é a derivada $\dfrac{dy}{dx}$.

Outro exemplo de taxa de variação é a aceleração, definida por

$$a = a(t) = \frac{dv}{dt}\,.$$

Na próxima seção iremos deduzir e aplicar as equações do movimento linear de aceleração constante.

Em algumas aplicações do cálculo, temos duas ou mais grandezas relacionadas entre si e devemos calcular a taxa de variação das grandezas. Como as grandezas estão relacionadas, usando derivação implícita ou, algumas vezes, regra da cadeia, podemos calcular a taxa de variação de uma delas em função da(s) outra(s). Tais problemas são conhecidos como *problemas de taxas relacionadas*.

Vejamos alguns exemplos de problemas de taxas relacionadas.

Exemplo 5

Um quadrado se expande de tal maneira que seu lado aumenta à razão de 5 m/s. Calcule a taxa de variação da área no instante em que a lado do quadrado mede 10 m.

Seja $l = l(t)$ o lado do quadrado. Note que o lado varia com o tempo, sendo $\frac{dl}{dt} = 5$ m/s sua taxa de variação.

A área é dada por $A(l) = l^2$. Vamos obter a taxa de variação de A usando a regra da cadeia:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dl}\frac{dl}{dt} = 2l\,.\,5 = 10l$$

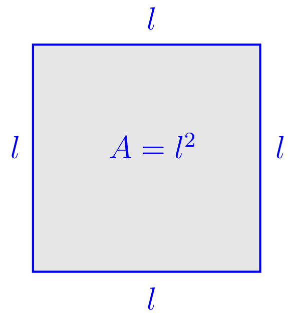


Figura 11.1: Quadrado de lado l

Portanto, no instante em que $l = 10$, temos

$$\frac{dA}{dt} = 10.10 = 100\ m^2/s\ .$$

Logo, a taxa de variação da área é $100\ m^2/s$.

Exemplo 6

Uma escada de 5 m está recostada em uma parede. A base da escada escorrega, afastando-se da parede a uma velocidade de 6 cm/s. Com que velocidade o topo da escada cai no momento em que a base da escada dista 3 m da parede?

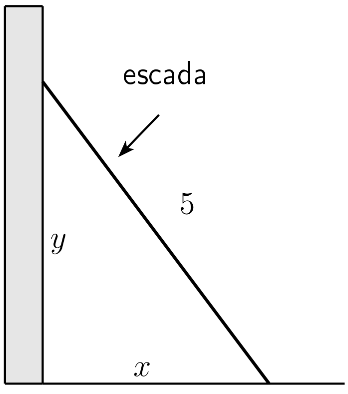


Figura 11.2:

As grandezas x e y estão relacionadas pelo teorma de Pitagóras $x^2+y^2 = 25$.

Considerando $x = x(t)$ e $y = y(t)$ e derivando em relação ao tempo, temos:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} &= 0 \\ y\frac{dy}{dt} &= -x\frac{dx}{dt} \end{aligned} \tag{11.1}$$

Basta, agora, substituir os valores para obter $\frac{dy}{dt}$. Temos $\frac{dx}{dt} = 6\ cm/s$ e $x = 3\ m = 300\ cm$. Como $x^2 + y^2 = 25$, então $9 + y^2 = 25 \implies y = 4\ m = 400\ cm$. Resulta em

$$400\frac{dy}{dt} = -300\frac{dx}{dt} = -300 \cdot 6 = -1800 \implies \frac{dy}{dt} = -4{,}5 \text{ cm/s}$$

O resultado negativo indica que y diminui, ou seja, a escada cai. Observe que tivemos que converter os comprimentos dados em metros para centímetros pois a taxa de variação de x estava dada em cm/s.

Portanto, a velocidade de queda do topo da escada quando $x = 3\ m$ é $4,5$ cm/s.

Voltemos agora à equação 11.1. Podemos escrever a equação como

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

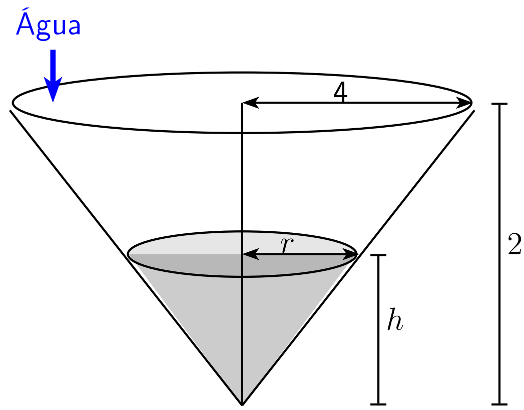
Se a escada cai de forma que $\frac{dx}{dy} = 6$ cm/s é constante, temos que x cresce até no máximo $x = 5$ m, que é o comprimento da escada. No entanto, y diminui até chegar a zero quando a escada está na horizontal. A fórmula 11.1 mostra que $\frac{dy}{dt} \to \infty$ quando $y \to 0$, o que revela apenas que é fisicamente impossível que uma escada caia de forma que $\frac{dx}{dt}$ seja constante até o final da queda.

Exemplo 7

Um tanque tem a forma de um cone invertido, tendo altura de 20 m e raio de 4 m. A água está fluindo para dentro do tanque a uma taxa de 2 m^3/min. Quão rápido se eleva o nível de água no tanque quando a água estiver com 5 m de profundidade?

Conforme a água enche o tanque, a parte cheia forma um cone de raio r e altura h. Por semelhança de triângulos, temos

$$\frac{r}{4} = \frac{h}{20} \implies r = \frac{h}{5}$$



O volume de água na parte cheia é $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, substituindo $r = \frac{h}{5}$, obtemos:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{h}{5}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{75}$$

Derivando esta última expressão em relação à variável t, obtemos:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{3\pi h^2}{75}.\frac{dh}{dt} = \frac{\pi h^2}{25}\frac{dh}{dt} \implies \frac{dh}{dt} = \frac{25}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}$$

Observe que $\frac{dV}{dt}$ é a taxa de aumento do volume, ou seja, é o fluxo de água que entra, que é 2 m^3/min. Portanto, quanto $h = 5$, temos

$$\frac{dh}{dt} = \frac{25}{25\pi}2 = \frac{2}{\pi} \text{ m/min} \approx 0,64 \text{ m/min}.$$

Exemplo 8

Um cilindro é comprimido lateralmente e, ao mesmo tempo, alongado, de forma que o raio da base decresce a uma taxa de 4 cm/s e a altura do cilindro aumenta a uma taxa de 5 cm/s. Encontre a taxa de variação do volume do cilindro quando o raio da base mede 6 cm e a altura 8 cm.

O volume do cilindro é dado por $V = \pi r^2 h$, em que $r = r(t)$ é o raio da base e $h = h(t)$ é a altura do cilindo. Derivando esta fórmula, obtemos:

$$\frac{dV}{dt} = \pi\left(2r\frac{dr}{dt}h + r^2\frac{dh}{dt}\right) = 2\pi r h\frac{dr}{dt} + \pi r^2\frac{dh}{dt}$$

Substituindo agora os valores $r = 6$, $h = 8$, $\frac{dr}{dt} = -4$ e $\frac{dh}{dt} = 5$, obtemos:

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi \cdot 6 \cdot 8 \cdot (-4) + \pi \cdot 6^2 \cdot 5 = \pi(-384 + 180) = -204\pi$$

Portanto, o volume do cilindro diminui a uma taxa de 204π cm^3/min ≈ 640.56 cm^3/min.

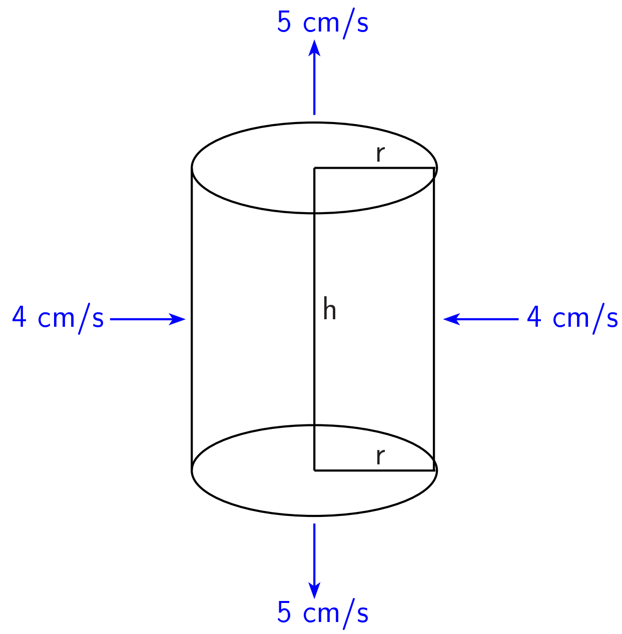


Figura 11.3: Cilindro sendo alongado e comprimido lateralmente

Exemplo 9 Um objeto se move no eixo x das abscissas de modo que sua posição x metros no instante t segundos é dada por $x(t) = 1 + t + t^3$. Encontre sua velocidade e aceleração em função do tempo.

A velocidade é dada $v = \dfrac{dx}{dt}$, logo

$$v = \frac{d}{dt}(1 + t + t^3) = 1 + 3t^2 \text{ m/s} .$$

A aceleração é dada por

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(1 + 3t^2) = 6t \text{ m/s}^2 .$$

Exemplo 10 Um objeto se move no eixo x das abscissas de modo que sua posição x em metros no instante t segundos é dada por

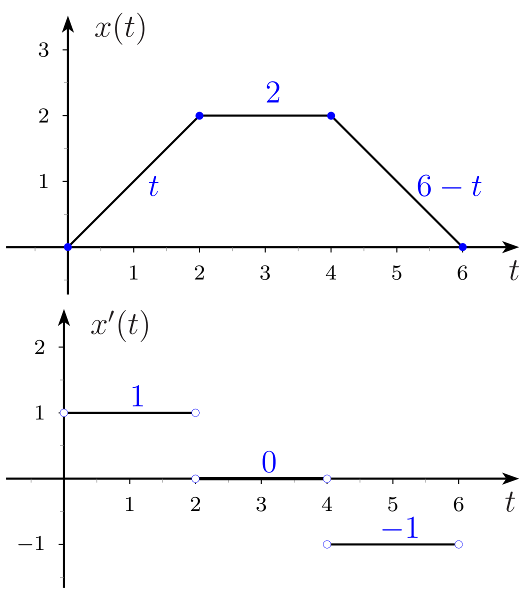
$$x(t) = \begin{cases} t \text{ se } 0 \le t < 2 \\ 2 \text{ se } 2 \le t < 4 \\ 6 - t \text{ se } 4 \le t \le 6 \end{cases}$$

Determine a velocidade do objeto. Faça um gráfico.

A função $x = x(t)$ é derivável em todo o intervalo $(0, 6)$, exceto nos ponto $t = 2$ e $t = 4$, já que nestes pontos as tangentes à curva à direita e à esquerda não coincidem. Excluindo estes pontos, temos as derivadas:

$$x'(t) = \begin{cases} 1 \text{ se } 0 < t < 2 \\ 0 \text{ se } 2 < t < 4 \\ -1 \text{ se } 4 < t < 6 \end{cases}$$

Portanto, o objeto saiu de $x = 0$ em $t = 0$, se deslocou com velocidade constante igual a 1 até chegar em $x = 2$ em $t = 2$; ficou parado entre $t = 2$ e $t = 4$ e, a partir de $t = 4$, voltou para a origem com velocidade constante igual a -1. Compare os gráficos de $x(t)$ e $x'(t)$ a seguir:



Exemplo 11

Dois carros se deslocam em estradas perpendiculares, um para o norte com velocidade média de 48 km/h e o outro para o leste, com velocidade média de 60 km/h. O segundo carro passou pelo cruzamento das estradas 2 horas depois do primeiro. Determine a taxa de variação da distância entre os carros 3 horas após o segundo carro passar pelo cruzamento.

Sejam y a distância do carro A, que vai para o norte, ao ponto de cruzamento O e x a distância do carro B, que vai para leste, ao ponto de cruzamento O. Seja l a distância entre os carros, como representado na Figura 11.4.

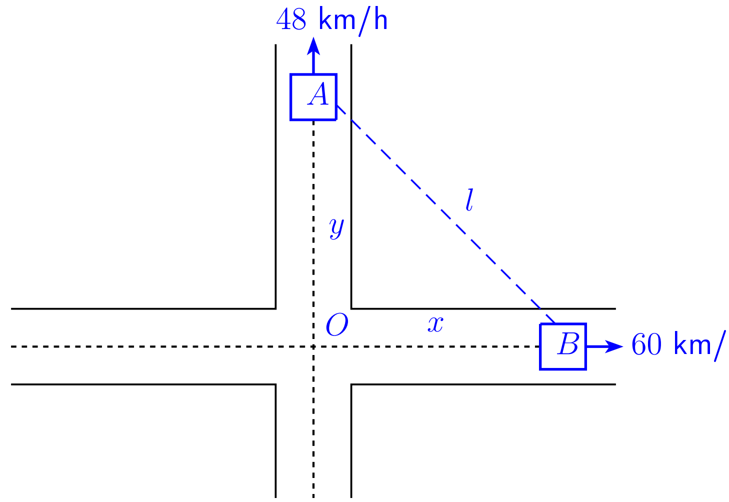


Figura 11.4: Qual a taxa de variação da distância entre os carros?

Três horas após o segundo carro passar pelo cruzamento, o primeiro terá se deslocado 5 horas após passar por O. A distância de A até O é, portanto:

$$y = v_A \cdot \Delta t = 48 \cdot 5 = 240\ km/h\ .$$

Neste mesmo instante, o carro b terá se deslocado por 3 horas após passar pelo cruzamento, logo a distância de B até O é

$$x = v_B \cdot \Delta t = 60 \cdot 3 = 180\ km/h\ .$$

Pelo Teorema de Pitágoras, $l^2 = x^2 + y^2$, em que l é a distância entre os carros. No momento em que $x = 180$ e $y = 240$, o valor de l é $l^2 = 180^2 + 240^2 = 90000 \implies l = 300$.

Derivando a expressão $l^2 = x^2 + y^2$ e substituindo os valor de $l, x, y, \frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$, obtemos

$$\begin{aligned} l^2 &= x^2 + y^2 \\ 2l\frac{dl}{dt} &= 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \\ \frac{dl}{dt} &= \frac{1}{l}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) \\ \frac{dl}{dt} &= 74\ km/h \end{aligned}$$

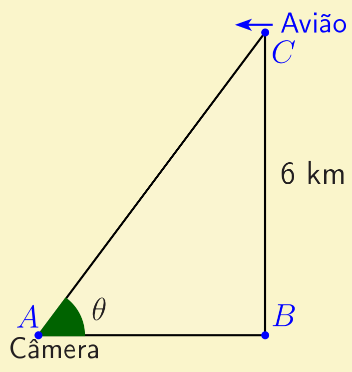
11.4 Exercícios

1. Um círculo possui raio inicial de 1 m e começa a crescer de tal forma que sua área aumenta a uma taxa de 10 $\mathrm{cm}^2/\mathrm{min}$. Encontre a taxa de variação do raio do círculo quando seu raio mede 5 cm.

2. Um balão esférico perde ar por um furo de tal forma que seu raio diminui a uma taxa de 2 cm/min. Qual a taxa de diminuição do volume, quando o raio do balão é $r = 50$ cm?

3. Uma escada de 5 metros de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Sabendo-se que o pé da escada se afasta da parede a uma velocidade de 10 cm/s, qual a velocidade com que cai verticalmente o topo da escada?

4. Um avião voa a 800 km/h em relação ao solo, mantendo uma altura constante de 6 km. Uma câmera montada no solo aponta para o avião. Seja θ o ângulo de elevação da câmera em relação ao solo. No instante em que $\theta = \frac{\pi}{6}$, qual a velocidade com que a câmera deve rodar para que continue apontando para o avião, sabendo-se que este se aproxima da câmera.



5. Um tanque com a forma de um cone invertido tem altura igual a 5 e raio do topo igual 2 m. Se o tanque se enche a uma taxa de 1 m^3/s, determine a a taxa de aumento no nível de água quando está com profundidade de 2 m.

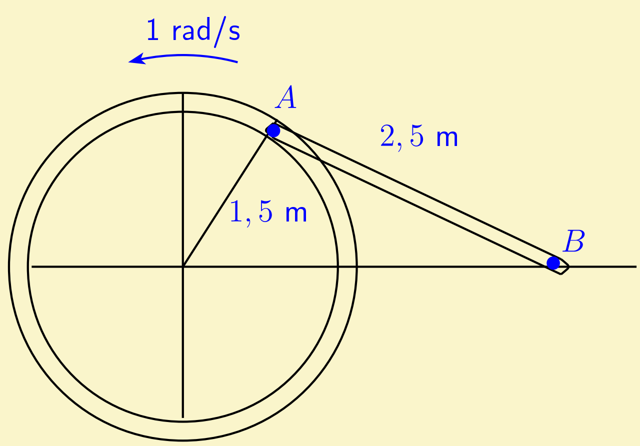
6. Um homem de 2 m de altura se move em direção a um a poste de luz a uma velocidade de 5 m/s. Do alto deste poste, uma lâmpada ilumina o homem e projeta uma sombra. Quando a distância entre o homem e o poste é de 4 m:

(a) Com que velocidade a ponta da sobra se move?

(b) Qual a taxa de variação do comprimento da sombra?

7. Um peixe mordeu a isca e começa a ser puxado pelo pescador. Este diminui a linha a uma taxa de 30 cm/min, mas o peixe permance na superfície da água. Se o pescador mantén a ponta da vara de pesca a uma altura de 2 m e o peixe está a uma distância de 4 m do barco, com que velocidade se aproxima do barco? Qual a taxa de variação do ângulo que a linha faz com a superfície da água?

8. Um mecanismo é composto de uma roda de 1,5 m de raio, que gira no sentido anti-horário a uma taxa constante de 1 radiano por segundo. Uma barra metálica de 2,5 m tem uma extremidade A presa à roda. A outra extremidade está presa a uma haste horizontal de forma que pode deslizar livremente ao longo desta haste. Qual a velocidade da extremidade que desliza da barra, quando o ponto A está em sua altura máxima?



11.5 Aproximação linear

Nesta seção veremos uma aplicação da derivada que consiste em estimar o valor de uma função $f(x)$ próximo a uma ponto x_0 usando a reta tangente ao gráfico de f passando por x_0.

Se a função f é derivável em x_0 então a reta tangente ao gráfico de f passando por $(x_0, f(x_0))$ é a reta

$$y = L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

A *aproximação linear* consiste em estimar o valor de $f(x)$, para x próximo de x_0 usando o valor $y = L(x)$. Observe a Figura 11.5.

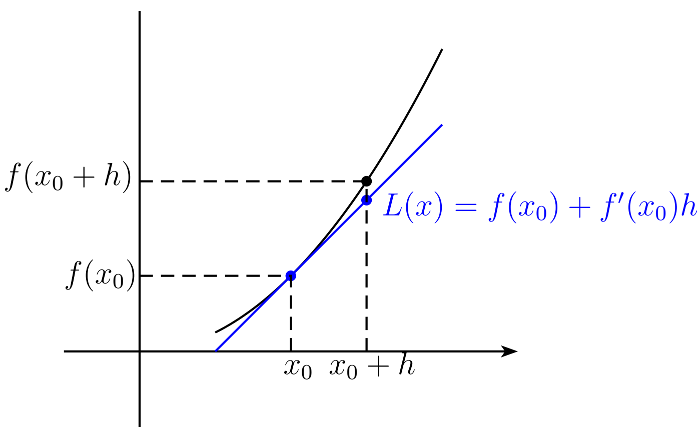


Figura 11.5: Aproximação linear de f

Como a função f é derivável em x_0 então

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)\ .$$

Se

$$R = R(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)$$

então

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \left(f'(x_0) + R(h)\right) h = f'(x_0)h + R(h)h \qquad (11.2)$$

e como f é derivável em x_0:

$$\lim_{h\to 0} R(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

Desprezando o termo $R(h)h$ na equação 11.2, obtemos

$$f(x_0+h)-f(x_0)\approx f'(x_0)h$$

ou, escrevendo $\Delta f=f(x_0+h)-f(x_0)$ e $\Delta x=(x_0+h)-x_0=h$

$$\Delta f\approx f'(x_0)\Delta x$$

Em resumo, para calcular por aproximação linear o valor de $f(x_0+\Delta x)$, usamos a aproximação $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$. Quanto menor Δx, melhor será a aproximação.

Exemplo 12

Calcule o valor aproximada de $\sqrt{102}$.

Se $f(x)=\sqrt{x}$ então sabemos que $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Tomando $x_0=100$ e $\Delta x=2$, temos

$$f(100+\Delta x)\approx f(100)+f'(100)\Delta x$$
$$\sqrt{102}\approx\sqrt{100}+\frac{1}{2\sqrt{100}}\cdot 2=10{,}1$$

O valor correto até a 4^a casa decimal é 10,0995, o que mostra que a aproximação está correta até a 3^a casa decimal.

Exemplo 13

Use aproximação linear para estimar o valor de $\sqrt[3]{65}$.

Como $\sqrt[3]{64}=4$, faremos a aproximação linear em torno de $x_0=4$.

$$f(x)=\sqrt[3]{x}\implies f'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3}\,.$$

Assim,

$$f(65)\approx f(64)+f'(64)\cdot 1=\sqrt[3]{64}+\frac{1}{3}64^{-2/3}=4+\frac{1}{48}=4.021$$

Exemplo 14

Se $y=x^3+x+1$, use a aproximação linear para determinar a variação de y quando x passa de 3 para 3,05.

Temos $\Delta f\approx f'(x_0)\Delta x$. Usando a derivada $f'(x)=3x^2+1$ e fazendo $x_0=3$ e $\Delta x=0,05$,obtemos:

$$\Delta f\approx(3\cdot 3^2+1)\cdot 0{,}05=1{,}4$$

11.6 Exercícios

1. O raio de um círculo foi estimado em $R = 20$ cm, com precisão de $\pm 0{,}1$ cm. Determine a margem de erro no cálculo da área do círculo.

2. Mostre que para h suficiente pequeno vale a aproximação

$$\sqrt{x^2 + h} \approx x + \frac{h}{2x} \; .$$

3. Usando aproximação linear, encontre uma fórmula que aproxima $\sqrt[3]{x^3 + h}$.

4. Estime o valor do seno de 31^o

5. Mostre que aplicando uma fina camada de tinta de espessura h à superfície de uma esfera de superfície S, o volume da esfera aumenta de aproximadamente $S \cdot h$.

11.7 Textos Complementares

Para Saber Mais

Teorema da função implícita

Nos exemplos anteriores, apresentamos uma relação entre x e y e dissemos que a relação *define implicitamente* a função $y = f(x)$. Na verdade, esta afirmação não é trivial. podemos ver esta relação entre x e y como uma função $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em que $F(x, y) = c$, c constante. Para garantir que esta relação define y como função de x, precisamos garantir certas condições para a função F.

O *Teorema da função implícita* estabelece condições suficientes para garantir a existência de função derivável $y = f(x)$ tal que $F(x, f(x) = c$. Como o teorema envolve derivadas parciais, não é apresentado em uma primeira disciplina de Cálculo.

No contexto das funções reais de uma variável que estamos estudando o Teorema pode se enunciado da seguinte maneira:

Teorema 15
Teorema da função implícita

Seja $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real derivável com derivada contínua. Seja $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ um ponto de seu domínio. Suponha que F satisfaça as duas condições a seguir:

$$F(x_0, y_0) = z_0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

Então existem intervalos abertos U e V, com $x_0 \in U$ e $y_0 \in V$ e existe uma única função $f\colon U \to V$ tal que

$$F\left(x, f(x)\right) = z_0, \text{ para todo } x \in U\ .$$

Além disso, esta função f é derivável com derivada contínua e

$$f'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

O símbolo $\frac{\partial F}{\partial y}$, chamado derivada parcial de F em relação a y, é a derivada da expressão na variável y, ou seja, ao derivarmos a função de duas variáveis

$F(x,y)$, consideramos apenas a variável y.

No exemplo 1, a condição $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ fornece:

$$\frac{\partial(y^3 - xy)}{\partial y} = 3y^2 - x \neq 0 \ .$$

Esta mesma condição apareceu naturalmente na expressão de $\frac{dy}{dx}$ encontrada.

No exemplo 2, a condição $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ fornece:

$$\frac{\partial(y^3 - 3x^2y + x^3)}{\partial y} = 3y^2 - 3x^2 \neq 0 \implies y^2 - x^2 \neq 0 \implies y \neq \pm x$$

condição esta que apareceu naturalmente na expressão de $\frac{dy}{dx}$ encontrada.