IFCE - CURSO: Engenharia de Mecatrônica/Licenciatura em Física – 2015-1
Cálculo I

Aplicações da derivada: Limites aplicando L´Hôpital:

Veremos como derivadas são úteis para estudar limites da forma $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{h(x)}$, quando $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ e $\lim\limits_{x\to a} h(x)=0$, ou quando $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} h(x)=\infty$. A idéia principal é que limites indeterminados da forma $\dfrac{0}{0}$ *ou* $\dfrac{\infty}{\infty}$ podem, em geral, ser estudados via uma razão de duas derivadas. Os métodos que aproveitam dessa idéia, descritos abaixo, costumam ser chamados de Regra de Bernoulli-l'Hôpital.

Se $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ assume a forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$ e $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=L\in\Re$ então $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$

As formas indeterminadas são: $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, $\infty - \infty$, 1^{∞}, 0^{∞}, ∞^{0}

Ex.: 1)Encontre

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} \qquad \lim_{x\to 1}\ln x=\ln 1=0 \qquad \lim_{x\to 1}(x-1)=0$$

Podemos aplicar a Regra de L'Hôspital

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1/x}{1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=1$$

2) Calcule

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x$$

O limite dado é indeterminado, pois, como $x \to 0^+$, o primeiro fator (x) tende a 0, enquanto o segundo fator ($\ln x$) tende $-\infty$ .Escrevendo $x = 1/(1/x)$, temos $1/x \to \infty$ quando $x \to 0^+$. Assim aplicando L´Hopital, teremos:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

3)A corrente I no instante t de um circuito elétrico, consistindo de uma força eletromotriz V, um resistor R e um indutor L é dada por $I=\dfrac{V}{R}(1-e^{-\left(\frac{Rt}{L}\right)})$. Se L é a única variável independente, determine $\lim\limits_{L\to 0^+} I$.

$$\lim_{L\to 0^+} I=\lim_{L\to 0^+}\frac{V}{R}(1-e^{-\left(\frac{Rt}{L}\right)})=\frac{V}{R}(1-\lim_{L\to 0^+} e^{-\left(\frac{Rt}{L}\right)})=\frac{V}{R}(1-0)=\frac{V}{R}$$

$$I=\frac{V}{R} \text{ (Lei de Ohm)}$$

Se R é a única variável independente, determine $\lim\limits_{R\to 0^+} I = V\lim\limits_{L\to 0^+}\dfrac{1-e^{-\left(\frac{Rt}{L}\right)}}{R}$.

Temos que $\lim\limits_{R\to 0^+} I = V \lim\limits_{L\to 0^+} \frac{1-e^{-\left(\frac{Rt}{L}\right)}}{R} = V \lim\limits_{L\to 0^+} \frac{0-e^{-\left(\frac{Rt}{L}\right)}\left(-\frac{t}{L}\right)}{1} = V\,[\,0-(1).\left(-\frac{t}{L}\right)] = \frac{Vt}{L}$

Ache os limites :

1) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2}{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2}$ = -3

2) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$ =3

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x^2}$ não existe

4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{5x^3} = 1/15$

5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{\sqrt{x - \pi/2}}$ = 0

6) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}\, x - x}{x - \mathrm{sen}\, x}$ =2

7) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = -1/2$

8) $\lim\limits_{x\to 2+} \frac{\ln(x-2)}{\ln(e^x - e^2)}$ = 1

9) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1}$

10) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x = 0$

11) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{e^x}$

12) $\lim\limits_{x\to +0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cossec} x}$

13) $\lim\limits_{x\to \pi/4} (1 - \mathrm{tg}x)\sec 2x$

14) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{sen} x}\right)$

15) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx}$

16) $\lim\limits_{x\to 0} [(\tan x)]^x$

17) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x - e^x)$

18) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x - \ln(1 + 2e^x))$

19) $\lim_{x\to 0^+} \mathrm{sen}x \,.\, \ln x$

20) $\lim_{x\to 0} (\cos 3x)^{5/x}$

22) Mostre que $\lim\limits_{x\to +0} (1+x)^{1/x} = e$

23)Se um montante inicial de dinheiro A_0 for investido a uma taxa de juros i composta n vezes ao ano, o valor

do investimento após t anos será $A = A_0(1 + \frac{i}{n})^{nt}$. Se fizermos $n \to \infty$, chamamos isso juros compostos continuamente. Use a regra de L´Hôspital para mostrar que se os juros forem compostos continuamente, então o montante após n anos será $A = A_0 e^{it}$