10 → 2
x → 1,7

8,5

$8 \times 0,2 = 1,6$
$1 \times 0,1 = 0,1$

1,7

IFCE

Álgebra Linear - Computação

Semestre 2018.1-Avaliação N1

Aluno: Francisco Lucas Lima da N. Data: 13/04/17

Prof.:Valberto Feitosa

01- Defina e exemplifique :

a) Um espaço vetorial.

b) O Ker de uma tranformação linear.

c) A Base de um Espaço Vetorial.

d) Uma Tranformação Linear.

02- Mostre que os polinômios $1-t^3$, $(1-t)^2$, $1-t$ e 1 geram o espaço dos polinômios de grau ≤ 3.

03- Sejam $B_1 = \{(1,0),(0,2)\}$, $B_2\{(-1,0),(1,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ construir as matrizes mudança de base: $M_{B_1}^{B_2}$ e $M_{B_2}^{B_1}$.

04- Os Vetores $v = (1,2,3)$, $w = (9,-1,5)$ e $u = (1,0,0)$ formam uma base para $\mathbb{R}^3$? Justifique sua resposta.

05- Sejam V o espaço das matrizes 2×2 sobre $\mathbb{R}$, e seja W o subespaço gerado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontre uma base, e a dimensão de W.

06 - Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida da seguinte maneira:

$$T(x,y) = (2x, 0, x+y)$$

Mostre que T é uma transformação linear.

07 - Qual é a tranformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que: $T(1,0) = (2,-1,0)$ e $T(0,1) = (0,0,1)$

08 - Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(x,y,z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$$

Determine a matriz de T na base canonica

09 - Ache a transformação liner T do plano no plano que é uma reflexão em torno da reta $x = y$.

10 - Seja P_3 = conjunto dos polinômios com grau menor ou igual a 3, e

$$T : P_3 \longrightarrow P_3$$

$$f \longrightarrow f'$$

Determine o Ker$T$ e ImT e encontre uma base para cada um destes subespaços

01)

a) Conjunto de vetores que satisfazem as seguintes propriedades:

I. $u+(v+w)=(u+v)+w$

II. $u+v=v+u$

III. $u+(-u)=0$

IV. $0+u=u$

V. $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$

VI. $\beta(u+v)=\beta u+\beta v$

VII. $(\alpha\beta)u=\alpha(\beta u)$

VIII. $1u=u$

Ex: $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial, pois satisfaz todas as propriedades citadas

b) Um vetor v pertence a Ker T se, dada uma transformação linear T, $T(v)=0$. Logo, Ker T é um conjunto de vetores que satisfaz a condição.

c) Dado um conjunto $\beta=\{v_1,\dots v_n\}$, β é base de um espaço vetorial se satisfazer as condições:

I. $v_1,\dots,v_n$ é linearmente independente

II. $[v_1,\dots,v_n]$ gera o espaço vetorial

d) Seja T uma transformação. $T:V\to W$. T é linear se:

I. $T(a+b)=T(a)+T(b)$

II. $T(\alpha a)=\alpha T(a)$

Sendo $a,b\in V$ e $\alpha\in\mathbb{R}$.

02) $1-t^3,\ (1-t)^2,\ 1-t,\ 1$

$$ax^3+bx^2+cx+d = a'(1-t^3)+b'(1-t)^2+c'(1-t)+d'1$$

$$ax^3+bx^2+cx+d = a'-a't^3+b'-2b't+b't^2+c'-c't+d'$$

$$ax^3+bx^2+cx+d = -a't^3+b't^2-2b't-c't+a'+b'+c'+d'$$

$$ax^3+bx^2+cx+d = -a't^3+b't^2+(-2b'-c')t+a'+b'+c'+d'$$

$$\begin{cases} -a' = a \Rightarrow a' = -a \\ b' = b \\ -2b'-c' = c \quad \Rightarrow -2b-c' = c \\ a'+b'+c'+d' = d \qquad c' = -2b-c \end{cases}$$

$$-a+b-2b-c+d' = d$$

$$d' = a+b+c+d$$

Logo, os polinômios gera P_3.

03) $B_1 = \{(1,0),(0,2)\}$ $\qquad M_{B_1}^{B_2}$ e $M_{B_2}^{B_1} = ?$

$B_2 = \{(-1,0),(1,1)\}$

Para $M_{B_1}^{B_2}$, escrevemos os vetores de B_1 como combinação linear dos vetores de B_2

$$(1,0) = a_{11}(-1,0)+a_{21}(1,1)$$

$$(1,0) = (-a_{11}+a_{21},\ a_{21})$$

$$\begin{cases} -a_{11}+a_{21} = 1 \\ a_{21} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = -1 \\ a_{21} = 0 \end{cases}$$

$$(0,2) = a_{12}(-1,0)+a_{22}(1,1)$$

$$(0,2) = (-a_{12}+a_{22},\ a_{22})$$

$$\begin{cases} -a_{12}+a_{22} = 0 \\ a_{22} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{12} = 2 \\ a_{22} = 2 \end{cases}$$

Logo,

$$[M]_{B_1}^{B_2} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Para $M_{B_2}^{B_1}$, escrevemos os vetores de B_2 como combinação linear dos vetores de B_1.

$(-1,0) = a_{11}(1,0) + a_{21}(0,2)$

$(-1,0) = (a_{11}, 2a_{21})$

$\begin{cases} a_{11} = -1 \\ 2a_{21} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = -1 \\ a_{21} = 0 \end{cases}$

$(1,1) = a_{12}(1,0) + a_{22}(0,2)$

$(1,1) = (a_{12}, 2a_{22})$

$\begin{cases} a_{12} = 1 \\ 2a_{22} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{12} = 1 \\ a_{22} = 1/2 \end{cases}$

Logo,

$[M]_{B_2}^{B_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

04) $v = (1,2,3)$, $w = (9,-1,5)$ e $u = (1,0,0)$

Dado um vetor $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ arbitrário,

$(x,y,z) = a(1,2,3) + b(9,-1,5) + c(1,0,0)$

$(x,y,z) = (a+9b+c,\ 2a-b,\ 3a+5b)$

$\begin{cases} a+9b+c = x \\ 2a-b = y \quad (\cdot 3) \\ 3a+5b = z \quad \times(-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+9b+c = x \\ 6a-3b = 3y \\ -6a-10b = -2z \end{cases}$

$+\begin{cases} 6a-3b = 3y \\ -6a-10b = -2z \end{cases}$

$-13b = 3y - 2z$

$b = \dfrac{2z-3y}{13}$

$-2a - \left(\dfrac{2z-3y}{13}\right) = y$

$-2a - \dfrac{2z}{13} + \dfrac{3y}{13} - y = 0$

$-\dfrac{2z}{13} - \dfrac{10y}{13} = 2a \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-2z-10y}{13}\right)$

$a = \dfrac{-z-5y}{13}$

$\dfrac{-z-5y}{13} + 9\left(\dfrac{2z-3y}{13}\right) + c = x$

$\dfrac{-z-5y}{13} + \dfrac{18z-27y}{13} - x = -c$

$c = \dfrac{z+5y}{13} - \dfrac{18z+27y}{13} + x = x - \dfrac{17z+32y}{13}$

Logo, os vetores geram $\mathbb{R}^3$.

São L.I??

Verificando se são L.I.

$$a(1,2,3)+b(9,-1,5)+c(1,0,0)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases} a+9b+c=0 \\ 2a-b=0 \\ 3a-5b=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a-b=0 \quad (\times -5) \oplus \\ 3a-5b=0 \end{cases} \sim \begin{cases} 2a-b=0 \\ -2a=0 \Rightarrow a=0 \end{cases}$$

$$b=0$$

$$c=0$$

Logo, os vetores são L.I. E portanto, $\{v_1, v_2, v_3\}$ é base do $\mathbb{R}^3$.

05) $W: \left[\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \right]$

Verificamos que $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$. Por isso, retiramos a matriz do gerador, sobrando $\left[\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \right]$.

Agora, verificando se os vetores são L.I.:

$$a\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ -5a+b-7c=0 \\ -4a-b-5c=0 \\ 2a+5b-c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ 4b-2c=0 \\ 3b-c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4b-2c=0 \\ 3b-c=0 \quad \times(-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4b-2c=0 \\ -6b+2c=0 \end{cases}$$

$-2b=0 \Rightarrow b=0$

$c=0$

$a=0$

Logo, as matrizes são L.I e, portanto, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é base para W.

$\dim W = 3$

06) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$T(x,y) = (2x, 0, x+y)$

I) $T(x,y) = (2x, 0, x+y)$

$T(a,b) = (2a, 0, a+b)$

$T[(x,y)+(a,b)] = T(x+a, y+b)$

$T(x+a, y+b) = (2x+2a, 0, x+a+y+b)$

$= (2x, 0, x+y) + (2a, 0, a+b)$

$T[(x,y)+(a,b)] = T(x,y) + T(a,b)$

II) $T[\alpha(x,y)] = T(\alpha x, \alpha y) = (2\alpha x, 0, \alpha x + \alpha y)$

$= \alpha(2x, 0, x+y)$

$= \alpha \cdot T(x,y)$

Logo, T é transformação linear.

07) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$T(1,0) = (2,-1,0)$

$T(0,1) = (0,0,1)$

Dado (x,y) arbitrário:

$(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$

$T(x,y) = xT(1,0) + yT(0,1)$

$T(x,y) = x(2,-1,0) + y(0,0,1)$

$T(x,y) = (2x, -x, y)$

08) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$T(x,y,z) = (2x+y-z, 3x-2y+4z)$

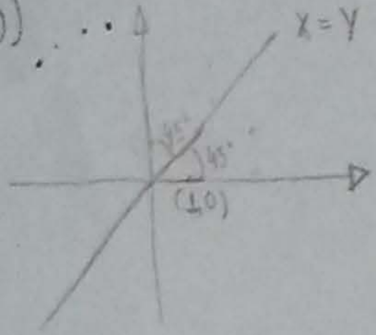
$T(1,0,0) = (2\cdot 1+0-0, 3\cdot 1-2\cdot 0+4\cdot 0) = (2,3) = 2(1,0)+3(0,1)$

$T(0,1,0) = (2\cdot 0+1-0, 3\cdot 0-2\cdot 1+4\cdot 0) = (1,-2) = 1(1,0)-2(0,1)$

$T(0,0,1) = (2\cdot 0+0-1, 3\cdot 0-2\cdot 0+4\cdot 1) = (-1,4) = -1(1,0)+4(0,1)$

Logo, $[T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

09)



Pela reflexão em torno da reta $y = x$,

$T(1,0) = (0,1)$ e

$T(0,1) = (1,0)$

Dado (x,y) arbitrário:

$(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$

$T(x,y) = x(0,1) + y(1,0)$

$T(x,y) = (y,x)$

10) $T: P_3 \rightarrow P_3$

$f \rightarrow f'$

$\text{Ker } T = \{ax^3 + bx^2 + c \mid T(ax^3+bx^2+c) = 0\}$

$T(ax^3+bx^2+c) = 0$

$3ax^2 + 2bx = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$

$\begin{cases} 3a = 0 \\ 2b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

KerT = { P(x) = constante }

Logo, $\text{Ker } T = \{0\}$

$\text{Im } T = \{ax^3+bx^2+c \mid T(ax^3+bx^2+c) = 3ax^2 + 2bx\}$

Logo, $\text{Im } T = \{0 \cdot 3x^3 0^2 x 0^0\} = \{3ax^2 + 2bx\}$