IFCE – 2009-2 - ENGENHARIAS
Cálculo Diferencial e Integral – Prof. Fernando

1. Usando a definição da derivada de uma função y=f(x) , calcule as derivadas das funções abaixo.

a) $f(x)=\sqrt{x}$ (R.: $1/2\sqrt{x}$) b) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ (R.: $-1/x^2$) c) $f(x)=x^2+2x$ (R.:2x+2)

d) $f(x)=x^3+x$ (R.:$3x^2+1$) e) $f(x)=1-4x^2$ (R.:-8x) f) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ (R.: $-\dfrac{1}{(x+2)^2}$) g) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ (R.: $1/3\sqrt[3]{x^2}$)

2. Encontre a equação das retas tangentes às curvas, nos casos abaixo:

a) $f(x)=\sqrt{x}$, no ponto em que $x_0=4$.

b) $f(x)=x^2+2x$, no ponto em que $x_0=1$.

c) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, no ponto em que $x_0=1$.

4.Ache uma equação de cada uma das retas normais à curva $y=x^3-4x$ que sejam paralelas à reta $x+8y-8=0$ (Resp.: $x+8y+2=0$ e $x+8y-2=0$)

5. Ache uma equação de cada uma das retas que passa pelo ponto (2 ; 5) que sejam tangentes à curva $y=2x^2-1$

6.Determinar a equação da reta tangente à parábola f (x) = $-x^2$ em P (1 , -1)

7.Obtenha a equação da tangente à parábola $y=2x-x^2$ em P (2 , 0)

8. Seja $y=x^2+1$

a) Ache a taxa de variação média de y em relação a x no intervalo [3, 5]
b) Ache a taxa de variação instantânea de y em relação a x no ponto x = -4
c) Ache a taxa de variação instantânea de y em relação a x num ponto genérico $x=x_o$

9. A parábola $y=2x^2-13x+5$ tem alguma tangente cujo coeficiente angular seja -1 ? Se tem, encontre uma equação para a reta e o ponto de tangência. Se não tem, por que não ? Reta.: y = -x – 13 Ponto (3, -16)

10. Alguma tangente à curva $y=\sqrt{x}$ cruza o eixo x em x = -1 ? Se cruza, encontre uma equação para a reta e o ponto de tangencia. Se não cruza, por que não ? R.: sim, possui reta tangente que cruza sendo 2y = x + 1 Ponto (1,1)

11)Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)=x^3+3x$ que é paralela à reta $y=6x-1$
R.: $y=6x-2$ e $y=6x+2$

12. Uma partícula se move sobre uma linha reta de acordo com a equação $s=\sqrt{t}$, sendo s a distância em metros da partícula ao seu ponto de partida em t segundos.

a) Calcule a velocidade média da partícula de $t=9$ até $t=16$. Vel. Inst. $=\dfrac{1}{6}$ m/s

b) Calcule a velocidade instantânea da partícula quando $t=9$. *Vel. Inst.* $=\frac{1}{6}\,m/s$

13.Um projétil é lançado verticalmente para cima e está a s metros do solo, t segundos depois do lançamento, sendo $s=256t-16t^2$. Calcule:

a) A velocidade do projétil 4 segundos após o lançamento. $v=128\,m/s$;
b) O tempo necessário para o projétil atingir a altura máxima. $t=8s$;
c) A altura máxima atingida pelo projétil. $s=1024\,m$

14.Um móvel está a $16t^{3/2}-24t+16$ quilômetros a leste de uma parada no instante t (horas).

a) Qual é a velocidade no instante $t=\dfrac{1}{4}$ e qual é o sentido do movimento?

b) Onde está o móvel quando a velocidade é zero?

15. Uma pedra atirada verticalmente para cima na superfície da lua com velocidade de 24m/s (cerca de 86km/h)atinge uma altura de $s=24t-0{,}8t^2$ metros em t segundos.

a) Qual é a altura atingida pela pedra ?
b) Qual é a velocidade e a aceleração da pedra no instante t (nesse caso a aceleração é a da gravidade na lua) .
c) Quanto tempo leva a pedra para atingir metade de sua altura máxima ? .
d) Quanto tempo a pedra fica no ar ? .
e) Quanto tempo a pedra leva para atingir o ponto mais alto ?

16.Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)=x^3+3x$ que é paralela à reta $y=6x-1$

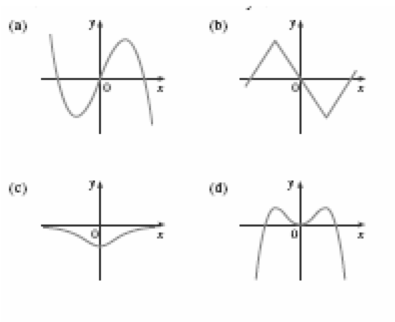
R.: $y = 6x - 2$ e $y = 6x + 2$

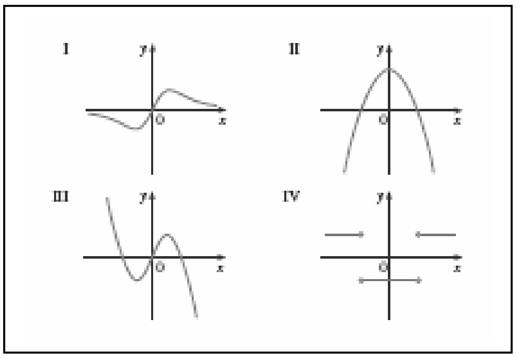
17. Determine a função polinomial y = f(x) que satisfaz a condição $y + y' = 2x^2 + 5x + 4$

18. Seja a função f definida por $f(x) = |1 - x^2|$
 a) Faça um esboço gráfico de f
 b) prove que f é contínua em 1
 c) determine se f é derivável em 1

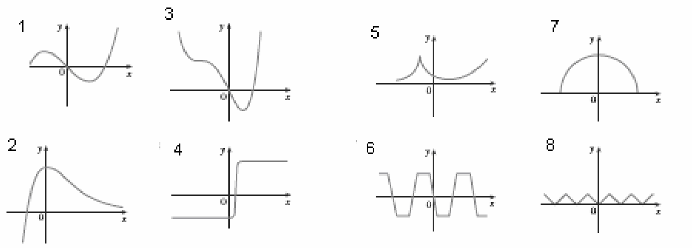
19. Ache uma equação de cada uma das retas normais à curva $y = x^3 - 4x$ que sejam paralelas à reta $x + 8y - 8 = 0$

20)De acordo com os gráficos abaixo da função f relacione com os gráficos abaixo de suas derivadas:





21) Apresenta os gráficos das funções derivadas dos gráficos abaixo:



22. O gráfico de $y = |x|$ sugere que há um ângulo em $x = 0$, e isso implica que $f(x) = |x|$ não é diferenciável Naquele ponto .
 a) Prove que $f(x) = |x|$ não é diferenciável em $x = 0$, mostrando que o limite da definição não existe naquele ponto.
 b) Ache a fórmula para $f'(x)$ R.: $f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

23. Ache os valores de a e b tais que f seja derivável em 2 se : $f(x) = \begin{cases} ax + b & , \text{ se } x < 2 \\ 2x^2 - 1, & \text{se } 2 \le x \end{cases}$

(a = 8 ; b = - 9)

24.Determine os pontos (a,b) do gráfico da função F definida por $F(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 1$ tais que a reta tangente ao gráfico de F nestes pontos seja paralela ao eixo x. Dê a equação da reta tangente ao gráfico de F nestes pontos.
 R.: pontos: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ e $\left(-\frac{2}{3}, \frac{25}{27}\right)$. retas: $y = -\frac{9}{4}$ e $y = \frac{25}{27}$

25. Ache as condições sobre a, b, c e d para que o gráfico do polinômio $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenha:
 a) exatamente duas retas horizontais
 b) exatamente uma reta horizontal
 c) não tenha tangentes horizontais

26.Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 2}, & x \le -1 \\ x^4 + 2x^2 + 9x + 6, & x > -1 \end{cases}$$

no ponto de abscissa -1. R.: $y = x + 1$

27. Calcule, se existir:

a) $f'(1)$ se $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}, & x\geq 1\\ \dfrac{3-x}{2}, & x<1\end{cases}$ $\quad f'(1)=-\dfrac{1}{2}$ b) $f'(2)$ se $f(x)=|x-1|+|x+2|$ $\quad f'(2)=2$

c) $g'\left(\dfrac{3}{2}\right)$ se $g(y)=\begin{cases}\sqrt{3-2y}, & y\leq \dfrac{3}{2}\\ \sqrt{2y-3}, & y>\dfrac{3}{2}\end{cases}$ não existe d) $f'(3)$ se $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x+3}{x^2+1}, & x<4\\ \dfrac{x-3}{x^2+2}, & x\geq 4\end{cases}$ $\quad f'(3)=-\dfrac{1}{10}$

28.Determine as equações das retas tangentes à curva $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$, que sejam paralelas à reta $y = x$.

29.Uma companhia telefônica quer estimar o número de novas linhas residenciais que deverá instalar em um dado mês. No inicio de janeiro de 1999, a companhia tinha 100.000 assinantes, cada um com 1,2 linha, em média. A companhia estimou o crescimento das assinaturas a uma taxa mensal de 1000. Pesquisando os assinantes existentes, a companhia encontrou que cada um pretendia instalar uma média de 0,01 nova linha telefônica até o final de janeiro. Estime o número de novas linhas que a companhia deverá instalar até o final de janeiro de 1999, calculando a taxa de crescimento das linhas no começo do mês.

30. Encontre $\dfrac{dy}{dx}$ em a) $f(x) = (x^3 + x^2).\text{sen } x$ R.: $f'(x) = (3x^2 + 2x)$ sen x + $(x^3 + x^2)$. cos x

b) $y=\dfrac{\text{senx}}{\sqrt{x}}$ R.: $y'=\dfrac{2x\cos x - senx}{2x\sqrt{x}}$ c)f(x) = tx x R.: $f'(x) = \sec^2 x$ d) y = cossec x y´= - cossec x . cotg x

31. Ache uma função $y = a x^2 + bx + c$ cujo gráfico tem um intercepto x de 1, um intercepto y de -2 e tem uma reta com inclinação de -1 no intercepto y.

32. Encontre os pontos de intersecção do gráfico de $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ com o de sua reta tangente no ponto $\left(a,\dfrac{1}{a^2}\right)$.

‘ R. Resp.: $\left(a,\dfrac{1}{a^2}\right)$ e $\left(-\dfrac{a}{2},\dfrac{4}{a^2}\right)$

33. Sendo $f(x)=\cos x + x^3 + 2$, calcule $f^{(2053)}(x)$.

34.Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função *f* definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+1}{x^2+2}, & x\leq -1\\ x^4+2x^2+9x+6, & x>-1\end{cases}$$ no ponto de abscissa -1.

35.Um objeto move-se ao longo de uma reta de acordo com a equação de movimento $s=3t^2-t^3$ com $t\geq 0$. Faça uma tabela que dê a descrição da posição e movimento da partícula.Mostre o comportamento do movimento numa figura.
Idem para $s(t) = t^3 - 9t^2 + 15t$

36. Mostre que o triângulo formado por qualquer reta tangente ao gráfico de $y = 1/x$, $x > 0$ e pelos eixos coordenados tem uma área de 2 unidades quadradas.

37. Seja $f(x)=\begin{cases}x^2+\dfrac{1}{16}, & x<\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{3}{4}x^2, & x\geq\dfrac{1}{2}\end{cases}$ Determine se f é diferenciável em $\dfrac{1}{2}$,caso seja, encontre o valor da derivada neste ponto.

38. Seja $f(x)=\begin{cases}3x^2, & x\leq 1\\ ax+b, & x>1\end{cases}$ Ache os valores de a e b de tal forma que f seja diferenciável em x = 1.

39. Sendo $f(x) = x^8 - 2x + 3$ ache $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(2+h)-f'(2)}{h}$ Resp. 3584

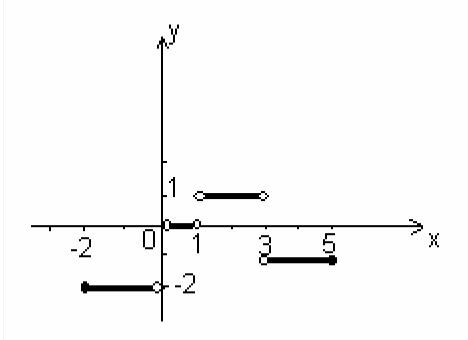
40. Ache $f^{(n)}(x)$ se $f(x) = x^n$

41. Quantas retas tangentes à curva $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ passam pelo ponto (1, 2) ? Em quais pontos essas retas tangentes tocam a curva?

42. Se $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=2$ e $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=1$ encontre $\lim\limits_{x\to a}[f(x).g(x)]$

43.Use as informações a seguir para fazer o gráfico da função f no intervalo fechado [-2, 5].

a) o gráfico de f é composto por segmentos de retas fechados unidos pela extremidade.
b) O gráfico começa no ponto (-2, 3).
c) A derivada de f é a função escada da figura a seguir



44. Um objeto move-se ao longo de uma reta de acordo com a equação de movimento $s = \dfrac{3t}{(t^2+9)}$ com $t \geq 0$

onde s m é a distância orientada do objeto, desde o ponto de partida em t seg.
a) Qual a velocidade Instantânea do objeto em t_1 seg ? b) Qual a velocidade instantânea em 1 seg ?

45) (U. MACK – 74) Calcule a derivada da função f dada por f(x) = $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 2x & 3x & 4 \\ 5 & 6x & 2x^2 \end{vmatrix}$

46) Encontrar Δy e dy para os valores dados $f(x) = \dfrac{1}{2x^2}; \Delta x = 0{,}01; x = 1$.

47) Você mediu o raio de uma esfera , encontrando 6 cm , e usou a fórmula $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ para calcular o volume. Se a medida do raio tiver uma porcentagem de erro máxima de 1% , aproximadamente, qual será a porcentagem de erro máxima do volume que calculou ?

48) Um pintor é contratado para pintar ambos os lados de 50 placas quadradas de 40 cm de lado. Depois que recebeu as placas, verificou que os lados das placas tinham $\dfrac{1}{2}cm$ a mais. Usando diferencial, encontrar o aumento aproximado da porcentagem de tinta a ser usada.

FUNÇÃO COMPOSTA(REGRA DA CADEIA:

Encontre a função derivada de cada uma das funções definidas a seguir.

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$ R.: $f'(x) = \dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}$ 2) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ R.: $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$

3) $f(x) = (1+\sqrt{3}x)^3$ R.: 3) $f'(x) = 3\sqrt{3}(1+\sqrt{3}x)^2$ 4) $f(x) = |x^2 - 4|$ R.: $f'(x) = \begin{cases} 2x, & |x| > 2 \\ -2x, & |x| < 2 \end{cases}$

5) $g(y) = (y+1)\sqrt{y^2 - 2y + 2}$ R.: $g'(y) = \dfrac{2y^2 - 2y + 1}{\sqrt{y^2 - 2y + 2}}$

6) $h(u) = \sqrt{\dfrac{1-u^2}{1+u^2}}$ R.: $h'(u) = \dfrac{-2u}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{(1+u^2)^3}}$

7) $f(x) = \dfrac{\sqrt{a-x} + \sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x} - \sqrt{a+x}}$ R.: $f'(x) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}(a - \sqrt{a^2 - x^2})}$

8) $g(\theta) = \sqrt{\theta + \sqrt{\theta}}$ R.: $g'(\theta) = \dfrac{2\theta + \sqrt{\theta}}{4\theta\sqrt{\theta + \sqrt{\theta}}}$ 9) $g(y) = \text{tg}(\sqrt{1-y})$ R.: $g'(y) = \dfrac{-\sec^2(\sqrt{1-y})}{2\sqrt{1-y}}$

10) $u(x) = \text{sen}^4(x) + \cos^4(x)$ R.: $u'(x) = -\text{sen}(4x)$ 11) $F(z) = \dfrac{1+\cos(2z)}{1-\cos(2z)}$ R.: $F'(z) = \dfrac{-4\,\text{sen}(2z)}{(1-\cos(2z))^2}$

12) $f(x) = \dfrac{(2-x)^{\frac{1}{3}}}{4\sqrt{2+x}}$ R.: $f'(x) = \dfrac{x-10}{24\sqrt{(2+x)^3}\sqrt[3]{(2-x)^2}}$

13) $V'(y) = \dfrac{1-3y}{3\sqrt[3]{(3y^2-2y)^4}}$ R.: $V(y) = \dfrac{1}{2(3y^2-2y)^{\frac{1}{3}}}$

14) $P(x) = \dfrac{15}{\text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)+\cos\left(\frac{x}{3}\right)}$ R.: $P'(x) = \dfrac{5\left(\text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)-\cos\left(\frac{x}{3}\right)\right)}{\left(\text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)+\cos\left(\frac{x}{3}\right)\right)^2}$

15) $f(x) = 1+\sqrt{x}+\sqrt{\sqrt{x}}$ R.: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{4\sqrt{\sqrt{x^3}}}$ 16) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ 2\sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}$ R.: $f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & x > 1 \end{cases}$

17) $g(y) = \sqrt{(1-y^2)(y^2-4)}$ R.: $g'(y) = \dfrac{y(5-2y^2)}{\sqrt{(1-y^2)(y^2-4)}}$

18) $U(t) = (1+\sqrt{3t}+\sqrt{\sqrt{3t}})^2$ R.: $U'(t) = \left(1+\sqrt{3t}+\sqrt{\sqrt{3t}}\right)\left(\dfrac{3}{\sqrt{3t}}+\dfrac{3}{2\sqrt{\sqrt{3t}}\sqrt{3t}}\right)$

19) $G(y) = \text{tg}(\text{sen}(y^4))$ R.: $G'(y) = 4y^3\sec^2(\text{sen}(y^4))\cos(y^4)$

20) $H(t) = \text{sen}^2(2t-t^2)$ R.: $H'(t) = 2(2-2t)\,\text{sen}(2t-t^2)\cos(2t-t^2)$

21) $f(x) = \cos^3(\sec(x))$ R.: $f'(x) = -3(\cos^2(\sec(x))\,\text{sen}(\sec(x)))\sec(x)\,\text{tg}(x)$

22) $T(y) = |\,y^3+2\,|$ R.: $T'(y) = \dfrac{3y^2\,|\,y^3+2\,|}{y^3+2}$

23)Seja *f* uma função definida por $f(x) = \text{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Mostre que $f'(x) = \dfrac{1}{4}\text{sen}(2x)$.

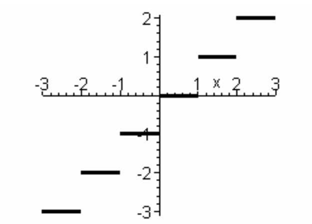
24)Sejam *f* e *g* funções definidas por $f(x) = \sqrt{2x+1}$ e $g(x) = \sqrt{\text{tg}(x)}$. Calcule $(f \circ g)'(\frac{\pi}{4})$.

R.: $(f \circ g)'(\frac{\pi}{4}) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

25) Considere *f* uma função diferenciável e *g* uma função definida por $g(x) = f^2(\cos(x))$. Sabendo que $f(0) = 1$ e $f'(0) = -\frac{1}{2}$ calcule $g'(\frac{\pi}{2})$. R. 1

26) Considere *f* a função dada por $f(x) = [[x]]$. Determine os pontos em que *f* não é derivável. Obtenha a expressão da derivada de *f* onde ela existir.

R.: $f(x)$ não é derivável em Z. $f'(x) = 0 \ \ \forall\, x \in R - Z$. Observe que $\forall\, x \in Z \ \ f(x) = [[x]]$ é descontínua.



27) Seja *R* uma função definida por $R(x) = \sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

a) Obtenha os pontos onde *R* não é derivável; R.: (0,1) e (1,0)

b) Calcule $R'(x)$ onde for possível. R.: $R'(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}}$

28) Considere a função *f* definida por $f(x)=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$. Encontre o ponto do gráfico de *f* cuja reta tangente é paralela à reta de equação $2y-x=5$. R.: (0 , 0)

29) Seja *g* uma função diferenciável e *f* uma função definida por $f(t)=g^3(h(t))$ com $h(t)=t^2+1$. Calcule $f'(1)$ se $g'(2)=5$ e $g(2)=3$. R.: 270

30)Considere *f* uma função dada por $f(x)=g\left(\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)\right)$ sendo *g* uma função derivável. Calcule $f'(1)$ se $g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$. R.: $-\frac{1}{4}$

31) Seja $g: IR \to IR$ uma função diferenciável e seja *f* dada por $f(x)=g(x^2)$. Calcule $f'(1)$ supondo que $g(1)=4$ e $g'(1)=1$. Encontre a equação da reta normal ao gráfico de *f* no ponto de abscissa 1.

R.: $f'(1)=2;\quad y=-\frac{x}{2}+\frac{9}{2}$

32) Seja *f* tal que $f\circ f$ é a função identidade, $f(1)=2$ e $f'(1)=3$. Calcule $f'(2)$. R.: $f'(2)=\frac{1}{3}$

33)Seja *f* uma função diferenciável e *g* uma função definida por $g(x)=x\,f(\sqrt{x})$. Sabe-se que a reta tangente ao gráfico de *g* no ponto de abscissa 4 é perpendicular à reta $y=-\frac{1}{2}x+5$ e que $f(2)=1$. Calcule $f'(2)$. R.: 1

34)Considere $f(x)=3x+|x|$ e $g(x)=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}|x|$. Mostre que $f'(0)$ e $g'(0)$ não existem mas $(f\circ g)'(0)$ existe. R.: $(f\circ g)'(0)=2$

Diferenciação logarítmica:

1) Derive as funções abaixo:

a) $y=(2-x)^{\sqrt{x}}$ R.: $y=(2-x)^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln(2-x)}{2\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{2-x}\right)$

b) $y=x^{\cos 3x}$ R.: $x^{\cos 3x}\left(-3sen3x.\ln x+\frac{\cos 3x}{x}\right)$

c) $y=\frac{x^2\sqrt[3]{7x-14}}{(1+x^2)^4}$ R.: $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2\sqrt[3]{7x-14}}{(1+x^2)^4}\left[\frac{2}{x}+\frac{1}{3x-6}-\frac{8x}{1+x^2}\right]$

III) Derivação Implicita

1) Considere $y=f(x)$ definida implicitamente por $x^4-xy+y^4=1$. Calcule $f'(0)$ sabendo que $f(x)>0,\ \forall x\in R$. $f'(0)=\frac{1}{4}$

2) Considere a curva dada por $x^3+y^3=3xy$. Esta curva é conhecida como *folium de Descartes*. Derive implicitamente para obter o coeficiente angular da reta tangente a esta curva em um ponto arbitrário (x_0,y_0). R.: $\begin{cases}\frac{y_0-x_0^2}{y_0^2-x_0}, & x_0\neq 0\\ 0, & x_0=0\end{cases}$

3) Considere a curva conhecida como *cissóide de Diocles* e dada por $(2-x)y^2=x^3$.

a) Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico da curva em $(1,1)$. $y=2x-1$

b) Obtenha as equações das retas tangentes ao gráfico da curva nos pontos em que $x = \frac{3}{2}$.

R.: $y = 3\sqrt{3}x - 3\sqrt{3}$ ou $y = -3\sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$

4) Considere a elipse dada por $x^2 - xy + y^2 = 9$.

a) Encontre as equações das retas tangentes à curva nos pontos em que a curva intercepta o eixo *y* e verifique que estas retas são paralelas. R.: $y = \frac{x}{2} + 3$ e $y = \frac{x}{2} - 3$

b) Encontre os pontos da curva nos quais a reta tangente é horizontal. R.: $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$

c) Encontre os pontos da curva nos quais a reta tangente é vertical. R.: $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ e $(-2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

5) Determine os pontos da *lemniscata* de equação $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ em que a reta tangente é vertical.
R.: $(0,0); (1,0); (-1,0)$

6) Em que ponto da curva $x + \sqrt{xy} + y = 1$ a reta tangente é paralela ao eixo dos *x* ? R.: $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

7) Mostre que se xy = 1, então $\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{d^2x}{dy^2} = 4$.

8..Encontre a reta tangente e normal à curva $x \operatorname{sen} 2y = y \cos 2x$ no ponto $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

10. Prove que as retas tangentes às curvas:
$4y^3 - x^2 y - x + 5y = 0$ e $x^4 - 4y^3 + 5x + y = 0$ na origem são perpendiculares.

IV – Derivadas de funções Inversas :

1) Considere a função definida por $y = f(x) = x^3 - 1$. Calcule a derivada de f^{-1} no ponto $y = 7$. R.: $\frac{1}{12}$

2) Considere a função definida por $y = f(x) = x^3 + 3x$. Calcule a derivada de f^{-1} no ponto $y = 4$. R.: $\frac{1}{6}$

3) Considere a função definida por $y = f(x) = x^7 + x^5 + 17$. Calcule a derivada de f^{-1} no pto $y = 19$ R.: $\frac{1}{12}$

4) Considere a função f, de [-1 , 1] em $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, tal que y = f (x) = arc sen x. Calcule y´. $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

5) Obtenha as derivadas de a) f(x) = arc sen 5x $f'(x) = \frac{5}{\sqrt{1 - 25x^2}}$

b) arc tg 7x $f'(x) = \frac{7}{1 + 49x^2}$ c) $f(x) = \operatorname{arc\,sen} \sqrt{x}$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x(1 - x)}}$

6) Encontre uma equação para a reta tangente ao gráfico de y = arccotg x em x = -1. R: $y - \frac{3\pi}{4} = (-\frac{1}{2})(x + 1)$

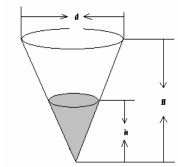
7) Derive : a) $V(t) = \operatorname{arccotg}\left(\frac{t}{2}\right)$ $V'(t) = \frac{-2}{4 + t^2}$ b) $g(x) = \arccos\left(\sqrt{1 - x^2}\right)$ $g'(x) = \frac{x}{|x|\sqrt{1 - x^2}}$

c) $h(u) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{u - 1}{u + 1}\right), u > 0$ $h'(u) = \frac{1}{(u + 1)\sqrt{u}}$

8. Encontre uma equação para a reta tangente ao gráfico de y = arccotg x em x = -1.

V – Taxa de Variação :

1) Um reservatório de água tem a forma de um cone de altura H = 8cm e diâmetro da base d = 4m . O reservatório está sendo enchido à razão de 0,015 m^3/s. Calcule a taxa de variação da altura h do nível da água em função do tempo, no instante em que h = 2m .(vide fig. Abaixo) R.: $\frac{0{,}06}{\pi} m/s$



2. Um balão de borracha de forma esférica é enchido de ar, de modo que seu raio aumenta à razão de 0,2cm/s. Calcule a taxa de variação do volume desse balão em relação ao tempo, no instante em que o raio for igual a 10cm. R.: 80 π cm^3/s
3. Uma esfera aumenta de volume de modo que seu raio aumenta à razão de 1,5cm/s . Calcule a taxa de variação da esfera em relação ao tempo, quando o raio for igual a 20cm R.: 2 400 π cm^3/s
4. Uma escada de comprimento igual a 5m está com uma extremidade apoiada no chão e outra apoiada numa parede vertical. A escada começa a escorregar, de modo que num instante t_1, a distância d é igual a 4 metros e a extremidade B tem velocidade v_B=1,2m/s. Calcule nesse instante, a velocidade v_A da extremidade A. . R.: V_A = - 1,6 m/s

5) Se duas resistências com R_1 e R_2 Ohms estão conectadas em paralelo em um circuito elétrico, resultando em uma resistência com R Ohms, o valor de R será dado pela equação $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$.
Se R_1 diminui a uma taxa de 1 Ohms e R_2 aumenta a uma taxa de 0,5 Ohms, a que taxa R varia quando R_1= 75 Ohms e R_2 = 50 Ohms ? R.: 0,02 ohm/s

6) Um cubo se expande de modo que sua aresta varia à razão de 12,5cm/s. Achar a taxa de variação de seu volume no instante em que o raio é 7,5cm? Resp.3750cm^3/s.

7) O raio r e altura h de um cilindro circular reto estão variando de modo a manter constante o volume V. Num determinado instante h = 3cm e r = 1cm e, neste instante, a altura está variando a uma taxa de 0,2cm/s. A que taxa estará variando o raio neste instante? Resp. -0,1/3cm/s.

8)Os lados x e y de um retângulo estão variando a taxas constantes de 0,2m/s e 0,1m/s, respectivamente. A que taxa estará variando a área do retângulo no instante em que x = 1m e y = 2m? Resp. 0,5m^2/s.

9)Um ponto se move ao longo do gráfico de $y = 1/(x^2 + 4)$ de modo que sua abscissa x varia à razão de 3 unidades por segundo. Qual é a taxa de variação de sua ordenada y, quando x =2. Resp.-3/16unid/s.

10)Dois carros estão se encaminhando em direção a um cruzamento, um seguindo em direção leste a uma velocidade de 90km/h e o outro seguindo a direção sul, a 60km/h. Qual a taxa segundo a qual eles se aproximam um do outro no instante em que o primeiro carro está a 0,2 km do cruzamento e o segundo a 0,15km Resp. 108km/h.

VI - Variação das Funções :

1)Dada $f(x) = 4x^3 – 9x^2 + 5x$, verificar se estão satisfeitas as condições para validade do Teorema de Rolle em cada um dos intervalos : [0 , 1] ; [1 , $\frac{5}{2}$] e [0 , $\frac{5}{2}$]. Determinar um número κ em cada um desses intervalos de modo que f‘(β) = 0 . R.:Válidas só para [0 , 1] e $\beta=\frac{9-\sqrt{21}}{12}$ pois β Є [0 , 1]

2) Verifique se as hipóteses do Teorema de Rolle estão satisfeitas pela funções e de acordo com os respectivos intervalos : a) $f(x)=\frac{2x^2-33x+1}{3x-4}$ e $I=\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$ R.:sim

b) $f(x) = x^2 – 6x + 8$ e I = [2 , 4] R.: sim e c = 3

c) $f(x) = x^3 – 16x$ e I = [0 , 4] R.: sim e $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

3) Dada $f(x) = x^3 + 3x^2 – 5$, verificar que as condições para validade do Teorema do Valor Médio estão satisfeitas para a = -1 e b = 2 . Encontrar todos os números α, α ε]–1 , 2 [, tal que $f'(x)=\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}$

R.: $\alpha=-1+\sqrt{2}$

4) Dada $f(x) = x^2 + 2x –1$, verificar que as condições para validade do Teorema do Valor Médio (Lagrange) estão satisfeitas para a = 0 e b = 1 . Encontre todos os números α , α ∈] 0 ; 1 [tal que

$f'(\alpha) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0}$ R.: $c = \frac{1}{2}$

5)Verifique as hipóteses do Teorema do Valor Médio para a função definida por $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ no intervalo $[-3,4]$ e encontre um valor de *c* que satisfaça as condições do teorema. R.: $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

6) Determine os intervalos em que cada função definida a seguir é crescente e os intervalos em que é decrescente. **a)** $f(x) = x + \frac{3}{x^2}$ Crescente: $]-\infty,0[\quad \cup \quad]\sqrt[3]{6},+\infty[$; Decrescente: $]0,\sqrt[3]{6}[$

b) $G(x) = \frac{3x^2 + 4x}{1 + x^2}$ Crescente: $\left]-\frac{1}{2}, 3\right[$; Decrescente: $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\cup]2,+\infty[$

c) $U(s) = \frac{s^2 - s + 1}{2(s-1)}$ Crescente: $]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$; Decrescente: $]0,2[$

7). Consideremos a função **f : R → R** definida por $f(x) = x^3 - 6x$.

a.) Determine os pontos em que f´ se anula R.: $x = \pm\sqrt{2}$

b). Determine os intervalos onde f é crescente e onde f é decrescente.

R.: $\begin{cases} \text{f é crescente nos intervalos }]-\infty\,;-\sqrt{2}]\text{...e.....}[\sqrt{2}\text{...;...}+\infty[\\ \text{f é decrescente no intervalo } [-\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2}] \end{cases}$

Dadas as funções abaixo, pede-se: a) domínio; b) assíntotas horizontais e verticais; c) intervalos de crescimento e decrescimento; d) pontos de máximos e mínimos relativos e/ou absolutos; e) pontos de inflexão, se existirem; f) intervalos onde o gráfico possui concavidade para cima e onde possui concavidade para baixo; g) esboço do gráfico; h) imagem.

8) $f(x) = 6 + 8x^2 - x^4$ a) $D = R$ b)) Não existem assíntotas horizontais nem verticais.

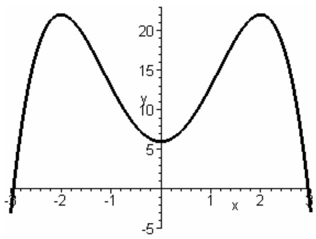
c) crescente: $x \le -2 \ ou \ 0 \le x \le 2$ decrescente: $-2 \le x \le 0 \ ou \ x \ge 2$

d) pontos de máximo absolutos: $(-2, 22) \ e \ (2, 22)$ ponto de mínimo relativo: $(0, 6)$

e) pontos de inflexão: $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{134}{9})$ e $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{134}{9})$

f) côncava para cima: $-\frac{2\sqrt{3}}{3} < x < \frac{2\sqrt{3}}{3}$ côncava para baixo: $x < -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ou $x > \frac{2\sqrt{3}}{3}$

g) esboço do gráfico:



h) $\text{Im} = \{ y \in R / y \le 22\}$

9) $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 2x}$ a) $D = R - \{0,2\}$ b) assíntota horizontal: $y = 2$ assíntotas verticais: $x = 0 \ e \ x = 2$

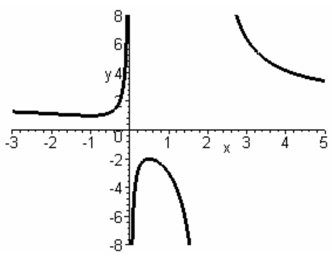
c) crescente: $-1 \le x < 0 \ ou \ 0 < x \le \frac{1}{2}$ decrescente: $x \le -1$ ou $\frac{1}{2} \le x < 2$ ou $x > 2$

d) ponto de máximo relativo: $(\frac{1}{2}, -2)$ ponto de mínimo relativo: $(-1, 1)$

e) ponto de inflexão: $(-1{,}85\,; 1{,}10)$ f) côncava para cima: $-1{,}85 < x < 0 \ ou \ x > 2$

côncava para baixo: $x < -1{,}85 \ ou \ 0 < x < 2$

g) esboço do gráfico:



h) $\text{Im} = \{ y \in R \,/\, y \le -2 \;\; ou \;\; y \ge 1 \}$

10) $f(x) = x + \text{sen}(x)$) a) $D = R$ b) Não existem assíntotas horizontais nem verticais.

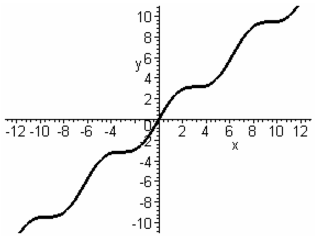
c) crescente: R decrescente: $\varnothing$

d) Não existem pontos de máximo nem ponto de mínimo.

e) pontos de inflexão: $(k\pi, k\pi), k \in Z$

f) côncava para cima : $k\pi < x < (k+1)\pi,\ k \in Z$ ímpares ; côncava para baixo: $k\pi < x < (k+1)\pi,\ k \in Z$ pares

g) esboço do gráfico:



h) $\text{Im} = R$

11).Seja a função **f : R → R** definida por $f(x) = 2x^3 - 24x + 8$.

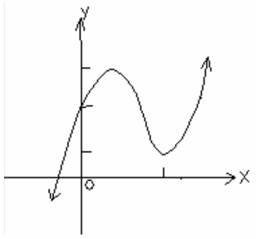
a). Determine os pontos onde f se anula b).os intervalos onde f é crescente e decrescente.

12).Seja a função f definida por $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + mx^2 + x + 12$. Determine m de modo que a função seja crescente para todo $\mathbf{x \in R}$ R.: $-1 < m < 1$

13) Dada a função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ ache o ponto de inflexão, determine onde o gráfico é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo. Faça um esboço gráfico. R.: Ponto de inflexão em $x = 2$

o gráfico é côncavo para baixo em $x < 2$

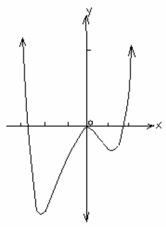
o gráfico é côncavo para cima em $x > 2$



14) Esboce o gráfico da função $f(x) = x^4 + \dfrac{4}{3}x^3 - 4x^2$ e ache os máximos e mínimos relativos

Resp.: máximo relativo em $x = 0$

mínimos relativos em $x = -2$ e $x = 1$



VII - Taxas Relacionadas

1) Dois lados paralelos de um retângulo aumentam a razão de $3\,\text{cm/s}$, enquanto os outros dois diminuem de tal modo que a área da figura permanece igual a $48\,\text{cm}$ quadrados. Qual a taxa de variação do perímetro do retângulo quando o comprimento do lado que aumenta é $6\,\text{cm}$? R.: $-2\,\text{cm/s}$

2) Um triângulo isósceles tem os lados iguais com $12\,\text{cm}$ cada um. Se o ângulo θ entre eles, varia à razão de 2º por minuto, com que velocidade varia a área, quando $\theta = 30^\circ$? R.: $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}\pi\ \text{cm}^2$

3) A área de um triângulo retângulo decresce a uma taxa de $10\,\text{cm}^2/\text{s}$. Sabendo que a altura decresce a uma taxa duas vezes maior que a base, determine a taxa de variação da base no instante em que o triângulo for isósceles, com catetos medindo $2\,\text{cm}$. R.: $-\dfrac{10}{3}\,\text{cm/s}$

4) Um tanque horizontal tem $16\,\text{cm}$ de comprimento e suas laterais tem a forma de trapézios isósceles com $4\,\text{m}$ de altura, base menor igual a $4\,\text{m}$ e base maior igual a $6\,\text{m}$. Começa-se a encher o recipiente. Se o nível de água sobe à razão de $0{,}125\,\text{m/min}$, quando a profundidade é de $2\,\text{m}$, qual a taxa de entrada da água? R.: $10\,\text{m}^3/\text{min}$

5) Uma partícula move-se ao longo da curva cuja equação é $y = \sqrt{x}$. Suponhamos que *x* aumenta a uma taxa de 4 unidades por minuto quando $x = 3$ unidades. Quão rapidamente cresce a distância entre a partícula e o ponto $(2,0)$ nesse instante? R.: $3\,\text{unidades/min}$

6) Um avião a uma altura de $3\,\text{km}$ voa ao longo de uma reta que o levará diretamente a um ponto acima de um observador no solo. Se em um dado instante, o observador nota que o ângulo de elevação é de 60º e aumenta à razão de $1^\circ/\text{seg}$, determine a velocidade do avião. R.: $80\pi\,\text{km/h}$

7) Um carro de corrida anda a uma velocidade constante de 90 milhas por hora sobre uma pista circular. Suponha que exista uma fonte de luz no centro da pista e um muro tangente a pista em um ponto C. Com que rapidez move-se a sombra do carro sobre o muro quando o carro percorreu $1/8$ da pista desde C? R.: $180\,\text{mi/h}$

8) Um ponto P move-se sobre a parábola $y = 3x^2 - 2x$. Suponha que as coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ são deriváveis e que $\dfrac{dx}{dt} \neq 0$. Em que ponto da parábola a velocidade da ordenada é o triplo da velocidade da abscissa? R.: $\left(\dfrac{5}{6}, \dfrac{5}{12}\right)$

9) O raio de luz de um farol, que está situado a 3 milhas de uma praia reta, faz $8\,\text{rpm}$ (rotações por minuto). Ache a velocidade do raio de luz, ao longo da praia, quando ele faz um ângulo de 45º com a linha da praia. R.: $96\pi\,\text{mi/h}$

10) Num dado instante um navio A está navegando rumo ao sul a $16\,\text{km/h}$ e um navio B, $32\,\text{km}$ ao sul de A, navega rumo a leste a $12\,\text{km/h}$.

a) A que razão estão eles se aproximando ou se afastando uma hora depois desse instante? R.: $-5{,}6\,\text{km/h}$

b) Em que instante deixam eles de se aproximar (ou se afastar) um do outro e qual a distância que os separa nesse instante? R.: $1\,\text{h}$ e $16\,\text{min}$ e 19,2 km

11) Um ponto move-se ao longo da elipse $x^2 + 4y^2 = 1$. A abscissa varia a uma velocidade $\dfrac{dx}{dt} = \text{sen}(4t)$. Ache a aceleração da ordenada. R.: $\dfrac{-(\text{sen}^2(4t) + 16xy^2\cos(4t))}{4y^3}$

VIII - Máximos e Mínimos : Aplicações

1) Ao meio dia, um navio A está a 100 km ao norte de um navio B. O navio A move-se para o sul a 20 km/h e o navio B para leste a 10 km/h.

a) A que horas a distância entre eles será mínima ? R.: às 16 horas

b) Qual é a distância mínima entre eles ? R.: $20\sqrt{5}$ km

2) Um pedaço de arame de comprimento L é cortado em dois pedaços, um dos quais é dobrado em forma de círculo e o outro em forma de quadrado. Como deve ser feito esse corte para que: a soma das áreas do círculo e do quadrado seja mínima ?

R.: círculo : $\dfrac{\pi L}{4+\pi}$; quadrado : $\dfrac{4L}{4+\pi}$

3) Uma folha de papel usada para impressão tem área de 900 cm^2. As margens na parte superior e inferior são de 1 cm. Determine as dimensões da folha sabendo que a área de impressão é máxima. R.: x = 5 e y = 12/5

4) Determine as dimensões do retângulo de área que pode ser inscrito em um semicírculo de raio R.

R.: x = $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ e y = $R\sqrt{2}$

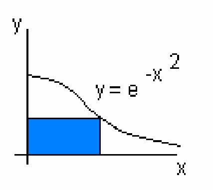
5) Determine as dimensões de um trapézio inscrito num semi-círculo de raio R de modo que seu perímetro seja máximo e calcule esse perímetro. R.: x = R e y = R , perímetro 5R

6) Determine o raio da base e a altura de cone circular reto circunscrito a uma esfera de raio R de modo que o volume do cone seja mínimo. R.: r = $4\sqrt{2}$ m e h 16 m

7) Determine o raio da base e a altura de cone circular reto circunscrito a uma esfera de raio R de modo que o volume do cone seja mínimo. R.: r = $4\sqrt{2}$ m e h 16 m

8). Pediram para você projetar uma lata de óleo com forma de um cilindro reto e com volume de 1.000 cm^3 . Que dimensões exigirão menos material ? R.: A fabricação usa menos material quando a lata de 1 litro possui a altura igual ao diâmetro , com r ≈ 5,42 cm e h ≈ 10,84 cm

9) .O retângulo apresentado abaixo apresenta um lado no eixo y positivo, o lado vizinho no eixo positivo e seu vértice superior direito na curva $y = e^{-x^2}$. Que dimensões dão ao retângulo a maior área possível e qual essa área ?



R.: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ unidade de comprimento por $\frac{1}{\sqrt{e}}$ unidade de altura. Área (A) = $\frac{1}{\sqrt{2e}}$ = 0,43 unidades^2

10) Determine o ponto gráfico de $y = \frac{x^2}{4}$ que está mais próximo do ponto (1 ; 2). R : (2 ; 1)

11) Determine as dimensões do retângulo de área que pode ser inscrito em um semi-círculo de Raio R. Resp : $x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ e $y = R\sqrt{2}$

12) Um barco deixa as docas às 14:00 h e navega para o sul a uma velocidade de 20km/h. Um outro barco está se dirigindo para leste a uma velocidade de 15km/h e atinge a mesma doca as 15:00 h. A que horas estiveram os dois barcos mais próximos. T = 2,36 horas

13) Encontre os valores absolutos máximo e mínimo da função: a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \quad -1/2 \le x \le 4$
b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$, [-1, 4] c) $f(x) = \text{sen}x + \cos x$, [0 , π/3]

14. O telescópio espacial Hubble foi colocado em órbita em 24 de abril de 1990 pelo ônibus espacial Discovery. Um modelo para a velocidade do ônibus durante essa missão, do lançamento em t = 0 até a entrada em funcionamento do foguete auxiliar em t = 126s, é dada por: $v(t) = 0{,}001302\, t^3 - 0{,}09029\, t^2 + 23{,}6\, t - 3{,}083$ em pés/s. Usando esse modelo, estime os valores máximo e mínimo absolutos da aceleração do ônibus entre o lançamento e a entrada do foguete auxiliar.

15. Prove que a função $f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$ não tem nem máximo nem mínimo locais.

IX - Cálculo de Limites aplicando L´Hospital :

Ache os limites :

1) $\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2}{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2}$ = -3 2) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 4}$ =3 3) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x^2}$ não existe

4) $\lim_{x\to 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{5x^3} = 1/15$ 5) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}+} \frac{\cos x}{\sqrt{x - \pi/2}}$ = 0 ...6) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg } x - x}{x - \text{sen } x}$ =2

7) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{\ln x} \right) = -1/2$ 8) $\lim_{x\to 2+} \frac{\ln(x - 2)}{\ln(e^x - e^2)}$ = 1