Análise em Frequência

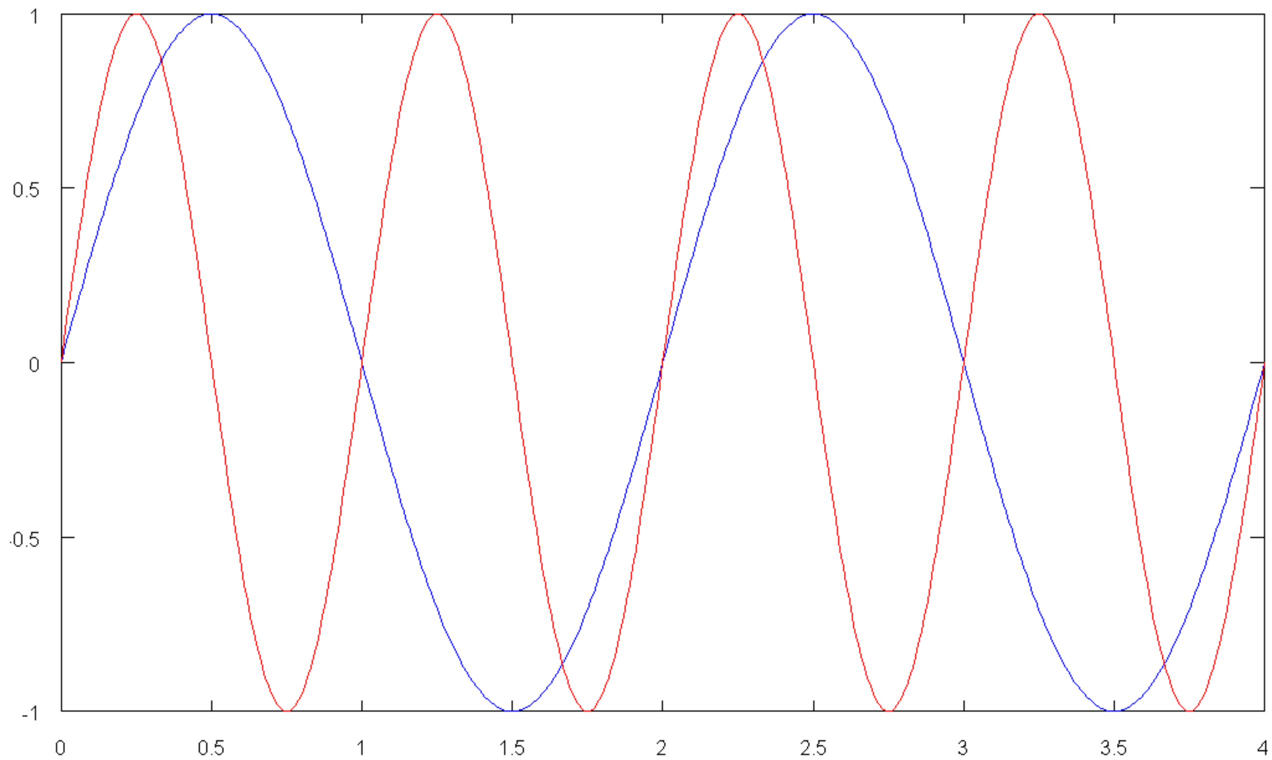
IFCe – Instituto Federal do Ceará
Departamento de Telemática

Prof. Dr. Regis C. P. Marques
regismarques@ifce.edu.br

Série de Fourier

- Análise em frequência -

- **O que é frequência:** a frequência de um sinal pode ser vista como a "velocidade" com a qual a amplitude deste sinal varia.



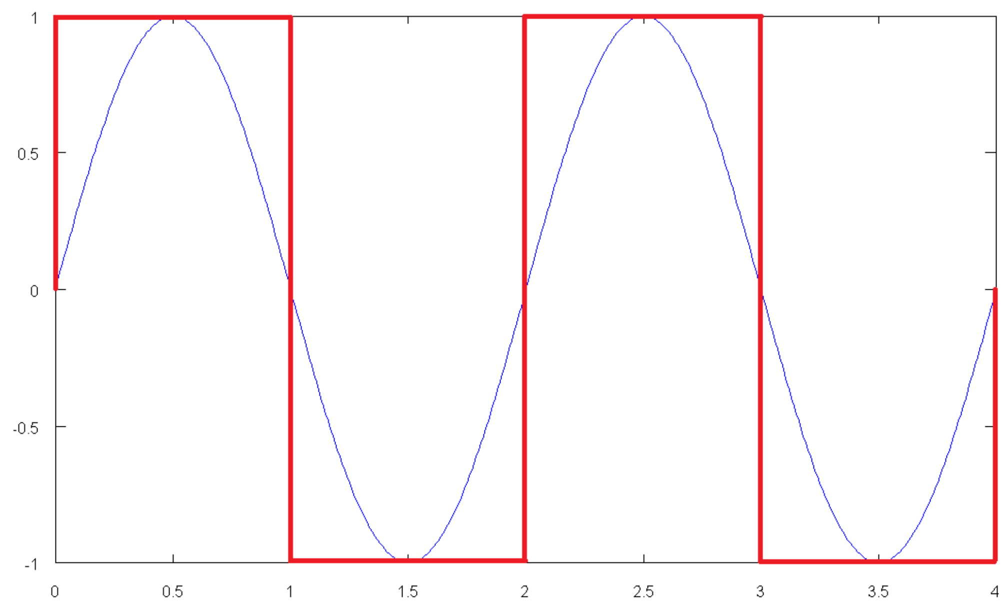
- A frequência de sinais contínuos é medida em [Hz = 1/s] ou [rad/s].
- A frequência de sinas discretos é medida em [rad].

- **Período e frequência fundamentais:** em sinais periódicos podemos definir o seu período fundamental e a partir desse, sua frequência fundamental.

$$f_0 = 1/T_0$$

Onda quadrada de período $T_0=2$.

Seno de mesmo período.



- Este seno é a <u>componente fundamental</u> desta onda quadrada.
- Podemos concluir que senos e cossenos possuem uma única (componente de) frequência, outros sinais são compostos também de harmônicos.

- A combinação de senos e cossenos pode ser utilizada para representar sinais periódicos. Este resultado é conhecido como série de Fourier.

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n\, sin(n\omega_0 t)$$

Em que

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{To} x(t) \cos(n\omega_0 t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{To} x(t)\, sin(n\omega_0 t)\, dt$$

$a_0 = (1/2)a_{n=0}$; é chamada componente dc ou média de x(t).

- A partir dos termos a_n e b_n, são obtidos os espectros de amplitude e fase. Também chamados de espectros de Fourier

$$c_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}$$

Espectro de amplitude

$$\theta_n = tg\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

Espectro de fase

Ex: calcular a série de Fourier para a onda quadrada de período 2 e amplitude [-1,1].

- Série de Fourier -

- Sabemos que x(t) pode ser representado por componentes pares e ímpares, e que cossenos são funções pares e senos são funções ímpares. Assim, a série também provê uma decomposição em sinais pares e ímpares:

$$x(t) = a_0 + x(t)_{par} + x(t)_{ímpar}$$

$$x(t)_{par} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t)$$

$$x(t)_{ímpar} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, sin(n\omega_0 t)$$

- Esse resultado é útil, pois se x(t) é par, $b_n=0$. Se x(t) é ímpar $a_n=0$. Lembre que x(t) pode não ser par nem ímpar, neste caso $a_n \neq 0$ e $b_n \neq 0$.

- Série de Fourier -

Espectro de amplitude

$$|D_n| = \sqrt{\Re(D_n)^2 + \Im(D_n)^2}$$

Espectro de fase

$$\angle D_n = tg^{-1}\left(-\Im(D_n)/\Re(D_n)\right)$$

- Série exponencial complexa:

$$D_n = \frac{1}{T_0}\int_{To} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

Por ser um número complexo D_n carrega em um único coeficiente a informação dos espectros de amplitude e fase. Assim sendo, esta série minimiza os cálculos matemáticos.

Ex: Repita o cálculo da série de Fourier para a onda quadrada de período 2 e amplitude [-1,1].

- Série de Fourier -

- Relações

$$a_0 = C_0 = D_0$$

$$a_n - jb_n = Cn\, e^{j\theta n} = 2D_n$$

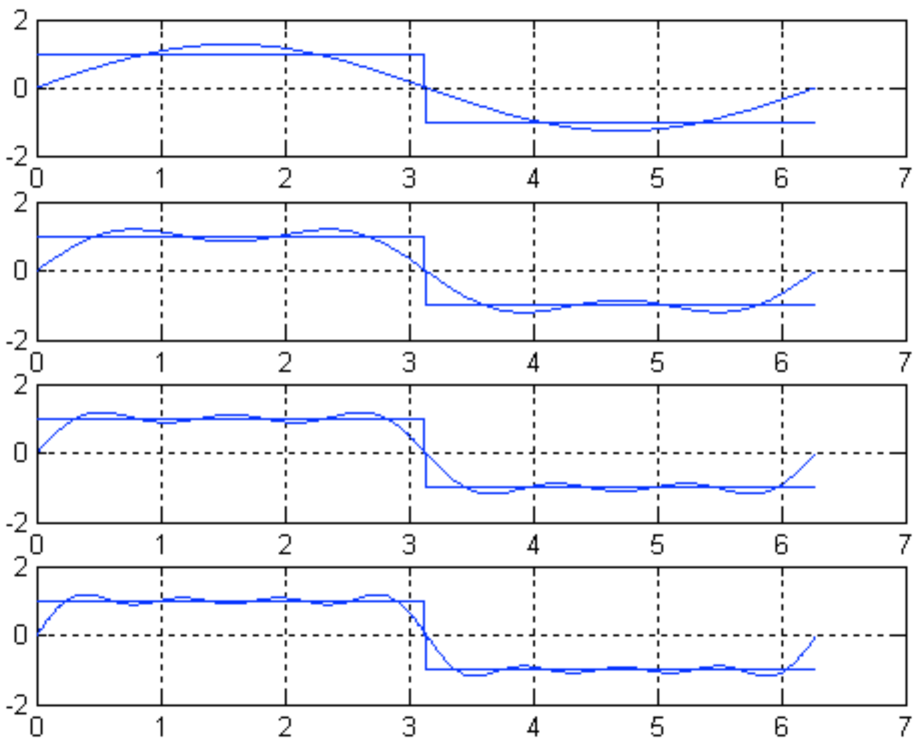
$$a_n + jb_n = Cne^{-j\theta n} = 2D_{-n}$$

$$C_n = 2|D_n|$$

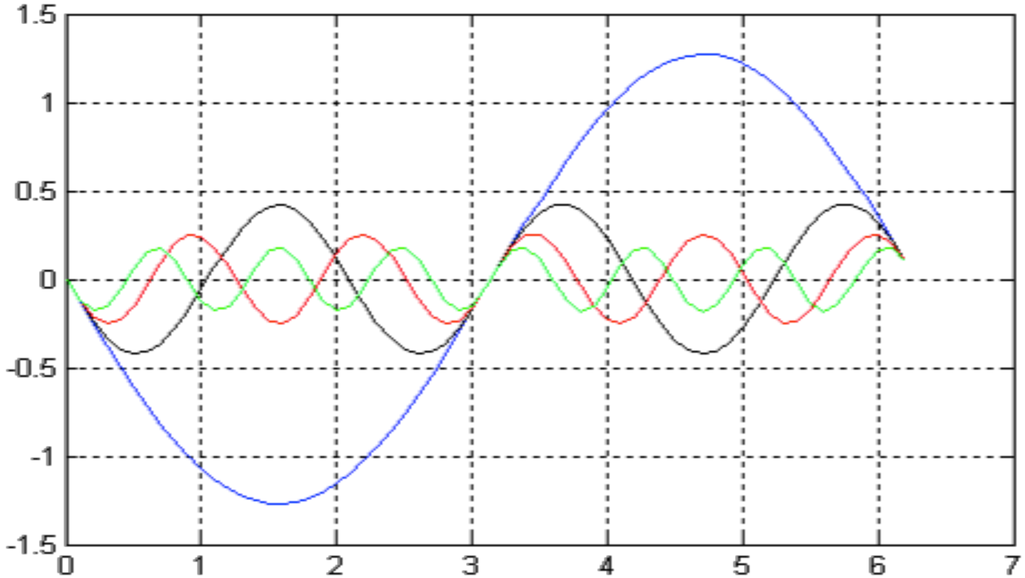
$$\theta_n = \angle Dn$$

- Série de Fourier -

- Exemplo: onda quadrada

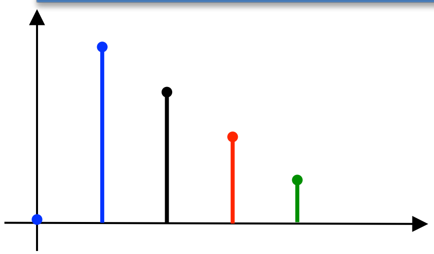


- Exemplo: onda quadrada



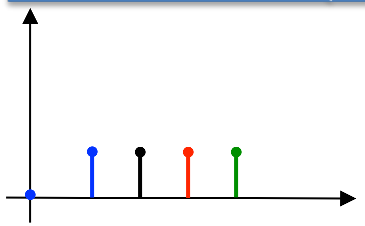
Espectro de amplitude

$$|D_n| = \sqrt{\Re(D_n)^2 + \Im(D_n)^2}$$



Espectro de fase

$$\measuredangle D_n = tg^{-1}\left(\frac{-\Im(D_n)}{\Re(D_n)}\right)$$



- Série de Fourier -

- Exemplos: solucionar utilizando a série exponencial os exemplos 6.1 da pg. 533, 6.2 da página 536, E6.1 da página 542. (sinais e sistemas lineares - Lathi)

- Com o uso do Octave, plotar os 30 primeiros termos de cada série e visualizar os sinais reconstruídos.

Transformada de Fourier

- Transformada de Fourier -

- A transformada de Fourier é definida a partir da série exponencial, desde que $T_0 \rightarrow \infty$. Como a série a transformada é definida por um par de equações.
- A transformada direta, ou decomposição, é dada por

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

- A transformada inversa, ou síntese, é dada por

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

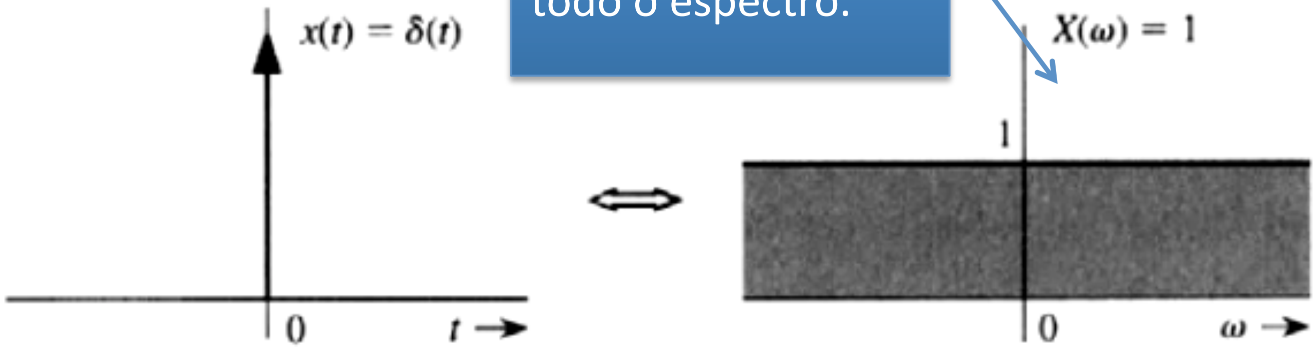
- Transformada de Fourier -

- A transformada de Fourier fornece uma ferramenta importante para a análise de sinais no domínio da frequência. Ao contrário da série, a transformada fornece um espectro contínuo, uma vez que sinais não periódicos não possuem apenas componentes harmônicas (com frequência múltipla da fundamental $n\omega_0$). A própria frequência fundamental ($\omega_0 = 2\pi/T_0$) não é mais definida, uma vez que não se pode definir um período fundamental (T_0).

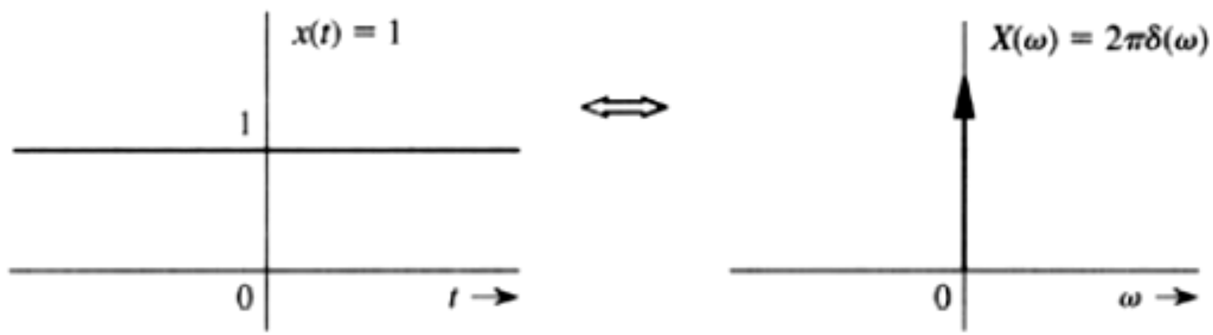
- Impulso

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt = 1$$

O impulso possui componentes em todo o espectro.

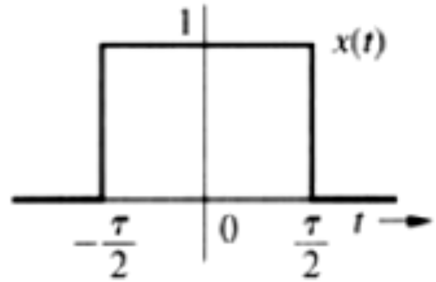


$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}$$



- Função portão (pulso retangular)

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) e^{-j\omega t}\, dt$$



$$X(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t}\, dt \quad = -\frac{1}{j\omega}\left(e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}\right) = \frac{2\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\omega} \quad = \tau\,\frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)} = \tau\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

O pulso retangular tem largura de banda de aproximadamente 2π/τ.

- Exponencial

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega-\omega_0)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}\,d\omega \;=\frac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t}$$

$$\frac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t} \Longleftrightarrow \delta(\omega-\omega_0)$$

$$e^{j\omega_0 t} \Longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

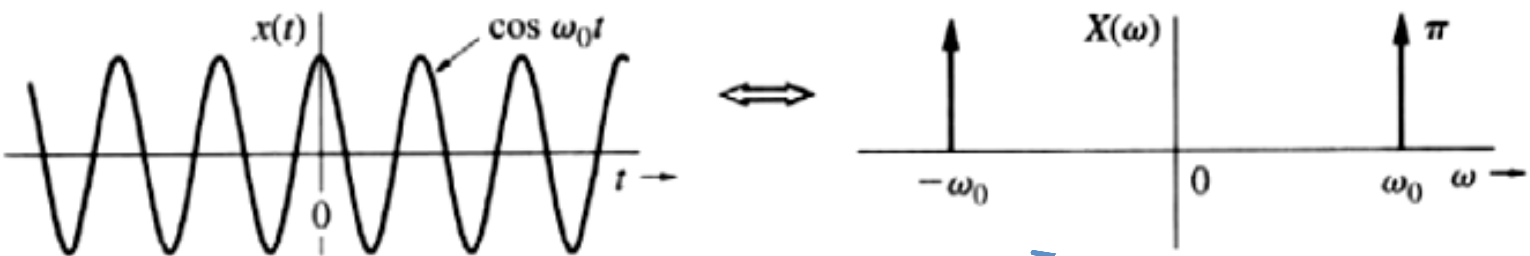
$$e^{-j\omega_0 t} \Longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

Uma exponencial complexa tem uma única componente em ω_0.

- Cosseno

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

$$\cos \omega_0 t \Longleftrightarrow \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$



Funções senoidais possuem apenas uma componente de frequência, sua fundamental.

- Trem de impulsos

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$

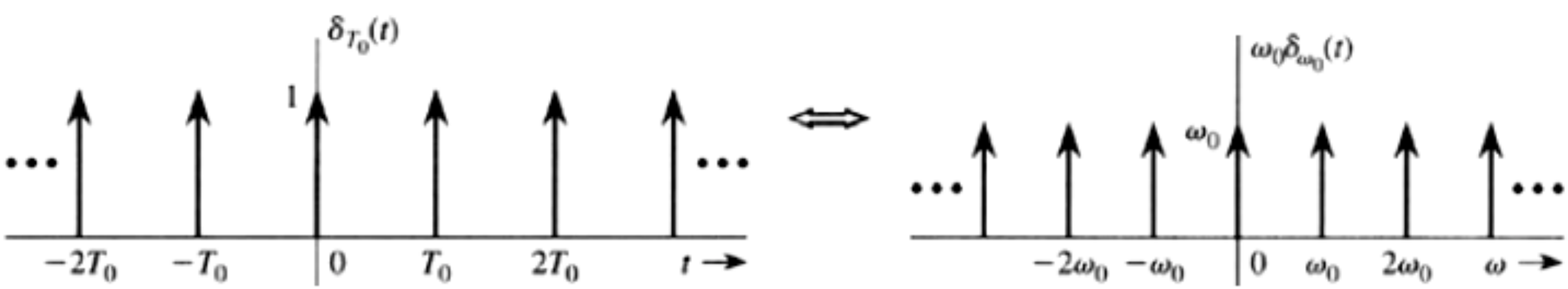
Como é um sinal periódico, devemos utilizar a série (exponencial) de Fourier.

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$D_n = \frac{1}{T_0}$$

$$\boxed{\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{2\pi}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \\ &= \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega) \end{aligned}}$$



- Transformada de Fourier -

No.	$x(t)$	$X(\omega)$	
1	$e^{-at}u(t)$	$\dfrac{1}{a+j\omega}$	$a>0$
2	$e^{at}u(-t)$	$\dfrac{1}{a-j\omega}$	$a>0$
3	$e^{-a\|t\|}$	$\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$	$a>0$
4	$te^{-at}u(t)$	$\dfrac{1}{(a+j\omega)^2}$	$a>0$
5	$t^n e^{-at}u(t)$	$\dfrac{n!}{(a+j\omega)^{n+1}}$	$a>0$
6	$\delta(t)$	1	
7	1	$2\pi\delta(\omega)$	
8	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$	

- Transformada de Fourier -

No.	$x(t)$	$X(\omega)$	
9	$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	
10	$\sin \omega_0 t$	$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$	
11	$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \dfrac{1}{j\omega}$	
12	$\operatorname{sgn} t$	$\dfrac{2}{j\omega}$	
13	$\cos \omega_0 t\, u(t)$	$\dfrac{\pi}{2}[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \dfrac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$	
14	$\sin \omega_0 t\, u(t)$	$\dfrac{\pi}{2j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \dfrac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$	
15	$e^{-at} \sin \omega_0 t\, u(t)$	$\dfrac{\omega_0}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$	$a > 0$
16	$e^{-at} \cos \omega_0 t\, u(t)$	$\dfrac{a + j\omega}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$	$a > 0$

- Transformada de Fourier -

No.	$x(t)$	$X(\omega)$	
16	$e^{-at}\cos\omega_0 t\, u(t)$	$\dfrac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$	$a > 0$
17	$\text{rect}\left(\dfrac{t}{\tau}\right)$	$\tau\,\text{sinc}\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)$	
18	$\dfrac{W}{\pi}\,\text{sinc}\,(Wt)$	$\text{rect}\left(\dfrac{\omega}{2W}\right)$	
19	$\Delta\left(\dfrac{t}{\tau}\right)$	$\dfrac{\tau}{2}\,\text{sinc}^2\left(\dfrac{\omega\tau}{4}\right)$	
20	$\dfrac{W}{2\pi}\,\text{sinc}^2\left(\dfrac{Wt}{2}\right)$	$\Delta\left(\dfrac{\omega}{2W}\right)$	
21	$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$	$\displaystyle\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$	$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$
22	$e^{-t^2/2\sigma^2}$	$\sigma\sqrt{2\pi}\,e^{-\sigma^2\omega^2/2}$	

- Exercícios -

- Reproduzir os resultados discutidos utilizando o Octave.

Exemplo:

```
fo = 10000;             %frequencia máxima (Hz)
Fs = 1000*fo;           %frequência de amostragem (Hz)

Tmax = 5/fo;            %tempo máximo a ser simulado (s)
dt=1/Fs;                %passo de tempo(s)
t = dt:dt:Tmax;         %eixo de tempo
N = length(t);          %numero de pontos simulados

df = Fs/N;                  %passo de frquência
f = -Fs/2:df:Fs/2-df;   %eixo de frequência

%% Exemplo da simulação de um seno
wo = 2*pi*fo;   %frequência em rad/s
x=sin(wo.*t);
figure,plot(t,x);
X=fftshift(fft(x));
figure,plot(f,abs(X));
```


Prof. Dr. Regis C. P. Marques
regismarques@ifce.edu.br

- Exercícios -

- Utilizar o código anterior para analisar a soma de senoides e outras funções, como portão e trem de pulsos.

- Propriedades da Transformada de Fourier -

- Linearidade

$$\boxed{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \Longleftrightarrow a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega)}$$

- Conjugado

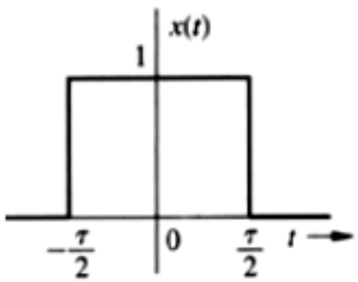
$$x^*(t) \Longleftrightarrow X^*(-\omega)$$

- Simétrico conjugado (se x(t) é real)

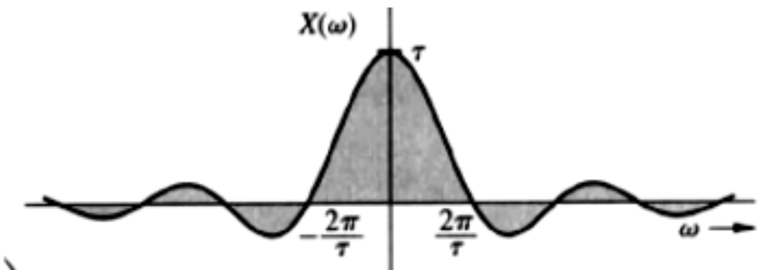
$$X(-\omega) = X^*(\omega)$$

- Dualidade

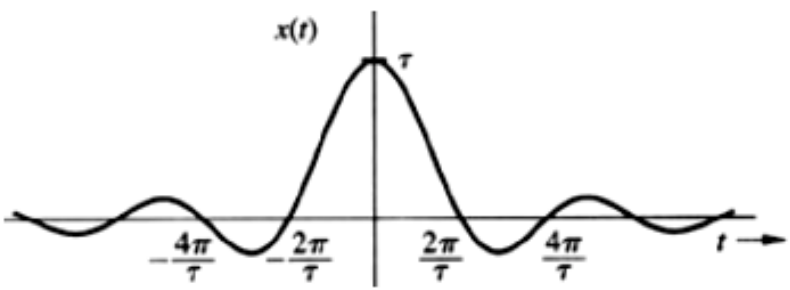
$$X(t) \Longleftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$



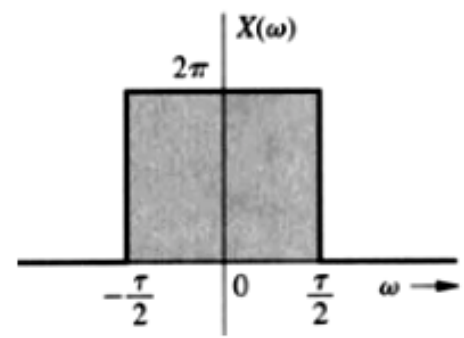
$\Longleftrightarrow$



$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \Longleftrightarrow \tau\, \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$



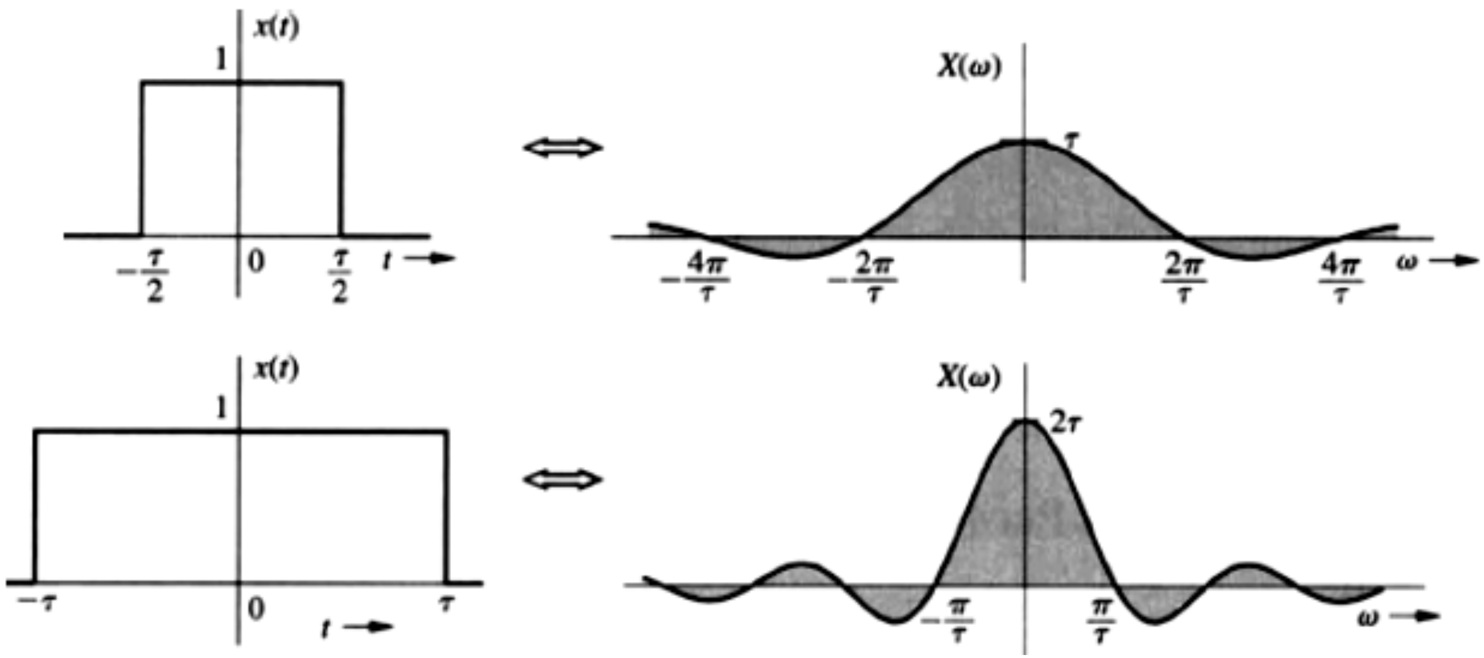
$\Longleftrightarrow$



$$\tau\, \text{sinc}\left(\frac{\tau t}{2}\right) \Longleftrightarrow 2\pi\, \text{rect}\left(\frac{-\omega}{\tau}\right) = 2\pi\, \text{rect}\left(\frac{\omega}{\tau}\right)$$

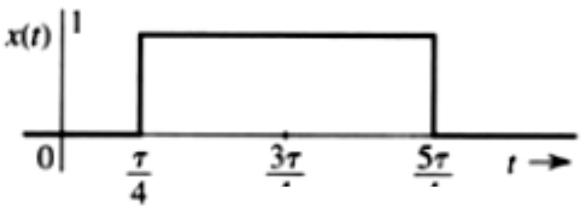
- Escalonamento

$$\boxed{x(at) \Longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)}$$

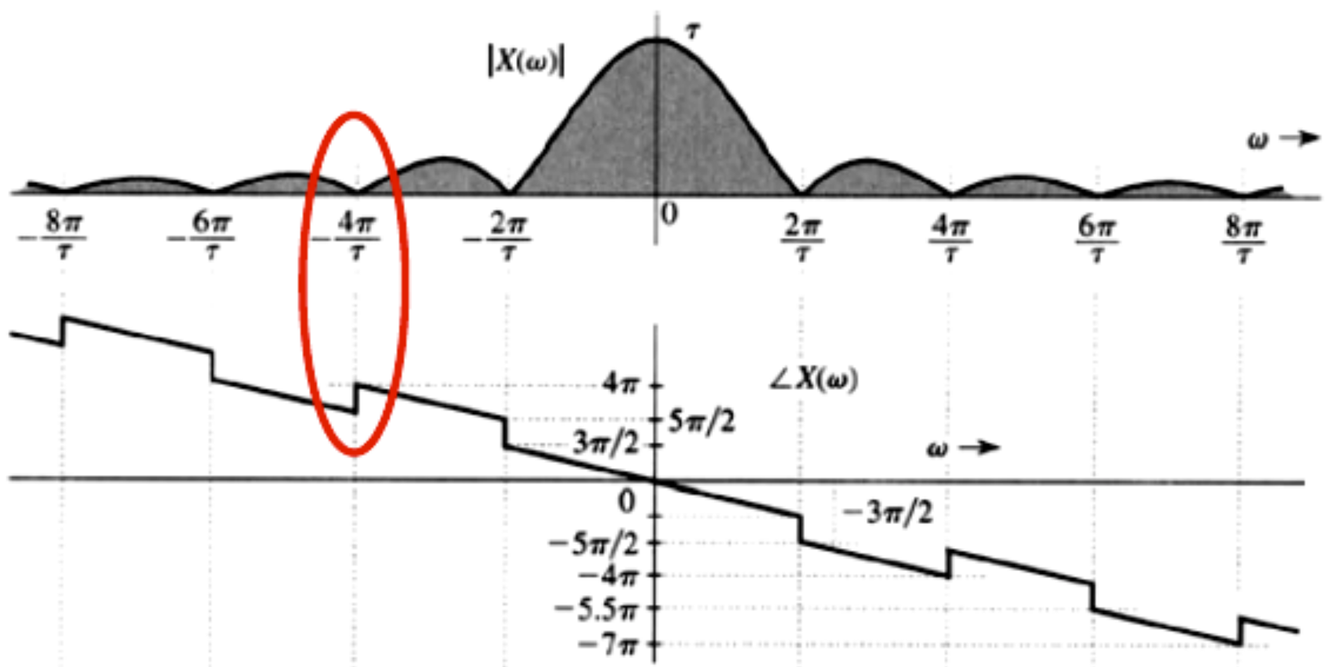


- Deslocamento no tempo

$$\boxed{x(t - t_0) \Longleftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega t_0}}$$

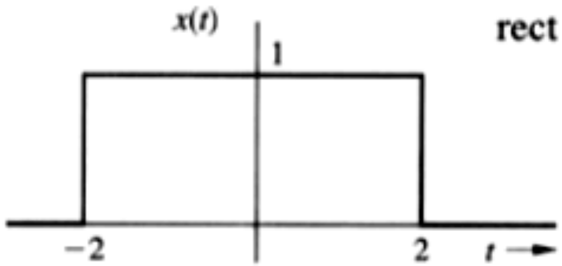


$$X(\omega) = \tau \,\text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)e^{-j\omega(3\tau/4)}$$



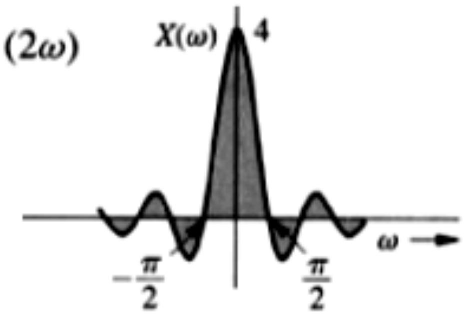
- Deslocamento na frequência

$$\boxed{x(t)e^{j\omega_0 t} \Longleftrightarrow X(\omega - \omega_0)}$$



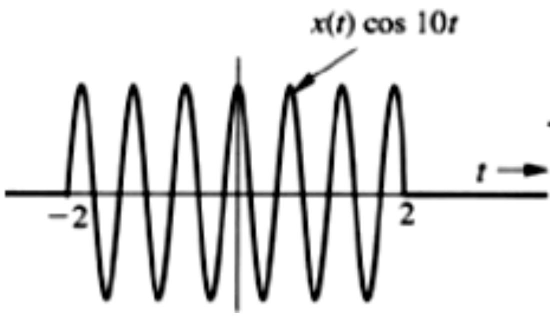
$$\text{rect}\,(t/4) \Longleftrightarrow 4\,\text{sinc}\,(2\omega)$$

$$\Longleftrightarrow$$

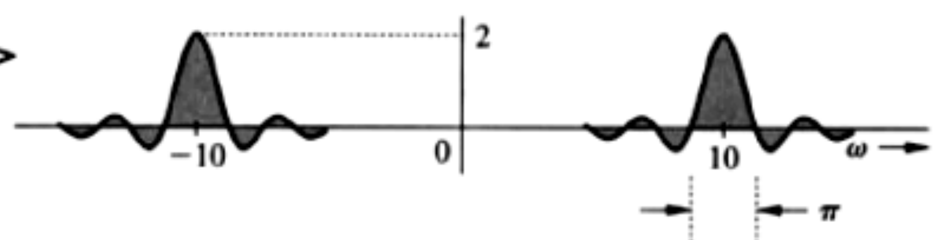


$$x(t)\cos 10t \Longleftrightarrow \tfrac{1}{2}[X(\omega+10) + X(\omega-10)]$$

$$x(t)\cos 10t \Longleftrightarrow 2\,\text{sinc}\,[2(\omega+10)] + 2\,\text{sinc}\,[2(\omega-10)]$$



$$\Longleftrightarrow$$



- Convolução

$$\boxed{x_1(t) * x_2(t) \Longleftrightarrow X_1(\omega)X_2(\omega)}$$

$$\boxed{x_1(t)x_2(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega)}$$

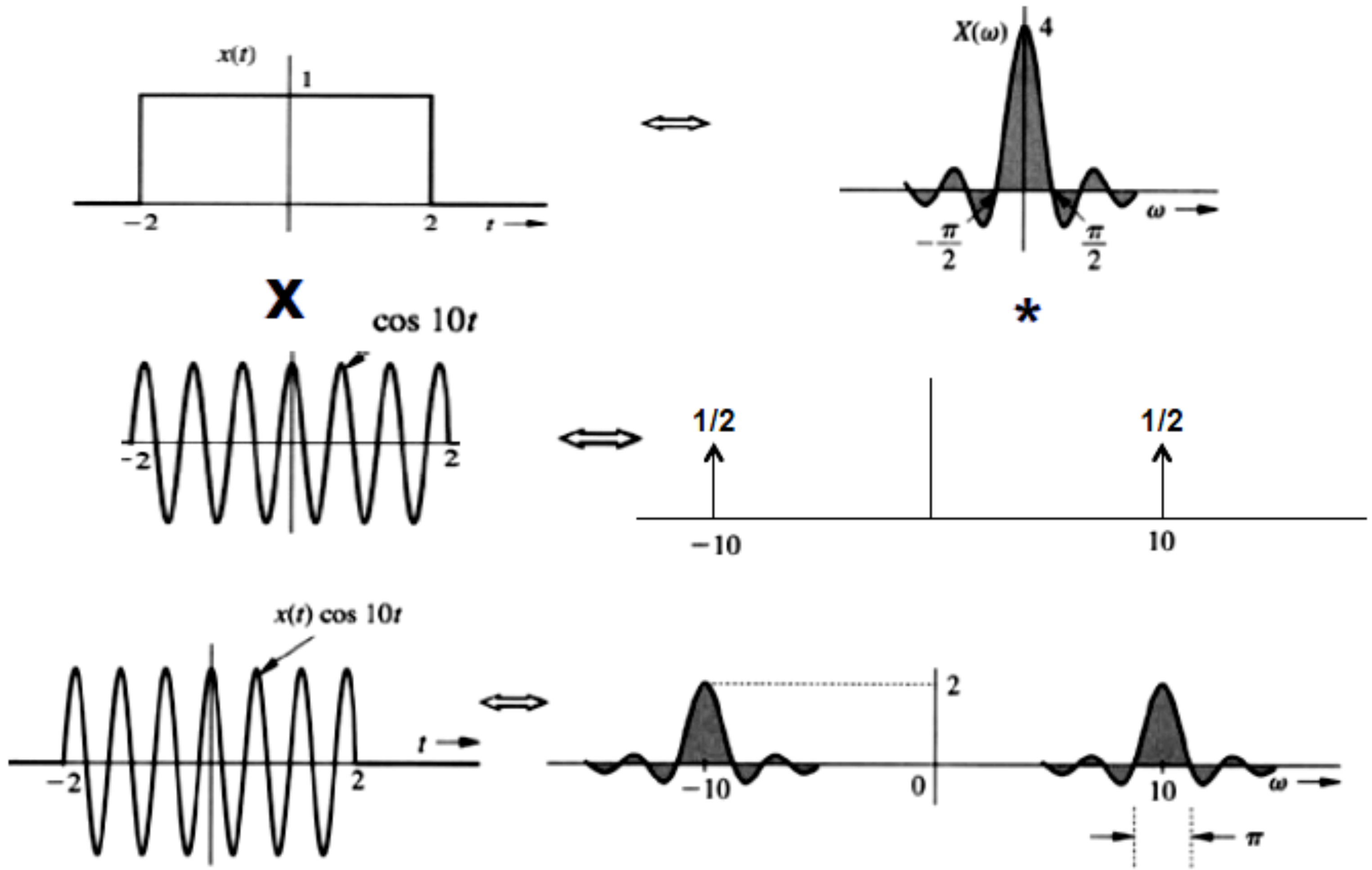
Se

$$h(t) \Longleftrightarrow H(\omega)$$

então

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

- Convolução


x(t)
1
−2
2
t →
X(ω)
4
−π/2
π/2
ω →
X
*
cos 10t
-2
2
1/2
1/2
−10
10
x(t) cos 10t
−2
2
t →
2
−10
0
10
ω →
π

- Diferenciação e integração

$$\frac{dx}{dt} \Longleftrightarrow j\omega X(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \Longleftrightarrow \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$$

- Exercício: com base nas propriedade da dualidade e escalonamento no tempo, explique o comportamento de um filtro passa-baixas, nos casos em que sua resposta impulsiva seja representada por: (a) uma função **ret**; (b) uma função **sinc**.

Ver o Exemplo 7.11, página 618 (livro Sinais e Sistemas Lineares – Lathi).

Resposta em Frequência de Sistemas LTI

- Resposta em Frequência -

- Considere um sistema com resposta impulsiva $h(t)$. À entrada deste sistema é submetido um sinal $x(t)=e^{j\omega_0 t}$. Assim:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{j\omega_0(t-\tau)}d\tau$$

$$y(t) = e^{j\omega_0 t}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{j\omega_0 \tau}d\tau}_{\text{Transformada de Fourier}} \longrightarrow y(t) = e^{j\omega_0 t}H(\omega_0)$$

$$|y(t)| = H(\omega_0)$$

$$\measuredangle y(t) = \measuredangle H(\omega_0) + \omega_0 t$$

y(t) será uma exponencial complexa de amplitude $H(\omega_0)$ e fase linear.

- Resposta em Frequência -

- Resultado similar pode ser obtido para uma entrada cossenoidal e assim, por inspeção, podemos conseguir uma aproximação da resposta em frequência, para diferentes valores de ω_0.

$$\cos(\omega_0 t) \longrightarrow h(t) \longrightarrow |H(\omega_0)|\cos(\omega_0 t + \angle H(\omega_0))$$

- Exercício computacional: considere um sistema cuja resposta impulsiva é dada por uma função ret(t/τ). Obtenha sua resposta em frequência por meio do experimento descrito acima.

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \longrightarrow \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

- Segundo a propriedade da convolução a relação entrada-saída de um sistema com resposta impulsiva $h(t)$ é:

$$h(t) \Longleftrightarrow H(\omega)$$

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

- Exercício : determine a resposta $y(t)$ a uma entrada $e^{-t}u(t)$, de um sistema cuja resposta em frequência é $H(\omega)=1/j\omega+2$.

Qual seria a resposta deste sistema se considerarmos que ele apresenta um atraso de resposta de 0.05 s? Qual a saída neste caso?

Resposta em Frequência de Sistemas LTI
Caso de Estudo: Transmissão Através de Sistemas LTI

- Transmissão sem distorção -

- Sabemos que:

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

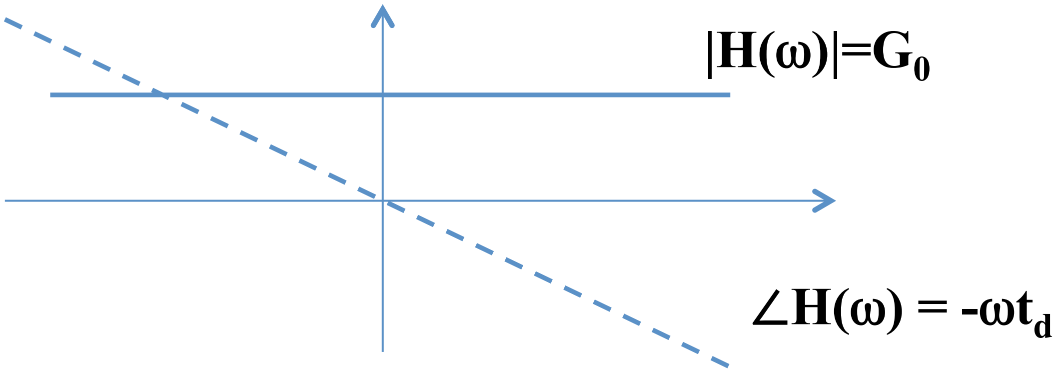
- Se $h(t)$ é a resposta de um canal não ruidoso, sem interferências, reflexões ou outros fenômenos. Este canal é dito sem distorções, sendo aceitável que apresente um atraso t_d e um ganho (ou atenuação) G_0. Tal que,

$$y(t) = G_0 x(t - t_d)$$

Com base na propriedade do deslocamento no tempo, mostre os efeitos deste sistema na frequência.

- Fase linear e atraso de grupo-

- O sistema sem distorção do exemplo anterior tem resposta em frequência $H(\omega)$ e espectros de amplitude e fase mostrados na figura abaixo:



- Se o espectro de fase é uma reta, sua angulação (atraso de grupo)

$$t_g = -\frac{d}{d\omega}\angle H(\omega)$$

é constante.

- Fase linear e atraso de grupo-

- Assim um sistema sem distorção tem atraso de grupo constante. Se o espectro de fase não é linear a derivada

$$t_g = -\frac{d}{d\omega}\angle H(\omega)$$

é uma função de ω e portanto não será constante. Implicação:

O atraso das componentes não será constante, causando distorções no sinal.