

Transformada de Laplace

IFCe – Instituto Federal do Ceará
Departamento de Telemática

Prof. Dr. Regis C. P. Marques
regismarques@ifce.edu.br



- Introdução -

- ❖ A transformada de Laplace é definida pelo par:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st} ds$$

Podemos observar uma relação direta entre a T.F. e Laplace. Esta relação existe uma vez que $s=\sigma+j\omega$. Para o caso de $\sigma=0$, temos que a transformada de Laplace se resume a transformada de Fourier.



- Introdução -

- ❖ Considerando sinais e sistemas causais, podemos simplificar nossa análise a transformada de Laplace unilateral.

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

A tabela seguinte relaciona alguns sinais e suas respectivas transformadas unilaterais.



No.	$x(t)$	$X(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
4	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	$e^{\lambda t} u(t)$	$\frac{1}{s - \lambda}$
6	$t e^{\lambda t} u(t)$	$\frac{1}{(s - \lambda)^2}$
7	$t^n e^{\lambda t} u(t)$	$\frac{n!}{(s - \lambda)^{n+1}}$
8a	$\cos bt u(t)$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$
8b	$\sin bt u(t)$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$
9a	$e^{-at} \cos bt u(t)$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + b^2}$
9b	$e^{-at} \sin bt u(t)$	$\frac{b}{(s + a)^2 + b^2}$



- Propriedades -

- ❖ Todas as propriedades definidas para a T.F (Linearidade, deslocamento no tempo, convolução, mudança de escala) são válidas para a transformada de Laplace. Sendo de fundamental importância três:

- ❖ Deslocamento no tempo

$$\begin{aligned} x(t) &\Longleftrightarrow X(s) \\ x(t - t_0) &\Longleftrightarrow X(s)e^{-st_0} \quad \text{for } t_0 \geq 0 \end{aligned}$$

- ❖ Diferenciação no tempo

$$\frac{d^n x}{dt^n} \Longleftrightarrow s^n X(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} x^{(k-1)}(0^-)$$

- ❖ Convolução

$$x_1(t) * x_2(t) \Longleftrightarrow X_1(s)X_2(s)$$



- Introdução -

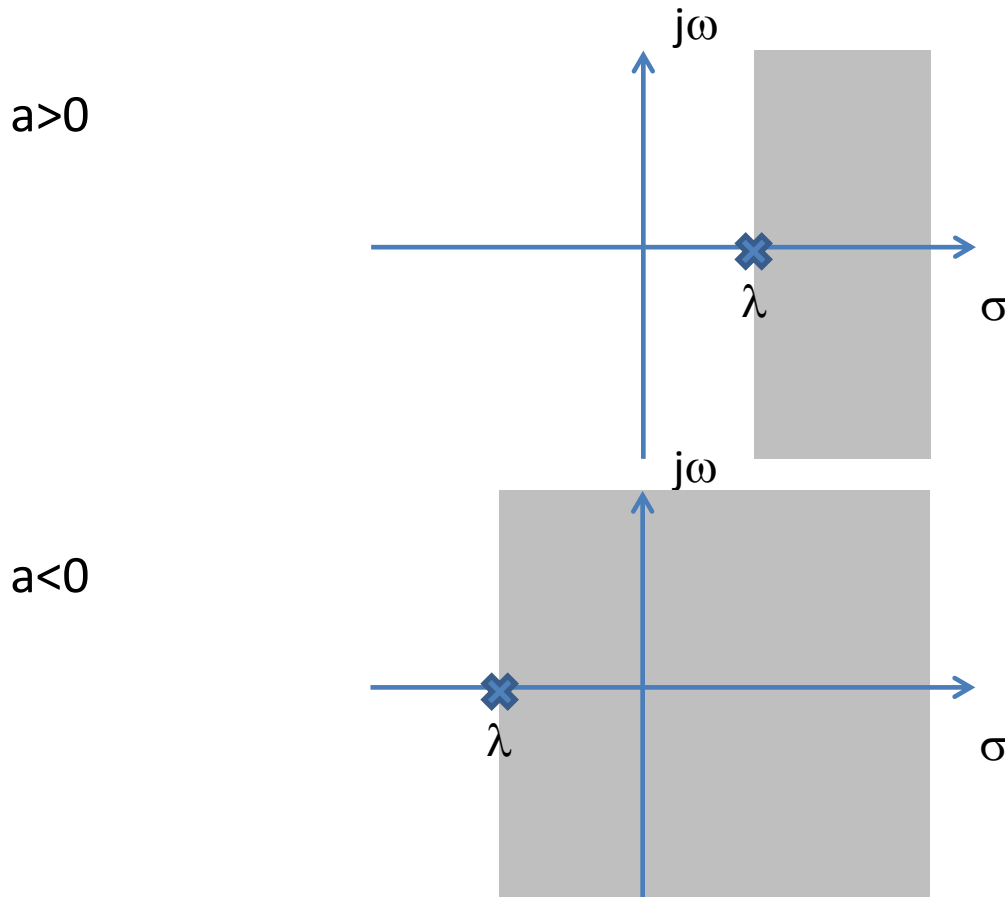
- ❖ A transformada de Laplace representa uma generalização da Transformada de Fourier, uma vez que a transformada de Laplace pode ser determinada ainda que a transformada de Fourier não exista. Isso é possível devido ao fato de definirmos uma região de convergência (RDC) para a solução da T.L.
- ❖ A RDC representa o intervalo σ para o qual a integral de Laplace é absolutamente somável.
- ❖ Ex: determine a Transformada de Laplace do sinal $x(t)=e^{\lambda t} u(t)$.

OBS: $X(\omega)$ somente existe se $\lambda < 0$, condição que não é necessária para determinar $X(s)$.



- Introdução -

- ❖ Uma vez conhecida, a RDC de $X(s)$ pode ser representada no chamado **plano s**. Como mostra a figura abaixo.



OBS: as transformadas de Fourier e Laplace são iguais se $\sigma=0$. Logo, a T.F é representada pelo eixo vertical do plano s.

OBS: a transformada de Fourier somente converge se $\sigma < 0$, ou seja, se a RDC conter o eixo $j\omega$.

Propriedades da RDC



Solução de Equações diferenciais por Laplace



- Análise de Sistemas por Laplace -

- ❖ Considerando-se a resposta de um sistema linear como:

$$y(t) = y_0(t) + x(t)*h(t)$$

A transformada de Laplace desta equação é dada por:

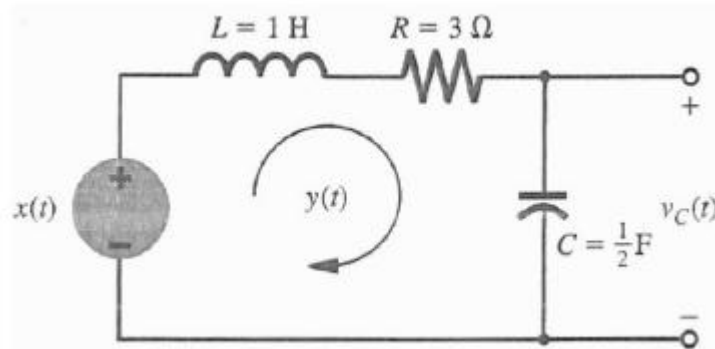
$$Y(s) = Y_0(s) + X(s)H(s)$$

Os termos da relação acima podem ser obtidos conhecendo-se a equação diferencial do sistema e suas condições iniciais.



- Análise de Sistemas por Laplace -

- ❖ Considere o exemplo já conhecido do circuito abaixo, suas condições iniciais e respectiva equação diferencial:



$$y_0(0^-) = 5, \dot{y}_0(0^-) = -15$$

$$v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) = x(t)$$

$$\frac{dy}{dt} + 3y(t) + 2 \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau = x(t)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$s^2 Y(s) \underbrace{-5s + 0}_{-5s} + 3sY(s) + 0 + 2Y(s) = sX(s)$$

$$[s^2 + 3s + 2]Y(s) \underbrace{-5s}_{-5s} = sX(s)$$

$$[s^2 + 3s + 2]Y(s) = 5s + sX(s)$$

$$Y(s) = \frac{5s}{[s^2 + 3s + 2]} + X(s) \frac{s}{[s^2 + 3s + 2]}$$

**Condições iniciais,
segundo a propriedade
da diferenciação**

- Análise de Sistemas por Laplace -

- ❖ Analisando a expressão obtida temos todos os termos necessários a análise do sistema:

$$Y(s) = \frac{5s}{[s^2 + 3s + 2]} + X(s) \frac{s}{[s^2 + 3s + 2]}$$

Polinômio característico

$$s^2 + 3s + 2$$

Função de transferência H(s)

$$\frac{s}{[s^2 + 3s + 2]}$$

**Resposta a entrada nula
 $Y_0(s)$**

$$\frac{5s}{[s^2 + 3s + 2]}$$

Polos

$$s = -2$$
$$s = -1$$

Zeros

$$s = 0$$



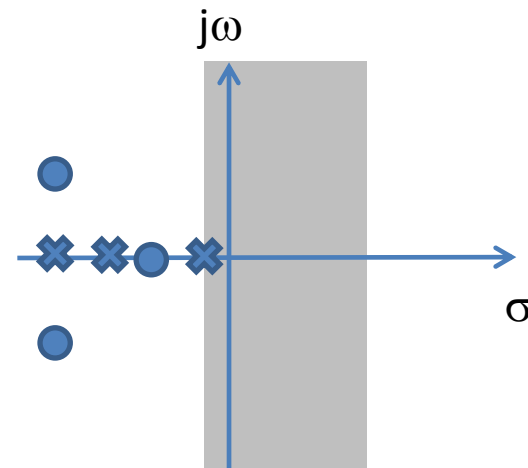
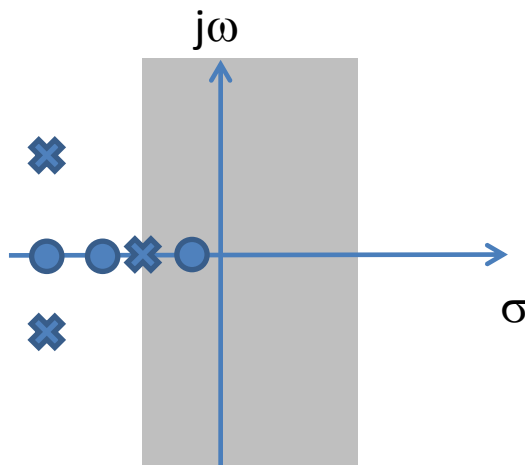
- $H(s)$ e Estabilidade -

- ❖ Assim como $h(t)$ e $H(\omega)$, $H(s)$ é uma descrição externa e portanto apenas pode definir a Estabilidade BIBO. Se $H(s)$ é uma fração própria (numerador $P(s)$ de ordem inferior a do denominador $Q(s)$) o sistema é BIBO estável, se não será BIBO instável.
- ❖ A estabilidade Interna (Assintótica) deve ser analisada a partir do polinômio característico $Q(s)$, tal que:
- ❖ O sistema é estável se: todos os polos estão no semi plano esquerdo do plano S .
- ❖ O sistema é instável se: este um polo no semi plano direito ou polos repetidos sobre o eixo $j\omega$.
- ❖ O sistema é marginalmente estável se: existem polos não repetidos sobre o eixo $j\omega$.



- Sistema Inverso -

- ❖ Se $H(s)$ é a função de transferência de um sistema, o sistema inverso é definido com sendo o sistema com função de transferência $H_i(s)=1/H(s)$.
- ❖ NOTE que os polos do sistema inverso serão os zeros do sistema original, assim como os zeros do sistema inverso serão os polos do sistema original.
- ❖ Um sistema de **fase mínima** é qualquer sistema estável e causal, cujo sistema inverso também o é.



- Transformada Inversa-

- ❖ Podemos assim determinar $y_0(t)$, $h(t)$ e $y(t)$ por meio da transformada inversa de Laplace.
- ❖ Uma vez que a solução da integral inversa é uma tarefa onerosa, fazemos uso das tabela de pares de transformada e da técnica de frações parciais.
- ❖ A técnica de frações parciais visa colocar as funções racionais em uma formar mais simples, tal que encontremos pares referentes nas tabelas de Laplace.



- Frações parciais -

- ❖ Seja uma função $F(s)=P(s)/Q(s)$. Podemos expressar esta função na forma :

$$F(s) = \sum_{i=1}^N \frac{K_i}{(s - \lambda_i)}$$

em que λ_i são as raízes de $Q(s)$ e K_i são constantes determinadas por meio da técnica de frações parciais, tal que:

$$K_i = F(s)(s - \lambda_i)|_{s=\lambda_i}$$

- ❖ Esta solução somente é possível se o grau de $Q(s)$ é maior que o grau de $P(s)$ e se todos os polos são distintos.



- Resposta a entrada nula -

- ❖ Exemplo: encontrar a resposta a entrada nula do exemplo anterior.

Para isso devemos calcular a transformada inversa de $\frac{5s}{[s^2 + 3s + 2]}$
Aplicando a técnica de frações parciais temos:

$$Y_0(s) = \frac{5s}{[s^2 + 3s + 2]} = \frac{5s}{(s + 1)(s + 2)}$$

$$Y_0(s) = \frac{K_1}{(s + 1)} + \frac{K_2}{(s + 2)} \rightarrow \begin{aligned} K_1 &= \left. \frac{5s}{(s + 2)} \right|_{s=-1} = \frac{5(-1)}{(-1 + 2)} = -5 \\ K_2 &= \left. \frac{5s}{(s + 1)} \right|_{s=-2} = \frac{5(-2)}{(-2 + 1)} = 10 \end{aligned}$$

Fazendo uso da tabela de transformadas, temos

$$y_0(t) = [-5e^{-t} + 10e^{-2t}]u(t)$$

- Resposta impulsiva -

- ❖ Repetindo o processo para $H(s)$ obtemos $h(t)$.

$$H(s) = \frac{s}{[s^2 + 3s + 2]} = \frac{s}{(s + 1)(s + 2)}$$

$$H(s) = \frac{K_1}{(s + 1)} + \frac{K_2}{(s + 2)} \rightarrow$$
$$K_1 = \left. \frac{s}{(s + 2)} \right|_{s=-1} = \frac{(-1)}{(-1 + 2)} = -1$$
$$K_2 = \left. \frac{s}{(s + 1)} \right|_{s=-2} = \frac{(-2)}{(-2 + 1)} = 2$$

$$h(t) = [-e^{-t} + 2e^{-2t}]u(t)$$



- Resposta em estado nulo -

- ❖ Caso seja conhecida a forma de onda da fonte $x(t)$, podemos determinar a resposta em estado nula e assim a resposta total do sistema.
- ❖ Consideremos que neste caso $x(t)=10 u(t)$. Segundo a tabela de transformadas temos: $X(s)=10/s$, logo:

$$X(s)H(s) = \frac{10}{s} \frac{s}{[s^2 + 3s + 2]} = \frac{10}{(s+1)(s+2)}$$

$$X(s)H(s) = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+2)} \rightarrow \begin{aligned} K_1 &= \left. \frac{10}{(s+2)} \right|_{s=-1} = \frac{10}{(-1+2)} = 10 \\ K_2 &= \left. \frac{10}{(s+1)} \right|_{s=-2} = \frac{10}{(-2+1)} = -10 \end{aligned}$$

$$x(t) * h(t) = 10[e^{-t} - e^{-2t}]u(t)$$

- Resposta total-

❖ A resposta total do sistema $y(t) = y_0(t) + x(t)*h(t)$ é:

$$y(t) = [-e^{-t} + 2e^{-2t}]u(t) + 10[e^{-t} - e^{-2t}]u(t)$$



- Frações parciais -

- ❖ A solução adotada até aqui somente é possível se o grau N de $Q(s)$ é maior que o grau M de $P(s)$ e se todos os polos são distintos. Se não, devemos proceder da seguinte forma:

- 1) Se $M \geq N$ devemos realizar uma divisão polinomial, tal que:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = G(s) + \frac{R(s)}{Q(s)}$$

Exemplo:

$$F(s) = \frac{(s+5)(s+4)}{[s^2 + 3s + 2]} \quad \begin{array}{r} s^2 + 9s + 20 \overline{) s^2 + 3s + 2} \\ -s^2 - 3s - 2 \\ \hline 6s + 18 \end{array}$$

$$F(s) = 1 + \frac{6s + 18}{s^2 + 3s + 2}$$



- Frações parciais -

2) Se existem polos repetidos, temos:

$$F(s) = \frac{P(s)}{(s - \lambda)^r (s - \alpha_1)(s - \alpha_2) \cdots (s - \alpha_j)}$$

Em que λ é um polo que se repete r vezes e α_j são os polos que não se repetem. Temos então,

$$F(s) = \sum_{m=1}^r \frac{a_{m-1}}{(s - \lambda)^{r-m+1}} + \sum_{i=1}^j \frac{K_i}{(s - \alpha_i)}$$

Os termos K_i são calculados como visto. Os termos a_{m-1} são calculados como

$$a_j = \frac{1}{j!} \frac{d^j}{ds^j} [(s - \lambda)^r F(s)] \Big|_{s=\lambda}$$



Circuito Transformado



- Circuito transformado -

- ❖ A solução de equações diferenciais pode ser substituída pela análise do circuito transformado. O circuito transformado nada mais é do que a representação dos elementos por meio de suas impedâncias, neste caso os estados iniciais de capacitores e indutores são vistos como fontes de tensão ou corrente, conforme seja mais conveniente.
- ❖ A representação por fontes de tensão é mais comum, porém no caso do circuito ter uma fonte de corrente $x(t)$, a representação dos estados por fontes de corrente será mais conveniente.
- ❖ As fontes de tensão são colocadas em série com a impedância e as de corrente são postas em paralelo. Devemos ter atenção com as polarizações das fontes.



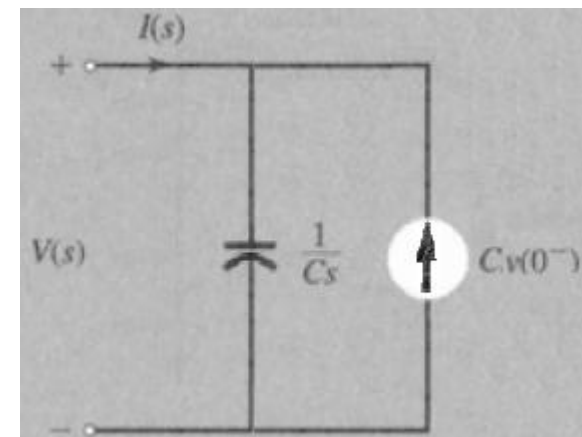
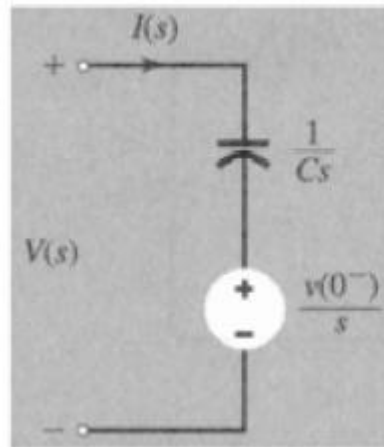
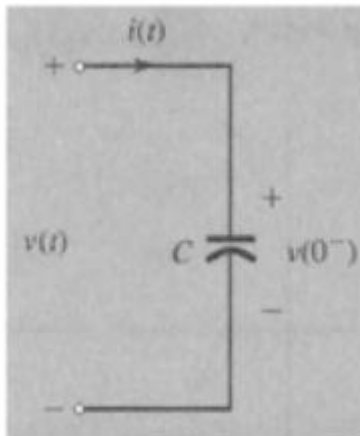
- Circuito transformado -

$$Z_C = \frac{1}{Cs}$$

$$i(t) = C \frac{dv}{dt}$$

$$I(s) = C[sV(s) - v(0^-)]$$

$$V(s) = \frac{1}{Cs} I(s) + \frac{v(0^-)}{s}$$



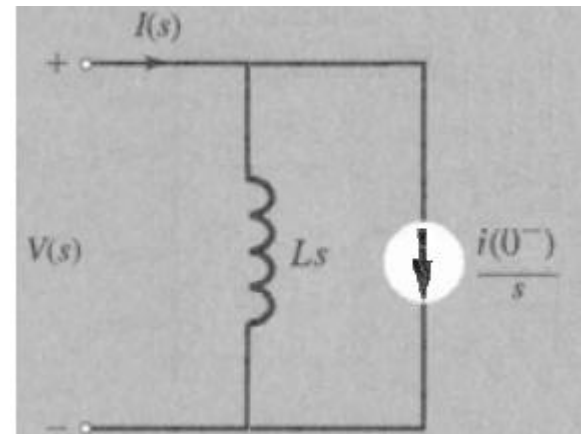
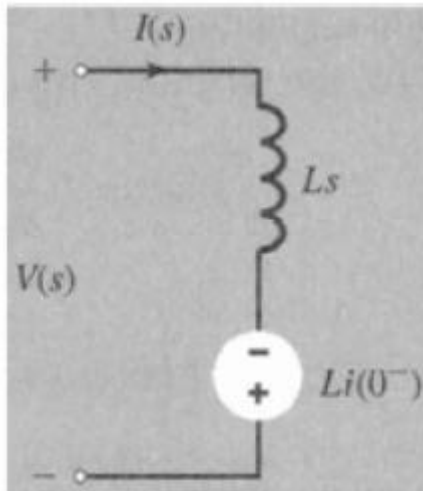
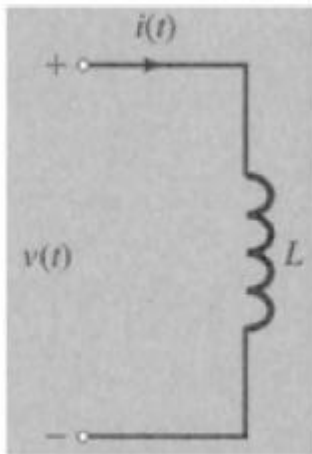
- Circuito transformado -

$$Z_L = Ls$$

$$v(t) = L \frac{di}{dt}$$

$$V(s) = L[sI(s) - i(0^-)]$$

$$= LsI(s) - Li(0^-)$$

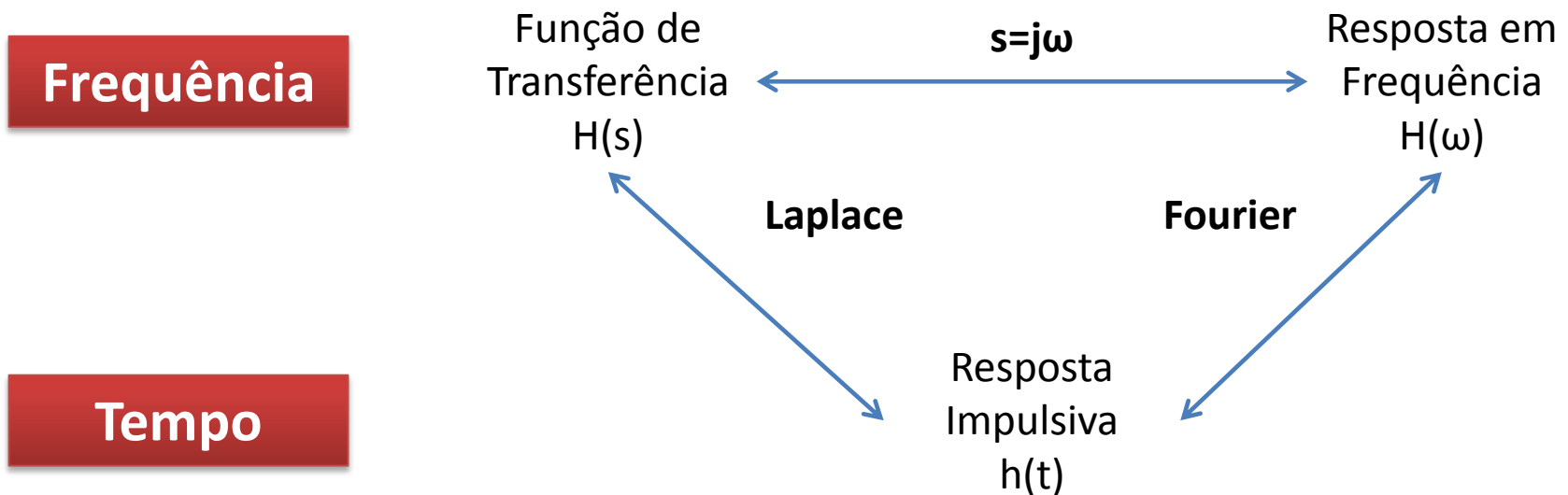


Função de Transferência



- Função de Transferência -

- ❖ A análise e modelagem de sistemas consiste do conhecimento destas três funções e das relações entre elas. Em geral, considera-se o sistema relaxado e qualquer descrição do sistema é suficiente se conhecemos estas funções



- Função de Transferência -

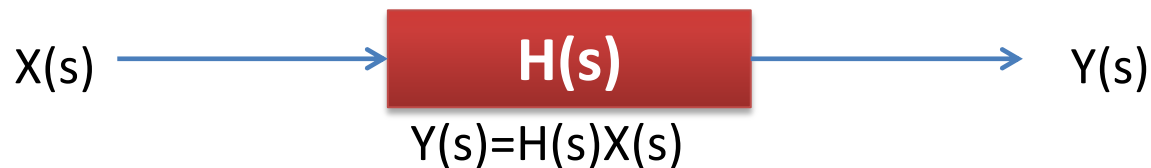
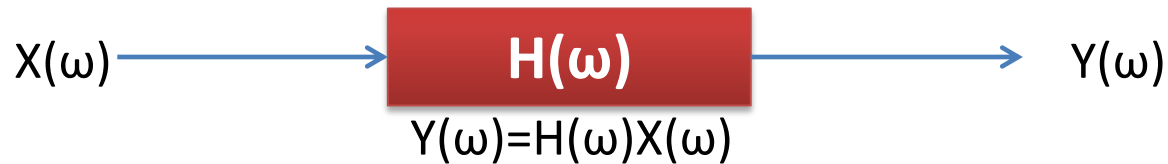
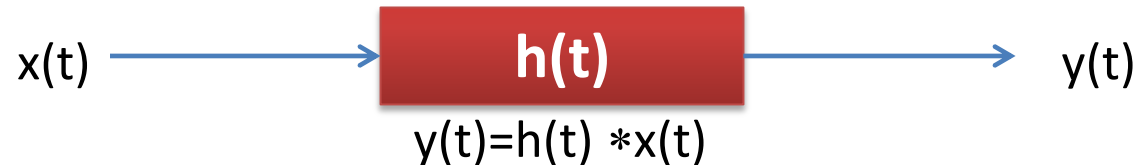
❖ Podemos considerar as seguintes relações entre as funções de um sistema

Propriedade	$h(t)$	$H(\omega)$	$H(s)$
Análise de Estabilidade	BIBO	BIBO	Assintótica (se $Q(s)$ é observável)
Se o sistema é estável	É absolutamente integrável	Existe	Polos no SPE
Causalidade	$h(t)=0, t<0$	-	RDC $\Re\{\sigma\} > a$



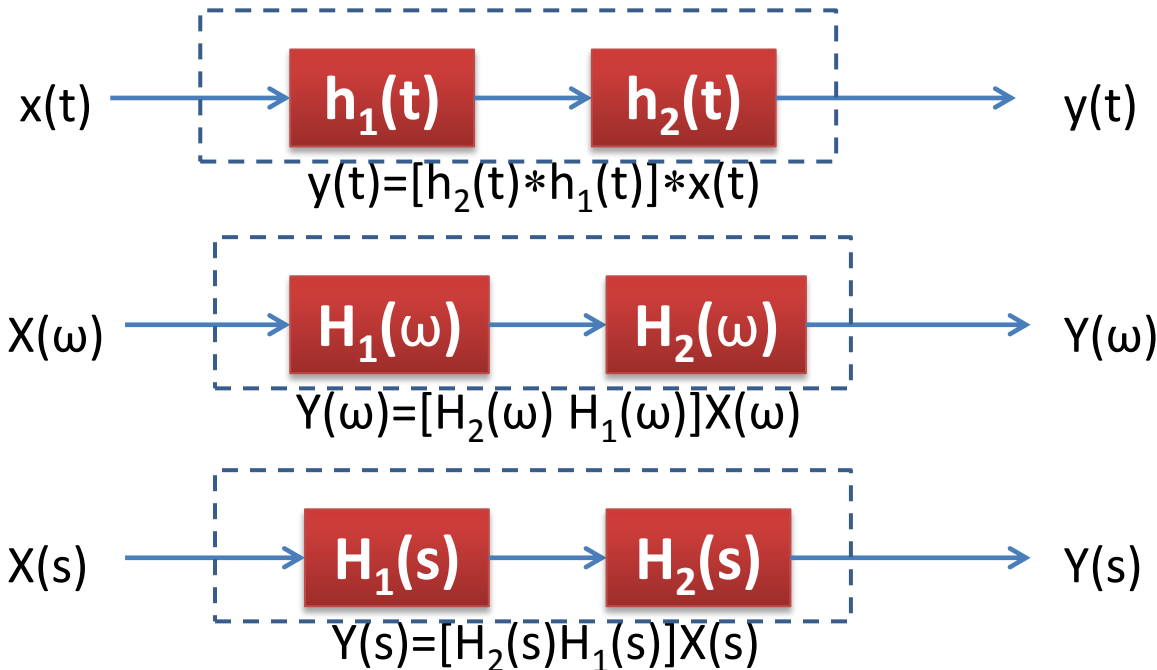
- Representação por diagramas-

- ❖ Um sistema pode ser representado com um diagrama, conhecendo-se uma das suas funções.



- Associação Série (cascata)-

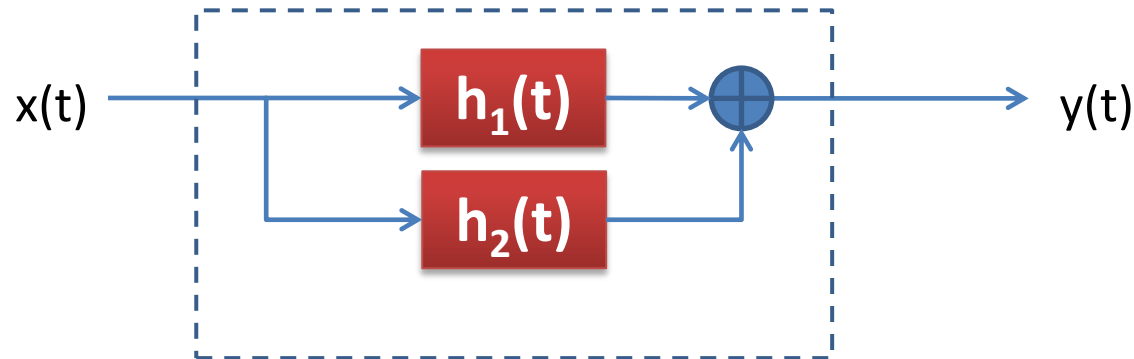
- ❖ O pontilhado indica que a relação entrada-saída pode ser vista como se exista um sistema único. Isso é comum em filtros com vários estágios.



As expressões entre colchetes [] podem ser interpretadas como a forma de se determinar o sistema equivalente.

- Associação Paralelo -

- ❖ A associação paralelo também é vista como um sistema único. Um exemplo é o uso de banco de filtros ou equalizadores.



$$y(t)=[h_2(t)+h_1(t)]*x(t)$$

$$Y(\omega)=[H_2(\omega)+H_1(\omega)]X(\omega)$$

$$Y(s)=[H_2(s)+H_1(s)]X(s)$$

Realização de sistemas



- Representação por integradores-

- ❖ As duas operações singulares para realização de sistemas são: diferenciação ou integração. Sistemas lineares, preferencialmente, são modelados por equações diferenciais. Porém, em se tratando de circuitos, diferenciadores são sistemas instáveis, sobre tudo em regime AC.
- ❖ Integradores apresentam problemas em regime DC, porém sua resposta AC tende a ser estável. Por esta razão, a implementação de sistemas a partir de sua função de transferência é feita utilizando-se circuitos integradores.



- Representação por integradores-

❖ Seja $H(s)$ uma função transferência de um sistema:

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_0s^3 + b_1s^2 + b_2s + b_3}{s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3}$$

em que $M \leq N$. Esta representação por meio de uma razão de polinômios deriva da propriedade da diferenciação. Realizando-se a operação

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \times \left(\frac{s^{-N}}{s^{-N}} \right)$$

temos a função de transferência do sistema representada por meio de operações de integração.

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1/s + b_2/s^2 + b_3/s^3}{1 + a_1/s + a_2/s^2 + a_3/s^3}$$

Lembre-se que um circuito integrador tem resposta impulsiva $h(t)=u(t)$ e que $\mathcal{L}\{u(t)\}=1/s$.



- Representação por integradores-

❖ Uma vez que

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{b_0 + b_1/s + b_2/s^2 + b_3/s^3}{1 + a_1/s + a_2/s^2 + a_3/s^3}$$

temos

$$Y(s) \left[1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3} \right] = X(s) \left[b_0 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \frac{b_3}{s^3} \right]$$

logo

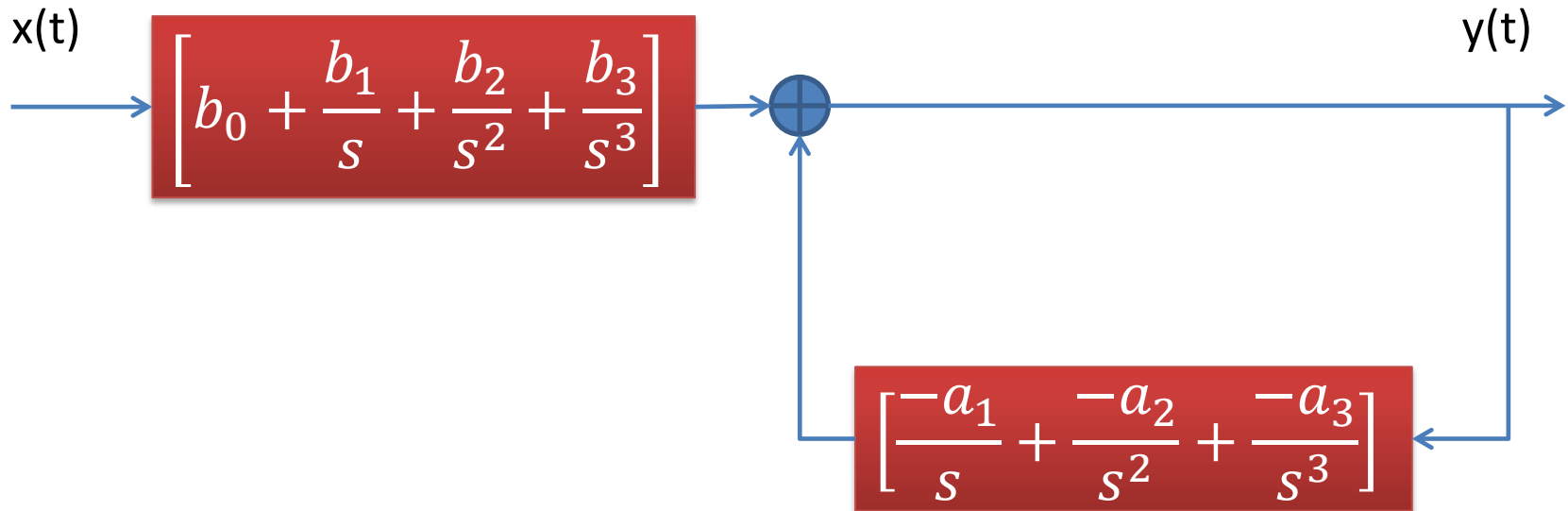
$$Y(s) = X(s) \left[b_0 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \frac{b_3}{s^3} \right] - Y(s) \left[\frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3} \right]$$

A relação entrada-saída do sistema é modelada por uma rede de circuitos integradores com ganhos determinados pelos coeficientes de $Q(s)$ e $P(s)$.



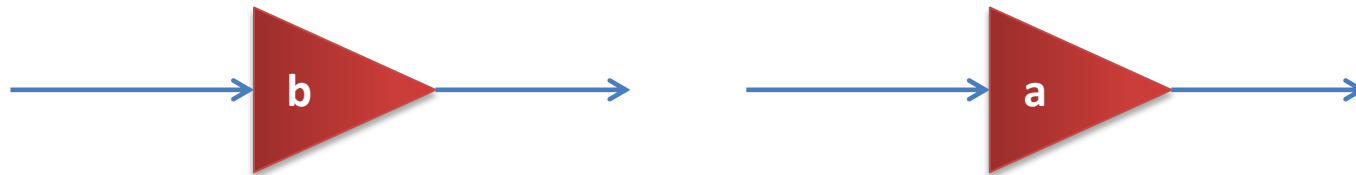
- Representação por integradores-

$$Y(s) = X(s) \underbrace{\left[b_0 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \frac{b_3}{s^3} \right]}_{H_1(s)} - Y(s) \underbrace{\left[\frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3} \right]}_{H_2(s)}$$



- Representação por integradores-

- ❖ Nesta representação os coeficientes são ganhos, e portanto representados, por

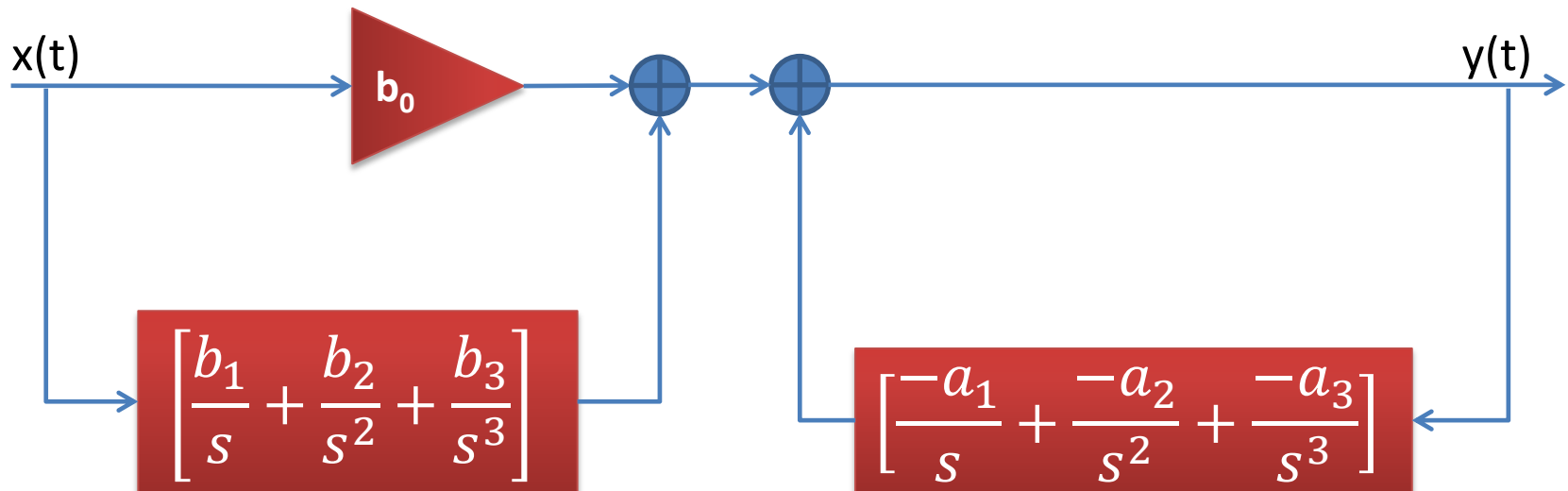


- ❖ Um integrador é um termo $1/s$. Um termo $1/s^3$, por exemplo, é a associação série de 3 integradores



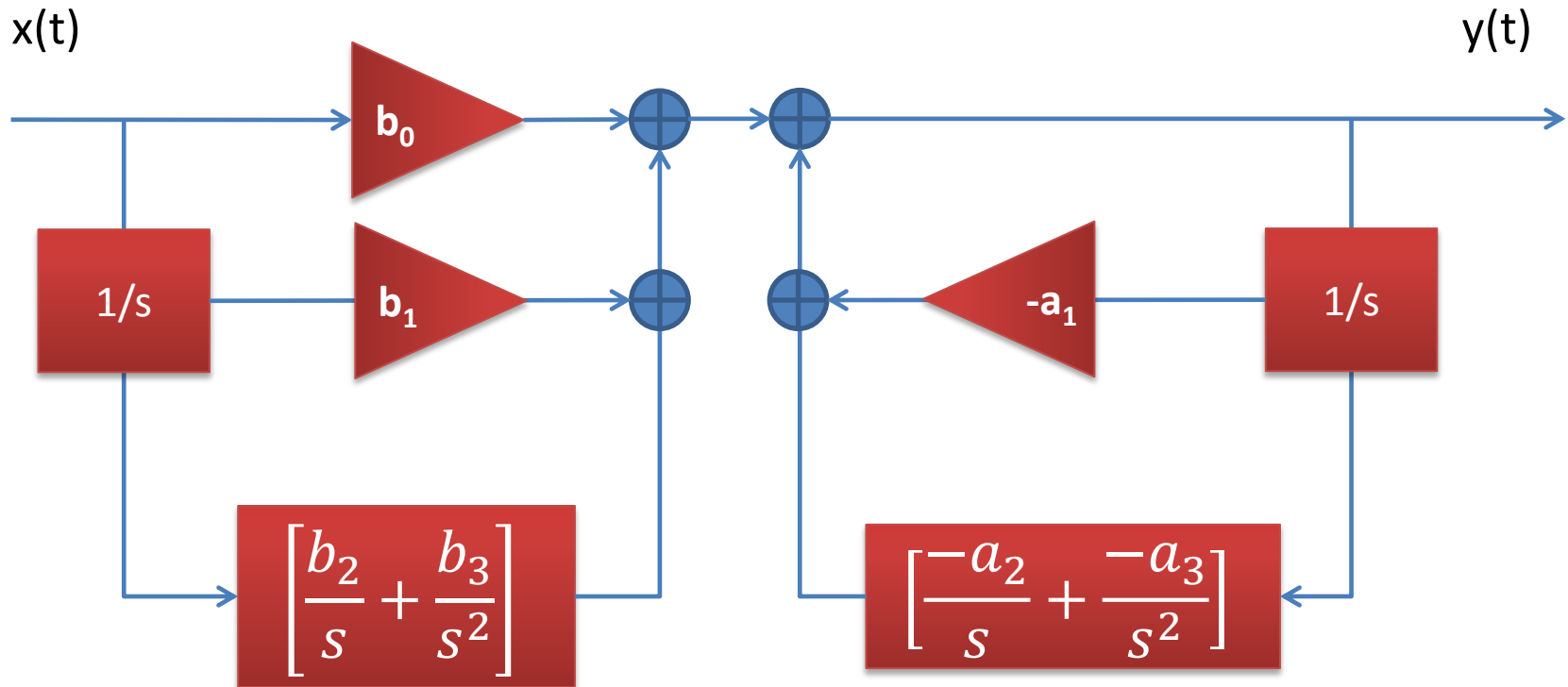
- Representação por integradores-

Expandindo o sistema para que cada coeficiente seja representado por um bloco de ganho específico, temos:



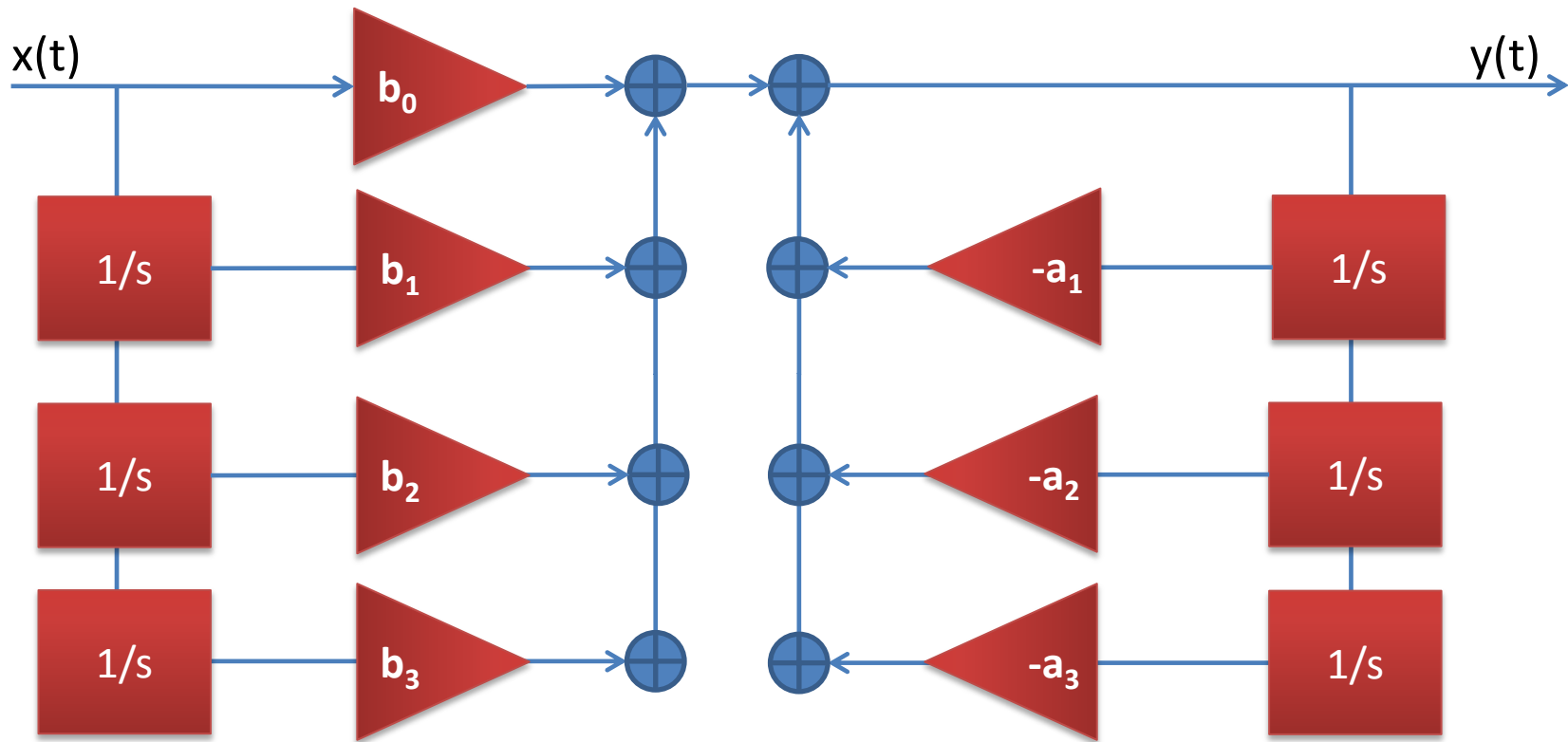
- Representação por integradores-

Colocando-se o termo $1/s$ em evidência, temos:



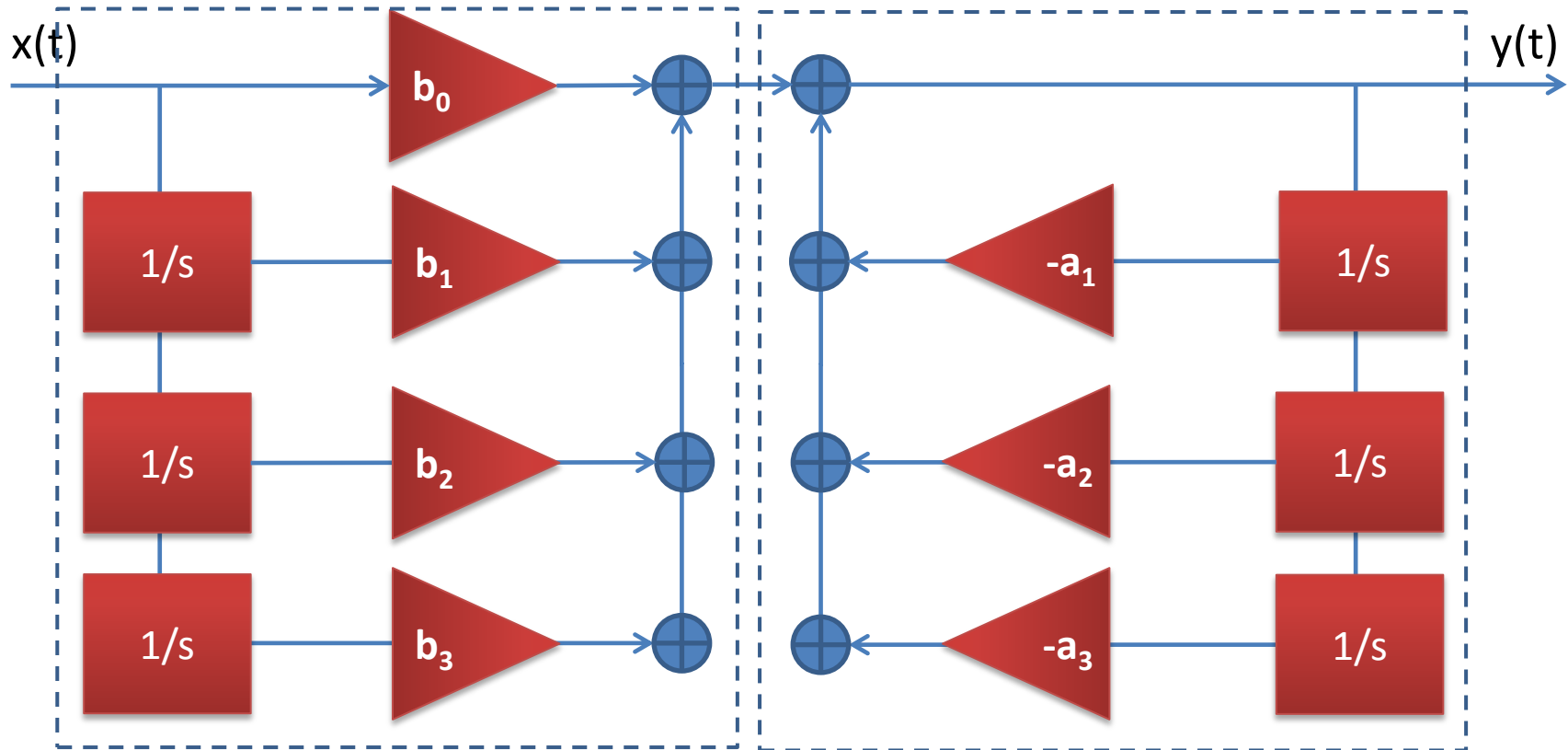
- Representação por integradores-

Esta representação é dita Forma Direta I. Devemos observar, que neste caso, serão necessários $2N$ circuitos integradores e dois somadores:



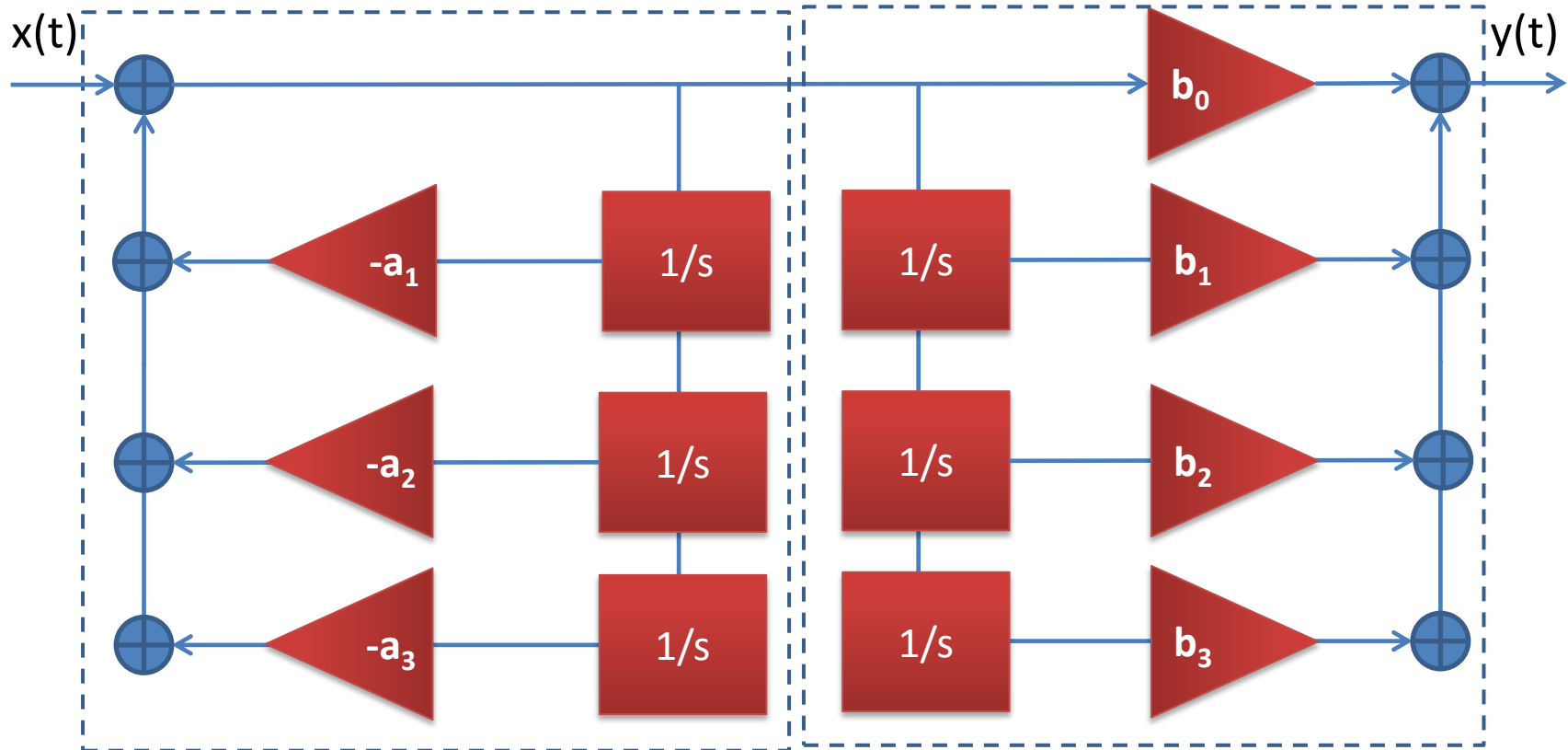
- Representação por integradores-

Para se reduzir o número de integradores necessários, faz-se uso da representação Canônica. Definimos dois subsistemas H_1 e H_2 e invertemos suas posições.



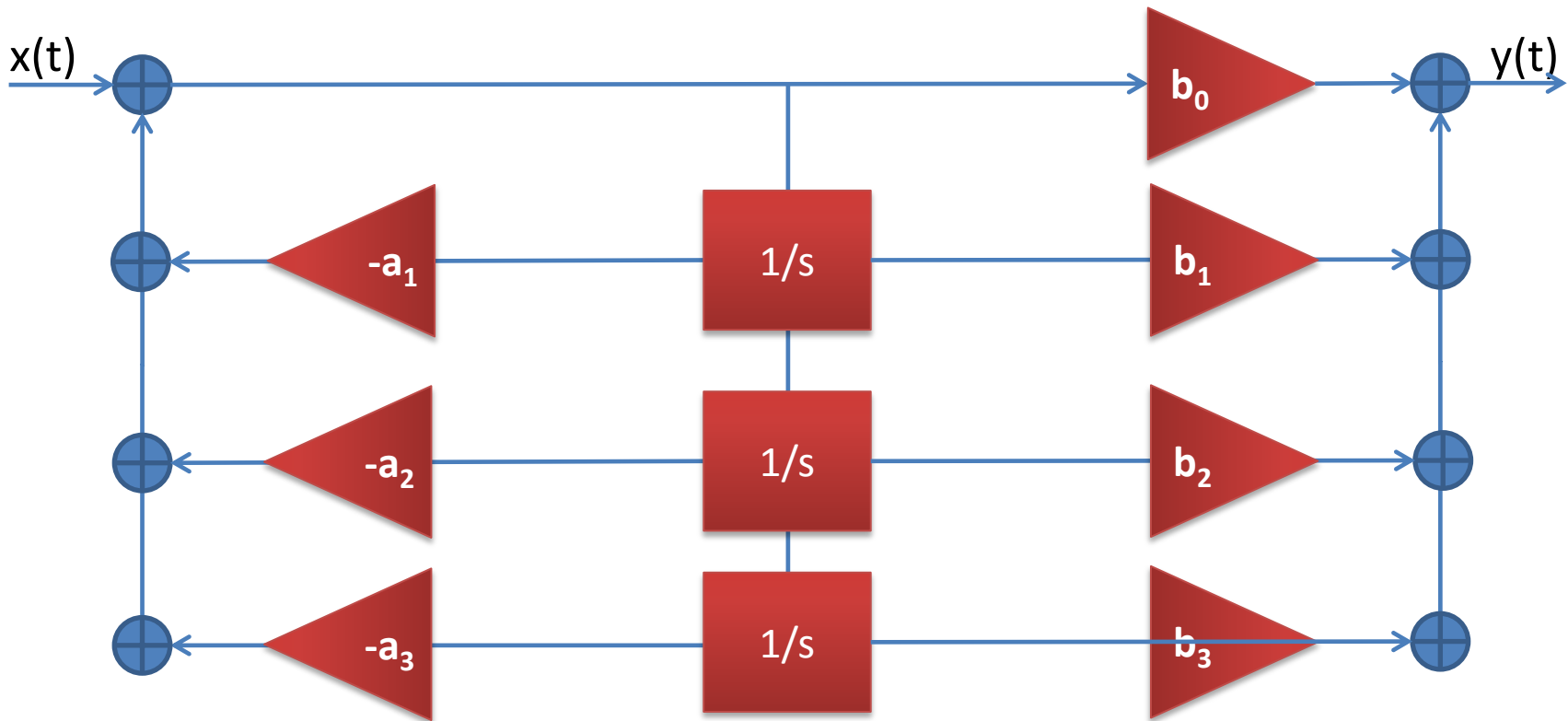
- Representação por integradores-

Note que as entradas duas redes de integradores são iguais, e por isso, suas saídas são exatamente iguais também. Podemos utilizar uma única rede de integradores.



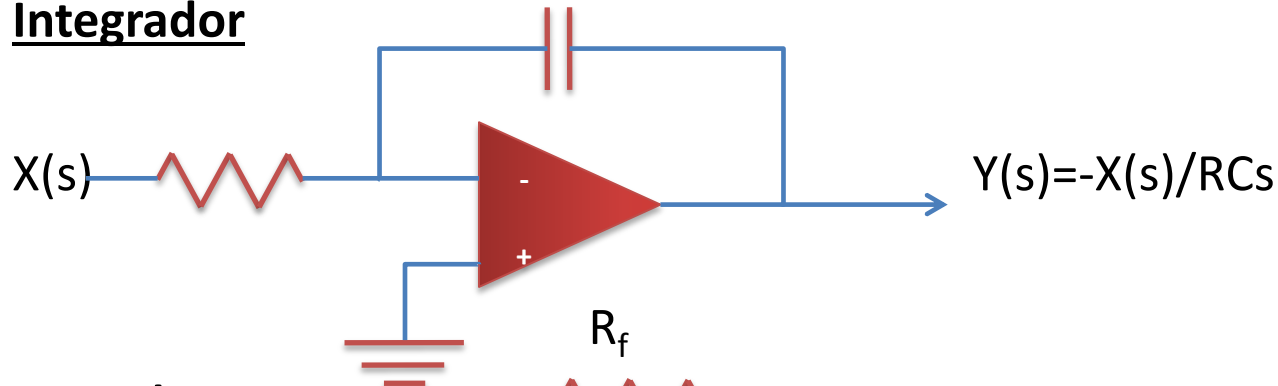
- Representação por integradores-

Representação na forma canônica.

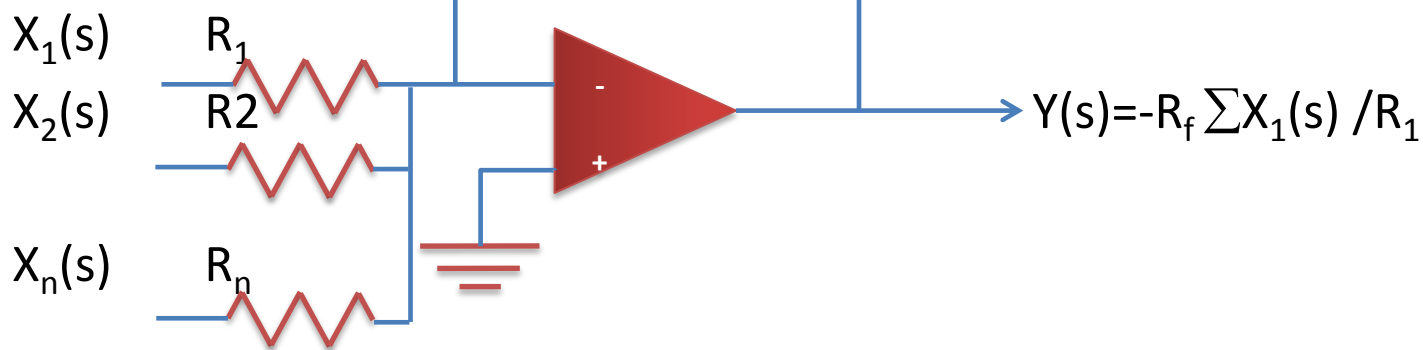


- Realização -

Integrador



Somador



Inversor: o inversor é um somador com uma única entrada e, usualmente, resistências iguais para se obter ganho -1.