

**INSTITUTO FEDERAL**  
**CEARÁ**  
**Campus Fortaleza**

ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO  
SISTEMAS LINEARES



## Sumário

1.	Transitório: Resposta ao impulso .....	6
1.1.	Circuito 1 – Circuito RC Série .....	6
1.2.	Circuito 2 – Circuito RL Série .....	8
1.3.	Circuito 3 - Circuito LC Paralelo Com R Em Série .....	9
1.4.	Circuito 4 – RLC série .....	10
1.5.	Circuito 5 – RLC paralelo sem parâmetros .....	12
2.	Transitório: Resposta ao degrau de tensão .....	14
2.1.	Circuito 1 – Circuito RC Série .....	14
2.2.	Circuito 2 – Circuito RL Série .....	15
2.3.	Circuito 3 - Circuito LC Paralelo Com R Em Série .....	15
2.4.	Circuito 4 – RLC Série .....	16
2.5.	Circuito 5 – RLC Paralelo Sem Parâmetros .....	17
3.	Entrada senoidal .....	18
3.1.	Circuito 1 – Circuito RC Série .....	18
3.1.1.	Entrada senoidal com $\omega = 1\text{rad/s}$ .....	18
3.1.2.	Entrada senoidal com $\omega = 5\text{rad/s}$ .....	19
3.1.3.	Entrada senoidal com $\omega = 10\text{rad/s}$ .....	20
3.2.	Circuito 2 – Circuito RL Série .....	22
3.2.1.	Entrada senoidal com $\omega = 1\text{rad/s}$ .....	22
3.2.2.	Entrada senoidal com $\omega = 5\text{rad/s}$ .....	23
3.2.3.	Entrada senoidal com $\omega = 10\text{rad/s}$ .....	24
3.3.	Circuito 3 - Circuito LC Paralelo Com R Em Série .....	26
3.3.1.	Entrada senoidal com $\omega = 1\text{rad/s}$ .....	26
3.3.2.	Entrada senoidal com $\omega = 5\text{rad/s}$ .....	27
3.3.3.	Entrada senoidal com $\omega = 10\text{rad/s}$ .....	28
3.4.	Circuito 4 - Circuito RLC série .....	30
3.4.1.	Entrada senoidal com $\omega = 1\text{rad/s}$ .....	30
3.4.2.	Entrada senoidal com $\omega = 5\text{rad/s}$ .....	31
3.4.3.	Entrada senoidal com $\omega = 10\text{rad/s}$ .....	32
3.5.	Circuito 5 - Circuito RLC sem parâmetros .....	34
3.5.1.	Entrada senoidal com $\omega = 1\text{rad/s}$ .....	34
3.5.2.	Entrada senoidal com $\omega = 5\text{rad/s}$ .....	35
3.5.3.	Entrada senoidal com $\omega = 10\text{rad/s}$ .....	36
4.	Conclusão .....	39
5.	Bibliografia .....	41



## **Introdução**

Podemos dizer que no estudo de sinais um dos assuntos mais importantes é o estudo da resposta ao impulso de tensão, estudar o comportamento de um determinado sistema quando submetido a essa condição de entrada ajuda-nos a entender como ele se comportará quando submetido a outros tipos de sinais.

Já o estudo do degrau de tensão (um sinal que sai de zero a um em um determinado instante de tempo) nos ajuda a refletir sobre a reação do sistema quando do acionamento de uma chave, é uma perfeita equivalência.

Finalmente ao estudar a resposta de certos circuitos à entrada senoidal, podemos ter uma ideia de como esses circuitos agem sobre entradas periódicas, ao mudar a frequência dessa senóide podemos perceber também qual a influencia dos componentes ativos (e seu arranjo no circuito) sobre determinadas faixas de frequência.

Esse trabalho busca exatamente analisar esses aspectos nos circuitos elétricos propostos: resposta ao impulso, resposta ao degrau de tensão e resposta a entrada senoidal. Todos os circuitos foram modelados matematicamente e simulados no software de simulação de circuitos elétricos Multisim. Utilizou-se também a ferramenta matemática WolframAlpha para plotar os gráficos das deduções matemáticas para fins de comparação.

## 1. Transitório: Resposta ao impulso

A primeira parte do trabalho consiste na simulação dos circuitos solicitados e a observação da reação destes circuitos à entrada de um impulso de tensão. Primeiramente, faz-se necessário relembrar a definição de impulso unitário. A função impulso é definida por (LATHI,B.P.) e tem a seguinte forma:

$$\delta(t) = 0, \text{ para } t \neq 0$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1.1)$$

De forma resumida esse sinal tem uma grande amplitude durante pouquíssimo tempo quando  $t = 0$ . A representação desse sinal em termos práticos é impossível, mas como o experimento é somente uma simulação bastou-se apenas realizar algumas alterações em um gerador de onda quadrada para que um sinal próximo ao impulso fosse obtido.

Ajustou-se o período da onda para 10 segundos, tempo bastante superior ao período do transitório de forma que um novo pulso não seria gerado dentro do tempo do transitório. Modificou-se a largura de pulso para 1ms, ao passo que a amplitude foi alterada para 1kV. Assim, em  $t = 0$  um pulso de tensão de 1KV será gerado durante 1ms, ao calcular a área sob a região retangular que o pulso representa obtemos o valor 1, que de acordo com a Equação 1.1 acima é o esperado.

Para todos os circuitos buscou-se fazer uma análise matemática para modelar o comportamento esperado deles ao se introduzir um impulso de tensão. Para isso utilizou-se a fórmula, encontrada em (LATHI,B.P.):

$$h(t) = b_0 \delta(t) + \text{modos característicos}$$

ou ainda

$$h(t) = b_0 \delta(t) + [P(D)y_n(t)]u(t) \quad (1.2)$$

A resposta a um impulso  $h(t)$  de um circuito é igual aos modos característicos, determinados a partir da equação característica proveniente da equação diferencial do circuito, somados a um impulso de amplitude  $b_0$ . Na maioria dos casos  $b_0$  será igual a 0 e um impulso não será visualizado na saída do circuito. É importante lembrar que  $b_0$  só será diferente de zero se o grau da maior derivada do lado direito da equação diferencial do circuito for igual ao grau da maior derivada do lado esquerdo.  $P(D)$  é a equação que acompanha o termo da entrada  $x(t)$ .

### 1.1. Circuito 1 – Circuito RC Série

O primeiro circuito simulado foi um circuito RC série. A Figura 1 fornece uma visão geral do circuito montado.

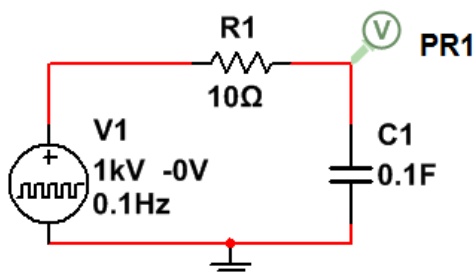


Figura 1 – Circuito RC série

Podemos realizar uma análise matemática do circuito para confirmar o comportamento esperado. Primeiramente descobrimos a equação diferencial que representa esse circuito.

Para tanto podemos aplicar lei dos nós ao nó PR1 logo acima do capacitor, com isso sabemos que:

$$i_c(t) = \frac{x(t) - V_c(t)}{R} \quad (1.3)$$

Mas sabemos também que:

$$i_c(t) = C \frac{dV_c}{dt} \quad (1.4)$$

Combinando as equações 1.3 e 1.4, utilizando o operador D para simplificar a derivada e substituindo  $V_c(t)$  por  $y(t)$ , teremos:

$$CDy = \frac{x - y}{R}$$

Finalmente, fazendo os necessários ajustes, a equação diferencial que representa este circuito será:

$$\left(D + \frac{1}{RC}\right)y(t) = \frac{x(t)}{RC}$$

*aplicando os valores finais*

$$(D + 1) = x(t) \quad (1.5)$$

Aplicando as condições iniciais  $y(t) = 0$  e  $y'(t) = 1$  à equação característica  $\lambda + 1 = 0$  e percebendo que  $P(D) = 1$ , a partir da equação 1.2 encontramos que a resposta esperada ao impulso nesse circuito será:

$$h(t) = (1 e^{-t})V \text{ para } t \geq 0$$

Isso quer dizer que a resposta esperada ao impulso de tensão nesse circuito é uma exponencial decrescente começando em 1V. Em outras palavras, em  $t = 0$  o capacitor será carregado muito rapidamente para 1V e a partir daí ele se descarregará aos poucos sobre o resistor do circuito.

A Figura 2 mostra o gráfico proveniente do experimento. Podemos ver que ele condiz com o esperado, o formato é de uma exponencial começando em 1 V e tendendo a zero a medida que t tende a infinito.

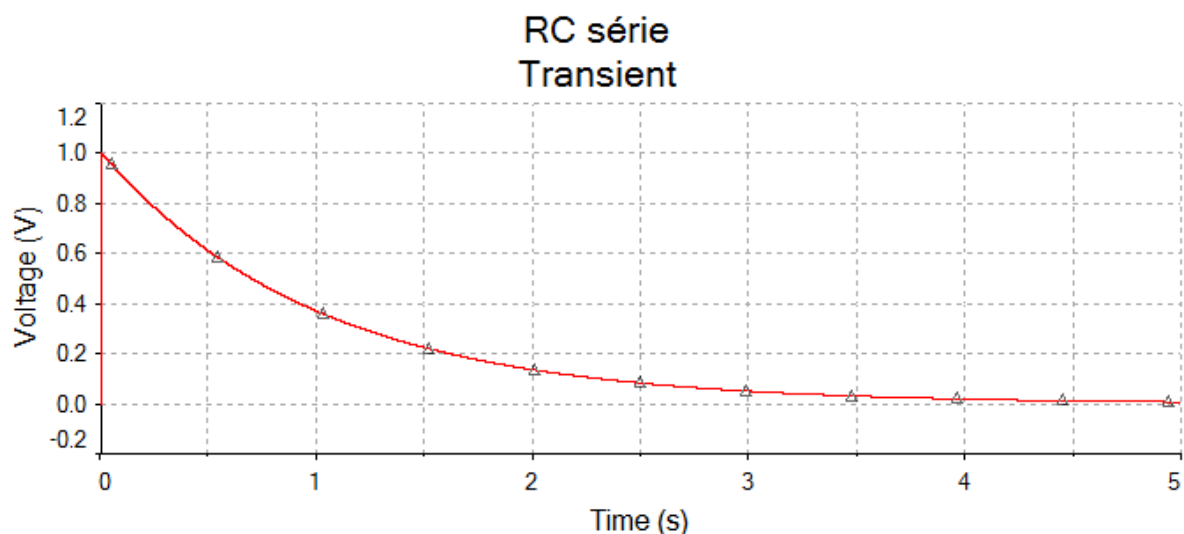


Figura 2 – Gráfico da simulação de 0 a 5 segundos

## 1.2. Circuito 2 – Circuito RL Série

O próximo circuito simulado foi um circuito RL série. A *Figura 3* fornece uma visão do circuito montado.

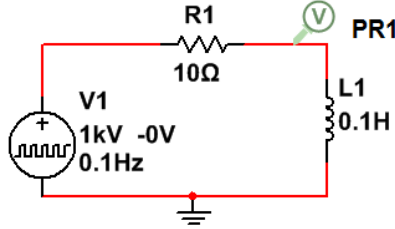


Figura 3 – Circuito RL série

Analogamente ao circuito anterior, realizemos uma análise matemática para determinar a resposta ao impulso de tensão. Primeiramente descobrimos a equação diferencial que representa esse circuito. Aplicaremos novamente a lei dos nós ao nó logo acima do indutor, assim sabemos que:

$$il(t) = \frac{x(t) - Vl(t)}{R} \quad (1.6)$$

Mas sabemos também que:

$$il(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t Vl(t) \quad (1.7)$$

Combinando as equações 1.6 e 1.7, utilizando o operador D para simplificar a integral e substituindo  $Vl(t)$  por  $y(t)$ , temos:

$$\frac{y}{LD} = \frac{x - y}{R}$$

Finalmente, fazendo os necessários ajustes, a equação diferencial que representa este circuito será:

$$\left(D + \frac{R}{L}\right)y(t) = Dx(t)$$

*aplicando os valores finais*

$$(D + 100) = Dx(t) \quad (1.8)$$

Aplicando as condições iniciais  $y(t) = 0$  e  $y'(t) = 1$  à equação característica  $\lambda + 100 = 0$  e percebendo que  $P(D) = D$ , encontramos que a resposta esperada ao impulso nesse circuito será:

$$h(t) = (\delta(t) - 100 e^{-100t})V \text{ para } t \geq 0$$

Observe que como o maior grau de D em ambos os lados da equação diferencial era igual a 1,  $b_0$  será igual a 1 e um impulso de tensão é esperado na saída, juntamente com os modos característicos que nesse caso é uma exponencial começando em -100 e caindo até zero (de forma mais rápida que o circuito do capacitor, pois o expoente de  $e$  é -100). O impulso de saída tem mesma amplitude do de entrada, 1 KV.

A *Figura 4a* mostra que o resultado do experimento era o esperado. A *Figura 4b* mostra uma visão ampliada do início do gráfico.



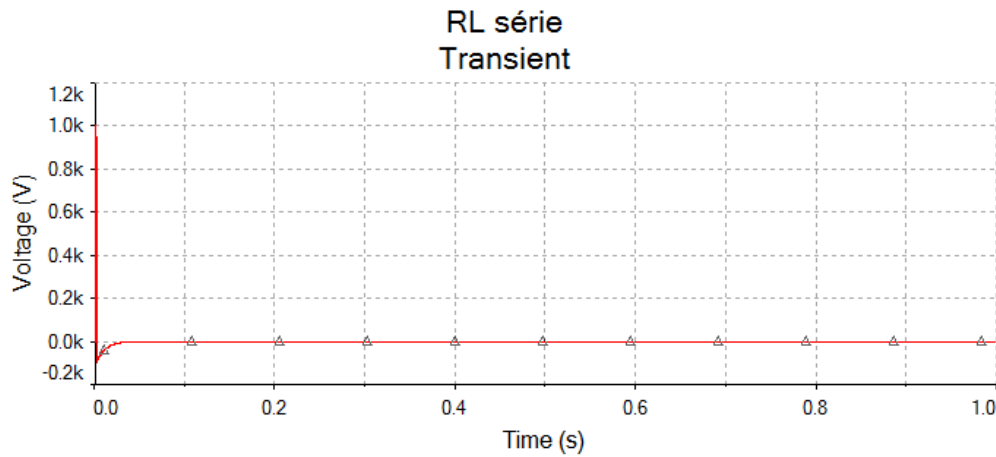


Figura 4a – Gráfico da simulação de 0 a 1 segundo

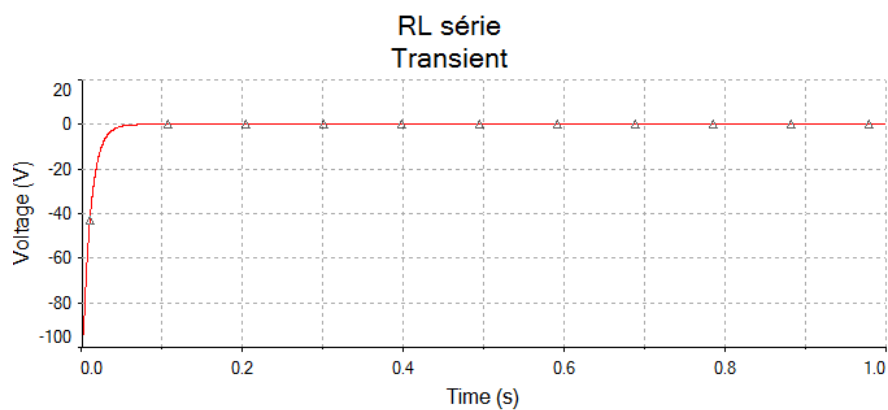


Figura 4b – Gráfico ampliado de 0 a 1 segundo

### 1.3. Circuito 3 - Circuito LC Paralelo Com R Em Série

O próximo circuito simulado foi um circuito com um capacitor e um indutor em paralelo e um resistor em série com eles. A *Figura 5* contém uma visão do circuito montado.

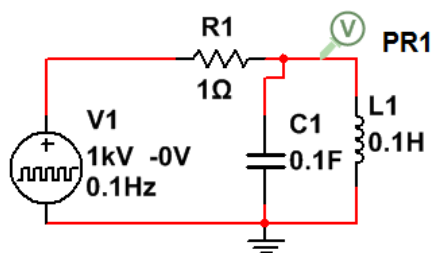


Figura 5 – Circuito RLC

Analogamente aos circuitos anteriores, realizemos uma análise matemática para determinar a resposta ao impulso de tensão. Primeiramente descobrimos a equação diferencial que representa esse circuito. Assim, aplicaremos mais uma vez a lei dos nós ao nó PR1, logo após o resistor:

$$ir(t) = ic(t) + il(t) \quad (1.9)$$

Mas sabemos também que:

$$il(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t V_l(t) \quad (1.10)$$

$$i_c(t) = C \frac{dV_c}{dt} \quad (1.11)$$

Combinando as equações 1.9 a 1.11, utilizando o operador D para simplificar a integral e substituindo  $V_l(t)$  e  $V_c(t)$  por  $y(t)$ , temos:

$$\frac{x - y}{R} = \frac{LCD^2y + y}{LD}$$

Finalmente, fazendo os necessários ajustes, a equação diferencial que representa este circuito será:

$$\left(D^2 + \frac{D}{RC} + \frac{1}{LC}\right)y(t) = \frac{Dx(t)}{RC}$$

aplicando os valores finais:

$$(D^2 + 10D + 100)y(t) = 10Dx(t) \quad (1.12)$$

Aplicando as condições iniciais  $y(t) = 0$  e  $y'(t) = 1$  à equação característica  $\lambda^2 + 10\lambda + 100 = 0$  encontramos que a resposta esperada ao impulso nesse circuito será:

$$h(t) = 10\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-5t}\sin(5\sqrt{3}t) + e^{-5t}\cos(5\sqrt{3}t)\right)V \text{ para } t \geq 0$$

Assim o circuito irá iniciar sem funcionamento em  $t = 0$  com 10V e irá oscilar (como uma soma de seno e cosseno por conta das trocas de energia entre capacitor e indutor) sendo amortecido para zero. A *Figura 6* mostra que o resultado da simulação está de acordo com o esperado. Observe que a função acima tem sem mínimo global (aproximadamente -3) em  $t \cong 0.2417$ . Observando a figura abaixo, pode-se reparar que algo parecido acontece.

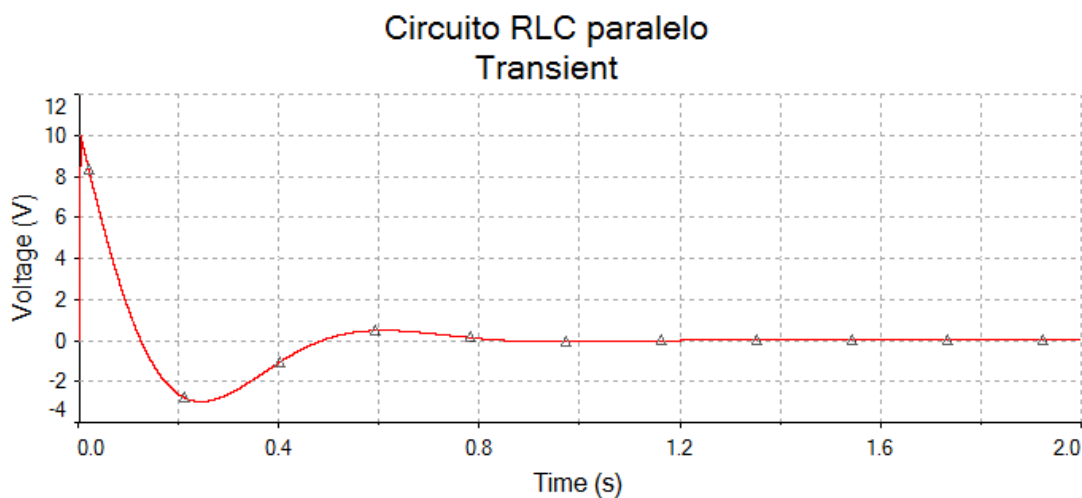


Figura 6 – Gráfico da simulação de 0 a 2 segundos

#### 1.4. Circuito 4 – RLC série

O próximo circuito simulado foi um circuito com um capacitor, um resistor e um indutor em série. A *Figura 7* fornece uma visão do circuito montado.

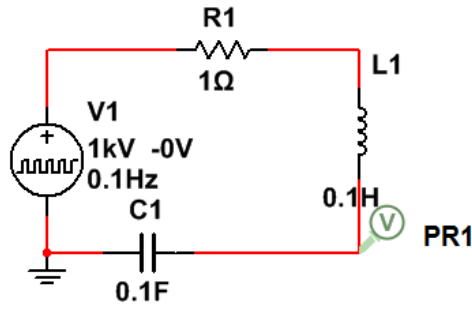


Figura 7 – Circuito RLC série

Realizemos a análise matemática para determinar a resposta ao impulso de tensão. Primeiramente descobrimos a equação diferencial que representa esse circuito. A lei das malhas será utilizada na única malha do circuito:

$$Vr(t) + Vc(t) + Vl(t) = x(t) \quad (1.13)$$

Mas sabemos também que:

$$Vl(t) = L \frac{di_l(t)}{dt} \quad (1.14)$$

$$ic(t) = C \frac{dVc}{dt} \quad (1.15)$$

Combinando as equações 1.13 a 1.15, utilizando o operador D para simplificar a integral, substituindo  $Vc(t)$  por  $y(t)$  e percebendo que  $ic = il$ , temos:

$$RCDy + y + LCD^2y = x$$

Finalmente, fazendo os necessários ajustes, a equação diferencial que representa este circuito será:

$$\left(D^2 + \frac{RD}{L} + \frac{1}{LC}\right)y(t) = \frac{x(t)}{LC}$$

aplicando os valores finais:

$$(D^2 + 10D + 100)y(t) = 100x(t) \quad (1.16)$$

Aplicando as condições iniciais  $y(t) = 0$  e  $y'(t) = 1$  à equação característica  $\lambda^2 + 10\lambda + 100 = 0$  encontramos que a resposta esperada ao impulso nesse circuito será:

$$h(t) = \frac{20\sqrt{3}}{3} e^{-5t} \sin(5\sqrt{3}t) \text{ para } t \geq 0$$

O circuito série irá iniciar em  $t = 0$  com 0V por causa da função seno e irá oscilar sendo amortecido para zero de forma semelhante ao circuito anterior. A Figura 8 mostra que o resultado da simulação foi o esperado. Vale ressaltar que o máximo global da equação acima ocorre em  $t = 0.12$  (aproximadamente 5.4), observe que algo parecido ocorre no gráfico.

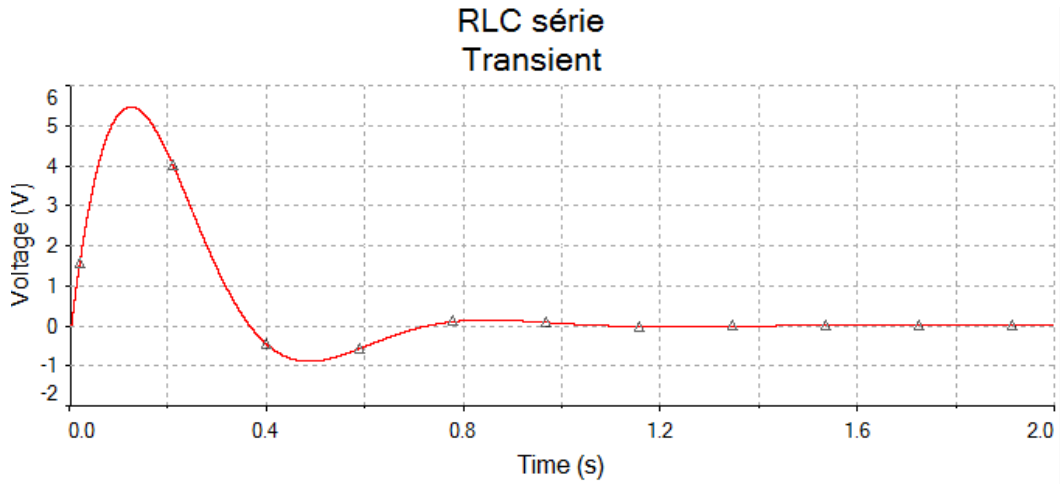


Figura 8 – Gráfico da simulação de 0 a 2 segundos

### 1.5. Circuito 5 – RLC paralelo sem parâmetros

A Figura 9 mostra uma visão geral do circuito proposto. Como tarefa, teríamos que encontrar os valores de R1, R2, L e C e simular o circuito. Os valores encontrados já estão exibidos.

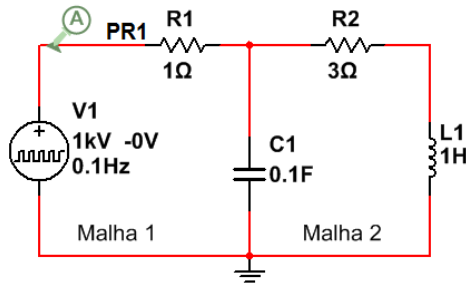


Figura 9 – Circuito RLC sem parâmetros

A dedução da equação diferencial desse circuito não é trivial. Sabemos primeiramente por lei dos nós no acima do capacitor que:

$$y(t) = i_c(t) + i_l(t) \quad (1.17)$$

Sabemos também, por lei das malhas na malha 2 que:

$$V_c = V_{r2} + V_l$$

$$V_c = R_2 i_l + L D i_l$$

$$i_l = \frac{v_c}{(R_2 + LD)} \quad (1.18)$$

Sabemos ainda que:

$$i_c(t) = C \frac{dV_c}{dt} \quad (1.19)$$

Combinando as equações 1.17 a 1.19, utilizando o operador D para simplificar a integral, temos:

$$y = CD v_c + \frac{v_c}{R_2 + LD}$$

Uma última observação na malha 1 do circuito nos leva a ver que:

$$V_c = x - R_1 y(t) \quad (1.20)$$

Finalmente, fazendo os necessários ajustes, utilizado o operador D, a equação diferencial que representa este circuito será:

$$\left(D^2 + D\left(\frac{1}{CR_1} + \frac{R_2}{LR_1}\right) + \frac{R_2}{LCR_1} + \frac{1}{LC}\right)y(t) = x(t)\left(\frac{D^2}{R_1} + \frac{R_2D}{LR_1} + \frac{1}{R_1LC}\right)$$

Aplicando-se valores apropriados de R1, R2, L e C podemos obter um sinal de corrente que será representado pela soma de exponenciais decrescentes. Assumamos  $R_1 = 1\Omega$ ,  $R_2 = 3\Omega$ ,  $C = 0.1F$  e  $L = 1H$ . Aplicando esses valores temos que a equação que reflete esse circuito será:

$$(D^2 + 13D + 40)y(t) = x(t)(D^2 + 3D + 10) \quad (1.21)$$

Admitindo as condições iniciais  $y(t) = 0$  e  $y'(t) = 1$  e a equação característica  $\lambda^2 + 13\lambda + 40 = 0$  encontramos que a resposta esperada ao impulso nesse circuito será, de acordo com a equação 1.2 será:

$$h(t) = (\delta(t) + \frac{20}{3}e^{-5t} - \frac{50}{3}e^{-8t})V \text{ para } t \geq 0$$

Vemos novamente um impulso na saída por conta dos graus das derivadas serem iguais em ambos os lados da equação diferencial. Em  $t = 0$ , a corrente  $y(t)$  será  $-10A$ , e essa corrente cai muito rapidamente para 0 como é possível ver na *Figura 10* resultado da simulação. O gráfico está na escala do impulso, por isso a corrente parece ser zero, a *Figura 10b* mostra uma ampliação da área inicial do gráfico, observe que a corrente em  $t = 0$  é  $-10$ , como esperado.

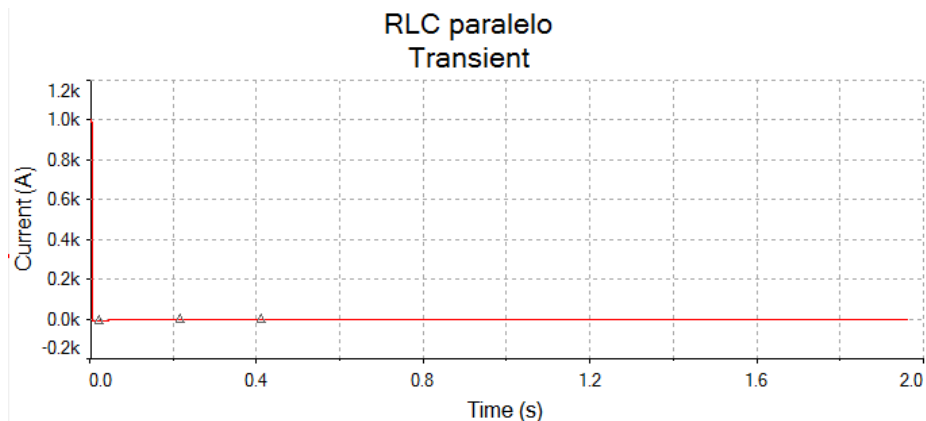


Figura 10a - Gráfico da simulação de 0 a 2 segundos

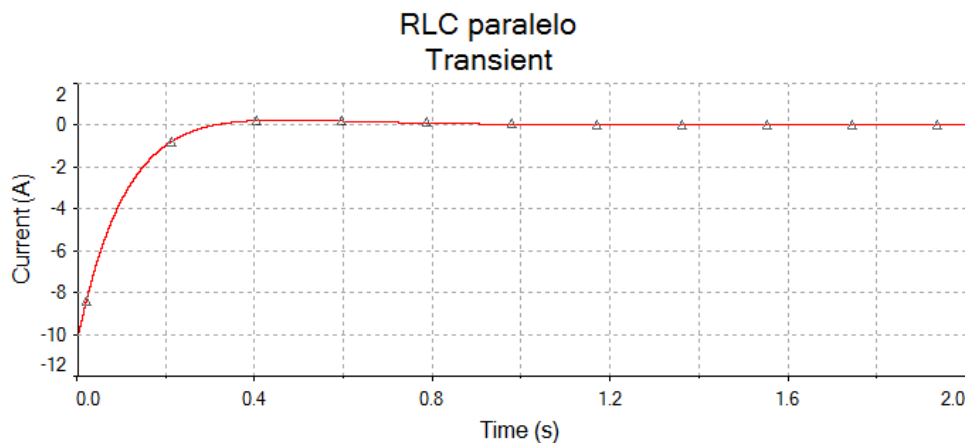


Figura 10b - Gráfico ampliado

## 2. Transitório: Resposta ao degrau de tensão

A segunda parte do trabalho consiste em simular e analisar a resposta ao degrau de tensão nos circuitos anteriores. Novamente utilizou-se o gerador de onda quadrada ajustando-se o duty cycle para algo em torno de 90%, assim em  $t = 0$  a tensão sai de 0 para 1V e permanecerá assim até muito tempo depois do período transitório. Para  $t < 0$ , a tensão é zero.

Assumindo então que para  $t < 0$  todos os circuitos estão descarregados, ou seja, não possuem condições iniciais, podemos encontrar a resposta ao degrau de tensão simplesmente calculando a resposta de estado nulo do sistema. Para tanto, utilizou-se a fórmula exibida em (SMITH, STEPHEN):

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (2.1)$$

Ou seja, a resposta do sistema será a convolução da entrada com a resposta ao impulso de tensão. Observe que  $h(t)$  já foi encontrado, e que a convolução de  $x(t) * h(t)$  é igual à de  $h(t) * x(t)$ , assim torna-se simples analisar a resposta ao degrau apenas utilizando a tabela de convoluções apresentada em (LATHI, B.P.), nos casos mais complicados utilizando a integral de convolução.

Os circuitos montados são idênticos aos da seção anterior, por isso não serão repetidos aqui.

### 2.1. Circuito 1 – Circuito RC Série

Iniciamos por relembrar a resposta ao impulso desse sistema:

$$h(t) = (1 e^{-t})V \text{ para } t \geq 0$$

Assumindo que  $x(t) = u(t)$ , e utilizando o par número 2 da tabela de convolução, teremos que:

$$y(t) = \frac{1 - e^{-t}}{-(-1)}u(t) = (1 - e^{-t})u(t)$$

Assim, espera-se que a tensão no capacitor em  $t = 0$  seja 0V (pois em 0- ela era 0V e o capacitor não admite mudança brusca de tensão) e que ela cresça como uma curva exponencial e se aproxime cada vez mais de 1V. Observe que depois de muito tempo, não haverá mudança de tensão no capacitor o que faz a corrente que passa por ele ser zero, o capacitor agirá como um aberto, toda a tensão da fonte (1V) estará sobre ele. A *Figura 11* mostra que o resultado da simulação condiz com o deduzido.

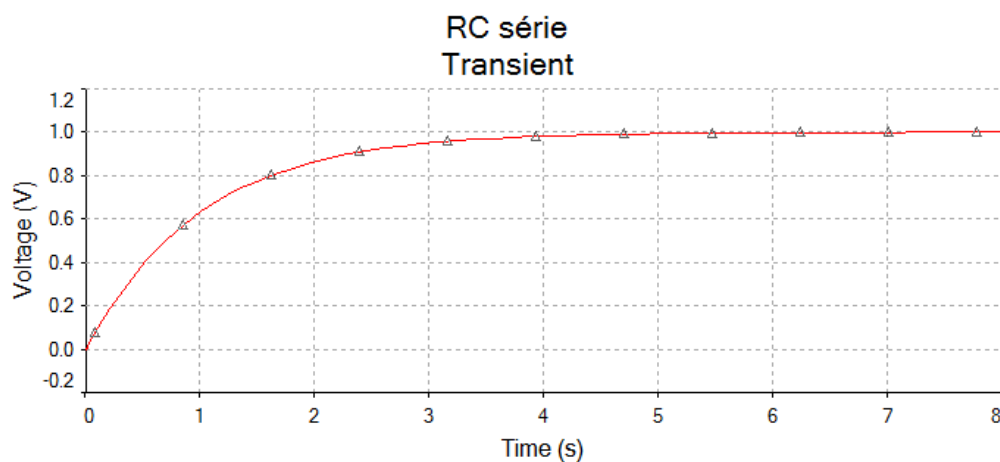


Figura 11 – Gráfico da simulação de 0 a 8 segundos

## 2.2. Circuito 2 – Circuito RL Série

Analogamente ao circuito anterior, realizemos a convolução da resposta ao impulso encontrada anteriormente com a função degrau:

$$h(t) = (\delta(t) - 100 e^{-100t})V \text{ para } t \geq 0$$

A resposta, utilizando a propriedade distributiva da convolução e os pares 1 e 2 da tabela, será:

$$y(t) = u(t) - 100 \left( \frac{1 - e^{-100t}}{100} \right) u(t) = e^{-100t} u(t)$$

Neste circuito, espera-se que em  $t = 0$  a tensão no indutor seja de 1V, já que ele não admite mudança repentina de corrente em  $t = 0$  a corrente nele será zero e a tensão total da fonte estará sobre ele. A tensão então cairá exponencialmente (muito rápido, por causa do expoente muito pequeno) para zero (com a falta de mudança de corrente a tensão no indutor será zero). A *Figura 12* mostra exatamente isso.

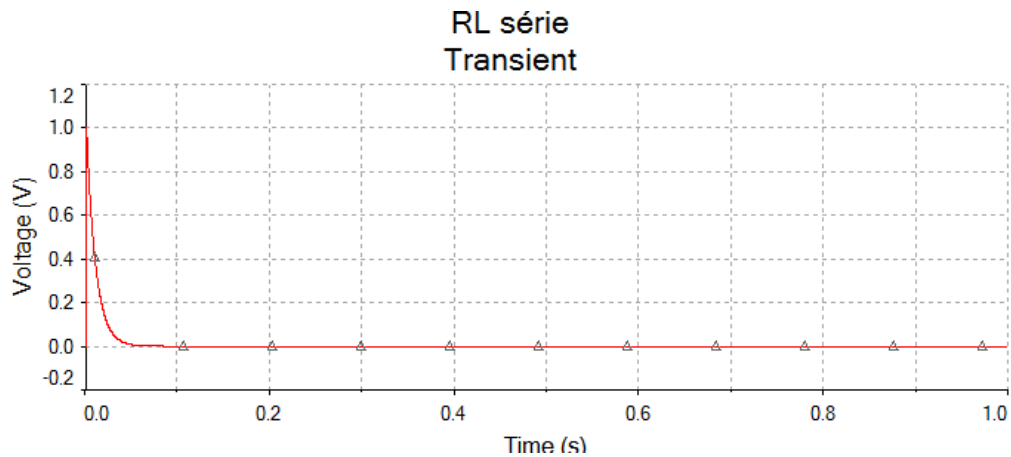


Figura 12 – Gráfico da simulação de 0 a 1 segundo

## 2.3. Circuito 3 - Circuito LC Paralelo Com R Em Série

Observemos a resposta ao impulso desse circuito:

$$h(t) = 10 \left( -\frac{\sqrt{3}}{3} e^{-5t} \sin(5\sqrt{3}t) + e^{-5t} \cos(5\sqrt{3}t) \right) \text{ para } t \geq 0$$

Nesse caso, com o aparecimento do cosseno e do seno faz-se necessária a aplicação da fórmula 2.1. O cálculo das integrais está fora dos objetivos deste trabalho, por isso apresentamos apenas o resultado final da resposta ao degrau de tensão:

$$y(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{-5t} \sin(5\sqrt{3}t) u(t)$$

Apesar do aparecimento de raízes irracionais, fica fácil perceber que em  $t = 0$  a função seno zera a resposta e para  $t$  tendendo a infinito a resposta será oscilatória e amortecida, tendendo a zero por conta da função exponencial. O circuito também ajuda-nos a deduzir a resposta do sistema, em  $t = 0$  a tensão sobre o capacitor (e por estar em paralelo com ele, no indutor) será zero, pois aquele não admite mudança brusca de tensão. Com o passar do tempo a falta de mudança de corrente no indutor fará com que a tensão sobre ele seja zero, entretanto o capacitor e o indutor irão interagir durante algum tempo (trocando energia) de forma que

antes de se estabilizar a tensão no capacitor irá oscilar. A *Figura 13* comprova o que foi encontrado analiticamente.

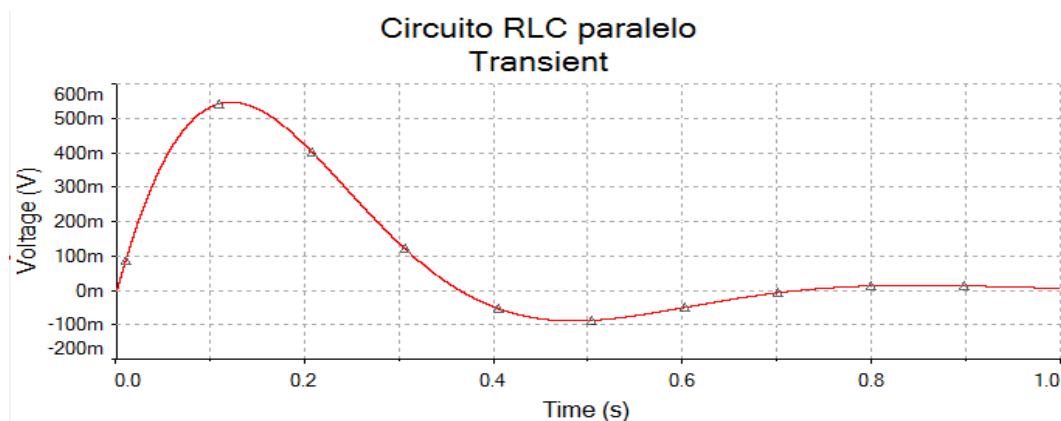


Figura 13 – Gráfico da simulação de 0 a 1 segundo

## 2.4. Circuito 4 – RLC Série

Realizemos a análise matemática para determinar a resposta ao degrau de tensão. Primeiramente, lembremos a resposta ao impulso do sistema:

$$h(t) = \frac{20\sqrt{3}}{3} e^{-5t} \text{sen}(5\sqrt{3})t \text{ para } t \geq 0$$

Novamente faremos uso da integral de convolução para encontrar a resposta ao degrau de tensão. O cálculo da integral não é demonstrado neste trabalho. A resposta ao degrau de tensão será então:

$$y(t) = \left( 1 - e^{-5t} \cos(5\sqrt{3})t - \frac{e^{-5t} \text{sen}(5\sqrt{3})t}{\sqrt{3}} \right) u(t)$$

Observando a resposta, vemos que em  $t = 0$  a resposta é zero (o seno anula o seu termo, e o cosseno anula-se com o +1). Quando  $t$  tende a infinito, percebemos que os termos que contém a exponencial tenderão a zero, sobrando apenas o valor constante 1, o sinal então oscila (como uma soma de seno e cosseno) e se aproxima de 1. Através do circuito chegamos a mesma conclusão, em  $t = 0$  o capacitor terá tensão 0, pois não admite mudança brusca de tensão, depois de algum tempo o capacitor (depois de interagir com o indutor trocando energia) irá agir como um aberto tendo sobre si toda a tensão da fonte de 1V. A *Figura 14* exhibe o resultado esperado.

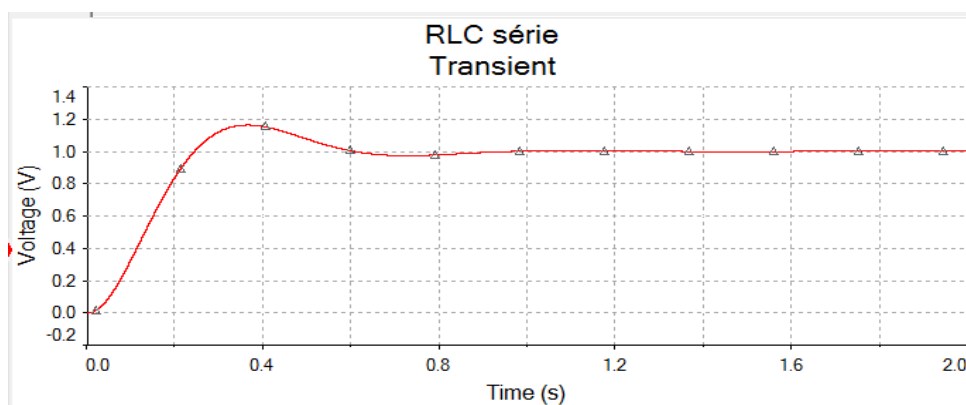


Figura 14 – Gráfico da simulação de 0 a 2 segundos



## 2.5. Circuito 5 – RLC Paralelo Sem Parâmetros

Relembremos então a resposta do circuito ao impulso:

$$h(t) = (\delta(t) + \frac{20}{3}e^{-5t} - \frac{50}{3}e^{-8t})V \text{ para } t \geq 0$$

Aplicando a convolução e utilizando os pares 1 e 2 da tabela, encontraremos que a resposta ao degrau será:

$$y(t) = \left(1 + \frac{20}{3}\left(\frac{1 - e^{-5t}}{5}\right) - \frac{50}{3}\left(\frac{1 - e^{-8t}}{8}\right)\right)V$$

Assim, podemos ver que para  $t = 0$ , a corrente no circuito será de 1A. À medida que o tempo passa, a corrente tenderá para 0,25A. Isso fica fácil de ver também através do circuito, visto que depois de muito tempo o capacitor estará carregado e não haverá corrente no seu ramo (funcionando como um aberto) e o indutor não terá tensão sobre si (funcionando como um curto), assim a corrente total do circuito será simplesmente a tensão 1V dividido pela soma das resistências,  $4\Omega$ , o que será exatamente 0,25A. A *Figura 15* mostra que o resultado é exatamente o esperado.

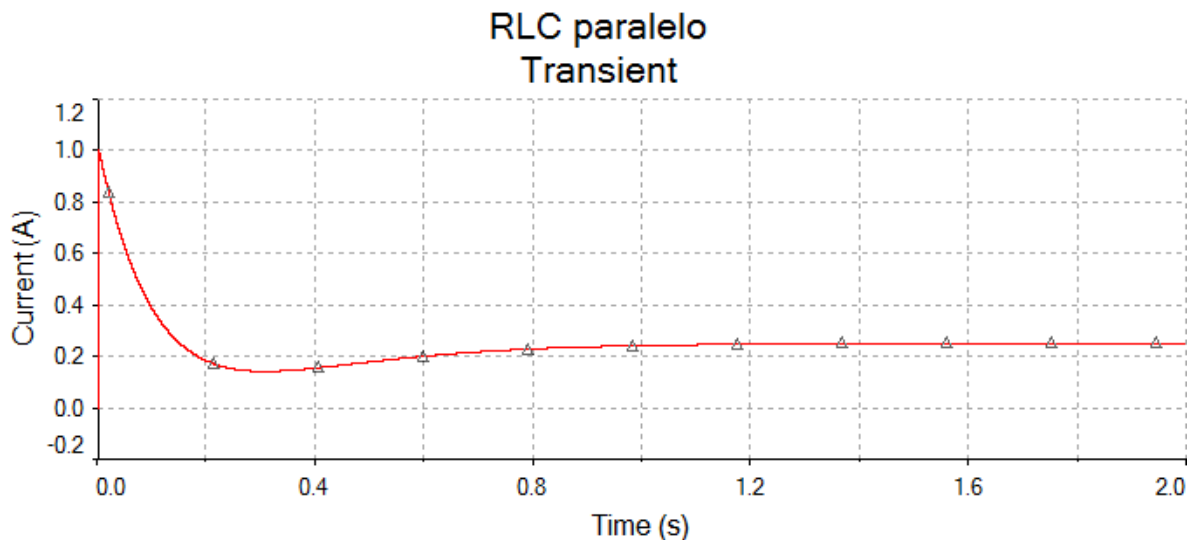


Figura 15 – Gráfico da simulação de 0 a 2 segundos

### 3. Entrada senoidal

A última parte do trabalho tratava de analisar a reação dos circuitos a entradas senoidais de frequências distintas: 1rad/s, 5rad/s e 10rad/s, ou ainda, 0.16Hz, 0.8Hz e 1.6Hz. Utilizou-se, pois um gerador de função para montar os circuitos, e ajustou-se a frequência de acordo com os valores citados.

O método que será utilizado para calcular a resposta à entrada senoidal será o método clássico ilustrado em (LATHI, B.P.) que está resumido na fórmula a seguir:

$$y(t) = y_n + y_\phi \quad (3.1)$$

Ou seja, a resposta à um determinado sinal de entrada será a soma da resposta natural do sistema com a resposta forçada. Observe que a resposta natural do sistema tem a mesma forma (cara) da resposta de entrada nula, apenas com as constantes arbitrárias diferentes. É importante destacar também que, no caso da entrada senoidal, espera-se que a resposta forçada contenha algum tipo de soma de senos e cossenos.

Os circuitos montados foram idênticos àqueles ilustrados na seção 1, por isso não serão repetidos nesta seção.

#### 3.1. Circuito 1 – Circuito RC Série

Relembremos primeiramente a equação diferencial que caracteriza este circuito:

$$(D + 1) = x(t)$$

A partir dela poderemos fazer as análises matemáticas e deduções utilizando a fórmula 3.1. A resposta natural do sistema será a mesma para todas as frequências visto que ela não depende da entrada, mas somente dos modos característicos definidos pela equação diferencial acima:

$$y_n = ke^{-t}$$

##### 3.1.1. Entrada senoidal com $\omega = 1\text{rad/s}$

Para a entrada senoidal de frequência 1rad/s a resposta forçada do sistema pode ser encarada como:

$$y_\phi = A\sin(t) + B\cos(t)$$

Podemos aplicar a entrada  $x(t) = \sin(t)$  e a resposta forçada à equação diferencial que rege o circuito para descobrirmos os coeficientes A e B. Assim temos,

$$A\cos(t) - B\sin(t) + A\sin(t) + B\cos(t) = \sin(t)$$

Através da equação sabemos que:

$$A + B = 0$$

$$-B + A = 1$$

$$\text{Logo } A = \frac{1}{2} \text{ e } B = -\frac{1}{2}$$

A resposta total do sistema, aplicando a fórmula 3.1 será:

$$y(t) = ke^{-t} + \frac{\sin(t)}{2} - \frac{\cos(t)}{2}$$

Precisamos descobrir a constante k, para isso aplicamos as condições iniciais  $y(t) = 0$  e  $y'(t) = 0$  já que o circuito não possuía nenhuma condição inicial. A resposta total será:

$$y(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} + \text{sen}(t) - \cos(t)) \text{ para } t \geq 0$$

Em  $t = 0$  a saída é zero, a medida que o tempo passa a exponencial “controla” o gráfico no período em que  $t$  é mais próximo de zero, a medida que  $t$  tende ao infinito a função seno e cosseno terão maior controle sobre o sinal de saída já que a exponencial tenderá a zero. A *Figura 16* contém o resultado da simulação, é possível ver a influência da exponencial pela subida lenta no começo do gráfico.

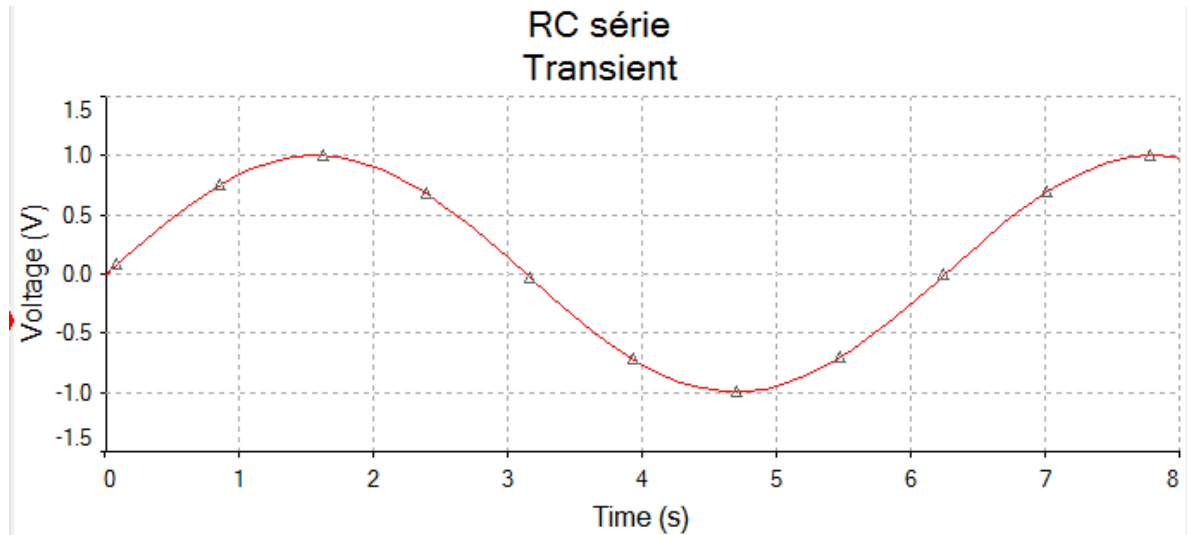


Figura 16 – Gráfico da simulação de 0 a 8 segundos

### 3.1.2. Entrada senoidal com $\omega = 5\text{rad/s}$

Para a entrada senoidal de frequência  $5\text{rad/s}$  a resposta forçada do sistema pode ser encarada como

$$y_{\phi} = A\text{sen}(5t) + B\cos(5t)$$

Podemos aplicar a entrada  $x(t) = \text{sen}(5t)$  e a resposta forçada à equação diferencial para descobrirmos os coeficientes A e B. Assim temos,

$$5A\cos(5t) - 5B\text{sen}(5t) + A\text{sen}(5t) + B\cos(5t) = \text{sen}(5t)$$

Através da equação sabemos que:

$$5A + B = 0$$

$$-5B + A = 1$$

$$\text{Logo } A = \frac{1}{26} \text{ e } B = -\frac{5}{26}$$

A resposta total do sistema, aplicando a fórmula 3.1 será:

$$y(t) = ke^{-t} + \frac{\text{sen}(5t)}{26} - \frac{5\cos(5t)}{26}$$

Aplicamos as condições iniciais  $y(t) = 0$  e  $y'(t) = 0$  para encontramos k, temos que a resposta final será:

$$y(t) = \frac{1}{26}(5e^{-t} + \text{sen}(5t) - 5\cos(5t)) \text{ para } t \geq 0$$

Novamente, o exponencial influencia novamente apenas no começo, a medida que  $t$  tende a infinito o seno e o cosseno agem no sinal de resposta fazendo com que sejam periódicas. A Figura 17 mostra o resultado da simulação, é interessante observar que a amplitude do sinal foi reduzida, isso ocorre porque a frequência de corte desse circuito é  $1\text{rad/s}$  de forma que sinais com frequências maiores que essa serão atenuados o que é o caso, o circuito funciona como um filtro passa-baixa.

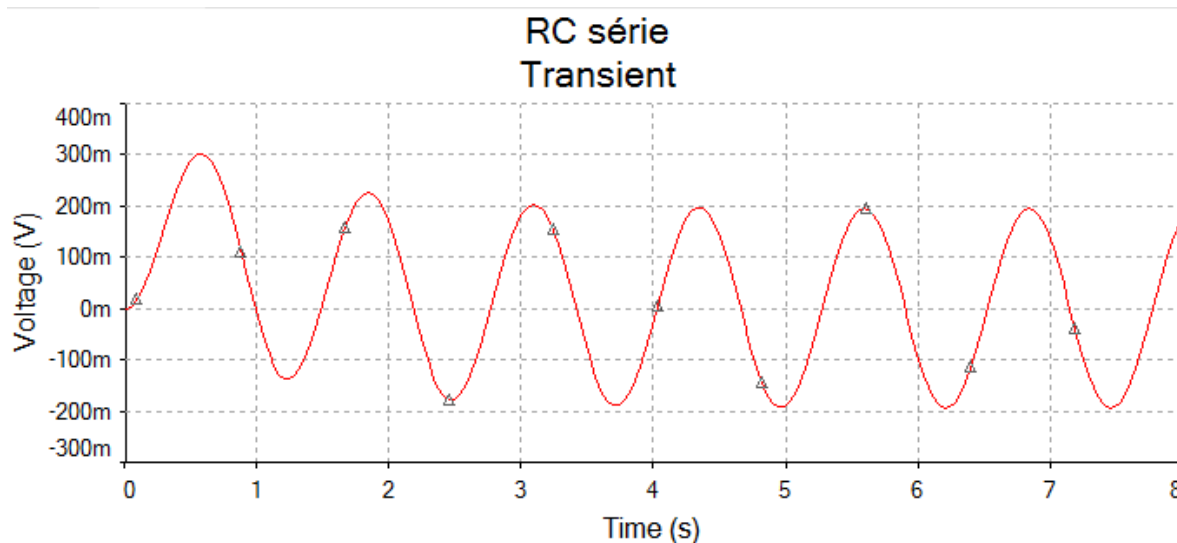


Figura 17 – Gráfico da simulação de 0 a 8 segundos

### 3.1.3. Entrada senoidal com $\omega = 10\text{rad/s}$

Para a entrada senoidal de frequência  $10\text{rad/s}$  a resposta forçada do sistema pode ser encarada como

$$y_f = A\sin(10t) + B\cos(10t)$$

Podemos aplicar a entrada  $x(t) = \sin(10t)$  e a resposta forçada à equação diferencial para descobrirmos os coeficientes A e B. Assim temos,

$$10A\cos(10t) - 10B\sin(10t) + A\sin(10t) + B\cos(10t) = \sin(10t)$$

Através da equação sabemos que:

$$10A + B = 0$$

$$-10B + A = 1$$

$$\text{Logo } A = \frac{1}{101} \text{ e } B = -\frac{10}{101}$$

A resposta total do sistema, aplicando a fórmula 3.1 será:

$$y(t) = ke^{-t} + \frac{\sin(10t)}{101} - \frac{10\cos(10t)}{101}$$

Aplicamos as condições iniciais  $y(t) = 0$  e  $y'(t) = 0$  para encontramos k, temos que a resposta final será:

$$y(t) = \frac{1}{101}(10e^{-t} + \sin(10t) - 10\cos(10t)) \text{ para } t \geq 0$$

A Figura 18 mostra o resultado da simulação, novamente o sinal foi atenuado por conta da frequência de oscilação.

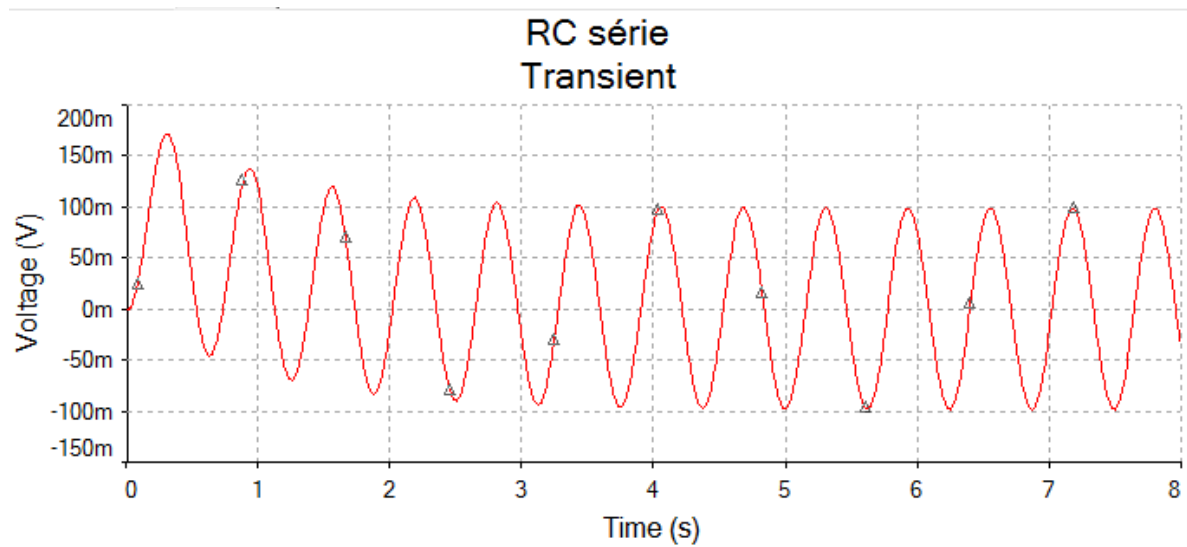


Figura 18 – Gráfico da simulação de 0 a 8 segundos

### 3.2. Circuito 2 – Circuito RL Série

Relembremos primeiramente a equação diferencial que caracteriza este circuito:

$$(D + 100) = Dx(t)$$

A partir dela poderemos fazer as análises matemáticas e deduções utilizando a fórmula 3.1. A resposta natural do sistema será a mesma visto que ela não depende da entrada, mas somente dos modos característicos definidos pela equação diferencial acima:

$$y_n = ke^{-100t}$$

#### 3.2.1. Entrada senoidal com $\omega = 1\text{rad/s}$

Para a entrada senoidal de frequência 1rad/s a resposta forçada do sistema pode ser encarada como

$$y_\phi = A\text{sen}(t) + B\cos(t)$$

Podemos aplicar a entrada  $x(t) = \text{sen}(t)$  e a resposta forçada à equação diferencial para descobrirmos os coeficientes A e B. Assim temos,

$$A\cos(t) - B\text{sen}(t) + 100A\text{sen}(t) + 100B\cos(t) = \cos(t)$$

Através da equação sabemos que:

$$A + 100B = 1$$

$$-B + 100A = 0$$

$$\text{Logo } A = \frac{1}{10001} \text{ e } B = \frac{100}{10001}$$

A resposta total do sistema, aplicando a fórmula 3.1 será:

$$y(t) = ke^{-100t} + \frac{\text{sen}(t)}{10001} + \frac{100\cos(t)}{10001}$$

Aplicamos as condições iniciais  $y(t) = 0$  e  $y'(t) = 0$  para encontramos k, temos que a resposta final será:

$$y(t) = \frac{1}{10001}(-100e^{-100t} + \text{sen}(t) + 100\cos(t)) \text{ para } t \geq 0$$

Nesse caso, como a exponencial tende a zero muito rápido, a saída é completamente dominada pelo seno e cosseno. A *Figura 19* contém o resultado da simulação. Além disso, frequências menores que 100rad/s serão atenuadas e o circuito funcionará como um filtro passa-alta.



Figura 19 – Gráfico da simulação de 0 a 10 segundos

### 3.2.2. Entrada senoidal com $\omega = 5\text{rad/s}$

Para a entrada senoidal de frequência  $5\text{rad/s}$  a resposta forçada do sistema pode ser encarada como

$$y_f = A\sin(5t) + B\cos(5t)$$

Podemos aplicar a entrada  $x(t) = \sin(5t)$  e a resposta forçada à equação diferencial para descobrirmos os coeficientes A e B. Assim temos,

$$5A\cos(5t) - 5B\sin(5t) + 100A\sin(5t) + 100B\cos(5t) = 5\cos(5t)$$

Através da equação sabemos que:

$$5A + 100B = 5$$

$$-5B + 100A = 0$$

$$\text{Logo } A = \frac{5}{2005} \text{ e } B = \frac{100}{2005}$$

A resposta total do sistema, aplicando a fórmula 3.1 será:

$$y(t) = K_1 e^{-100t} + \frac{5\sin(5t)}{2005} + \frac{100\cos(5t)}{2005}$$

Aplicamos as condições iniciais  $y(t) = 0$  e  $y'(t) = 0$  para encontramos  $K_1$ , temos que a resposta final será:

$$y(t) = \frac{1}{2005} (-100e^{-100t} + 5\sin(5t) + 100\cos(5t)) \text{ para } t \geq 0$$

A Figura 20 mostra o resultado da simulação, observe que o gráfico gerado é muito parecido com o anterior, mas o sinal sofreu menos atenuação por conta do aumento na frequência.

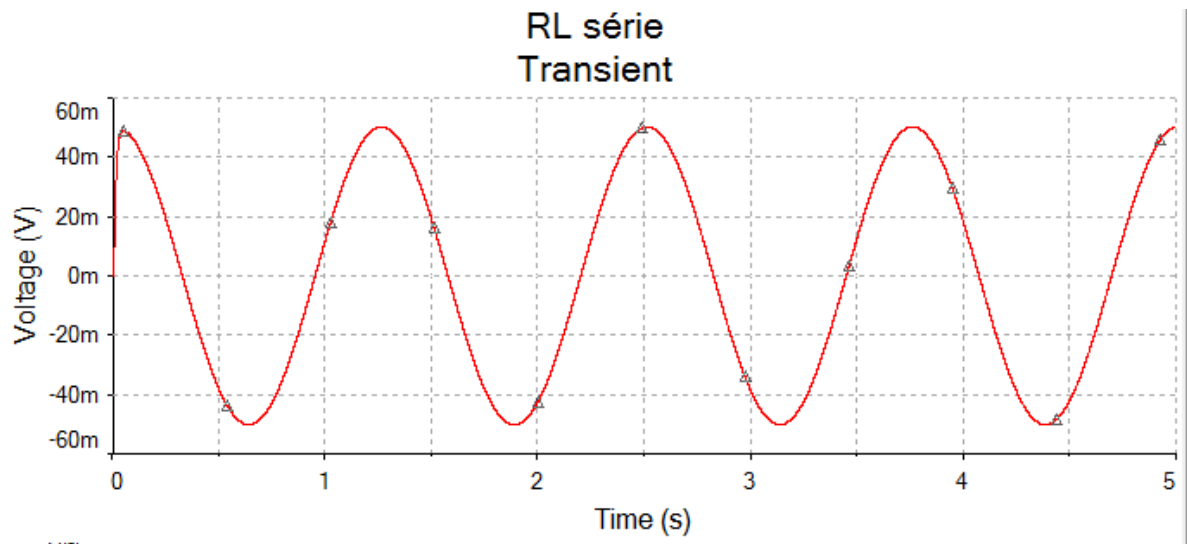


Figura 20 – Gráfico da simulação de 0 a 5 segundos

### 3.2.3. Entrada senoidal com $\omega = 10\text{rad/s}$

Para a entrada senoidal de frequência  $10\text{rad/s}$  a resposta forçada do sistema pode ser encarada como

$$y_{\phi} = A\sin(10t) + B\cos(10t)$$

Podemos aplicar a entrada  $x(t) = \sin(10t)$  e a resposta forçada à equação diferencial para descobrirmos os coeficientes A e B. Assim temos,

$$10A\cos(10t) - 10B\sin(10t) + 100A\sin(10t) + 100B\cos(10t) = 10\cos(10t)$$

Através da equação sabemos que:

$$10A + 100B = 10$$

$$-10B + 100A = 0$$

$$\text{Logo } A = \frac{1}{101} \text{ e } B = +\frac{10}{101}$$

A resposta total do sistema, aplicando a fórmula 3.1 será:

$$y(t) = K1e^{-100t} + \frac{\sin(10t)}{101} + \frac{10\cos(10t)}{101}$$

Aplicamos as condições iniciais  $y(t) = 0$  e  $y'(t) = 0$  para encontramos K1, temos que a resposta final será:

$$y(t) = \frac{1}{101}(-10e^{-100t} + \sin(10t) + 10\cos(10t)) \text{ para } t \geq 0$$

A Figura 21 mostra o resultado da simulação. Das três frequências esse foi a que sofreu menos atenuação exatamente devido a característica passa-alta do circuito.



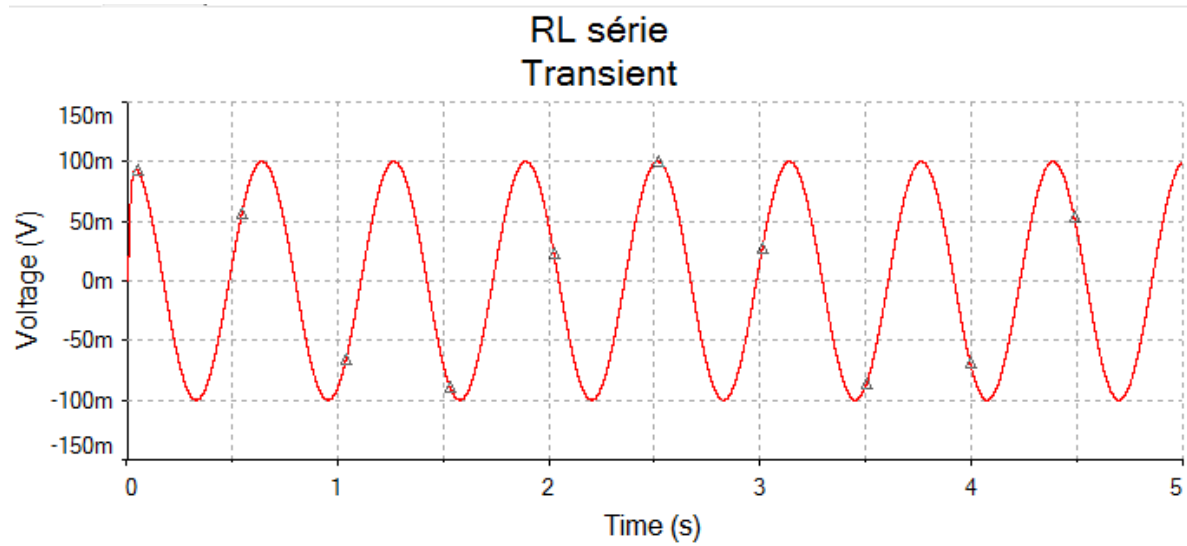


Figura 21 – Gráfico da simulação de 0 a 5 segundos

### 3.3. Circuito 3 - Circuito LC Paralelo Com R Em Série

Relembremos primeiramente a equação diferencial que caracteriza este circuito:

$$(D^2 + 10D + 100) = 10Dx(t)$$

A partir dela poderemos fazer as análises matemáticas e deduções utilizando a fórmula 3.1. A resposta natural do sistema será a mesma visto que ela não depende da entrada, mas somente dos modos característicos definidos pela equação diferencial acima:

$$y_n = k_1 e^{-5t} \sin(5\sqrt{3}t) + k_2 e^{-5t} \cos(5\sqrt{3}t)$$

#### 3.3.1. Entrada senoidal com $\omega = 1\text{rad/s}$

Para a entrada senoidal de frequência 1rad/s a resposta forçada do sistema pode ser encarada como

$$y_\phi = A \sin(t) + B \cos(t)$$

Podemos aplicar a entrada  $x(t) = \sin(t)$  e a resposta forçada à equação diferencial para descobrirmos os coeficientes A e B. Assim temos,

$$-A \sin(t) - B \cos(t) + 10A \cos(t) - 10B \sin(t) + 100A \sin(t) + 100B \cos(t) = 10 \cos(t)$$

Através da equação sabemos que:

$$99A - 10B = 0$$

$$99B + 10A = 10$$

$$\text{Logo } A = \frac{100}{9901} \text{ e } B = \frac{9900}{99010}$$

Para questões de simplificações vamos aproximar A de 1/100 e B de 1/10. A resposta total do sistema, aplicando a fórmula 3.1 será:

$$y(t) = k_1 e^{-5t} \sin(5\sqrt{3}t) + k_2 e^{-5t} \cos(5\sqrt{3}t) + \frac{\sin(t)}{100} + \frac{\cos(t)}{10}$$

Aplicamos as condições iniciais  $y(t) = 0$  e  $y'(t) = 0$  para encontramos  $k_1$  e  $k_2$ , temos que a resposta final será:

$$y(t) = \frac{-\sqrt{3}}{30} e^{-5t} \sin(5\sqrt{3}t) - \frac{e^{-5t} \cos(5\sqrt{3}t)}{10} + \frac{\sin(t)}{100} + \frac{\cos(t)}{10} \text{ para } t \geq 0$$

A Figura 22 a seguir contém o resultado da simulação. Observe que ocorreu atenuação do sinal indicado algum tipo de filtragem para esta frequência. Após observar as três frequências poderemos tirar melhores conclusões sobre que tipo de filtragem esse circuito faz.

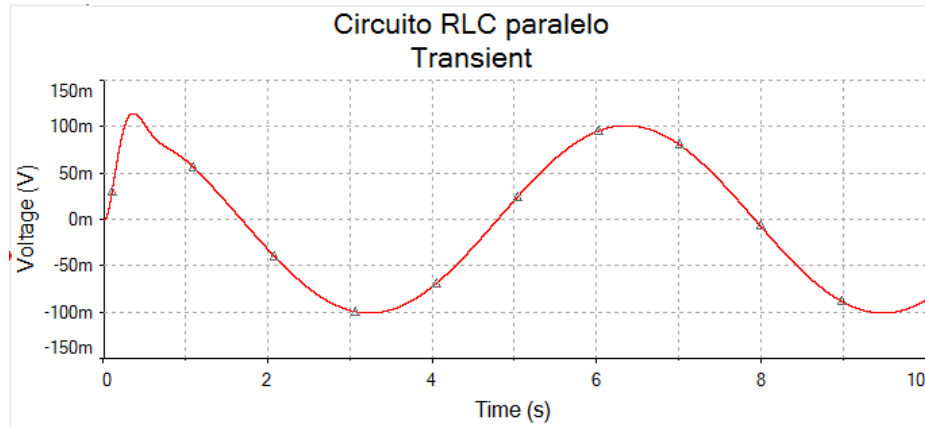


Figura 22 – Gráfico da simulação de 0 a 10 segundos

### 3.3.2. Entrada senoidal com $\omega = 5\text{rad/s}$

Para a entrada senoidal de frequência  $5\text{rad/s}$  a resposta forçada do sistema pode ser encarada como

$$y_f = A\sin(5t) + B\cos(5t)$$

Podemos aplicar a entrada  $x(t) = \sin(5t)$  e a resposta forçada à equação diferencial para descobirmos os coeficientes A e B. Assim temos,

$$-25A\sin(5t) - 25B\cos(5t) + 50A\cos(5t) - 50B\sin(5t) + 100A\sin(5t) + 100B\cos(5t) = 50\cos(5t)$$

Através da equação sabemos que :

$$75A - 50B = 0$$

$$75B + 50A = 50$$

$$\text{Logo } A = \frac{4}{13} \text{ e } B = \frac{6}{13}$$

A resposta total do sistema, aplicando a fórmula 3.1 será:

$$y(t) = k_1 e^{-5t} \sin(5\sqrt{3}t) + k_2 e^{-5t} \cos(5\sqrt{3}t) + \frac{4\sin(5t)}{13} + \frac{6\cos(5t)}{13}$$

Aplicamos as condições iniciais  $y(t) = 0$  e  $y'(t) = 0$  para encontramos K1, temos que a resposta final será:

$$y(t) = \frac{1}{13} \left( -\frac{10\sqrt{3}}{3} e^{-5t} \sin(5\sqrt{3}t) - 6e^{-5t} \cos(5\sqrt{3}t) + 4\sin(5t) + 6\cos(5t) \right)$$

A Figura 23 contém o resultado da simulação. Observe que a atenuação diminui.

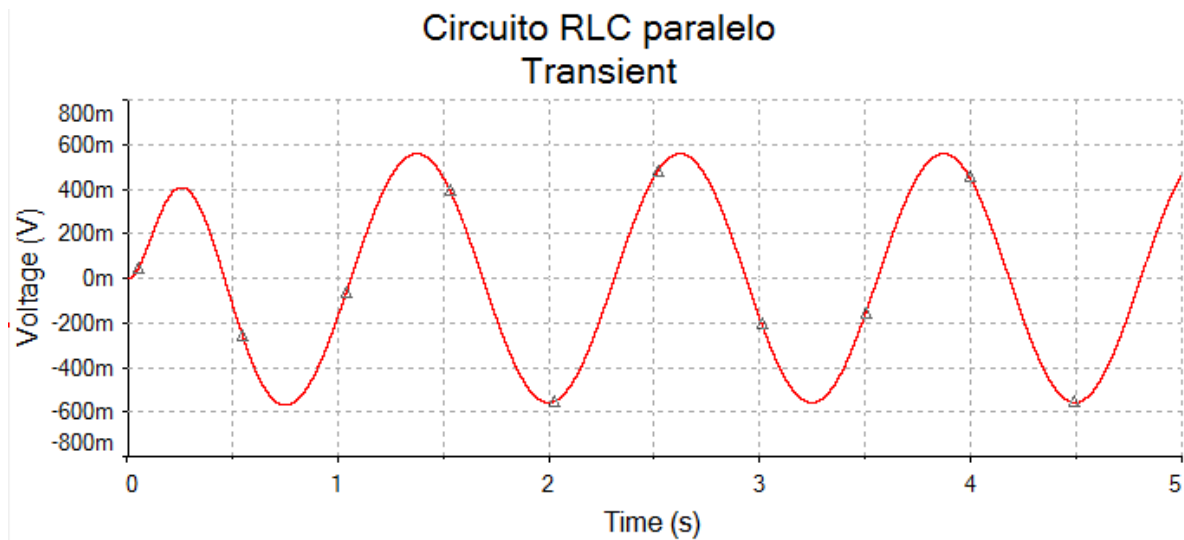


Figura 23 – Gráfico da simulação de 0 a 5 segundos

### 3.3.3. Entrada senoidal com $\omega = 10\text{rad/s}$

Para a entrada senoidal de frequência  $10\text{rad/s}$  a resposta forçada do sistema pode ser encarada como

$$y_{\phi} = A\sin(10t) + B\cos(10t)$$

Podemos aplicar a entrada  $x(t) = \sin(t)$  e a resposta forçada à equação diferencial para descobrirmos os coeficientes A e B. Assim temos,

$$-100A\sin(10t) - 100B\cos(10t) + 100A\cos(10t) - 100B\sin(10t) + 100A\sin(10t) + 100B\cos(10t) = 100\cos(10t)$$

Através da equação sabemos que:

$$A = 1 \text{ e } B = 0$$

A resposta total do sistema, aplicando a fórmula 3.1 será:

$$y(t) = k_1 e^{-5t} \sin(5\sqrt{3}t) + k_2 e^{-5t} \cos(5\sqrt{3}t) + \sin(10t)$$

Aplicamos as condições iniciais  $y(t) = 0$  e  $y'(t) = 0$  para encontramos K1, temos que a resposta final será:

$$y(t) = -\frac{2\sqrt{3}}{3} e^{-5t} \sin(5\sqrt{3}t) + \sin(10t) \text{ para } t \geq 0$$

A Figura 24 abaixo mostra que a atenuação foi mínima para essa frequência. Após testar com frequências maiores foi possível observar que a atenuação aumentava novamente a medida que a frequência aumentava. Esse circuito então tem um comportamento de filtro passa-faixa. Para frequências ao redor de  $10\text{rad/s}$  a atenuação será mínima.

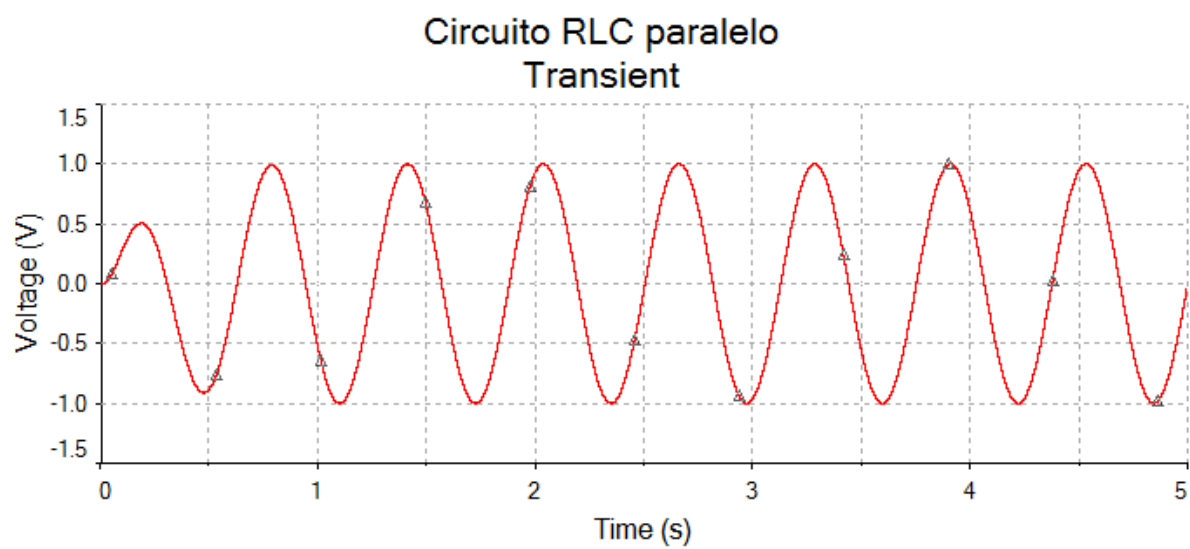


Figura 24 – Gráfico da simulação de 0 a 5 segundos

### 3.4. Circuito 4 - Circuito RLC série

Relembremos primeiramente a equação diferencial que caracteriza este circuito:

$$(D^2 + 10D + 100)y(t) = 100x(t)$$

A partir dela poderemos fazer as análises matemáticas e deduções utilizando a fórmula 3.1. A resposta natural do sistema é exatamente a mesma do anterior, já que a equação característica é a mesma. A resposta forçada por outro lado será diferente, abaixo está a forma da resposta natural do sistema:

$$y_n = k_1 e^{-5t} \sin(5\sqrt{3}t) + k_2 e^{-5t} \cos(5\sqrt{3}t)$$

#### 3.4.1. Entrada senoidal com $\omega = 1\text{rad/s}$

Para a entrada senoidal de frequência 1rad/s a resposta forçada do sistema pode ser encarada como

$$y_\phi = A \sin(t) + B \cos(t)$$

Podemos aplicar a entrada  $x(t) = \sin(t)$  e a resposta forçada à equação diferencial para descobrirmos os coeficientes A e B. Assim temos,

$$-A \sin(t) - B \cos(t) + 10A \cos(t) - 10B \sin(t) + 100A \sin(t) + 100B \cos(t) = 100 \sin(t)$$

Através da equação sabemos que:

$$10A + 99B = 0$$

$$-10B + 99A = 100$$

$$\text{Logo } A = \frac{9900}{9901} \text{ e } B = -\frac{1000}{9901}$$

Para questões de simplificações vamos aproximar A de 1 e B de -1/10. A resposta total do sistema, aplicando a fórmula 3.1 será:

$$y(t) = k_1 e^{-5t} \sin(5\sqrt{3}t) + k_2 e^{-5t} \cos(5\sqrt{3}t) + \sin(t) - \frac{\cos(t)}{10}$$

Aplicamos as condições iniciais  $y(t) = 0$  e  $y'(t) = 0$  para encontramos  $k_1$  e  $k_2$ , temos que a resposta final será:

$$y(t) = \frac{-\sqrt{3}}{30} e^{-5t} \sin(5\sqrt{3}t) + \frac{1}{10} e^{-5t} \cos(5\sqrt{3}t) + \sin(t) - \frac{\cos(t)}{10}$$

A Figura 25 contém o resultado da simulação.

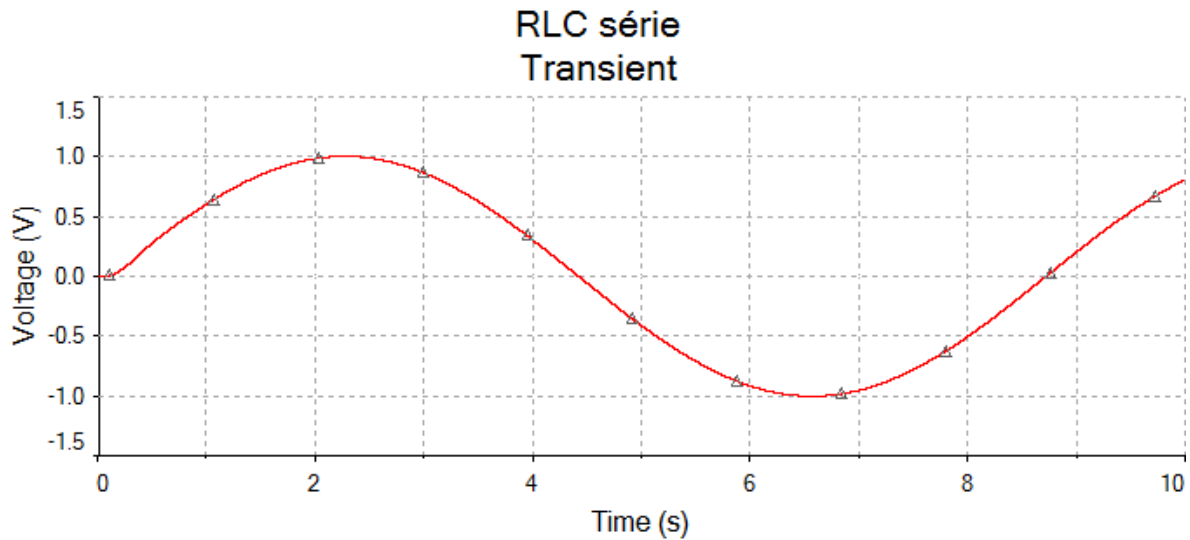


Figura 25 – Gráfico da simulação de 0 a 10 segundos

### 3.4.2. Entrada senoidal com $\omega = 5\text{rad/s}$

Para a entrada senoidal de frequência  $5\text{rad/s}$  a resposta forçada do sistema pode ser encarada como

$$y_{\phi} = A\sin(5t) + B\cos(5t)$$

Podemos aplicar a entrada  $x(t) = \sin(5t)$  e a resposta forçada à equação diferencial para descobrirmos os coeficientes A e B. Assim temos,

$$-25A\sin(5t) - 25B\cos(5t) + 50A\cos(5t) - 50B\sin(5t) + 100A\sin(5t) + 100B\cos(5t) = 100\sin(5t)$$

Através da equação sabemos que :

$$75A - 50B = 100$$

$$75B + 50A = 0$$

$$\text{Logo } A = \frac{12}{13} \text{ e } B = -\frac{8}{13}$$

A resposta total do sistema, aplicando a fórmula 3.1 será:

$$y(t) = k_1 e^{-5t} \sin(5\sqrt{3}t) + k_2 e^{-5t} \cos(5\sqrt{3}t) + \frac{12\sin(5t)}{13} - \frac{8\cos(5t)}{13}$$

Aplicamos as condições iniciais  $y(t) = 0$  e  $y'(t) = 0$  para encontramos  $k_1$  e  $k_2$ , temos que a resposta final será:

$$y(t) = \frac{1}{13} \left( -\frac{4\sqrt{3}}{3} e^{-5t} \sin(5\sqrt{3}t) + 8e^{-5t} \cos(5\sqrt{3}t) + 12\sin(5t) - 8\cos(5t) \right)$$

A Figura 26 contém o resultado da simulação.

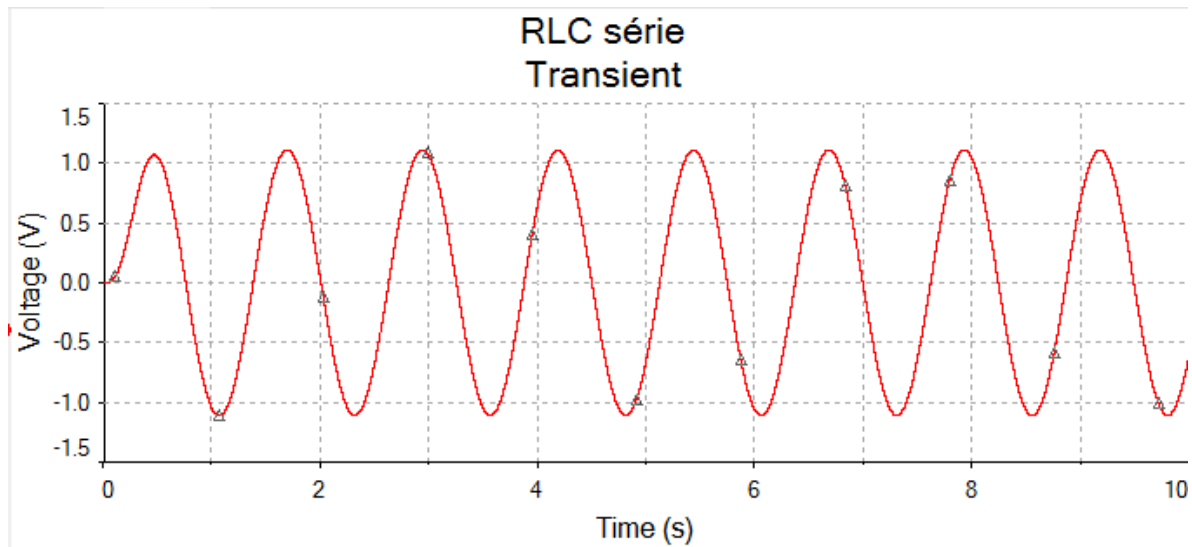


Figura 26 – Gráfico da simulação de 0 a 10 segundos

### 3.4.3. Entrada senoidal com $\omega = 10\text{rad/s}$

Para a entrada senoidal de frequência  $10\text{rad/s}$  a resposta forçada do sistema pode ser encarada como

$$y_{\varphi} = A\sin(10t) + B\cos(10t)$$

Podemos aplicar a entrada  $x(t) = \sin(t)$  e a resposta forçada à equação diferencial para descobrirmos os coeficientes A e B. Assim temos,

$$-100A\sin(10t) - 100B\cos(10t) + 100A\cos(10t) - 100B\sin(10t) + 100A\sin(10t) + 100B\cos(10t) = 100\sin(10t)$$

Através da equação sabemos que:

$$A = 0 \text{ e } B = -1$$

A resposta total do sistema, aplicando a fórmula 3.1 será:

$$y(t) = k_1 e^{-5t} \sin(5\sqrt{3}t) + k_2 e^{-5t} \cos(5\sqrt{3}t) - \cos(10t)$$

Aplicamos as condições iniciais  $y(t) = 0$  e  $y'(t) = 0$  para encontramos  $k_1$  e  $k_2$ , temos que a resposta final será:

$$y(t) = \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-5t} \sin(5\sqrt{3}t) + e^{-5t} \cos(5\sqrt{3}t) - \cos(10t)$$

A Figura 27 contém o resultado da simulação. Não foi possível observar características de filtragem no circuitos mostrados, entretanto ao aumentar a frequência para  $100\text{rad/s}$  pode-se perceber uma forte atenuação no sinal de saída, o que indica uma característica de filtragem passa baixa já que para baixas frequências não há atenuação do sinal.



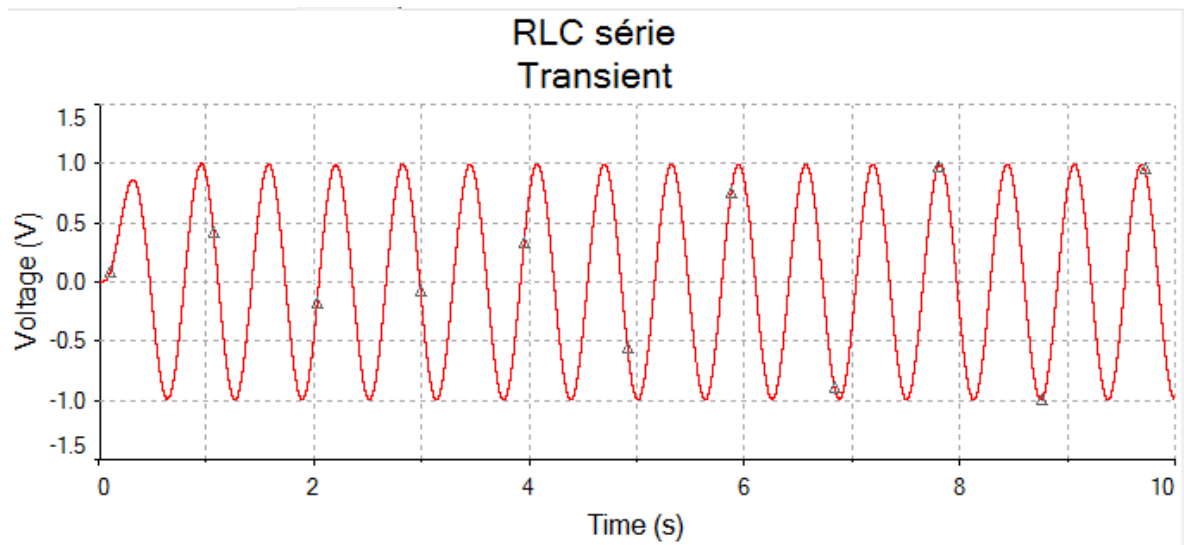


Figura 27 – Gráfico da simulação de 0 a 10 segundos

### 3.5. Circuito 5 - Circuito RLC sem parâmetros

Relembremos primeiramente a equação diferencial que caracteriza este circuito:

$$(D^2 + 13D + 40)y(t) = x(t)(D^2 + 3D + 10)$$

A partir dela poderemos fazer as análises matemáticas e deduções utilizando a fórmula 3.1. A resposta natural do sistema novamente só depende dos modos característicos definidos pela equação diferencial acima:

$$y_n = k_1 e^{-5t} + k_2 e^{-8t}$$

#### 3.5.1. Entrada senoidal com $\omega = 1\text{rad/s}$

Para a entrada senoidal de frequência 1rad/s a resposta forçada do sistema pode ser encarada como

$$y_\varphi = A \sin(t) + B \cos(t)$$

Podemos aplicar a entrada  $x(t) = \sin(t)$  e a resposta forçada à equação diferencial para descobrirmos os coeficientes A e B. Assim temos,

$$-A \sin(t) - B \cos(t) + 13A \cos(t) - 13B \sin(t) + 40A \sin(t) + 40B \cos(t) = -\sin(t) + 3 \cos(t) + 10 \sin(t)$$

Através da equação sabemos que:

$$39A - 13B = 9$$

$$13A + 39B = 3$$

$$\text{Logo } A = \frac{3}{13} \text{ e } B = 0$$

A resposta total do sistema, aplicando a fórmula 3.1 será:

$$y(t) = k_1 e^{-5t} + k_2 e^{-8t} + \frac{3 \sin(t)}{13}$$

Aplicamos as condições iniciais  $y(t) = 0$  e  $y'(t) = 0$  para encontramos  $k_1$  e  $k_2$ , temos que a resposta final será:

$$y(t) = -\frac{1}{13} e^{-5t} + \frac{1}{13} e^{-8t} + \frac{3 \sin(t)}{13}$$

A Figura 28 mostra o resultado da simulação.

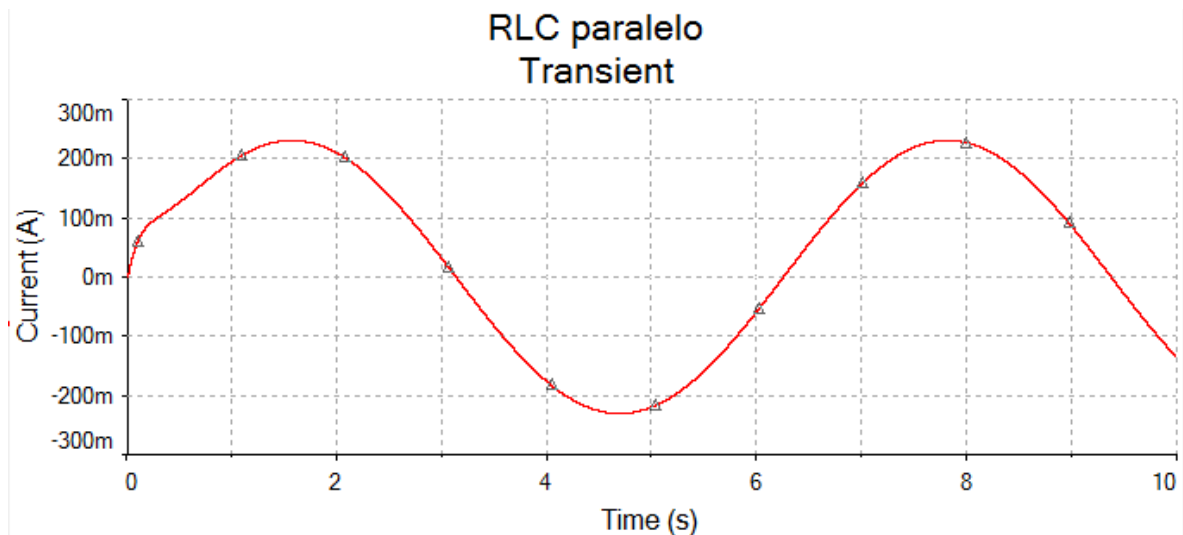


Figura 28 – Gráfico da simulação de 0 a 10 segundos

### 3.5.2. Entrada senoidal com $\omega = 5\text{rad/s}$

Para a entrada senoidal de frequência 5rad/s a resposta forçada do sistema pode ser encarada como

$$y_{\phi} = A\sin(5t) + B\cos(5t)$$

Podemos aplicar a entrada  $x(t) = \sin(5t)$  e a resposta forçada à equação diferencial para descobrirmos os coeficientes A e B. Assim temos,

$$\begin{aligned} -25A\sin(5t) - 25B\cos(5t) + 65A\cos(5t) - 65B\sin(5t) + 40A\sin(5t) + 40B\cos(5t) \\ = -25\sin(5t) + 15\cos(5t) + 10\sin(5t) \end{aligned}$$

Através da equação sabemos que :

$$15A - 65B = -15$$

$$15B + 65A = 15$$

$$\text{Logo } A = \frac{15}{89} \text{ e } B = \frac{24}{89}$$

A resposta total do sistema, aplicando a fórmula 3.1 será:

$$y(t) = k_1e^{-5t} + k_2e^{-8t} + \frac{15\sin(5t)}{89} + \frac{24\cos(5t)}{89}$$

Aplicamos as condições iniciais  $y(t) = 0$  e  $y'(t) = 0$  para encontramos  $k_1$  e  $k_2$ , temos que a resposta final será:

$$y(t) = (-e^{-5t} + \frac{65}{89}e^{-8t} + \frac{15\sin(5t)}{89} + \frac{24\cos(5t)}{89})$$

A Figura 29 mostra o resultado da simulação

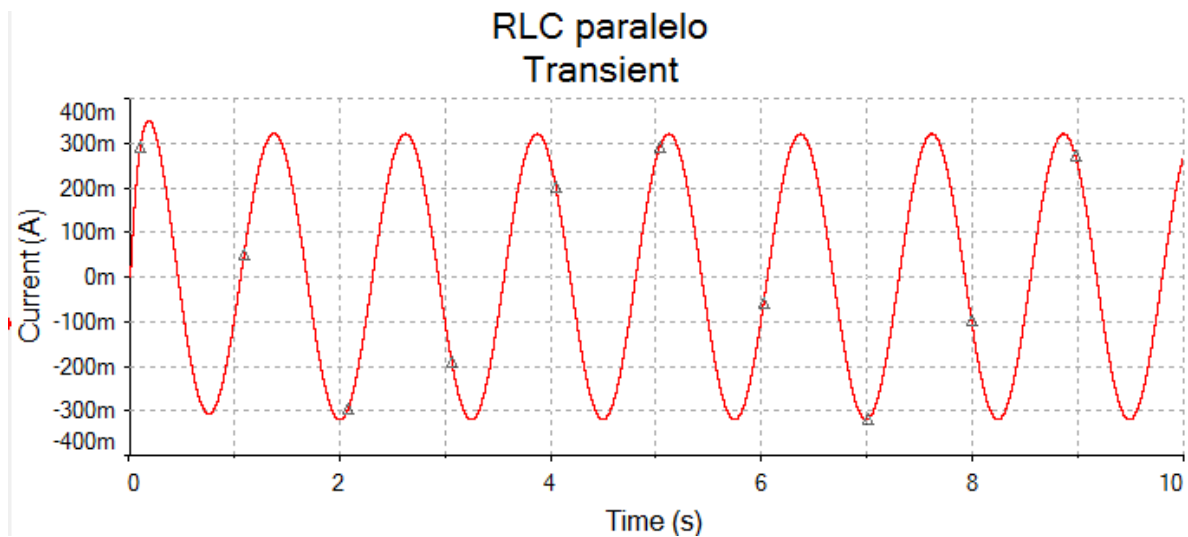


Figura 29 – Gráfico da simulação de 0 a 10 segundos

### 3.5.3. Entrada senoidal com $\omega = 10\text{rad/s}$

Para a entrada senoidal de frequência  $10\text{rad/s}$  a resposta forçada do sistema pode ser encarada como

$$y_{\phi} = A\sin(10t) + B\cos(10t)$$

Podemos aplicar a entrada  $x(t) = \sin(10t)$  e a resposta forçada à equação diferencial para descobrirmos os coeficientes A e B. Assim temos,

$$\begin{aligned} -100A\sin(10t) - 100B\cos(10t) + 130A\cos(10t) - 130B\sin(10t) + 40A\sin(10t) + 40B\cos(10t) \\ = -100\sin(10t) + 30\cos(10t) + 10\sin(10t) \end{aligned}$$

Através da equação sabemos que:

$$A = 93/205 \text{ e } B = 99/205$$

A resposta total do sistema, aplicando a fórmula 3.1 será:

$$y(t) = k_1e^{-5t} + k_2e^{-8t} + \frac{93\sin(10t)}{205} + \frac{99\cos(10t)}{205}$$

Aplicamos as condições iniciais  $y(t) = 0$  e  $y'(t) = 0$  para encontramos  $k_1$  e  $k_2$ , temos que a resposta final será:

$$y(t) = -\frac{14}{5}e^{-5t} + \frac{95}{41}e^{-8t} + \frac{93\sin(10t)}{205} + \frac{99\cos(10t)}{205}$$

A Figura 30 mostra o resultado da simulação. Nesse circuito, aumentando a frequência podemos perceber que a atenuação diminui, logo este circuito tem características de filtragem passa alta.

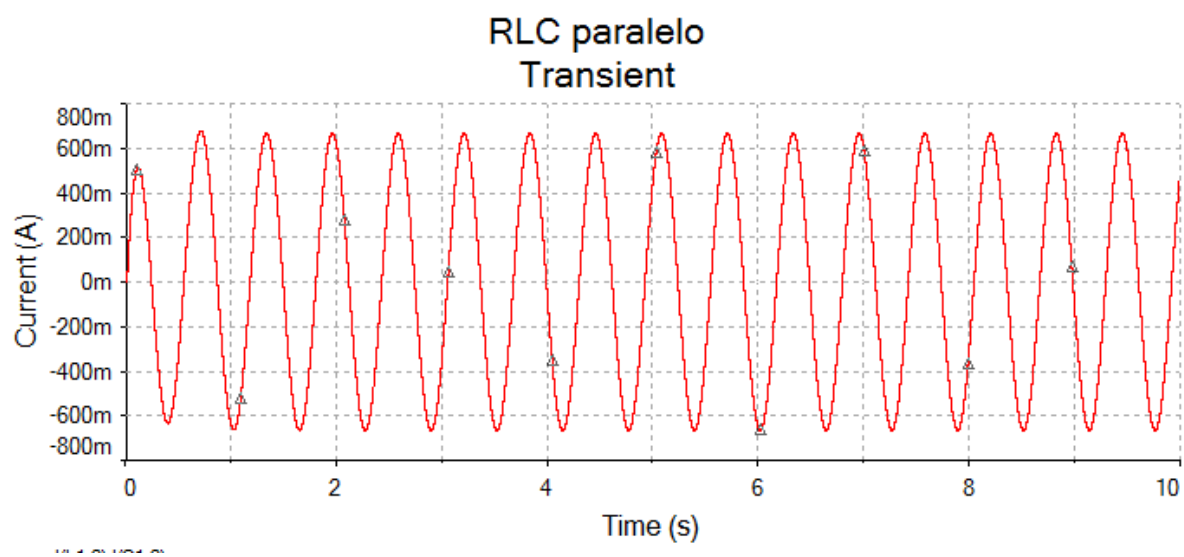


Figura 30 – Gráfico da simulação de 0 a 10 segundos



## **4. Conclusão**

O trabalho desenvolvido teve como objetivo analisar a reação dos circuitos sugeridos a diversos tipos de sinais de forma a confirmar na prática os conceitos estudados em sala de aula na teoria. Desenvolveu-se uma abordagem analítica que apoiasse matematicamente as descobertas práticas da simulação.

De forma geral os objetivos do trabalho foram alcançados, um entendimento mais profundo sobre circuitos reativos foi desenvolvido e um melhor entendimento da ligação entre os conceitos matemáticos e os seus respectivos conceitos práticos foi obtido.





## **5. Bibliografia**

- LATHI, B.P.. Sinais e Sistemas Lineares. 2. ed. São Paulo: Bookman, 2008.
- SMITH, STEPHEN W. "13.Convolution". The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing.1 ed. São Francisco: California Technical Publishing, 1997.