IFCE - CURSO: Engenharia de Mecatrônica/Licenciatura em Física – 2015-1
Cálculo I

Derivadas de funções Inversas :

Vimos que o inverso de uma função f, quando é bem definido, satisfaz às relações: $\forall x,\ f(f^{-1}(x)) = x$.

Sejam y = f (x) uma função definida num intervalo (a, b) e x = g(y) sua inversa nesse intervalo. Se existe f '(x) ≠ 0 , ∀x ∈ (a, b) , então g é derivável e, além disso, sua derivada satisfaz à relação

$g'(y) := \dfrac{1}{f'(x)}$, ou seja:

$$f'(f^{-1}(x)).(f^{-1})'(x) = 1$$

$$logo,$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \rightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = g'(y)$$

Temos as seguintes relações $\quad \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad ou \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$

1)Considere a função definida por y = f(x) = x^3 – 1. Calcule a derivada de f^{-1} no ponto y = 7. R.: $\dfrac{1}{12}$

2)Considere a função definida por y = f(x) = x^3 +3x. Calcule a derivada de f^{-1} no ponto y = 4. R.: $\dfrac{1}{6}$

3)Considere a função definida por y = f(x) = $x^7 + x^5$ + 17. Calcule a derivada de f^{-1} no pto. y = 19 R.: $\dfrac{1}{12}$

4)Determine a $(f^{-1})'(y)$ nos pontos indicados, nos casos a seguir:

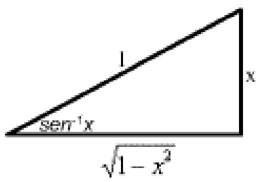
a)f(x) = x^2 + 4x – 2 , $x \in [-2, \infty]$; y = 10 b) f(x) = sen(lnx), $e^{-\pi/2} \le x \le e^{\pi/2}$; y = $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5) Calcule $g'(f(1))$, sendo f(x) = $x^2 - 2^x$ e g a inversa de f. R: -ln2

Usaremos a diferenciação implícita para obter a fórmula de derivação para *y* = sen^{-1} *x.* Reescrevendo esta equação como *x* = sen *y* e diferenciando implicitamente, teremos:

$$\frac{d}{dx}[x] = \frac{d}{dx}[\operatorname{sen} y] \quad \text{obtendo} \quad 1 = \cos y \cdot \frac{dy}{dx} \quad \text{então} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos\left(\operatorname{sen}^{-1} x\right)}$$

Esta fórmula de derivada pode ser simplificada aplicando-se a fórmula cos(sen^{-1}x) = $\sqrt{1-x^2}$, que foi deduzida a partir do triângulo da figura, resultando:



$$\boxed{\cos(\operatorname{sen}^{-1}) = \sqrt{1-x^2}} \quad \text{então} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Encontre a expressão da derivada de cada uma das funções definidas a seguir:

1)Considere a função f, de [-1 , 1] em $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, tal que y = f (x) = arcsenx. Calcule y´. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2) Obtenha as derivadas de a) f(x) = arc sen 5x $\quad f'(x) = \dfrac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$

b) arc tg 7x $f'(x)=\dfrac{7}{1+49x^2}$ c) $f(x)=\text{arc sen}\sqrt{x}$ $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$

3)Encontre uma equação para a reta tangente ao gráfico de y = arccotgx em x = -1. R: $y-\dfrac{3\pi}{4}=(-\dfrac{1}{2})(x+1)$

4)Derive: a) $V(t)=\text{arccotg}\left(\dfrac{t}{2}\right)$ $V'(t)=\dfrac{-2}{4+t^2}$ b) $g(x)=\arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ $g'(x)=\dfrac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$

5) Uma partícula se desloca ao longo do eixo x de modo que, em qualquer instante t ≥ 0, sua posição seja dada por x(t) = $tg^{-1}\sqrt{x}$. Qual será a velocidade da partícula quando t = 16? R.:V = 1/136

6) $V(t)=\text{arccotg}\left(\dfrac{t}{2}\right)$ 2) $g(x)=\arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ 3) $P(x)=\text{arctg}\left(\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)$

TAXAS DE VARIAÇÃO OU TAXAS RELACIONADAS: consideremos a função f dada por y = f (x) . Costuma-se dizer que f'(x) é a taxa de variação de y em relação a x . Assim, podemos dizer que a velocidade escalar instantânea é a taxa de varia do espaço em relação ao tempo. Do mesmo modo, a aceleração escalar instantânea é a taxa de variação da velocidade escalar instantânea em relação ao tempo.

1. Um tanque tem a forma de um cone invertido com 16 m de altura e uma base com 4 m de raio. A água "flui" no tanque a uma taxa de 2 m^3/min. Com que velocidade o nível da água estará se elevando quando sua profundidade for de 5 m?

2. Um balão de borracha de forma esférica é enchido de ar, de modo que seu raio aumenta à razão de 0,2cm/s. Calcule a taxa de variação do volume desse balão em relação ao tempo, no instante em que o raio for igual a 10cm. R.: $80\pi\ cm^3/s$

3. Uma escada de comprimento igual a 5m está com uma extremidade apoiada no chão e outra apoiada numa parede vertical. A escada começa a escorregar, de modo que num instante t_1, a distância d é igual a 4 metros e a extremidade B tem velocidade V_B = 1,2m/s. Calcule nesse instante, a velocidade V_A da extremidade A. R.: V_A = - 1,6 m/s

4. Se duas resistências com R_1 e R_2 Ohms estão conectadas em paralelo em um circuito elétrico, resultando em uma resistência com R Ohms, o valor de R será dado pela equação $\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}$. Se R_1 diminui a uma taxa de 1 Ohms e R_2 aumenta a uma taxa de 0,5 Ohms, a que taxa R varia quando $R_1 =$ 75Ohms e R_2 = 50 Ohms? R.: 0,02 ohm/s

6. Um cubo se expande de modo que sua aresta varia à razão de 12,5cm/s. Achar a taxa de variação de seu volume no instante em que o raio é 7,5cm? Resp. 3750cm^3/s.

7) O raio r e altura h de um cilindro circular reto estão variando de modo a manter constante o volume V. Num determinado instante h = 3cm e r = 1cm e, neste instante, a altura está variando a uma taxa de 0,2cm/s. A que taxa estará variando o raio neste instante? Resp. -0,1/3cm/s.

8) Os lados x e y de um retângulo estão variando a taxas constantes de 0,2m/s e 0,1m/s, respectivamente. A que taxa estará variando a área do retângulo no instante em que x = 1m e y = 2m? Resp. 0,5m^2/s.

9) Dois carros estão se encaminhando em direção a um cruzamento, um seguindo em direção leste a uma velocidade de 90km/h e o outro seguindo a direção sul, a 60km/h. Qual a taxa segundo a qual eles se aproximam um do outro no instante em que o primeiro carro está a 0,2 km do cruzamento e o segundo a 0,15km Resp. 108km/h.