IFCE – ENGENHARIA DE MECATRÔNICA/LICENCIATURA EM FÍSICA - 2015-1
Introdução ao Estudo do Cálculo Diferencial e Integral I(Noções de Funções – Lista de Exercícios)

1. Simplifique os quocientes abaixo:

a) $\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$ b) $\dfrac{8-x^3}{4-x^2}$ c) $\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ d) $\dfrac{x^n-1}{x-1}$ e) $\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$

f) $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}$ g) $\dfrac{x^4-16}{8-x^3}$ h) $\dfrac{x^2-a^2}{x-a}$ i) $\dfrac{a^2-x^2}{a^3+x^3}$ j) $\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$

Fatorações especiais: $x^n-a^n=(x-a)\cdot(x^{n-1}+x^{n-2}\cdot a+x^{n-3}\cdot a^2+...+x\cdot a^{n-2}+a^{n-1})$

$x^n+a^n=(x+a)\cdot(x^{n-1}-x^{n-2}\cdot a+x^{n-3}\cdot a^2-...+x\cdot a^{n-2}+a^{n-1})$

2. Sejam as funções f e g definidas por: f(x) = $\sqrt{x}$ e g(x) = x^3 determine D(g o f) e D(fog). Resp.: $x \geq 0$

$\mathrm{Dom}(f+g)=\mathrm{Dom}(f-g)=\mathrm{Dom}(f.g)=\mathrm{Dom}f \bigcap \mathrm{Dom}g$

$\mathrm{Dom}\left(\dfrac{f}{g}\right)=\mathrm{Dom}f \bigcap \mathrm{Dom}g-\{x \in IR/g(x)=0\}$

3. Seja a função quadrática definida por f(x) = mx^2 + 2x + 1, m ≠ 0, determine m para que a função admita um valor máximo em x = 1 . Resp.: m = -1

4. Seja a função f, de R em R, definida por f(x) = x – x denominada **função mantissa.** Desenhe o gráfico de f e deduza o seu conjunto imagem. **Obs.: n ≤ x ≤ n + 1 (n € R)**

> **plot(x-floor(x),x=-5..5,y=-4..4,discont=true); D=[0,1]**

6. A tarifa de uma ligação telefônica a longa distância noturna do Rio de Janeiro para New York é 70 centavos de real pelo primeiro minuto e de 50 centavos de real por minuto ou fração de minuto adicional. A tarifa é modelada por:

$$T(t)=\begin{cases} 0,7 & \text{se } 0<t\leq 1 \\ 0,7+0,5\; t+1 & \text{se } 1<t \end{cases}$$

a) Determine quanto se deve pagar por uma ligação de 2 minutos e 43 segundos? R. Deve pagar R$ 2,20

7. Se x < - 3 , simplifique a expressão $y=\sqrt{9-6x+x^2}+\sqrt{9+6x+x^2}$ **R : y = - 2x**

Obs.: $|x|=\begin{cases} x, & se\ x\geq 0 \\ -x, & se\ x<0 \end{cases}$

8. Sejam as funções f e g definidas, respectivamente, por : $f(x)=\sqrt{x-2}$ e $g(x)=\sqrt{5-x}$

determine os domínios das funções f+g , f – g, f . g e $\dfrac{f}{g}$ Resp.: D = 2 ≤ x ≤ 5

9. A função f, de R em R, é periódica de período 5, é impar e $f(\frac{1}{3})=1$. Determine $f\left(\dfrac{16}{3}\right).f\left(\dfrac{29}{3}\right)$ **R=-1** e f(12) + f(-7) **R = 0**

Obs.: a) Uma função f é par quando para todo x no domínio de f têm-se f(-x) = f(x).
b) Uma função f é ímpar quando para todo x no domínio de f têm-se f(-x) = -f(x).
c) uma função é periódica e de período p se f(x + p) = f(x) para todo x

10. Ache a inclinação da reta cuja equação é 6x + 5y – 7 = 0 R.: m = -6/5
11. Dada a reta p com equação 5x + 4y – 20 = 0 encontre uma equação da reta que passe pelo ponto (2, -3) e: (a) seja paralela a p R.: 5x + 4y + 2 = 0 e (b) seja perpendicular a p. R.: (b) 4x – 5y – 23 = 0
12. Ache um equação da reta em que: o intercepto x é -3 e o intercepto y é 4. R.: 4x – 3y = 12 = 0
13.Consideremos os pontos A(3; 4) e B(8; 9) e a reta de equação 3x – y + 1 = 0. Determine o ponto de r que é equidistante de A e B. R: P(11/4; 37/4)
14. Obtenha a equação da tangente à parábola y = x^2 em P(2 , 4) R.: y = 4x – 4

Equação fundamental da reta: $\boxed{y-y_p=m\cdot(x-x_p)}$, onde $m=tg\ \alpha=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

15. Ache uma equação de cada uma das retas normais à curva $y=x^3-4x$ que sejam paralelas à reta x + 8y – 8 = 0 (Resp.: x + 8y + 2 = 0 e x + 8y – 2 = 0)

Obs.: Para encontrar a equação da reta normal à curva no ponto especificado, lembramos que ela é perpendicular à reta tangente á curva nesse ponto. Logo, o coeficiente angular da normal é o oposto do inverso do coeficiente angular da reta tangente, isto é: se o coeficiente angular da reta tangente for m então o coeficiente angular da reta normal será $-\dfrac{1}{m}$

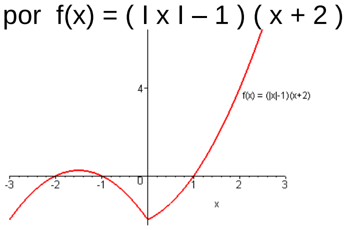
Duas retas não verticais r e s são paralelas se, e somente se os seus coeficientes angulares forem iguais, isto é:

$$\boxed{r \,//\, s \Rightarrow m_r = m_s}$$

Duas retas não verticais r e s são perpendiculares se, e somente se o produto de seus coeficientes angulares for igual a menos um, isto é:

$$\boxed{r \perp s \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1} \text{ ou } \boxed{r \perp s \Rightarrow m_s = -\frac{1}{m_r}}$$

16. Desenhe o gráfico da função f definida por f(x) = (I x I – 1) (x + 2)



17. Desenhe o gráfico da função f(x) definida por:

a) $y = 1 + (x-2)^2$ b) $y^2 = x^2 + 6x$ c) $y = 1 + 2x - x^2$ d) $y = 2 - (x+1)^2$

e) $y = \sqrt{x-3}$ f) $y = (x-2)^4(x+1)^3(x-1)$ g) $y = |x-3| + 2$ h) $y = 4 - |x-2|$

i) $y^2 = x$ j) $y = |y^2 - 4|$ k) $y = 1/x$ l) $y = 1/x^2$

Fórmulas para translação

Translação vertical

$y = f(x) + k$ — Translada o gráfico k unidades *para cima* se $k > 0$
Translada o gráfico $|k|$ unidades *para baixo* se $k < 0$

Translação horizontal

$y = f(x + h)$ — Translada o gráfico h unidades *para a esquerda* se $h > 0$
Translada o gráfico $|h|$ unidades *para a direita* se $h < 0$

Fórmulas para mudança vertical ou horizontal e para reflexão

Para $c > 1$:

$y = cf(x)$ — Alonga o gráfico de f verticalmente por um fator de c.

$y = \dfrac{1}{c} f(x)$ — Comprime o gráfico de f verticalmente por um fator de c.

$y = f(cx)$ — Comprime o gráfico de f horizontalmente por um fator de c.

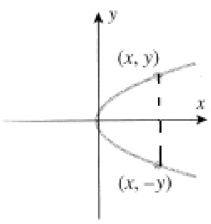
$y = f(x/c)$ — Alonga o gráfico de f horizontalmente por um fator de c.

Para $c = -1$:

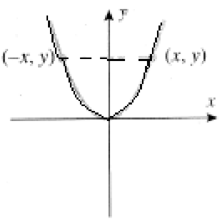
$y = -f(x)$ — Reflete o gráfico de f em torno do eixo x.

$y = f(-x)$ — Reflete o gráfico de f em torno do eixo y.

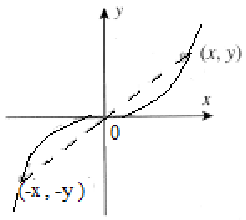
SIMETRIAS:



Simetria em torno do eixo x



Simetria em torno do eixo y



Simetria em relação à origem

18. Diz-se que um cilindro circular reto está inscrito numa esfera se as circunferências das bases do cilindro estão na superfície da esfera. Se a esfera tem raio R, expresse o volume do cilindro circular reto inscrito, como uma função do raio r de sua base. Resp.: $V = 2\pi r r^2\sqrt{R^2 - r^2}$

- ♦ **Cilindro**: $\begin{cases} \acute{A}rea\,Base = \pi r^2; \quad \acute{A}rea\ Lateral = 2\pi r h \\ \acute{A}rea\ Total = 2 \times \acute{A}rea\,Base + \acute{A}rea\ Lateral; \\ Volume = \pi r^2 h \end{cases}$

- ♦ **Cone**: $\begin{cases} \acute{A}rea\,Base = \pi r^2; \quad \acute{A}rea\ Lateral = \pi r g \\ \acute{A}rea\ Total = \acute{A}rea\,Base + \acute{A}rea\ Lateral; \\ Volume = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h \end{cases}$

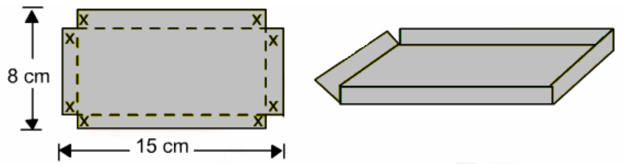
Esfera: $\begin{cases} \acute{A}rea = 4\pi r^2 \\ Volume = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \end{cases}$

19. Um cilindro circular reto está inscrito numa esfera de raio r. Expresse o volume V do cilindro em função da altura h do cilindro. $V = \pi h\left(r^2 - \frac{h^2}{4}\right)$

20. Verifique que $a - b = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})$

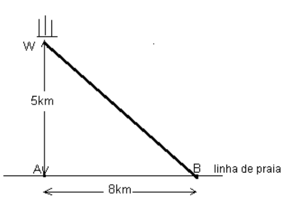
21. Isole y em termos de x e C: ln(y+2) = x + lnC Resp.: $y = Ce^x - 2$

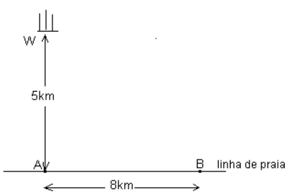
22. Uma caixa aberta é feita de pedaços de papelão com 8 por 15 centímetros, cortando fora quadrados do mesmo tamanho dos quatro cantos e dobrando para cima os lados. Seja V o volume da caixa obtido quando os quadrados tiverem lados de comprimento x. Determine uma fórmula para V como uma função de x.
Ache o domínio e a imagem de V.

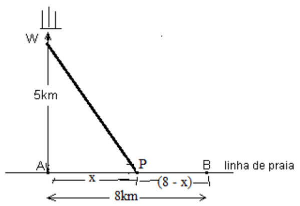


23. A figura abaixo mostra um poço de petróleo no mar em um ponto W, cujo ponto mais próximo de uma praia reta é A. O petróleo deve ser canalizado de W até um ponto B na praia que está a 8km de A. Custa \$ 1.000.000/km colocar tubulação abaixo da linha d´água e \$ 500.000/km sobre a terra. Como administrador do projeto, você recebe três propostas para canalizar o petróleo de W até B.
Proposta 1: sustenta que é mais barato canalizar diretamente de W até B, pois a menor distância entre dois pontos é a linha reta.
A proposta 2 reinvidica que é mais barato canalizar diretamente até A e daí até B ao longo da praia, usando assim, o mínimo de tubulações sob a linha de água.
A proposta 3 reinvidica que o mais barato é seguir sob a água até um ponto bem escolhido na praia, entre A e B e então seguir pela praia até B;

Qual a proposta correta? R.: A proposta 3 é mais econômica. Custo = =c = $1\sqrt{x^2 + 25} = 0{,}5(8 - x)$

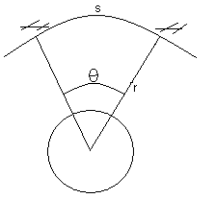






24.Que figura representa o gráfico das equações paramétricas a) x = 3cost, y = 2 sent ($0 \le t \le 2\pi$) R.: Elipse
b) x = cost , y = sent R.: Círculo c) x = 2t – 3 , y = 6t – 7 R.: Reta

25. Considere dois satélites artificiais circulando ao redor do Equador em uma órbita de raio $r = 4{,}23 \times 10^7$m. Ache o comprimento do arco “s” que separa os satélites se eles tiverem uma separação angular de $\theta = 2^o$.
R.: $s = 1{,}48 \times 10^6$ m



As famílias: y = A sen Bx e y = A cos Bx

Nota: Seja f(t) = A sen (Bt) ou g(t) = A cos (Bt):

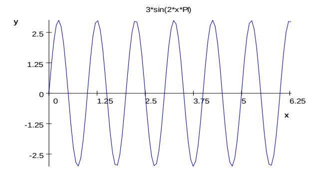
| A | é a amplitude: (metade da distância entre os valores máximo e mínimo)

Período : $\frac{2\pi}{|B|}$ (tempo necessário para que a oscilação complete um ciclo)

1) Esboce o gráfico de a) y = 3 sen 2πx (3 é amplitude com período 1)

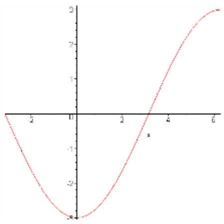
Digite:plotfunc2d(3*sin(2*PI*x), x = 0..2*PI)

MUPAD



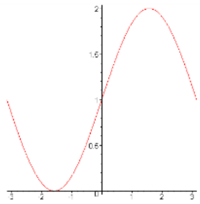
a) y = -3cos 0,5x (-3 é amplitude com período 4 π)

\> **plot(-3*cos(1/2*x),x=-Pi..2*Pi);**



b) 1 + senx (Amplitude = 2 , período 2 π)

\> **plot(1+ sin(x), x=-Pi..Pi);**



As famílias : y = A sen.(Bx– C) e y = A cos(Bx – C) ou ainda, $y = A\ \operatorname{sen}\left[B\left(x - \frac{C}{B}\right)\right]$ e $y = A\ \cos\left[B\left(x - \frac{C}{B}\right)\right]$

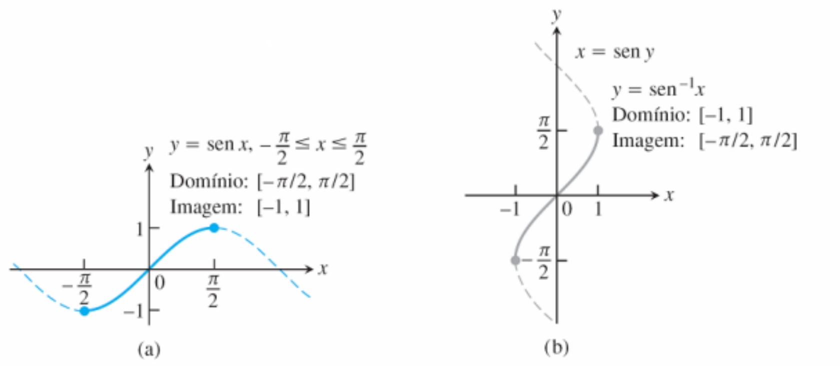
1. Ache a amplitude, o período e o deslocamento de fase de y = $3\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

Amplitude = 3 Período = π Deslocamento de fase = $-\frac{\pi}{2}$

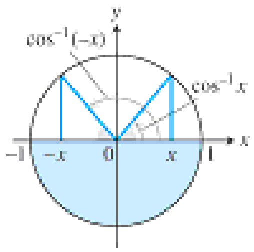
Funções trigonométricas inversas

Definição Funções arco seno e arco cosseno

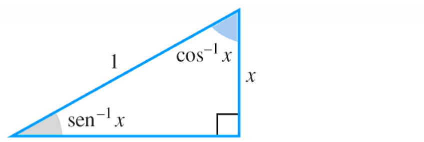
$y = \operatorname{sen}^{-1} x$ é o número no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ para o qual sen $y = x$.
$y = \cos^{-1} x$ é o número no intervalo $[0, \pi]$ para o qual cos $y = x$.



Os gráficos de (a) $y = \text{sen}\, x$, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, e (b) sua inversa, $y = \text{sen}^{-1} x$. O gráfico de $\text{sen}^{-1} x$, obtido pela reflexão em torno da reta $y = x$, é uma parte da curva $x = \text{sen}\, y$.



$\cos^{-1} x$ e $\cos^{-1}(-x)$ são ângulos suplementares (portanto, sua soma é π).



$\text{sen}^{-1} x$ e $\cos^{-1} x$ são ângulos complementares

2.Determine o domínio da função definida por $f(x) = \log_2(1-2x) + 3\arccos\frac{3x-1}{2}$ R : $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$

3. Calcule o valor de $\cos(\text{arcsen}\frac{1}{4} + \arccos\frac{1}{2})$. Resp.: $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{8}$

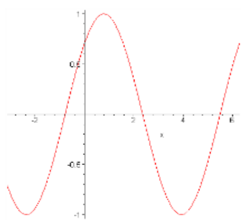
4. Simplifique:

a) $sen\left(sen^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ R.: $\frac{\sqrt{3}}{2} = sen\frac{\pi}{3}$ b) $\cos\left(sen(-\frac{13}{5})\right)$ R.: $\frac{4}{5}$

c) $y = \text{tg}\, 2.\left(\text{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ R. $-\sqrt{3}$ d) $y = \text{tg}\left[\text{arcsen}\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$ R. $-\frac{3}{4}$

e) cos (2.arccos 1) R. 1 f) $y = \text{sen}\left(\arccos\frac{1}{2} + \text{arcsen}\frac{1}{3}\right)$ R. $\frac{2\sqrt{6}+1}{6}$

5. Faça o gráfico de $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ digite : plot(sin(x+Pi/4), x = 0..2*Pi);



7.Faça o gráfico de $f(t) = \text{sen}(2t)$ sobre o intervalo $[-\pi, \pi]$. Obtenha a amplitude e o período de f .

APLICAÇÃO: Aparelhos elétricos, como motores, transformadores, reatores de lâmpadas e outros, precisam, além da energia ativa (energia para o funcionamento normal do aparelho), de uma forma de energia chamada reativa (para energizar as partes elétricas do aparelho para sua efetiva utilização). As empresas controladoras de energia medem um valor chamado fator de potência(FP) que relaciona as energias mencionadas por meio da equação: $FP = \cos\left(arctg\,\dfrac{\text{energia reativa}}{\text{energia ativa}}\right)$. As indústrias devem ter FP maior que 0,92, senão serão multadas pela má utilização da elétrica. Suponhamos duas indústrias que consumam os seguintes valores:

a) indústria A: energia reativa — 1200 kvarh, energia ativa — 1200 kWh
b) indústria B: energia reativa — 1200 kvarh, energia ativa — 4800 kWh

Pergunta-se:

1) Qual das indústrias tem o melhor fator de potência? ® B; FP=0,9703
2) Qual das indústrias deve ser multada? ® A; FP=0,7071

Funções Hiperbólicas e os cabos pendentes: $e^x = \underbrace{\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}}_{\text{par}=\cosh x} + \underbrace{\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}}_{\text{impar}=\text{senh}\, x}$ têm muitas propriedades em comum com as funções trigonométricas e, portanto, algumas identidades também semelhantes.

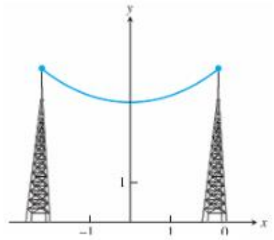
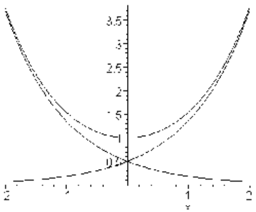


Gráfico de uma catenária ou cabo pendente.

Teorema : a) cosh x + senh x = e^x b) cosh x – senh x = e^{-x} c) $\cos^2$h x – sen^2h x = 1
d) 1 – tg^2h x = $\sec^2$h x e) cotg^2h x – 1 = cossec^2h x f) cosh(-x) = cosh x g) senh(-x) = -senh x

1. Gráfico de: $\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \cosh x$



Maple: > with(plots):
> plot([1/2*exp(x),1/2*exp(-x),cosh(x)],x= -2…2);

2. Demonstre que a função inversa de cosh(x) é $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

- **FUNÇÃO EXPONENCIAL:** $y = a^x, a > 0$ e $a \neq 1$
- **Propriedades das potências**:

1) $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot ... \cdot x}_{\text{n termos}}$ 2) $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$ 3) $x^{m-n} = \dfrac{x^m}{x^n}$

4) $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ 5) $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$ 6) $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ 7) $a^0 = 1\ (a \neq 0)$

- **FUNÇÃO LOGARÍTMICA:** $\begin{cases} y = \log_a^x, a > 0\ e\ a \neq 1\ e\ x > 0 \\ \ln x = \log_e^x, \text{ onde: } e = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x \cong 2{,}7182818.. \end{cases}$
- **Propriedades logarítmicas**:

1) $\log_a(A \cdot B) = \log_a(A) + \log_a(B)$ 2) $\log_a\left(\dfrac{A}{B}\right) = \log_a(A) - \log_a(B)$

2) $\log_a(A^n) = n \cdot \log_a(A)$ 4) $\log_B^A = \dfrac{\log_a A}{\log_a B}$ (conhecida como mudança de base)

5) $a^{\log_a^x} = x$ e por consequência $e^{\ln x} = x$