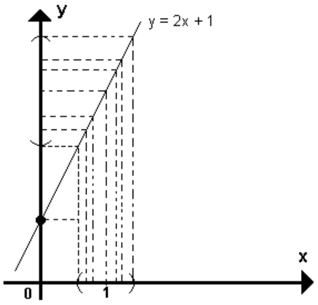
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ – IFCE – 2015-1
Disciplina: CÁLCULO I – LIMITES –

Noção intuitiva de limite

Seja a função f(x)=2x+1. Vamos dar valores a **x** que se aproximem de 1, pela sua direita (valores maiores que 1) e pela esquerda (valores menores que 1) e calcular o valor correspondente de **y**:

X	*y* = 2*x* + 1
1,3	3,6
1,1	3,2
1,05	3,1
1,02	3,04
1,01	3,02

X	*y* = 2*x* + 1
0,7	2,4
0,9	2,8
0,95	2,9
0,98	2,96
0,99	2,98



Notamos que à medida que *x* se aproxima de 1, *y* se aproxima de 3, ou seja, quando *x* tende para 1 ($x \to 1$), *y* tende para 3 ($y \to 3$), ou seja:

$$\boxed{\lim_{x \to 1} (2x+1) = 3}$$

Observamos que quando *x* tende para 1, *y* tende para 3 e o limite da função é 3.

Esse é o estudo do comportamento de f(*x*) quando *x* tende para 1 ($x \to 1$). Nem é preciso que *x* assuma o valor 1. Se f(*x*) tende para 3 ($f(x) \to 3$), dizemos que o limite de f(*x*) quando $x \to 1$ é 3, embora possam ocorrer casos em que para *x* = 1 o valor de f(*x*) não seja 3. De forma geral, escrevemos:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = b}$$

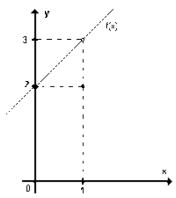
se, quando *x* se aproxima de *a* ($x \to a$), f(*x*) se aproxima de *b* ($f(x) \to b$).

Seja, agora, a função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & \text{se } x = 1 \end{cases}$

Podemos notar que quando *x* se aproxima de 1 ($x \to 1$), f(*x*) se aproxima de 3, embora para *x* = 1 tenhamos f(*x*) = 2. o que ocorre é que procuramos o comportamento de y quando $x \to 1$. E, no caso, $y \to 3$. Logo, o limite de f(*x*) é 3. Escrevemos:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \to 1} (x+2) = 1 + 2 = \boxed{3}$$

Se g: IR $\to$ IR e g(*x*) = *x* + 2, $\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} (x+2) = 3$, embora g(*x*) $\neq$ f(*x*) em *x* = 1. No entanto, ambas têm o mesmo limite.



a).Para a existência de $\lim_{x \to a} f(x)$, o que interessa não é o particular valor que f (x) possa tomar no ponto x = a, mas sim, o conjunto de valores que f (x) possa assumir numa vizinhança reduzida de a.

Ex.: $f(x)=\begin{cases}2x+1, \text{ para } x\neq 1\\ 4 \text{ , para } x=1\end{cases}$ neste caso $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(2x+1)=3\neq f(1)$.

Mesmo que f (1) não estivesse definido, o valor do limite seria 3 .

b) Se as funções f (x) e g (x) são tais que : f(x) = g(x) , para x ≠ a e f (a) ≠ g(a) elas possuem o mesmo comportamento em relação ao cálculo do limite quando x tende a " a ".

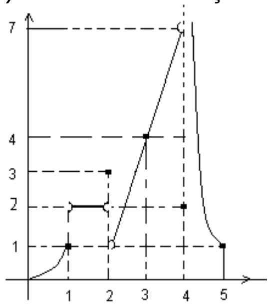
$F(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}$ definida em R – { 1 } e g(x) = 2x + 1 definida em R, apresentam o mesmo limite quando $x\to 1$.

c) O fato de se definir f (a) não implica na existência do $\lim_{x\to a} f(x)$ Ex.: $f(x)=\begin{cases}2x+1 \text{ para } x\geq 1\\ 2x-1 \text{ para } x<1\end{cases}$

d) Pode acontecer que não se defina f (a) e também não exista $\lim_{x\to a} f(x)$

Ex.: $f(x)=\begin{cases}x \text{ para } x<1\\ 4 \text{ para } x>1\end{cases}$

1) Considere a função f cujo gráfico é representado ao lado, calcule :



a) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ e) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ i) $\lim_{x\to 3} f(x)$ m) $\lim_{x\to 5^-} f(x)$

b) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ f) $\lim_{x\to 2} f(x)$ j) $\lim_{x\to 4^-} f(x)$ n) $\lim_{x\to 5^+} f(x)$

c) $\lim_{x\to 1} f(x)$ g) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ k) $\lim_{x\to 4^+} f(x)$ 0) $\lim_{x\to 5} f(x)$

d) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ h) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ l) $\lim_{x\to 4} f(x)$

2) Sendo $f(x)=\begin{cases}x \text{ se } x<1\\ 3 \text{ se } x=1\\ x+5 \text{ se } x>1\end{cases}$, encontre: a) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ b) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ c) $\lim_{x\to 1} f(x)$

3) Seja $h(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-3|}{x-3}, & \text{se } x\neq 3\\ 0, & \text{se } x=3\end{cases}$.

a) Faça o gráfico de h(x). b) Achar, se existir: $\lim_{x\to 3^+} h(x)$, $\lim_{x\to 3^-} h(x)$ e $\lim_{x\to 3} h(x)$.

4)Seja $h(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|}, & \text{se } x\neq 0\\ 0, & \text{se } x=0\end{cases}$. Mostrar que h(x) não tem limite no ponto 0.

5)Seja $f(x)=2+|5x-1|$ .Calcule se existir: a) $\lim_{x\to 1/5^+} f(x)$ b) $\lim_{x\to 1/5^-} f(x)$ c) $\lim_{x\to 1/5} f(x)$

6) Dada $f(x)=\begin{cases}x^2, \text{ se } x\leq -2\\ ax+b, \text{ se } -2<x<2\\ 2x-6, \ 2\leq x\end{cases}$. Ache os valores de a e b tais que $\lim_{x\to -2} f(x)$ e $\lim_{x\to 2} f(x)$ existam

7) Dada $f(x)=\begin{cases}2x-a, \text{ se } x<-3\\ ax+2b, \text{ se } -3\leq x\leq 3\\ b-5x, \ 3<x\end{cases}$. Ache os valores de a e b tais que $\lim_{x\to -3} f(x)$ e $\lim_{x\to 3} f(x)$ existam

DEFINIÇÃO : Dizemos que a função f tende ao limite L quando x tende a x_0 se , para qualquer número positvo ε, é possível encontrar um número positivo δ, tal que se $0<|x-x_0|<\delta$, então $|f(x)-L|<\varepsilon$

Prove que existe o limite $\lim\limits_{x \to 3}(4x - 5)$ = 7.

Inicialmente, devemos achar um δ tal que $|(4x - 5) - 7| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 3| < \delta$

Temos que:

$|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = |4(x - 3)| = 4|x - 3|$, então queremos

$4|x - 3| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 3| < \delta$ ou,

$|x - 3| < \varepsilon/4$ sempre que $0 < |x - 3| < \delta$

Então podemos escolher $\delta = \varepsilon/4$.

Agora, devemos mostrar que a escolha de δ funciona.

Se $0 < |x - 3| < \delta$, então:

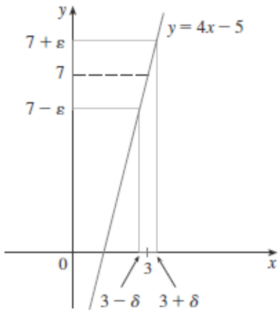
$|(4x - 5) - 7| = 4|x - 3| < 4\delta = \varepsilon$

Ou seja:

$|(4x - 5) - 7| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 3| < \delta$

Portanto, pela definição de limite, $\lim\limits_{x \to 3}(4x - 5) = 7$

Graficamente, temos a ilustração do exemplo na figura abaixo:



1) Seja f : R → R dada por f(x) = 2x – 5. Prove que $\lim\limits_{x \to 4}(2x - 5) = 3$

2)Seja F : R - { 3 } dada por f(x) = $\dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$. Prove que $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$

3) Seja F : R - { 1 } dada por f(x) = $\dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$. Prove que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1} = 5$

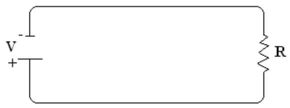
4) Seja f : R → R dada por f(x) = x^2. Prove que $\lim\limits_{x \to 5} x^2 = 25$

5) Nos exercícios a,b,c e d são dados um número positivo ε e o limite L de cada função f no ponto a. Ache um número δ tal que | f(x) – L | < ε se | x – a | < δ

a) $\lim\limits_{x \to -1} (7x + 5) = -2$ $\varepsilon = 0{,}01$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$ $\varepsilon = 0{,}05$

c) $\lim\limits_{x \to 4} x^2 = 16$ $\varepsilon = 0{,}001$ d) $\lim\limits_{x \to 9} \sqrt{x} = 9$ $\varepsilon = 0{,}001$

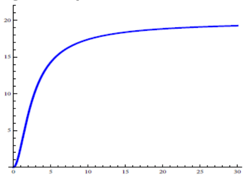
6. A lei de Ohm para circuitos elétricos, como na ilustração na fig. Abaixo, diz que **V = RI**. Nessa equação, V é uma voltagem constante, I é a corrente em ampéres e R **é** a resistência em ohms. Sua empresa recebeu um pedido para fornecer resistores para um circuito no qual V será 120V, sendo I = 5 $\pm$ 0,1A. Em qual intervalo R deve ficar para que I esteja a 0,1ª do valor alvo I_0 = 5A?



7.No circuito RC, (circuito onde a corrente varia com o tempo, contendo um capacitor) tem-se um capacitor de capacitância C que está inicialmente descarregado. Deseja-se encontrar a carga q deste capacitor em um determinado tempo q(t). Conforme a equação da carga do capacitor $q = C\varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$ estabeleça:

a)A carga de um capacitor quando t = 0. R. q = 0 **b)** A carga do capacitor quando t$\rightarrow\infty$, R. q = $C\varepsilon$
ε→ força eletromotriz (tensão no RC) e **C**→ capacitância.

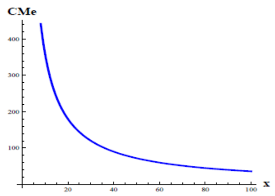
8. Uma montadora de computadores determina que um empregado após x dias de treinamento, monta m Computadores por dia, onde: $m = \dfrac{20x^2}{x^2 + x + 5}$. Qual é o comportamento de m = m(x) para treinamentos longos?
R.: Após um longo treinamento, um empregado pode montar 20 computadores por dia.



9.O custo para produzir x unidades de um certo produto é dado por C(x) = 0.25 x +3600 em reais.

(a) Determine o custo médio quando x cresce. R. $Custo\ médio = CM_e(x) = \dfrac{C(x)}{x} = 0,25 + \dfrac{3600}{x}$

(b) Interprete o resultado.
R. quando o bem em questão é produzido em grande escala o custo médio tende a estabilizar-se em 0.25 reais.



10. Um governo determina que o custo para despoluir x% de metais pesados que contaminam uma reserva de água doce é dado por $C(x) = \dfrac{120000x}{100 - x}$ medido em reais.

(a) Qual é o custo para eliminar a metade dos metais pesados? R. Calculamos C(50) = R$ 120000,00.
(b) Com 1000000 reais, que percentual da reserva fica despoluida? R. x% = 89,2.
© É economicamente viável despoluir totalmente a reserva? Á medida que nos aproximamos para despoluir toda a reserva, os custos crescem arbitrariamente $\lim\limits_{x \to 100^-} C(x) = +\infty$, isto é, economicamente inviável, despoluir toda a reserva.

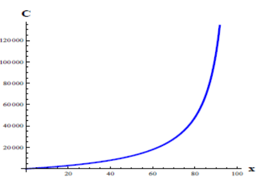


Gráfico do custo para despoluir.

Limites Fundamentais

Para o estudo dos limites fundamentais é útil conhecer e saber aplicar as propriedades dos limites, que são:
1)O limite de uma constante é a própria constante:

$$\lim_{x \to a} K = K \quad \text{com} \quad K \in R$$

Exemplo: $\lim\limits_{x \to -2} 7 = 7$

2)O limite da soma ou diferença é igual a soma ou diferença dos limites, caso estes limites existam:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\pm \lim_{x\to a} g(x)$$

Exemplo:

$$\lim_{x\to 1}\left[x^2 \pm 3x^3\right]=\lim_{x\to 1} x^2+\lim_{x\to 1} 3x^3 = 1+3=4$$

3)O limite do produto é o produto dos limites, caso estes limites existam:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

Exemplo:

$$\lim_{x\to \pi}\left[3x^3 \, . \, \cos x\right]=\lim_{x\to \pi} x^3 \, . \lim_{x\to \pi} \cos x = \pi^3 . \cos \pi = \pi^3 . (-1) = -\pi^3$$

4)O limite do quociente é igual ao quociente dos limites, caso estes limites existam:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

Exemplo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x^2+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}{\lim\limits_{x\to 0} x^2+1}=\frac{\cos 0}{0^2+1}=\frac{1}{1}=1$$

5)O limite da potência de uma função f(x) é igual à potência do limite da função, caso esse exista:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n \quad \text{com } n\in N^*$$

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2+3\right)^2=\left(\lim_{x\to 1}\left(x^2+3\right)\right)^2=\left(1+3\right)^2=16$$

6)O limite de uma constante vezes uma função é igual à constante vezes o limite da função, caso esse limite exista:

$$\lim_{x\to a}\left[K.f(x)\right]=K\cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

7)O limite da raiz enésima de uma função é a raiz enésima do limite da função:

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} \quad \text{com } n\in N^* \text{ e } f(x)\geq 0 \text{ se } n \text{ for par}$$

Exemplo:

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{x^3+x^2-1}=\sqrt{\lim_{x\to 2} x^3+x^2-1}=\sqrt{2^3+2^2-1}=\sqrt{11}$$

LIMITES COM USO DO MAPLE

Para calcular o limite de uma função quando a variável tende a certo valor, é necessário utilizar o comando limit. Por exemplo: limit(f(t), t=a), onde a é a variação. Limit é utilizado para deixar indicado o limite, já o comando limit é utilizado para resolver o limite. O uso do Limit combinado com o limit pode melhorar a apresentação do resultado:

>Limit(cos(a*x)/(b*x), x=1); $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos(ax)}{bx}$

>limit(cos(a*x)/(b*x), x=1); $\frac{\cos(a)}{b}$

>Limit(cos(a*x)/(b*x), x=1)= limit(cos(a*x)/(b*x), x=1);

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos(ax)}{bx}=\frac{\cos(a)}{b}$$

. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-5x+3)$, procedimentos: R:=limit(x^2-5*x+3,x=1); R:= -1

. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+x}-\sqrt[5]{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$, procedimentos: > **S:=limit((root[5](1+x)-root[5](1-x))/(root[3](1+x)-root[3](1-x)),x=0);**

S:=3/5

. $\lim_{\theta\to \pi/2}\left(\frac{\ln(\cos(\theta))}{\ln(\tan(\theta))}\right)$, procedimentos: > T**:=limit(ln(cos(theta))/ln(tan(theta)),theta=Pi/2); T**:= -1

Para calcular limites laterais acrescenta-se uma opção left ou right aos comandos limit e ou Limit. Se for Acrescentada a opção left, então, será calculado o limite lateral à esquerda. Se for acrescentado right, então o limite será lateral à direita.

>Limit(cos(Pi*x)/x, x=0, left)= limit(cos(Pi*x)/x, x=0, left); $\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos \pi x}{x}$ = -∞

>Limit(cos(Pi*x)/x, x=0, right)= limit(cos(Pi*x)/x, x=0, right); $\lim_{x\to 0+}\frac{\cos \pi x}{x}=\infty$

>Limit(cos(Pi*x)/x, x=0)= limit(cos(Pi*x)/x, x=0); $\lim_{x\to 0}\frac{\cos \pi x}{x}$ = undefined

Para calcular limites no infinito, isto é, com a variável tendendo a +∞ ou -∞, utilizamos infinity ou infinity para a variável.

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x+3}\right)^x$, procedimentos: > S:=limit(((x+7)/(x+3))^x,x=infinity); S:= e^4