Diferenciação logarítmica:

1) Derive as funções abaixo:

a) $y=(2-x)^{\sqrt{x}}$ R.: $y=(2-x)^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln(2-x)}{2\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{2-x}\right)$

b) $y=x^{\cos 3x}$ R.: $x^{\cos 3x}\left(-3sen3x.\ln x+\frac{\cos 3x}{x}\right)$

c) $y=\frac{x^2\sqrt[3]{7x-14}}{(1+x^2)^4}$ R.: $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2\sqrt[3]{7x-14}}{(1+x^2)^4}\left[\frac{2}{x}+\frac{1}{3x-6}-\frac{8x}{1+x^2}\right]$

III) Derivação Implicita

1) Considere $y=f(x)$ definida implicitamente por $x^4-xy+y^4=1$. Calcule $f'(0)$ sabendo que $f(x)>0, \quad \forall x\in R$. $f'(0)=\frac{1}{4}$

2) Considere a curva dada por $x^3+y^3=3xy$. Esta curva é conhecida como *folium de Descartes*. Derive implicitamente para obter o coeficiente angular da reta tangente a esta curva em um ponto arbitrário (x_0, y_0).

R.: $\begin{cases}\frac{y_0-x_0^2}{y_0^2-x_0}, & x_0\neq 0\\ 0, & x_0=0\end{cases}$

3) Considere a curva conhecida como *cissóide de Diocles* e dada por $(2-x)y^2=x^3$.

a) Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico da curva em $(1,1)$. $y=2x-1$

b) Obtenha as equações das retas tangentes ao gráfico da curva nos pontos em que $x=\frac{3}{2}$.

R.: $y=3\sqrt{3}x-3\sqrt{3}$ ou $y=-3\sqrt{3}x+3\sqrt{3}$

4) Considere a elipse dada por $x^2-xy+y^2=9$.

a) Encontre as equações das retas tangentes à curva nos pontos em que a curva intercepta o eixo *y* e verifique que estas retas são paralelas. R.: $y=\frac{x}{2}+3$ e $y=\frac{x}{2}-3$

b) Encontre os pontos da curva nos quais a reta tangente é horizontal. R.: $(\sqrt{3},2\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3},-2\sqrt{3})$

c) Encontre os pontos da curva nos quais a reta tangente é vertical. R.: $(2\sqrt{3},\sqrt{3})$ e $(-2\sqrt{3},-\sqrt{3})$

5) Determine os pontos da *lemniscata* de equação $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ em que a reta tangente é vertical. R.: $(0,0); (1,0); (-1,0)$

6) Em que ponto da curva $x+\sqrt{xy}+y=1$ a reta tangente é paralela ao eixo dos x ? R.: $\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$

7) Mostre que se xy = 1, então $\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{d^2x}{dy^2}=4$.

8..Encontre a reta tangente e normal à curva $x\,\text{sen}\,2y = y\cos 2x$ no ponto $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

10. Prove que as retas tangentes às curvas:

$4y^3 - x^2y - x + 5y = 0$ e $x^4 - 4y^3 + 5x + y = 0$ na origem são perpendiculares.

Diferenciação exponenciais

Para obter uma fórmula para a derivada de funções exponenciais $y=b^x$ reescrevemos esta equação como $x=\log_b y$ e diferenciamos implicitamente usando $\frac{d}{dx}[\log_b u]=\frac{1}{u\ln b}.\frac{du}{dx}$ Assim, mostrando que se $y=b^x$

for uma função diferenciável, então sua derivada em relação a x é $\frac{d}{dx}(b^x) = b^x \ln b$. No caso especial onde $b = e$ temos $1n\, e = 1$, assim $\frac{d}{dx}(b^x) = b^x \ln b$ torna-se $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$. Além disso, se u for uma função diferenciável de x, então tem-se a partir de $\frac{d}{dx}(b^x) = b^x \ln b$ que $\frac{d}{dx}(b^u) = b^u \ln b \frac{du}{dx}$ e $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$

LOGARITMO E EXPONENCIAL

Derive:

1) $y = \ln(x^3)$ $\quad y' = \frac{3}{x}$ $\qquad$ 2) $y = \ln^3(x)$ $\quad y' = \frac{3\ln^2(x)}{x}$ $\qquad$ 3) $y = x\, e^{\operatorname{sen}(x)}$ $\quad y' = e^{\operatorname{sen}(x)}(1 + x\cos(x))$

4) $y = e^{e^x}$ $\quad y' = e^x e^{(e^x)}$ $\qquad$ 5) $y = \ln(\ln(x))$ $\quad y' = \frac{1}{x\ln(x)}$ $\qquad$ 6) $y = \ln(x + e^{-x})$ $\quad y' = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$

7) $y = \ln(x\sqrt{x^2 + 1})$ $\quad y' = \frac{\sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x\sqrt{x^2+1}}$ $\qquad$ 8) $y = \ln(t^3 \ln(t^2))$ $\quad y' = \frac{3t^2\ln(t^2) + 2t^2}{t^3 \ln(t^2)}$

9) $y = e^{\sqrt{x}} \ln(\sqrt{x})$ $\quad y' = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2}\left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right)$ $\qquad$ 10) $y = \ln\left(\sqrt[3]{\frac{x}{x^2+1}}\right)$ $\quad y' = \frac{1 - x^2}{3x(x^2+1)}$

11) $y = 2^{\operatorname{tg}(x^2)}$ $\quad y' = 2^{\operatorname{tg}(x^2)} \ln(2)\sec^2(x^2)\, 2x$ $\qquad$ 12) $y = \log_2(x^2)$ $\quad y' = \frac{2}{x\ln(2)}$

Ache $\frac{dy}{dx}$ por derivação implícita

1) $\ln\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = 5$ $\quad y' = \frac{y}{x}$ $\qquad$ 2) $xy = \ln(\operatorname{sen}(y))$ $\quad y' = \frac{-y\operatorname{sen}(y)}{x\operatorname{sen}(y) - \cos(y)}$

3) $x\operatorname{sen}(y) = e^{x+y}$ $\quad y' = \frac{e^{x+y} - \operatorname{sen}(y)}{x\cos(y) - e^{x+y}}$ $\qquad$ 4) $xy + x^2\ln^2(y) = 4$ $\quad y' = \frac{-y(y + 2x\ln^2(y))}{x(y + 2x\ln(y))}$

5) $y = (\ln(x))(\ln(y))$ $\quad y' = \frac{\ln(y)y}{x(y - \ln(x))}$ $\qquad$ 6) $\operatorname{sen}(e^{xy}) = x$ $\quad y' = \frac{-\cos(e^{xy})e^{xy}y - 1}{\cos(e^{xy})e^{xy}x}$

7) Se $\frac{y^2\cos(x)}{e^x} = 2^{\ln(y)}$, calcule $\frac{dy}{dx}$ em $x = 0$ e $y = 1$ $\quad y' = \frac{y^3(\operatorname{sen}(x) + \cos(x))}{2y^2\cos(x) - 2^{\ln(y)}\ln(2)e^x}$; $y'(0,1) = \frac{1}{2 - \ln(2)}$

Use derivação logarítmica para encontrar $\frac{dy}{dx}$.

1) $y = x^5\operatorname{sen}(x^3)\sqrt{\cos(3x+7)}$ $\quad y' = x^5\operatorname{sen}(x^3)\sqrt{\cos(3x+7)}\left(\frac{5}{x} + 3x^2\operatorname{cotg}(x^3) - \frac{3}{2}\operatorname{tg}(3x+7)\right)$

2) $y = \frac{\operatorname{sen}(x)\sqrt[3]{1 + \sec(x)}}{e^{x^5}}$ $\quad y' = \frac{\operatorname{sen}(x)\sqrt[3]{1+\sec(x)}}{e^{x^5}}\left(\operatorname{cotg}(x) + \frac{\sec(x)\operatorname{tg}(x)}{3(1 + \sec(x))} - 5x^4\right)$

3) $y = [\operatorname{sen}(x^2)]^{3x}$ $\quad y' = 3[\operatorname{sen}(x^2)]^{3x}(\ln(\operatorname{sen}(x^2)) + 2x^2\operatorname{cotg}(x^2))$

4) $y = (x)^{x^3}$ $\quad y' = x^2 x^{(x^3)}(3\ln(x) + 1)$ $\qquad$ 5) $y = (e^x)^x$ $\quad y' = 2x(e^x)^x$

6) $y = e^{(x^x)}$ $\quad y' = x^x e^{(x^x)}(\ln(x) + 1)$ $\qquad$ 7) $y = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)}}$ $\quad y' = \frac{\cos^2(2x) + \operatorname{sen}^2(2x)}{\sqrt{\operatorname{tg}(2x)}\cos^2(2x)}$

8) $y = (\operatorname{sen}(x))^{\operatorname{sen}(x)}$ $\quad y' = (\operatorname{sen}(x))^{\operatorname{sen}(x)}\cos(x)(\ln(\operatorname{sen}(x)) + 1)$