IFCE - CURSO: Engenharia de Mecatrônica/Licenciatura em Física – 2015-1
Cálculo I

Diferenciação logarítmica:
1)Derive as funções abaixo:

a) $y=(2-x)^{\sqrt{x}}$ R.: $y=(2-x)^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln(2-x)}{2\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{2-x}\right)$

b) $y=x^{\cos 3x}$ R.: $x^{\cos 3x}\left(-3sen3x.\ln x+\frac{\cos 3x}{x}\right)$

c) $y=\frac{x^2\sqrt[3]{7x-14}}{(1+x^2)^4}$ R.: $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2\sqrt[3]{7x-14}}{(1+x^2)^4}\left[\frac{2}{x}+\frac{1}{3x-6}-\frac{8x}{1+x^2}\right]$

III) Derivação Implicita

1) Considere $y=f(x)$ definida implicitamente por $x^4-xy+y^4=1$. Calcule $f'(0)$ sabendo que $f(x)>0,\quad \forall x\in R$. $f'(0)=\frac{1}{4}$

2) Considere a curva conhecida como *cissóide de Diocles* e dada por $(2-x)y^2=x^3$.
   a) Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico da curva em $(1,1)$. $y=2x-1$
   b) Obtenha as equações das retas tangentes ao gráfico da curva nos pontos em que $x=\frac{3}{2}$.
   R.: $y=3\sqrt{3}x-3\sqrt{3}$ ou $y=-3\sqrt{3}x+3\sqrt{3}$

3) Considere a elipse dada por $x^2-xy+y^2=9$.
   a) Encontre as equações das retas tangentes à curva nos pontos em que a curva intercepta o eixo *y* e verifique que estas retas são paralelas. R.: $y=\frac{x}{2}+3$ e $y=\frac{x}{2}-3$
   b) Encontre os pontos da curva nos quais a reta tangente é horizontal. R.: $(\sqrt{3},2\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3},-2\sqrt{3})$
   c) Encontre os pontos da curva nos quais a reta tangente é vertical. R.: $(2\sqrt{3},\sqrt{3})$ e $(-2\sqrt{3},-\sqrt{3})$

4) Determine os pontos da *lemniscata* de equação $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ em que a reta tangente é vertical. R.: $(0,0);(1,0);(-1,0)$

5) Em que ponto da curva $x+\sqrt{xy}+y=1$ a reta tangente é paralela ao eixo dos *x* ? R.: $\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$

6) Mostre que se xy = 1, então $\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{d^2x}{dy^2}=4$.

7.Encontre a reta tangente e normal à curva $x\,\text{sen}\,2y=y\cos 2x$ no ponto $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

8. Prove que as retas tangentes às curvas: $4y^3-x^2y-x+5y=0$ e $x^4-4y^3+5x+y=0$ na origem são perpendiculares.

Diferenciação exponenciaL

Para obter uma fórmula para a derivada de funções exponenciais $y=b^x$ reescrevemos esta equação como $x=\log_b y$ e diferenciamos implicitamente usando $\frac{d}{dx}[\log_b u]=\frac{1}{u\ln b}.\frac{du}{dx}$ Assim, mostrando que se $y=b^x$ for uma função diferenciável, então sua derivada em relação a *x* é $\frac{d}{dx}(b^x)=b^x\ln b$.

No caso especial onde *b* = *e* temos 1n *e* = 1, assim $\frac{d}{dx}(b^x)=b^x\ln b$ torna-se $\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$. Além disso, se u for uma função diferenciável de x, então tem-se a partir de

$$\frac{d}{dx}(b^x) = b^x \ln b \quad \text{que} \quad \frac{d}{dx}(b^u) = b^u \ln b \frac{du}{dx} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

Equações logarítmicas e exponenciais: exercícios:

1) $y = \ln(x^3)$ $\quad y' = \dfrac{3}{x}$ $\qquad$ 2) $y = \ln^3(x)$ $\quad y' = \dfrac{3\ln^2(x)}{x}$ $\qquad$ 3) $y = x e^{\text{sen}(x)}$ $\quad y' = e^{\text{sen}(x)}(1 + x\cos(x))$

4) $y = e^{e^x}$ $\quad y' = e^x e^{(e^x)}$ $\qquad$ 5) $y = \ln(\ln(x))$ $\quad y' = \dfrac{1}{x\ln(x)}$ $\qquad$ 6) $y = \ln(x + e^{-x})$ $\quad y' = \dfrac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$

7) $y = \ln(x\sqrt{x^2+1})$ $\quad y' = \dfrac{\sqrt{x^2+1} + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x\sqrt{x^2+1}}$ $\qquad$ 8) $y = \ln(t^3 \ln(t^2))$ $\quad y' = \dfrac{3t^2\ln(t^2) + 2t^2}{t^3\ln(t^2)}$

9) $y = e^{\sqrt{x}} \ln(\sqrt{x})$ $\quad y' = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2}\left(\dfrac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x}\right)$ $\qquad$ 10) $y = \ln\left(\sqrt[3]{\dfrac{x}{x^2+1}}\right)$ $\quad y' = \dfrac{1 - x^2}{3x(x^2+1)}$

11) $y = 2^{\text{tg}(x^2)}$ $\quad y' = 2^{\text{tg}(x^2)}\ln(2)\sec^2(x^2)\,2x$ $\qquad$ 12) $y = \log_2(x^2)$ $\quad y' = \dfrac{2}{x\ln(2)}$

Ache $\dfrac{dy}{dx}$ por derivação implícita em:

1) $\ln\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right) = 5$ $\quad y' = \dfrac{y}{x}$ $\qquad$ 2) $xy = \ln(\text{sen}(y))$ $\quad y' = \dfrac{-y\,\text{sen}(y)}{x\,\text{sen}(y) - \cos(y)}$

3) $x\,\text{sen}(y) = e^{x+y}$ $\quad y' = \dfrac{e^{x+y} - \text{sen}(y)}{x\cos(y) - e^{x+y}}$ $\qquad$ 4) $xy + x^2\ln^2(y) = 4$ $\quad y' = \dfrac{-y(y + 2x\ln^2(y))}{x(y + 2x\ln(y))}$

Use derivação logarítmica para encontrar $\dfrac{dy}{dx}$ em:.

1) $y = x^5 \text{sen}(x^3)\sqrt{\cos(3x+7)}$ $\quad y' = x^5\,\text{sen}(x^3)\sqrt{\cos(3x+7)}\left(\dfrac{5}{x} + 3x^2\text{cotg}(x^3) - \dfrac{3}{2}\text{tg}(3x+7)\right)$

2) $y = [\text{sen}(x^2)]^{3x}$ $\quad y' = 3[\text{sen}(x^2)]^{3x}(\ln(\text{sen}(x^2)) + 2x^2\text{cotg}(x^2))$

3) $y = (x)^{x^3}$ $\quad y' = x^2 x^{(x^3)}(3\ln(x) + 1)$ $\qquad$ 4) $y = (e^x)^x$ $\quad y' = 2x(e^x)^x$

5) $y = e^{(x^x)}$ $\quad y' = x^x e^{(x^x)}(\ln(x) + 1)$ $\qquad$ 6) $y = \sqrt{\dfrac{\text{sen}(2x)}{\cos(2x)}}$ $\quad y' = \dfrac{\cos^2(2x) + \text{sen}^2(2x)}{\sqrt{\text{tg}(2x)}\cos^2(2x)}$

7) $y = (\text{sen}(x))^{\text{sen}(x)}$ $\quad y' = (\text{sen}(x))^{\text{sen}(x)}\cos(x)(\ln(\text{sen}(x)) + 1)$

8)Calcule a área do triângulo retângulo sombreado na figura abaixo, sabendo-se que n é a reta normal a

f (x) = e^x no ponto de abscissa x_0 = 1 . $\qquad$ R. $\dfrac{e^3}{2}$