Soluções Lista V

Soluções:

Solução do Problema 1

O volume de água na piscina em função de *h*, a altura quando *h* está próximo de 5 é

$$V(h) = h \cdot l \cdot \frac{1}{2}(12 + 12 + h + \frac{16h}{6})$$

Como *l*=20 *ft* simplificando obtemos

$$V(h) = 20 \cdot h \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{144 + 22h}{6}\right)$$

isto é

$$V(h) = \frac{720h + 122h^2}{3}$$

Derivando implicitamente obtemos:

$$\frac{dV}{dt} = \left(24 + \frac{244h}{3}\right)\frac{dh}{dt}$$

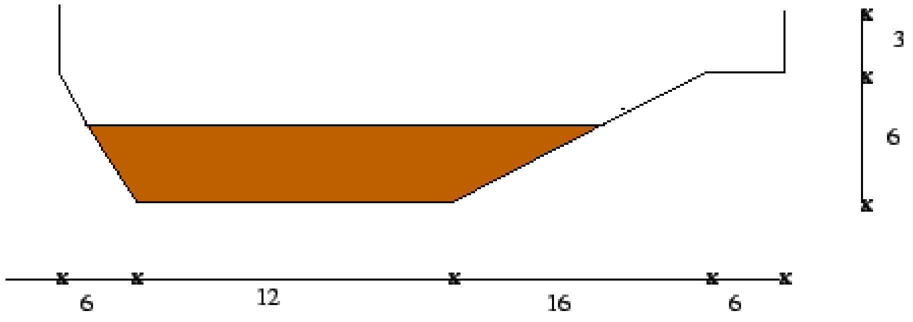
Como $\frac{dV}{dt} = 0.8ft/min$ temos

$$\frac{dh}{dt} = \frac{3\frac{dV}{dt}}{720 + 244h}$$

isto é

$$\frac{dh}{dt} = \frac{3\frac{dV}{dt}}{720 + 244h} = \frac{2.4}{1940} = 0.012ft/min$$

Figure 1: Piscina



Solução do Problema 2

A variação do volume de água é dada pela fórmula

$$\frac{dV}{dt} = \text{entra} - \text{sai}$$

$$\frac{dV}{dt} = tx_e(t) - 10000$$

Por outro lado como o volume de um cone é $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ e da figura sabemos que $\frac{4}{r} = \frac{6}{h}$ temos que $r = \frac{2}{3}h$ e portanto

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2h}{3}\right)^2 h = \frac{4\pi h^3}{27}$$

que derivando implicitamente obtemos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi h^2 \frac{dh}{dt}}{9} = tx_e(t) - 10000$$

logo a taxa de entrada no momento em que a altura era 200cm era

$$tx_e = \left(\frac{4\pi(200)^2 20}{9} + 10000\right) cm^3/min$$

Solução do Problema 3

Usamos a figura e a lei dos cossenos para expressar a distância entre os dois e obter:

$$d^2 = A^2 + B^2 - AB\cos\theta = 10^4 + 4\cdot 10^4 - 2\cdot 10^4\cos\theta = 10^4(5 - 2\cos\theta)$$

Derivando implicitamente obtemos

$$2dd' = 10^4(2\ \text{sen}\ \theta)\frac{d\theta}{dt}$$

e então

$$d' = \frac{10^4\ \text{sen}\ \theta}{d}\frac{d\theta}{dt}.$$

Mas como $s = r\theta$ temos $\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$ e como $\frac{ds}{dt} = 7$ m/s temos que $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r}\frac{ds}{dt} = 7\frac{1}{r} = \frac{7}{100}$. Finalmente sabendo que a distância entre eles era 200 m podemos determinar o ângulo θ a saber:

$$220^2 = 100^2 + 200^2 - 2\cdot 10^4\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

implicando que $\theta = \frac{\pi}{2}$. Portanto

$$d' = \frac{10^4\ \text{sen}\ \frac{\pi}{3}}{200}\cdot 7\cdot\frac{1}{100} = \frac{7}{2}\ \text{sen}\ \frac{\pi}{3} = \frac{7}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Solução do Problema 4

Como $f(x)=1-x^2$ e $f'(x)=-2x$ temos que uma das tangentes, a que passa no ponto $Q=(x,1-x^2)$ tem equação

$$w-1+x^2=-2x(v-x).$$

Portanto os pontos A e C são obtidos fazendo $v=0$ e então $w=1-x^2+2x^2=1+x^2$, isto é $A=(0,1+x^2)$ e fazendo $w=0$ e neste caso

$$\frac{x^2-1}{-2x} = u - x \Rightarrow u = \frac{x^2+1}{2x}$$

isto é $B=(\frac{x^2+1}{2x},0)$. A distância entre os dois é portanto:

$$d=\sqrt{\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)^2+(1+x^2)^2}=(1+x^2)\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}=$$

$$\frac{1+x^2}{2x}\sqrt{1+4x^2}$$

e como o triângulo deve ser equilátero devemos ter:

$$d=\frac{1+x^2}{2x}\sqrt{1+4x^2}=\frac{1+x^2}{x}$$

que resolvendo obtemos $\sqrt{1+4x^2}=2$ isto é $1+4x^2=4$ e portanto

$$x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Segue que os pontos são:

$$P=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{4}\right),\qquad Q=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{4}\right)$$

Solução do Problema 5

Sejam $y_h(t)$ a posição do homem sobre o eixo-y no instante t e $(500,y_m(t))$ a da mulher que se desloca sobre a vertical $x=500$. Como as velocidades são respectivamente $v_h=4$ e $v_m=5$ tem-se que

$$y_h(t)=4t\qquad y_m(t)=-5(t-300).$$

Da figura ve-se que

$$d^2=[y_h(t)-y_m(t)]^2+500^2$$

que derivando implicitamente temos

$$dd'=[y_h-y_m](y_h'-y_m')$$

Logo:

$$d' = \frac{[y_h - y_m](y_h' - y_m')}{\sqrt{[y_h(t) - y_m(t)]^2 + 500^2}} = \frac{(y_h' - y_m')}{\sqrt{1 + \frac{500^2}{[y_h(t) - y_m(t)]^2}}}$$

No instante t=15 como $y_h = 4 \cdot 15 \cdot 60 = 60^2$ e $y_m = -5(15-5)60 = -50 \cdot 60$ tem-se que:

$$d' = \frac{9}{\sqrt{1 + \frac{500^2}{[60^2 + 50.60]^2}}}$$

Solução do Problema 6

Da figura temos: $R^2=r^2+h^2$ e portanto $h = \sqrt{R^2 - r^2}$. Como o volume de um cilindro é dado por $V = \pi r^2 h$ temos:

$$V = \pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}$$

Derivando obtemos

$$V'(r) = 2\pi r \sqrt{R^2 - r^2} + \pi r^2 \frac{-2r}{2\sqrt{R^2 - r^2}} =$$

$$\pi r \left[2\sqrt{R^2 - r^2} - \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right] =$$

$$\pi r \left[\frac{2(R^2 - r^2) - r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right] = 0$$

isto é

$$2R^2-3r^2=0$$

e portanto $r^2 = \frac{2}{3} R^2$

$$r = R\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Portanto o volume máximo é

$$V_{\text{máx}} = \pi \frac{2}{3} R^2 \frac{1}{\sqrt{3}} R = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} R^3$$

Solução do Problema 7

Da figura, se denotamos $y(t)$ e $x(t)$ as posições dos barcos cujas velocidades são respectivamente 20km/h e 15 km/h temos que

$$y(t) = 20(t-2) \qquad x(t) = 15t + x_0$$

como $x(3)=0$ temos $x(3)=45-x_0=0$ e portanto $x_0=-45$ o que acarreta $x(t)=15t-45$. Logo a distância entre eles será dada por:

$$d = \sqrt{y(t)^2 + x(t)^2}$$

que derivando obtemos:

$$d' = \frac{2y(t)y'(t) + 2x(t)x'(t)}{2\sqrt{y(t)^2 + x(t)^2}} = \frac{y(t)y'(t) + x(t)x'(t)}{\sqrt{y(t)^2 + x(t)^2}}$$

e igualando a zero temos:

$$d' = \frac{(20(t-2))20 + (15t-45)15}{\sqrt{(20(t-2))^2 + (15t-45)^2}} = 0$$

isto é $400(t-2)+225(t-3)=0$ $625t=800+675$cuja solução é:

$$t = \frac{1475}{625} = 2.36$$

Solução do Problema 8

Para responder a) derivamos S para obter:

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{3}{2}s^2(-(\text{ cossec }^2\theta)) + 3s^2\frac{\sqrt{3}}{2}(-\text{ cossec }\theta \text{ cotg }\theta).$$

Para responder b) igualamos o resultado obtido a zero

$$\frac{3}{2}s^2(\text{ cossec }^2\theta) - 3s^2\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cossec }\theta \text{ cotg }\theta = 3s^2 \text{ cossec }\theta \left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cotg }\theta\right] = 0$$

donde temos

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{cotg} \theta = 0$$

isto é $\operatorname{cotg} \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ a saber as abelhas preferem o ângulo

$$\theta_0 = \text{arc } \operatorname{tg} \sqrt{3}.$$

Da trigonometria sabemos que

$$\operatorname{cossec} \theta = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta}}{\operatorname{tg} \theta}$$

e portanto

$$S = 6sh - \frac{3}{2}s^2 \frac{1}{\sqrt{3}} + +3s^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$S = 6sh + 3s^2 \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right).$$

Solução do Problema 9

Como $y=x^2$ e $y'=2x$ a reta tangente à parábola no ponto (x,x^2)será:

$$w-x^2=2x(v-x).$$

Como esta reta deverá conter o ponto onde está a estátua que é (100,50) devemos ter:

$$50-x^2=2x(100-x)$$

isto é

$$x^2-200x+50=0$$

cuja solução que nos interessa é

$$x_1 = \frac{200 - \sqrt{39800}}{2} = 0.25$$

e portanto o ponto sobre a estrada no qual os faróis iluminarão diretamente a estátua é

$$(0.25, 0.25^2).$$

Solução do Problema 10

Vamos assumir que o quadrado tem lado x e que o círculo tem raio r. Então sabemos que $4x + 2\pi r = 16$ e portanto $r = (16 - 4x)/2\pi = (8 - 2x)\pi$. A área total é

$$A(x) = x^2 + \pi r^2 = x^2 + \pi \left(\frac{8 - 2x}{\pi}\right)^2 = \frac{1}{\pi}\left((4 + \pi)x^2 - 32x + 64\right).$$

Calculando a derivada obtemos:

$$A'(x) = \frac{2}{\pi}((4 + \pi)x - 16),$$

e portanto o único ponto crítico ocorre em $x = 16/(4 + \pi)$. Como estamos tratando com uma função quadrática com coeficiente do termo quadrático positivo sabemos que este é um ponto de mínimo. Portanto o corte deverá ser feito a $4x$ unidades da extremidade esquerda isto é a distância de

$$\frac{64}{(4 + \pi)}$$

desta extremidade.

Solução do Problema 11

Se o cilindro (e portanto a abóboda) tem raio r e altura h, então o volume do observatório será

$$V = \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3.$$

Logo

$$h = \frac{V}{\pi r^2} - \frac{2r}{3}.$$

A área da superfície cilindrica é $2\pi r h$ e a da abóboda $2\pi r^2$. Portanto para minimizarmos o custo da obra devemos minimizar a função:

$$C(r) = 2\pi r h + 2(2\pi r^2) =$$

$$2\pi\left(\frac{V}{\pi r^2}-\frac{2r}{3}\right)+4\pi r^2=\frac{2V}{r}-\frac{8\pi r^2}{3}.$$

Derivando e derivando mais uma vez obtemos:

$$C'(r)=-\frac{2V}{r^2}+\frac{16\pi r}{3}=0 \qquad C''(r)=\frac{4V}{r^3}+\frac{16\pi}{3}.$$

Segue que o ponto crítico de *C* ocorre quando $r^3=\frac{3V}{8\pi}$ e que neste ponto a derivada segunda é negativa sendo portanto um mínimo. Logo a configuração mais econômica se dá quando

$$r=\sqrt[3]{\frac{3V}{8\pi}}.$$

BACK TO CALCULUS A PAGE

BACK TO MATHBIO PAGE

Aldrovando Azeredo Araujo
1999-06-12