IFCE - Fortaleza
Engenharia da Computação
Matemática Discreta / 2014-2

LISTA 3 - Indução - 01.4.2015

1. Use indução para provar que:

   (a) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

   (b) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   (c) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$

   (d) $1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$

2. Prove que para todo inteiro positivo n tem-se $10^{n+1} - 9n - 10$ é múltiplo de 9.

3. Prove que, para todo inteiro positivo n tem-se

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$$

4. (Canadá) Para n inteiro positivo, seja $h(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. Prove que

$$n + h(1) + h(2) + h(3) + \cdots + h(n-1) = nh(n).$$

5. Mostre que para cada inteiro positivo $n > 1$, temos

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots + (n-1).n = \frac{1}{3}(n-1)n(n+1).$$

6. Observe que

$$1^2 = \frac{1.2.3}{6}, 1^2 + 3^2 = \frac{3.4.5}{6}, 1^2 + 3^2 + 5^2 = \frac{5.6.7}{6}.$$

Conjecture e prove uma generalização sugerida por esses exemplos.

7. Se $x > -1$ é um número real e $n \in \mathbb{N}$, prove que $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

8. Prove que para todo inteiro positivo n temos $2^{2^n} > n^n$.

9. Prove que para todo inteiro positivo n o número $4^n + 15n - 1$ é múltiplo de 9.

10. Prove que para todo inteiro positivo n $n^3 - n$ o número é divisível por 3.

11. Prove que para todo inteiro $n \geq 4$ temos $n! > 2^n$.

12. Prove que para todo inteiro $n \geq 3$ temos $n^2 > 2n + 1$.

13. Provar que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ é múltiplo de 7.

14. (Macedônia) Seja x um real não nulo tal que $x + x^{-1} \in \mathbb{Z}$. Prove, usando a **segunda forma** do Princípio de Indução Finita (PIF) que $x^n + x^{-n} \in \mathbb{Z}$..

15. Dado um inteiro $k \geq 1$, prove que 3^k divide $4^{3^{k-1}} - 1$.

16. Prove por indução que

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \cdots + \frac{2}{3^n} = 1 - (1/3)^n$$

17. Prove que cada número maior do que 7 é a soma de um inteiro não negativo múltiplo de 3 com um inteiro não negativo múltiplo de 5.