Exercícios 7.4

1. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = e^x$ no ponto de abscissa 0.

resposta:

2. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \ln(x)$ no ponto de abscissa 1. Esboce os gráficos de f e da reta tangente.

resposta:

3. Seja $f(x) = a^x$, em que $a > 0$ e $a \neq 1$ é um real dado. Mostre que $f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$

resposta:

4. Calcule $f'(x)$

a) $f(x) = 2^x$

b) $f(x) = 5^x$

c) $f(x) = \pi^x$

d) $f(x) = e^x$

resposta:

5. Seja $g(x) = \log_a x$, em que $a > 0$ e $a \neq 1$ e é constante. Mostre que $g'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$.

resposta:

Antes de iniciar a manipulação da derivada, precisamos trocar a base do logaritmo e deixa-lo em logaritmo natural.

$$f(x) = \log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a} = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Aplicando o limite e tirando o $\frac{1}{\ln a}$ do limite, pois a não depende do h quando ele tende para zero. Então a equação fica da seguinte forma:

$$f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h}$$

Aplicando a propriedade operatória dos logaritmos, vamos utilizar a propriedade de subtração.

$$\frac{\ln a}{\ln b} \Rightarrow \ln a - \ln b$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \lim_{h \to 0} \left[\frac{1}{h} \ln \left(\frac{x+h}{x} \right) \right]$$

Aplicando a propriedade da potência de logaritmos

$$f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \lim_{h \to 0} \left[\ln \left(\frac{x+h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} \right]$$

Deve-se fazer uma mudança de variavel $u = \frac{h}{x} \Rightarrow h = u \cdot x$. Lembrando que deve mudar também que quando $h \to 0$ e $u \to 0$. Assim

$$f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \lim_{u \to 0} \left[\ln \left(\frac{x + ux}{x} \right)^{\frac{1}{ux}} \right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \lim_{u \to 0} \left[\frac{1}{x} \ln (1 + u)^{\frac{1}{u}} \right]$$

Como x não depende de u, podemos remover o 1/x do limite

$$f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} \lim_{u \to 0} \left[\ln (1 + u)^{\frac{1}{u}} \right]$$

O segundo limite fundamental diz que:

$$e = \lim_{x \to 0} \left[\ln (x + h)^{\frac{1}{h}} \right]$$

Aplicando essa propriedade na conta vai dar um $\ln e = 1$.

$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

6. Calcule o $g'(x)$.

a) $g(x) = \log_3 x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln 3}$
b) $g(x) = \log_5 x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln 5}$
c) $g(x) = \log_\pi x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln \pi}$
d) $g(x) = \log_e x = \ln x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$

resposta: