

Universidade Federal de Minas Gerais  
Departamento de Engenharia Eletrônica  
Técnicas de Controle de Processos Industriais

**Modelagem, Simulação e Controle um  
Veículo Aéreo Não Tripulado (VANT)  
do Tipo Quadrirrotor**

Alunos:

Bruna Vitória Costa Oliveira - 2017098250 - Diurno

Italo Jose Dias - 2017002121 - Noturno

Wanderson da Silva Maciel Filho - 2017002660 - Noturno

Professor orientador:

D. Sc. Guilherme Vianna Raffo

26 de Março de 2021

Universidade Federal de Minas Gerais  
Departamento de Engenharia Eletrônica  
Técnicas de Controle de Processos Industriais

## **Modelagem, Simulação e Controle um Veículo Aéreo Não Tripulado (VANT) do Tipo Quadrirrotor**

Relatório de atividade referente ao projeto de controle proposto pela disciplina Técnicas de Controle de Processos Industriais.

Alunos:

Bruna Vitória Costa Oliveira - 2017098250 - Diurno

Italo Jose Dias - 2017002121 - Noturno

Wanderson da Silva Maciel Filho - 2017002660 - Noturno

Professor orientador:

D. Sc. Guilherme Vianna Raffo

26 de Março de 2021

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Modelagem do Processo</b>	<b>4</b>
2.1	Cinemática . . . . .	5
2.2	Formulação de Euler-Lagrange . . . . .	8
2.2.1	Movimento de translação . . . . .	9
2.2.2	Movimento de rotação . . . . .	10
2.3	Formulação de Newton-Euler . . . . .	11
2.4	Descrição em espaço de estados e modelo linearizado . . . . .	14
2.5	Análise de controlabilidade . . . . .	16
2.6	Análise em Malha Aberta . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Proposta de controle</b>	<b>21</b>
3.1	Regulador Linear Quadrático . . . . .	21
3.2	Observador de estados . . . . .	23
3.3	Estrutura do controlador . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Projeto de controladores e Resultados</b>	<b>28</b>
4.1	Projeto de controladores . . . . .	28
4.1.1	Regulador Linear Quadrático . . . . .	28
4.1.2	Observador de estados . . . . .	29
4.1.3	Controladores PID . . . . .	29
4.2	Resultados . . . . .	32
4.2.1	Estabilização . . . . .	33
4.2.2	Seguimento de Referência . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>40</b>

## Lista de Figuras

1	Movimentos de guinada, arfagem e rolagem realizados pelo quadrirrotor e distribuição dos motores . . . . .	2
2	Variáveis do processo de controle do VANT quadrirrotor . . . . .	3
3	Esquema do VANT quadrirrotor . . . . .	4
4	Diagrama de blocos da dinâmica não linear do sistema . . . . .	18
5	Diagrama de blocos do quadrirrotor . . . . .	18
6	Resposta em malha aberta de x, y e z . . . . .	19
7	Resposta em malha aberta de $\phi$ , $\theta$ e $\psi$ . . . . .	20
8	Estrutura em cascata do Quadrirrotor . . . . .	25
9	Estrutura de Controle . . . . .	27
10	Lugar das raízes para $H_x$ . . . . .	29
11	Lugar das raízes para $H_y$ . . . . .	30
12	Lugar das raízes para $H_z$ . . . . .	30
13	Lugar das raízes para $H_x$ , sistema compensado . . . . .	31
14	Lugar das raízes para $H_y$ , sistema compensado . . . . .	31
15	Lugar das raízes para $H_z$ , sistema compensado . . . . .	32
16	Estabilização em (2,2,10) . . . . .	33
17	Evolução do sinal do erro na Estabilização em (2,2,10) . . . . .	34
18	Evolução da posição angular na Estabilização em (2,2,10) . . . . .	34
19	Evolução dos sinais de controle para posição na estabilização . . . . .	35
20	Evolução dos sinais de torque no tempo para estabilização . . . . .	35
21	Seguimento de referência helicoidal . . . . .	36
22	Seguimento de referência helicoidal sobre o plano . . . . .	37
23	Sinal do erro na referência helicoidal . . . . .	37
24	Esforço de controle malha de atitude na referência helicoidal . . . . .	38
25	Esforço de controle malha de posição na referência helicoidal . . . . .	39
26	Posições angulares na referência helicoidal . . . . .	39

# 1 Introdução

Os veículos aéreos não tripulados (VANT) são aeronaves que podem ser remotamente controladas ou totalmente autônomas. Sobre o aspecto construtivos, VANTs podem apresentar um número variado de rotores, como tilt rotores, que são aeronaves sustentadas por 1 ou 2 rotores fixos em eixos rotativos, tri rotores, octa-rotores, entre outras formas.

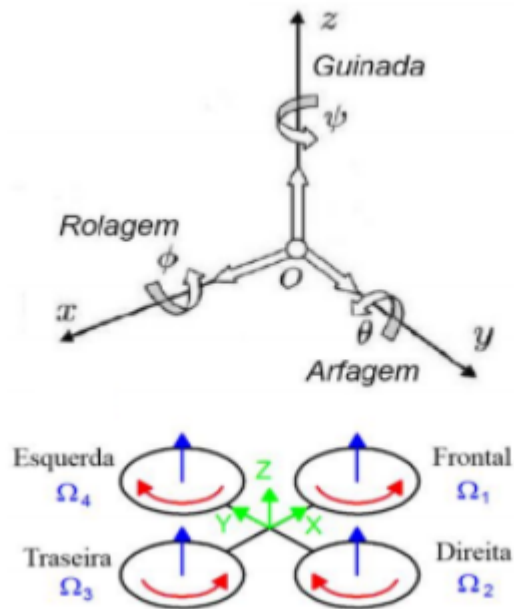
Algumas vantagens do quadrirrotor permitem maior facilidade de voo, inclusive em espaços reduzidos, como capacidade maior de carga útil, efeitos giroscópicos minimizados, maior simplicidade na mecânica dos rotores, já que não apresentam partes móveis e frágeis e propulsores com dimensões menores. A simplicidade e os baixos custos envolvidos na construção de um quadrirrotor são fatores importantes e que são levados em conta ao se escolher esse modelo como plataforma para a realização de um estudo. Mesmo possuindo algumas limitações, apresentam o melhor custo benefício dentre as demais configurações.

Os VANTs do tipo quadrirrotor são impulsionados por 4 rotores, o torque resultante dos motores nos eixos é responsável pela movimentação, aceleração e decolagem do veículo. Em geral, dois rotores se movimentam no sentido horário e os outros dois rotores se movimentam no sentido anti-horário, esse balanço entre os rotores, aliado à uma boa estratégia de controle, é capaz de fazer com que o sistema, inicialmente instável, tenda a estabilidade, possibilitando o voo.

Tomando como base o controle, é necessário definir dentro do sistema dinâmico do VANT quadrirrotor, no caso a planta a ser controlada, quais são as variáveis de controle e as variáveis manipuladas. Além disso, é importante avaliar quais as possíveis variáveis de perturbação que irão influenciar o processo.

No que diz respeito a variáveis controladas, é necessário garantir a estabilidade e realizar as movimentações do veículo, assim sendo, as posições lineares no plano cartesiano,  $x$ ,  $y$  e  $z$  e, os ângulos de guinada ( $\psi$ ), rolagem ( $\phi$ ) e arfagem ( $\theta$ ) do VANT devem ser controladas. O veículo é controlado pela variação do torque resultante em cada rotor, portanto, as variáveis manipuladas são os torques resultantes em cada eixo do VANT e o empuxo resultante aplicado no centro de massa do veículo. Conforme esboçado na Figura 1.

Figura 1: Movimentos de guinada, arfagem e rolagem realizados pelo quadricóptero e distribuição dos motores



Fonte: PAULA, 2012. Salão do Conhecimento Unijuí 2017. Veículos aéreos não tripulados do tipo multirrotor; abordagem teórica e ênfase no estudo do quadricóptero.

No que diz respeito às perturbações, é possível considerar as perturbações aerodinâmicas e perturbações externas, como vento e outros e outros fenômenos não previsíveis e mensuráveis. De modo geral, a Figura 2 apresenta a descrição das variáveis controladas, manipuladas e as de perturbação.

Figura 2: Variáveis do processo de controle do VANT quadrrrotor

<b>Variáveis controladas</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Posição linear x;</li> <li>• posição linear y;</li> <li>• posição linear z;</li> <li>• ângulo de guinada (<math>\psi</math>): incide em torno do eixo z, dessa forma o quadrrrotor irá se encontrar com uma inclinação de zero grau em relação ao plano xy, realizando um movimento de rotação em torno do seu eixo;</li> <li>• ângulo de rolagem (<math>\phi</math>): ocorre em torno do eixo x, fazendo com que a aeronave se desloque para a esquerda ou direita;</li> <li>• ângulo de arfagem (<math>\theta</math>): se caracteriza por ser realizado em torno do eixo y, ou seja, é a movimentação que faz o quadrrrotor mover-se para frente ou para trás.</li> </ul>
<b>Variáveis manipuladas</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Torque resultante em cada eixo do veículo (x,y e z);</li> <li>• empuxo resultante no centro de massa.</li> </ul>
<b>Variáveis de perturbação</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Momento aerodinâmico e o efeito giroscópico que serão modelados como funções do tipo degrau e demais perturbações que serão consideradas como não mensuráveis.</li> </ul>

Fonte: Autoria Própria.

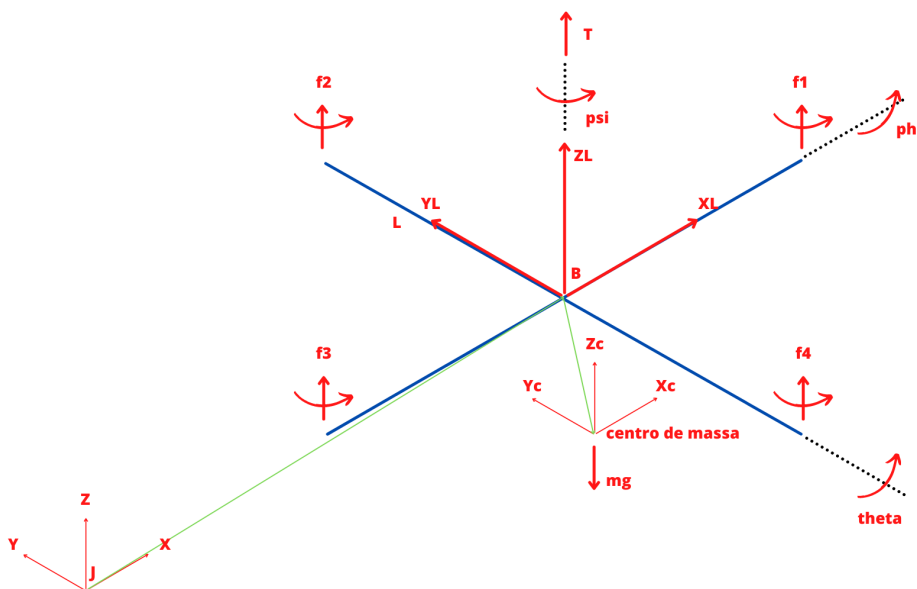
Por fim, com base no descrito, o objetivo final do controle do VANT quadrrrotor é obter a estabilidade do veículo e realizar movimentações seguindo uma trajetória. Para isso, é válido todo o processo desenvolvido neste texto, que se organiza em um processo de modelagem seguido da proposta de controle e projeto dos controladores com a simulação e finaliza com a conclusão geral sobre o que foi desenvolvido.

## 2 Modelagem do Processo

A aplicação de Veículos Aéreos Não Tripulados tem se tornado cada vez mais extensa, as aplicações são desde usos civis e militares, até o uso em iniciativa privada para monitoramento de barragens de rejeito, como se tem feito recentemente. Observando o aspecto do quadricóptero, ele é capaz de realizar decolagens e pousos verticais, além de ser capaz de pairar em certa altitude. Além disso, os quadricópteros não necessitam de controle sobre os ângulos das hélices, como em tilt-rotors e os helicópteros convencionais.

Analisando o modelo de Veículo, é possível perceber que se trata de uma planta sub-atuada, isto é, o sistema possui 4 atuadores para 6 graus de liberdade, os três ângulos de orientação (arfagem, rolagem e guinada) e as coordenadas cartesianas ( $x$ ,  $y$  e  $z$ ). Esse fato é um impossibilitante, uma vez que se torna bastante custoso, do ponto de vista de controle, controlar todos os graus de liberdade ao mesmo tempo. Além disso, a planta apresenta variação temporal e se trata de um sistema não linear. A planta também é afetada por distúrbios aerodinâmicos, que são dinâmicas não modeladas neste contexto. Para modelagem do sistema, se usa como base a Figura 3, que possui as base e variáveis adotadas neste texto.

Figura 3: Esquema do VANT quadricóptero



Fonte: Autoria Própria



Sendo um sistema instável, é necessário o projeto de um controlador e para isso é necessário realizar a modelagem da planta. Para essa tarefa, é necessário a utilização de técnicas de modelagem através das equações de movimento, essas técnicas podem se valer tanto da formulação de Newton-Euler quanto de Euler-Lagrange, ambas usam a técnica de corpo rígido, sendo que Newton-Euler trabalha o referencial no centro de massa e Euler-Lagrange no referencial inercial.

Inicialmente, é assumido que o quadrrrotor é um corpo rígido no espaço, ele está sujeito a uma força inicial na forma de impulso e 3 torques e que a dinâmica do veículo pode ser desacoplada, existe então, um sistema para a translação e um sistema para a rotação. Se valendo da informação anteriormente dita, sobre o sistema ser subatuado e não linear, pro simplificação, assume-se que o centro de massa e a origem do eixo de coordenadas fixo são coincidentes, além disso, o quadrrrotor é considerado uma estrutura fixa, rígida e simétrica.

## 2.1 Cinemática

É assumida a existência de dois sistemas de referência, um fixo ao corpo rígido e um inercial. O sistema de referência fixo tem a origem localizada no centro de massa será nomeado como  $B = \{\vec{X}_l, \vec{Y}_l, \vec{Z}_l\}$ , na qual,  $\vec{X}_l$  é o eixo da direção normal ao voo,  $\vec{Y}_l$  é ortogonal a  $\vec{X}_l$  e no sentido positivo para estibordo no plano horizontal, e  $\vec{Z}_l$  é orientado no sentido ascendente e ortogonal ao plano  $\vec{X}_l O \vec{Y}_l$ . O referencial inercial é considerado fixo e descrito como  $J = \{\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}\}$ . O vetor  $\xi = [x \ y \ z]'$  representa a posição do centro de massa do quadrrrotor com relação ao eixo inercial  $I$ .

É necessário também obter as coordenadas de orientação do quadrrrotor com relação ao eixo inercial. A orientação do corpo rígido será feita baseada na técnica dos ângulos de Euler, isto é, é possível encontrar a orientação relativa entre dois sistemas de coordenadas através de doze definições independentes dos ângulos de Euler. Para modelagem do sistema será utilizada a convenção x-y-z, isto é, rotação em torno dos eixos x - y - z, conhecida popularmente na literatura como convenção Tait-Bryan. Assim sendo, serão utilizadas 3 rotações sucessivas para descrever a rotação geral no espaço Euclidiano tridimensional.

As matrizes de rotação podem ser descritas como:

Rotação ao redor de  $\vec{Z}_l$ : rotação ao redor do eixo  $\vec{Z}_l$  e ao ângulo de guinada  $\psi$ .

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_l \\ \hat{Y}_l \\ \hat{Z}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \text{sen}(\psi) & 0 \\ -\text{sen}(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Rotação ao redor de  $\vec{Y}_l$ : rotação ao redor do eixo  $\vec{Y}_l$  e ao ângulo de arfagem  $\theta$ .

$$\begin{bmatrix} \check{X}_l \\ \check{Y}_l \\ \check{Z}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_l \\ \hat{Y}_l \\ \hat{Z}_l \end{bmatrix}$$

Rotação ao redor de  $\vec{X}_l$ : rotação ao redor do eixo  $\vec{X}_l$  e ao ângulo de rolagem  $\phi$ .

$$\begin{bmatrix} X_l \\ Y_l \\ Z_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \text{sen}(\phi) \\ 0 & -\text{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{X}_l \\ \check{Y}_l \\ \check{Z}_l \end{bmatrix}$$

Desse modo, as matrizes de rotação são definidas como:

$$R(x_B, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \text{sen}(\phi) \\ 0 & -\text{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

$$R(y_B, \theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$R(z_B, \psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \text{sen}(\psi) & 0 \\ -\text{sen}(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se valendo das propriedades da matriz transposta, é possível obter a matriz de orientação relativa do sistema de coordenadas fixo ao corpo rígido. Definindo a matriz  $R_j : B \rightarrow J$

$$R_J = R(x_B, \phi)^T \cdot R(y_B, \theta)^T \cdot R(z_B, \psi)^T$$

Fazendo uso de operadores, definindo:

C = cos

S = sen

A  $R_J$  é completamente definida:

$$R_J = \begin{bmatrix} C\psi C\theta & C\psi S\theta S\phi - S\psi C\theta & C\psi S\theta C\phi + S\psi S\phi \\ S\psi C\theta & S\psi S\theta S\phi + C\psi C\theta & S\psi S\theta C\phi - C\psi S\phi \\ -S\theta & C\theta S\phi & C\theta C\phi \end{bmatrix}$$

O movimento translacional pode ser descrito como:

$$v_J = R_J.v_B$$

Na qual:

$v_J$  - Velocidade linear do quadricóptero, em relação ao eixo inercial -  $[u_0, v_0, w_0]^T$ .

$v_B$  - Velocidade linear do quadricóptero, em relação ao eixo fixo no corpo rígido -  $[u_L, v_L, w_L]^T$ .

Objetivando a encontrar a equação cinemática, a relação entre a velocidade angular do quadricóptero e a derivada temporal dos ângulos Euler foi calculada.

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (R(x_B, \phi)^T)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + (R(y_B, \theta)^T R(x_B, \phi)^T)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & \text{cos}(\phi) & \text{sen}(\phi)\text{cos}(\theta) \\ 0 & \text{sen}(\phi) & \text{cos}(\phi)\text{cos}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$\omega = W_n \dot{n}$$

Na qual:

$\omega$  - Velocidade angular do corpo rígido em relação ao eixo fixo do quadrirrotor -  $[p \ q \ r]'$

$\dot{n}$  - Velocidade angular do corpo rígido em relação ao eixo inercial -  $[\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]'$ .

$W_n$  - Matriz de Euler

Sendo assim, a derivada temporal dos ângulos de Euler pode ser obtida através da matriz inversa de Euler.

$$\dot{n} = W_n^{-1} \cdot \omega$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \text{sen}(\phi)\tan(\theta) & \text{cos}(\phi)\tan(\theta) \\ 0 & \text{cos}(\phi) & -\text{sen}(\phi) \\ 0 & \text{sen}(\phi)\text{sec}(\theta) & \text{cos}(\phi)\text{sec}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

Uma observação deve ser feita com relação à não continuidade das derivadas temporais dos ângulos de Euler, esses dados serão diferentes ao dados obtidos experimentalmente com algum sensor, como as Unidades de Medição Inercial, frequentemente usadas neste tipo de aplicação.

## 2.2 Formulação de Euler-Lagrange

Para a formulação de Euler-Lagrange, é necessário considerar o quadrirrotor em análise como um corpo livre no espaço sob a ação de forças externas. A partir dessa premissa, é possível descrever a energia total através da função Lagrangeana. Segue a equação:

$$L = K - U = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^T\dot{\xi} + \frac{1}{2}\omega^T I \omega - mgz$$

Na qual:

$L$  - Função Lagrangeano

$K$  - Energia Cinética

$U$  - Energia Potencial

$m$  - Massa do quadrirrotor

$I$  - Matriz de Inércia

$g$  - Aceleração gravitacional

A partir da descrição do sistema através da função Lagrangeano, é possível obter o modelo dinámico do sistema ao aplicar a equação  $L$  na restrição abaixo:

$$\begin{bmatrix} f_\xi \\ \tau_n \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} \right)$$

Na qual:

$f_\xi$  - Vetor de força translacional

$\tau_n$  - Vetor que representa os momentos de arfagem, rolagem e guinada

$q$  - Vetor de coordenadas generalizadas

A combinação das duas equações anteriores entrega o modelo dinámico de alto nível representado no eixo inercial.

$$\begin{bmatrix} m_{1_{3x3}} & O_{3x3} \\ O_{3x3} & J_{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O_{3x3} & O_{3x3} \\ O_{3x3} & C_{nn}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mg_{e3} \\ O_{3x3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_\xi \\ \tau_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_\xi \\ \delta_n \end{bmatrix}$$

Na qual:

$J_{(n)}$  - Matriz de inércia rotacional

$C_{nn}(q, \dot{q})$  - Matriz rotacional de Coriolis e forças centripetas

$\delta$  - Vetor de distúrbios que atuam sobre o quadricóptero

O modelo dinámico acima permite a divisão do modelo em dois sistemas, o subsistema translacional e o rotacional.

### 2.2.1 Movimento de translação

As equações são:

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= \frac{1}{m} (\cos\psi \sin\theta \cos\phi + \sin\psi \sin\theta) U + \frac{\delta_{\xi_x}}{m} \\ \ddot{Y} &= \frac{1}{m} (\sin\psi \sin\theta \cos\phi - \cos\psi \sin\theta) U + \frac{\delta_{\xi_y}}{m} \\ \ddot{Z} &= -g + \frac{1}{m} (\cos\theta \cos\phi) U + \frac{\delta_{\xi_z}}{m} \end{aligned}$$

Na qual:

$\ddot{X}$  - Aceleração no eixo x  
 $\ddot{Y}$  - Aceleração no eixo y  
 $\ddot{Z}$  - Aceleração no eixo z

### 2.2.2 Movimento de rotação

O movimento de rotação pode ser descrito de maneira resumida da seguinte forma:

$$\ddot{n} = J(n)^{-1}(\tau_n - C(n, \dot{n})\dot{n})$$

Na qual:

$\ddot{n}$  - Aceleração nos eixos angulares

Destrinchando a equação resumida, tem-se a matriz de inercia do subsistema rotacional

$$J(n) = \begin{bmatrix} I_{XX} & 0 & -I_{xx}S\theta \\ 0 & I_{YY}C^2\phi & (I_{YY} - I_{ZZ})C\phi S\phi C\theta \\ -I_{xx}S\theta & (I_{YY} - I_{ZZ})C\phi S\phi C\theta & I_{xx}S^2\theta + I_{YY}S^2\phi C^2\theta + I_{ZZ}C^2\phi C^2\theta \end{bmatrix}$$

E tem-se a matriz rotacional de forças centrífugas e de Coriolis, que é definida pela matriz a seguir e pelos símbolos de Christopher:

$$C(n, \dot{n}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Os símbolos de Christopher são:

$$C_{11} = 0$$

$$C_{12} = (I_{YY} - I_{ZZ})(\dot{\theta}C\phi S\phi + (1/2)(\dot{\psi}S^2\phi C\theta) + \frac{1}{2}(I_{ZZ} - I_{YY})(\dot{\psi}C^2\phi C\theta) - (1/2)I_{XX}\dot{\psi}C\theta$$

$$C_{13} = (I_{ZZ} - I_{YY})(\dot{\psi}C\phi S\phi C^2\theta + (1/2)(\dot{\theta}C\theta C^2\phi) + \frac{1}{2}(I_{ZZ} - I_{YY})(\dot{\psi}C^2\phi C\theta) - \frac{1}{2}I_{XX}\dot{\psi}C\theta$$

$$C_{21} = (I_{ZZ} - I_{YY})(\dot{\theta}C\phi S\phi + \frac{1}{2}(\dot{\psi}C\theta S^2\phi) + \frac{1}{2}(I_{YY} - I_{ZZ})(\dot{\psi}C^2\phi C\theta) + \frac{1}{2}I_{XX}\dot{\psi}C\theta$$

$$C_{22} = (I_{ZZ} - I_{YY})(\dot{\phi}C\phi S\phi$$

$$C_{23} = -I_{XX}\dot{\psi}S\theta C\theta + I_{YY}\dot{\psi}S^2\phi C\theta S\theta + I_{ZZ}\dot{\psi}C^2\phi S\theta C\theta + \frac{1}{2}(I_{YY} - I_{ZZ})(\dot{\phi}C\theta C^2\phi + \frac{1}{2}(I_{ZZ} - I_{YY})(\dot{\phi}C\theta S^2\phi) + \frac{1}{2}I_{XX}\dot{\phi}C\theta$$

$$C_{31} = (I_{YY} - I_{ZZ})(\dot{\psi}C^2\theta C\phi S\phi + \frac{1}{2}\dot{\theta}C\theta C^2\phi) + \frac{1}{2}(I_{ZZ} - I_{YY})\dot{\theta}S^2\phi C\theta - \frac{1}{2}I_{XX}\dot{\theta}C\theta$$

$$C_{32} = (I_{ZZ} - I_{YY})(\dot{\theta}C\phi S\phi S\theta + \frac{1}{2}\dot{\theta}C\theta S^2\phi) + \frac{1}{2}(I_{YY} - I_{ZZ})\dot{\phi}C^2\phi C\theta - \frac{1}{2}I_{XX}\dot{\psi}S\theta C\theta - I_{YY}\dot{\psi}S^2\phi S\theta C\theta - I_{ZZ}\dot{\psi}C^2\phi S\theta C\theta$$

$$C_{33} = (I_{YY} - I_{ZZ})\dot{\phi}C\phi S\phi C^2\theta - I_{YY}\dot{\theta}S^2\phi S\theta C\theta - I_{ZZ}\dot{\theta}C^2\phi S\theta C\theta + I_{XX}\dot{\theta}C\theta S\theta$$

## 2.3 Formulação de Newton-Euler

A formulação de Newton-Euler pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} mI_{3x3} & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_B \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega \times m\dot{v}_B \\ \omega \times J\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_B \\ \tau_B \end{bmatrix}$$

Na qual:

$J \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  - É a matriz de inércia

$I_{3 \times 3} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  - É a matriz identidade

$v_B$  - É o vetor de velocidade translacional em B

$\omega$  - É o vetor de velocidade angular em B

$\omega$  - É o vetor de velocidade angular em B

$m$  - É a massa do quadricóptero

Considerando a matriz de inercia  $J$  da forma:

$$J = \begin{bmatrix} I_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & I_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & I_{ZZ} \end{bmatrix}$$

A dinâmica do corpo rígido pode ser descrita pela equações:

$$\dot{\xi} = v = R_J v_B$$

$$m\dot{v} = R_J f_B$$

$$J\dot{\omega} = -\omega \times J\omega + \tau_B$$

Nas quais:

$v$  - É a velocidade linear no sistema de coordenadas inercial

$f_B$  - É o conjunto de forças que o quadricóptero está sujeito

$\tau_B$  - É o conjunto de torques que o quadricóptero está sujeito

As forças que atuam no corpo rígido são o empuxo total  $T$ , resultante das forças dos quatro motores e da força gravitacional.

$$T = \sum_{i=1}^4 f_i = \sum_{i=1}^4 b\Omega_i^2$$

Na qual:

$f_i$  - É a força gerada por cada motor elétrico e tem direção sobre o eixo  $z$

$b$  - É um valor constante, relativo ao coeficiente de empuxo

$\Omega$  - É a velocidade angular de cada motor ao redor de seu próprio eixo.

A força gravitacional atua apenas sobre o eixo  $z$ , assim ela pode ser expressa por, onde o índice 3 indica a atuação sobre o eixo  $z$ :

$$f_g = -mgl_3$$

Substituindo as equações:

$$m\dot{v} = R_J T + f_g$$

O vetor de torques pode ser expresso por:



$$\tau_A = \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f_2 - f_4)l \\ (f_3 - f_1)l \\ \sum_{i=1}^4 \tau_{Mi} \end{bmatrix}$$

Na qual:

$l$  - É a distancia dos motores até o centro de rotação  
 $\tau_{Mi}$  - É o esforço de torção gerado por cada motor

O esforço de torção é inverso a força aerodinâmica  $\tau_{drag} = d\Omega_i^2$ , na qual  $d$  representa o arrasto das hélices. Se valendo da segunda lei de Newton, se tem:

$$J_r \dot{\Omega}_i = -\tau_{drag} + \tau_{Mi}$$

Na qual:

$J_r$  - É o momento de inércia do rotor ao redor do seu próprio eixo  
 Assim sendo, os torque de rolagem, arfagem e guinada podem ser representados por:

$$\tau_A = \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bl(\Omega_2^2 - \Omega_4^2) \\ bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) \\ d(\Omega_1^2 + \Omega_3^2 - \Omega_2^2 - \Omega_4^2) \end{bmatrix}$$

Considerando o efeito giroscópico e o momento aerodinâmico:

$$\tau_B = \tau_A + \tau_G$$

$$\tau_d = a_r + \tau_G$$

Na qual:

$$\tau_G = - \sum_{i=1}^4 J_r (\omega \times l_3) \Omega_i$$

$a_r$  - É o momento aerodinâmico

Reescrevendo as equações:

$$m\dot{v} = -mgl_3 + R_J T$$

$$J\dot{\omega} = -\omega \times J\omega - \sum_{i=1}^4 J_r(\omega \times l_3)\Omega_i + \tau_A + a_r$$

Desenvolvendo essas equações se obtém o modelo da dinâmica do quadricóptero. Por simplificação, o efeito de giroscópio e o momento aerodinâmico serão considerados como perturbações ao sistema e serão modeladas como funções do tipo degrau.

Dessa forma, as equações do modelo são:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}(\cos\psi\sin\theta\cos\phi + \sin\psi\sin\phi)T + \frac{a_x}{m}$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{m}(\sin\psi\sin\theta\cos\phi - \cos\psi\sin\phi)T + \frac{a_y}{m}$$

$$\ddot{z} = -g + \frac{1}{m}(\cos\theta\cos\phi)T + \frac{a_z}{m}$$

$$\dot{\phi} = p + q\sin(\phi)\tan(\theta) + r\cos(\phi)\tan(\theta)$$

$$\dot{\theta} = q\cos(\phi) - r\sin(\phi)$$

$$\dot{\psi} = q\sin(\phi)\sec(\theta) + r\cos(\phi)\sec(\theta)$$

$$\dot{p} = \frac{I_{YY} - I_{ZZ}}{I_{XX}}qr + \frac{\tau_{\phi_a}}{I_{XX}} + \frac{\tau_{\phi_d}}{I_{XX}}$$

$$\dot{q} = \frac{I_{ZZ} - I_{XX}}{I_{YY}}pr + \frac{\tau_{\theta_a}}{I_{YY}} + \frac{\tau_{\theta_d}}{I_{YY}}$$

$$\dot{r} = \frac{I_{XX} - I_{YY}}{I_{ZZ}}pq + \frac{\tau_{\psi_a}}{I_{ZZ}} + \frac{\tau_{\psi_d}}{I_{ZZ}}$$

## 2.4 Descrição em espaço de estados e modelo linearizado

Para linearizar o sistema será utilizada a matriz Jacobiana e ponto de equilíbrio será o ponto de hovering,  $P_H$ .

$$P_H = (x_0, y_0, z_0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

O jacobiano do sistema é dado por:

$$\hat{A} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} |_{P_H} \rightarrow i, j \in [1, 12]$$

$$\hat{B} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j} |_{P_H} \rightarrow i \in [1, 12], j \in [1, 4]$$

As matrizes C e D não serão representadas, uma vez que os requisitos de controle serão apresentados posteriormente. Tendo como base o descrito, o sistema linearizado a partir das matrizes jacobianas é dado por:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} \\ \frac{1}{I_{XX}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{YY}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{ZZ}} & 0 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, a descrição em espaço de estados fica completamente definida e ela é dada por:

$$\Delta \dot{X} = \hat{A} \Delta X + \hat{B} \Delta U + \omega W$$

Na qual:

$\omega$  - É o vetor de ponderação das perturbações  $W$  - É a dinâmica que afeta as perturbações, como são representadas por funções do tipo degrau,  $\omega$  pode ser escrito como:

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m} \\ \frac{1}{m} \\ \frac{1}{m} \\ \frac{1}{m} \\ \frac{I_{XX}}{1} \\ \frac{I_{YY}}{1} \\ \frac{I_{ZZ}}{1} \end{bmatrix}$$

## 2.5 Análise de controlabilidade

A matriz de controlabilidade é construída como:

$$ctrb(A, B) = [B \ AB \ A^2B]$$

Logo, considerando os valores numéricos para facilitar o cálculo via matlab:

$$m = 2.24$$

$$I_{XX} = 0.0363$$

$$I_{YY} = 0.0363$$

$$I_{ZZ} = 0.0363$$

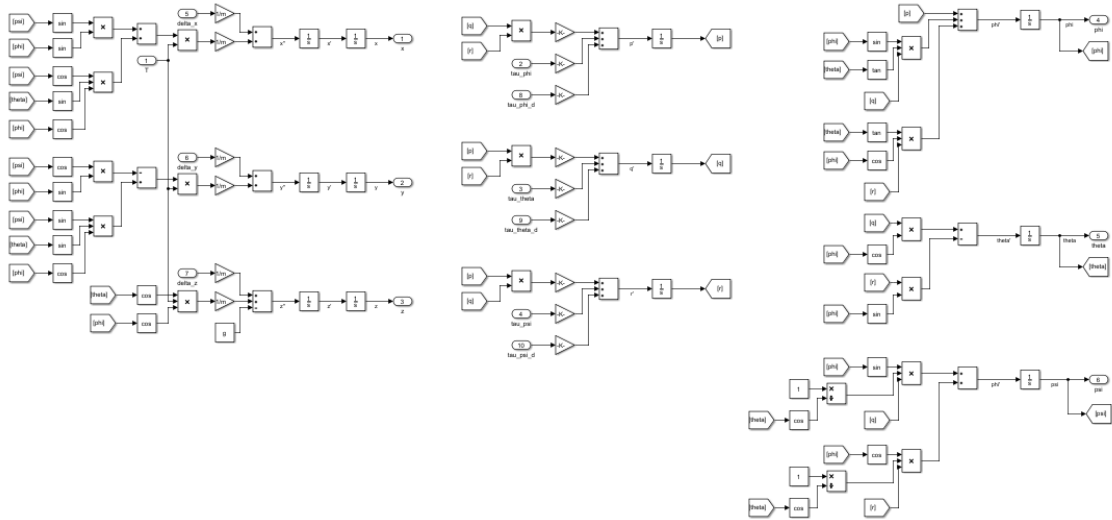
$$ctrb(A, B) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4464 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4464 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim sendo,  $rank(ctrb(A, B)) = 8$ , logo o sistema não é totalmente controlável, usando a premissa de que a matriz A não é bem definida, no matlab se faz o uso do comando *ctrbf*, com o comando *ctrb* o rank resultante é 12, tornando o sistema controlável. Além disso, o sistema linearizado pode ser considerado desacoplado, uma vez que as variáveis não dependem diretamente umas das outras.

## 2.6 Análise em Malha Aberta

Com base nas equações não-lineares do modelo, no simulink, foi construído o diagrama para simulação que ilustram as Figuras 4 e 5.

Figura 4: Diagrama de blocos da dinâmica não linear do sistema



Fonte: Autoria Própria

Figura 5: Diagrama de blocos do quadrrorotor



Fonte: Autoria Própria

Para simulação, foi considerado que as saídas  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  eram medidas. Além disso, todas as perturbações do sistema são do tipo degrau e as estradas são igualmente modeladas, como degrau de amplitude 1 no instante

de tempo 0. Dessa forma, a simulação em malha aberta resulta nas Figuras 6 e 7.

Parâmetros da simulação:

$m = 2.24$  - massa do quadricóptero

$g = 9.81$  - aceleração da gravidade

$I_{XX} = 0.0363$  - momento de inércia em torno do eixo x

$I_{YY} = 0.0363$  - momento de inércia em torno do eixo y

$I_{ZZ} = 0.0615$  - momento de inércia em torno do eixo z

$\tau_{\phi_d} = 0.01$

$\tau_{\theta_d} = 0.01$

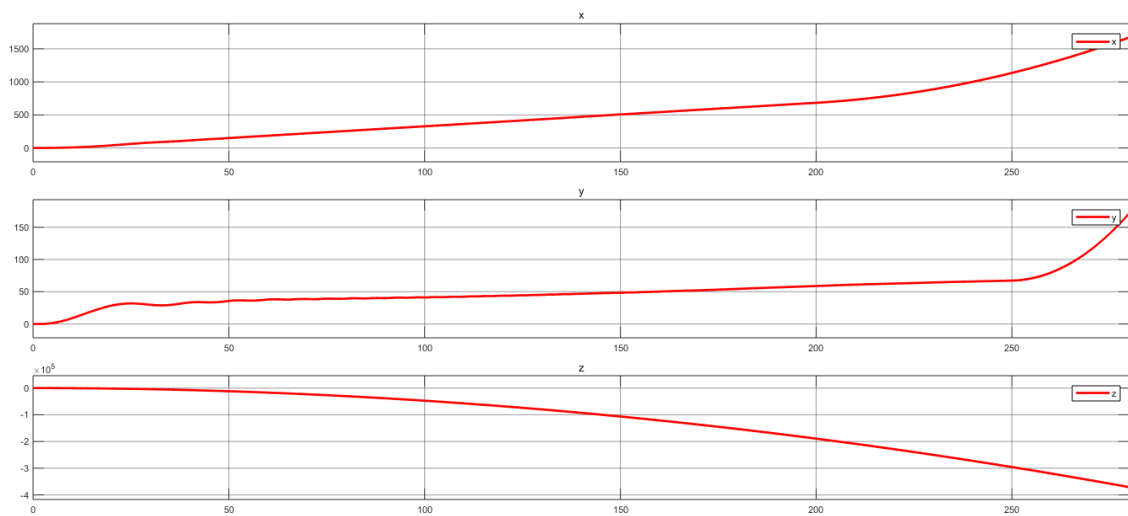
$\tau_{\psi_d} = 0.01$

$a_x = 0.01$

$a_y = 0.01$

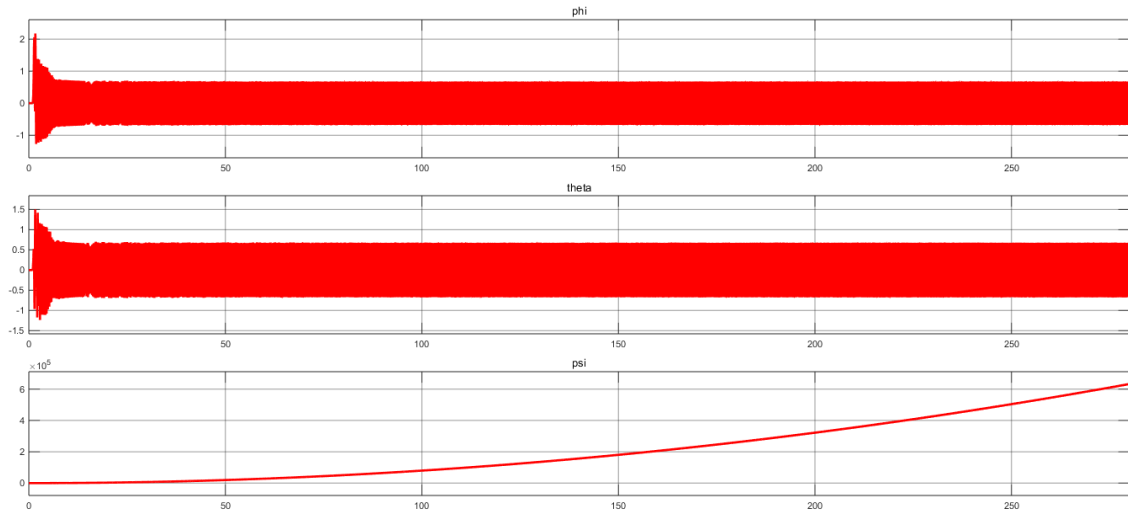
$a_z = 0.01$

Figura 6: Resposta em malha aberta de x, y e z



Fonte: Autoria Própria

Figura 7: Resposta em malha aberta de  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$



Fonte: Autoria Própria



## 3 Proposta de controle

O projeto de controle será composto por um controlador LQR para o controle de atitude e um conjunto de controladores PID para a posição no espaço, dessa forma, uma estrutura em cascata será proposta. Além disso, o sistema tem como variáveis medidas apenas as posições angulares e a posição relativa a origem, assim sendo, um observador de estados de Luenberger será utilizado. Em resumo, o controle será composto por uma estrutura em cascata, formada por um controlador LQR para a atitude e um controlador PID para a posição no espaço, além da estrutura do observador de estados.

### 3.1 Regulador Linear Quadrático

Para sistemas MIMO descritos em espaço de estado a utilização de controles baseados em alocação de polos não é totalmente caracterizada por meio das técnicas SISO. Uma forma de contornar esse problema é utilizar técnicas de controle ótimo, definindo ganhos de realimentação que aloque os pólos de malha fechada nas posições adequadas. Dessa forma, ao invés de projetar controladores cujo os ganhos aloquem os pólos de malha fechada em posições específicas, o objetivo é buscar um ganho que aloque os pólos em posições que minimizem uma função custo. A função custo em questão, denotada como  $J$ , consiste de um termo quadrático para o vetor o estado de  $x$  qualquer e um termo quadrático para o sinal de controle  $u$ .

$$J = \int_t^{\infty} x(\tau)^T Q x(\tau) + u(\tau)^T R u(\tau) d\tau$$

Sendo a matriz  $Q$  semidefinida positiva e a matriz  $R$  definida positiva, o controlador obtido a partir da minimização da função custo  $J$  é chamado de Regulador Linear Quadrático, LQR da sigla em inglês. A matriz  $Q$  caracteriza a penalidade referente ao desvio do estado em relação a origem e a matriz  $R$  caracteriza o custo em relação ao controle. Essas matrizes,  $Q$  e  $R$ , são parâmetros de projeto e devem ser escolhidas de forma ponderada entre si, em outras palavras, incrementar ou decrementar as matrizes  $Q$  e  $R$  na mesma proporção não altera o valor da função custo  $J$  e conseqüentemente não altera a lei de controle. Assim sendo, caso  $Q$  tenha valores mais elevados com relação a  $R$ , o desvio da origem é priorizado com relação ao custo de controle, levando a valores altos e a possível saturação dos atuadores. Por outro lado, quando  $R$  possui valores mais elevados que  $Q$ , o sistema prioriza a ação de controle, tornando o sistema mais lento.

Considerando um sistema em espaço de estados, definido como:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ x(0) &= x_0\end{aligned}$$

Na qual, a lei de controle é dado por:

$$u = -Kx$$

Substituindo a lei de controle na função custo se obtém:

$$J = \int_t^\infty x(\tau)^T (Q + K^T RK) x(\tau) d\tau$$

Como o sistema em malha fechada é estável, a função custo pode ser minimizada definindo:

$$\begin{aligned}x(t)^T P x(t) &= \int_t^\infty x(\tau)^T (Q + K^T RK) x(\tau) d\tau \\ \frac{d}{dt} x(t)^T P x(t) &= -x(t)^T (Q + K^T RK) x(t)\end{aligned}$$

Sendo  $P = P^T$  e definida positiva.

Expandindo a relação:

$$-x^T (Q + K^T RK) x = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A - BK)^T P x + x^T P (A - BK) x$$

Assim:

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) + Q + K^T RK = 0$$

Que é a equação de Lyapunov para o sistema em malha fechada. A solução para a equação necessita de uma solução para  $K$  e  $P$ , o que não é uma tarefa trivial. Se valendo da condição de não singularidade de  $R$  já que  $R$  é definida positiva, a equação pode ser reescrita como:

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P + (K^T - PBR^{-1})R(K - R^{-1}B^T P) = 0$$

Na qual, o termo  $K$  está restrito ao termo:

$$(K^T - PBR^{-1})R(K - R^{-1}B^T P)$$

Que é semidefinido positivo. Assim, escolhendo  $K = R^{-1}B^T P$ , a equação resultante tem a forma da equação algébrica de Riccati, que não depende do valor de  $K$ :

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$$

Resolvendo a equação de Riccati se obtém  $P$ , com o valor de  $P$  se obtém  $K$  pela expressão  $K = R^{-1}B^T P$ , determinando o ganho para realimentação de estados e o valor ótimo de custo pode ser obtido por  $J = x_0^T P x_0$ .

### 3.2 Observador de estados

Projetos por realimentação de estado consistem em poder alocar os polos do sistema em locais desejados. No entanto, nem todos os estados do sistema estão disponíveis para a realimentação, isso ocorre pela inexistência de sensores ou pela impossibilidade de medir algum estado.

Para contornar esse problema é possível propor estimadores de estados, conhecidos como observadores. Um observador de estados é uma estrutura que permite estimar os estados internos a partir dos estados medidos, sobre isso, é desejado que a dinâmica do observador seja rápida o suficiente para que sua dinâmica interna não influencie a dinâmica da planta, sendo o valor de 10 vezes mais rápido que o polo mais rápido em malha fechada, uma boa estimativa.

Considerando um sistema que possua  $m$  estados medidos, dado da forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

Uma transformação de similaridade pode ser definida como, na qual  $\text{rank}(C) = m$ :

$$X = \begin{bmatrix} C \\ R \end{bmatrix}$$

Na transformação de similaridade  $R \in \mathbb{R}^{(n-m) \times n}$  escolhida de modo que a inversa de  $X$  exista e  $X^{-1} = Y$ . A matriz  $Y$  pode ser particionada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}Y = X^{-1} &= \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} \\ Y_1 &\in \mathbb{R}^{n \times (n-m)}\end{aligned}$$

$$Y_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

Por definição,  $XY = I$ , assim:

$$I = XY = \begin{bmatrix} C \\ R \end{bmatrix} [ Y_1 \quad Y_2 ] = \begin{bmatrix} CY_1 & CY_2 \\ RY_1 & RY_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix}$$

Aplicando a transformação no sistema:

$$\dot{\bar{x}} = XAX^{-1}\bar{x} + XBu$$

$$y = CX^{-1}\bar{x} = CY\bar{x} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \end{bmatrix} \bar{x}$$

Reescrevendo:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$$

$$y = CX^{-1}\bar{x} = CY\bar{x} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \bar{x}_1$$

Reescrevendo a equação de estados:

$$\dot{y} = \bar{A}_{11}\bar{x}_1 + \bar{A}_{12}\bar{x}_2 + B_1u$$

$$\dot{\bar{x}}_2 = \bar{A}_{21}\bar{x}_1 + \bar{A}_{22}\bar{x}_2 + B_2u$$

Definindo:

$$\bar{u} = \bar{A}_{21}\bar{x}_1 + B_2u$$

$$w = \dot{y} - \bar{A}_{11}\bar{x}_1 - B_1u$$

Resulta em:

$$\dot{\bar{x}}_2 = \bar{A}_{22}\bar{x}_2 + \bar{u}$$

$$w = \bar{A}_{12}\bar{x}_2$$

O par  $(A, C)$  é observável se e somente se o par  $(\bar{A}_{22}, \bar{A}_{12})$  também for. Um estimador  $\hat{\bar{x}}$  pode ser construído da seguinte forma:

$$\dot{\hat{\bar{x}}} = (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})\hat{\bar{x}} + \bar{L}w + \bar{u} = (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})\hat{\bar{x}} + \bar{L}(\dot{y} - \bar{A}_{11}\bar{x}_1 - \bar{B}_1u) + \bar{A}_{21}\bar{x}_1 + B_2u$$

Tomando como definição  $z = \hat{\bar{x}} - \bar{L}y$ , se obtém a relação em termos de  $z$ :

$$\dot{z} = (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})z + ((\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})\bar{L} + (\bar{A}_{21} - \bar{L}\bar{A}_{11}))y + (\bar{A}_2 - \bar{L}\bar{B}_1)u$$

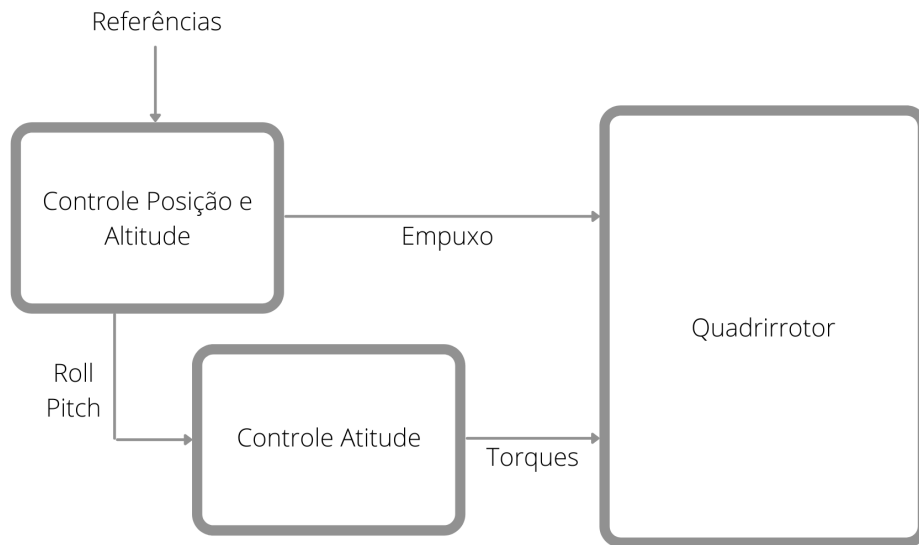
Sendo  $z + \bar{L}y$  uma estimativa para  $\bar{x}_2$ . Assim, o estado estimado será composto por:

$$\hat{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\bar{x}}_1 \\ \hat{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z + \bar{L}y \end{bmatrix}$$

### 3.3 Estrutura do controlador

Inicialmente, o sistema do VANT quadrrorotor é desacoplado, assim uma estrutura em cascata é proposta. A estrutura considera um controle para a atitude do quadrrorotr e outro controle para a posição linear, conforme mostra a Figura 8.

Figura 8: Estrutura em cascata do Quadrrorotor



Fonte: Autoria Própria

Para utilizar um controle LQR sobre a atitude é necessário a linearização do sistema, feita no capítulo anterior, todavia, não é necessário a descrição de espaço de estados completa para o projeto do LQR, uma vez que ele considera apenas as variáveis envolvidas na malha de atitude. Considerando apenas os estados relativos à atitude se tem:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{p} \\ \dot{\theta} \\ \dot{q} \\ \dot{\psi} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ p \\ \theta \\ q \\ \psi \\ r \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix}$$

Sobre essa estrutura será proposto um controlador LQR. As matrizes  $Q$  e  $R$  serão escolhidas, a priori, de modo a priorizar a correção do erro, uma vez que se trata de uma estrutura em cascata. Finalizado o projeto da malha externa esse valor de  $Q$  será compensado, priorizando o valor de  $R$ , para garantir controladores realizáveis. Para escolha dos valores de  $Q$  e  $R$  será utilizado o método de Bryson, escolhendo o maior desvio possível para cada variável.

Por fim, estabilizados os ângulos é preciso garantir que as trajetórias sejam seguidas, isso leva a ideia de controladores com ação integral. Ou seja, o controlador LQR será usado para estabilizar os ângulos de forma ótima e os controladores PID serão utilizados para seguimento de referência da posição com erro nulo, ou bem próximo ao valor zero.

Para a estrutura do controlador PID será considerado o seguinte sistema, que já linearizado tem a forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{m} \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ \theta \\ \phi \end{bmatrix}$$

Isolando os estados e suas derivadas:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{T_0}{m} \end{bmatrix} [\theta]$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-T_0}{m} \end{bmatrix} [\phi]$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} [T]$$

Como todos os estados estão disponíveis, pelo projeto do observador, a matriz  $C$  de cada um dos sistemas é dado por, considerando apenas a saída da posição:

$$C = [ 1 \ 0 ]$$

As funções de transferência são dadas da forma  $C(sI - A)^{-1}B$ , na qual  $I$  é a matriz identidade. Dessa forma, as funções de transferência do sistema são:

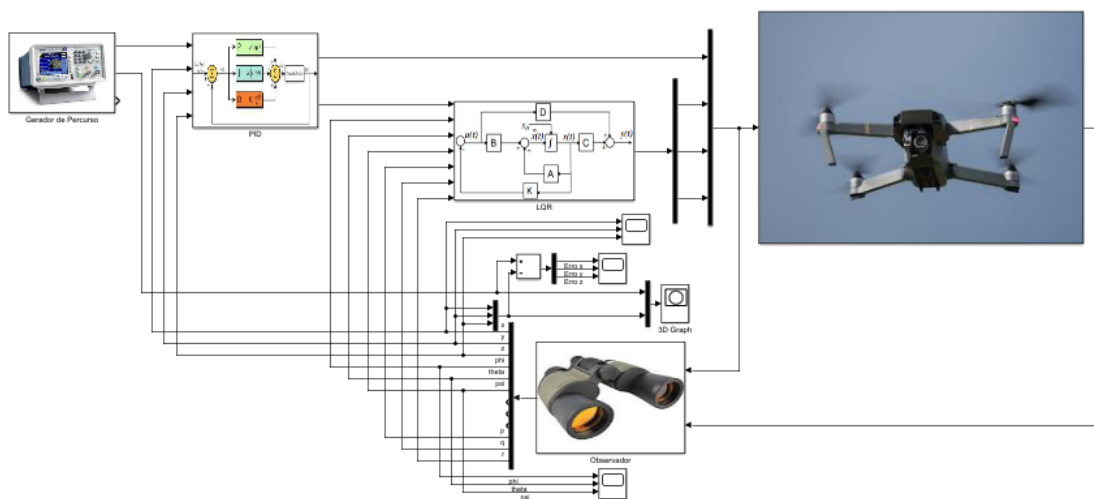
$$H_X(s) = \frac{\theta(s)}{X(s)} = \frac{1}{m \cdot s^2}$$

$$H_Y(s) = \frac{\phi(s)}{Y(s)} = \frac{-1}{m \cdot s^2}$$

$$H_Z(s) = \frac{T(s)}{Z(s)} = \frac{1}{m \cdot s^2}$$

A síntese desses controladores será feita com auxílio do lugar das raízes. Por fim, a Figura 9 mostra a implementação do controle proposto no simulink.

Figura 9: Estrutura de Controle



Fonte: Autoria Própria.

## 4 Projeto de controladores e Resultados

Tanto para o projeto quanto para a simulação, foram considerados como parametros os seguintes valores:

$$\begin{aligned}m &= 2.24 \\g &= 9.81 \\I_{xx} &= 0.0363 \\I_{yy} &= 0.0363 \\I_{zz} &= 0.0615 \\\tau_{\phi_d} &= 0.01 \\\tau_{\theta_d} &= 0.01 \\\tau_{\psi_d} &= 0.01 \\a_x &= 0.01 \\a_y &= 0.01 \\a_z &= 0.01\end{aligned}$$

### 4.1 Projeto de controladores

#### 4.1.1 Regulador Linear Quadrático

Para o projeto do Regulador Linear Quadrático, inicialmente, é necessário definir a matriz  $Q$  e a matriz  $R$ . Como o sistema possui dinâmica rápida é possível afirmar que a variação dos ângulos ocorre de forma igualmente rápida, assim sendo, é necessário priorizar o seguimento de referência em decorrência do sinal de controle, assim, o ganho em  $Q$ , para cada um dos estados, será maior que o ganho em  $R$  para cada uma das entradas. Pela regra Bryson, se valendo de uma variação de 0.3 para os ângulos, o valor de ganho em  $Q$  é igual a 11, de forma aproximada. Para o sinal de controle, será considerado uma amplitude máxima de 5, valor esse que em termos práticos não causaria grandes danos no sistema elétrico, por exemplo, considerando como um valor de tensão ou corrente, por exemplo. Dessa forma, o valor do ganho em  $R$  é de 0.04. Utilizando a função *care* do Matlab para resolver equação algébrica de Riccati se obtém o valor de  $K$ , que calculado até então, é de:

$$K = \begin{bmatrix} 16.5831 & 16.6194 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16.5831 & 16.6194 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16.5831 & 16.6445 \end{bmatrix}$$



Por fim, o valor pode ser ajustado durante a simulação, de forma a atingir o melhor valor possível para o sistema.

#### 4.1.2 Obervador de estados

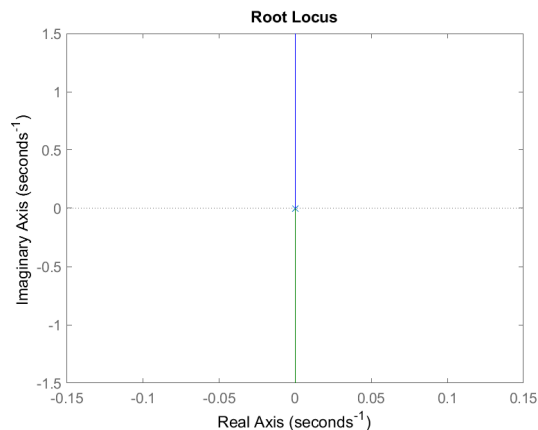
Para o projeto do observador, é considerado que todos os pólos da dinâmica do observador estão no mesmo ponto, no caso, localizado em  $-15$  no plano  $s$ . Se valendo das equações desenvolvidas por Luenberger, o projeto do observador é feito por alocação de pólos e o valor do ganho para alocação é obtido pela solução da equação de Lyapunov. Dessa forma, os ganhos de observação  $L$  são dados por:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 15 & 90 & 225 & 300 & 225 & 90.0000 \end{bmatrix}$$

#### 4.1.3 Controladores PID

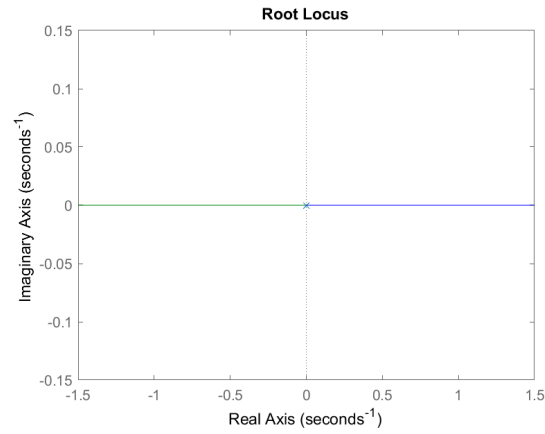
Para os controladores PID será utilizado o projeto via lugar geométrico das raízes. Primeiramente, as três funções de transferência,  $H_x(s)$ ,  $H_y(s)$  e  $H_z(s)$  foram plotadas pelo comando rlocus do matlab e os resultados podem ser vistos nas Figuras 10, 11 e 12.

Figura 10: Lugar das raízes para  $H_x$



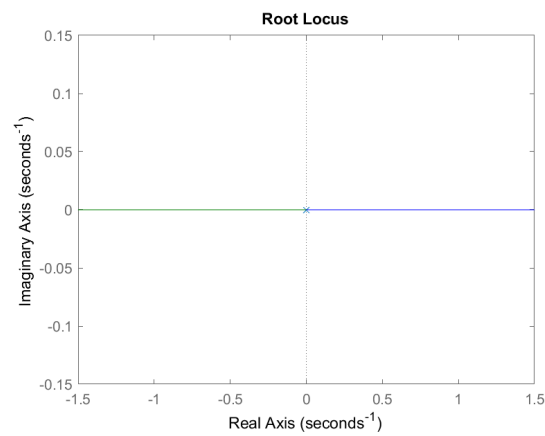
Fonte: Autoria Própria.

Figura 11: Lugar das raízes para  $H_y$



Fonte: Autoria Própria.

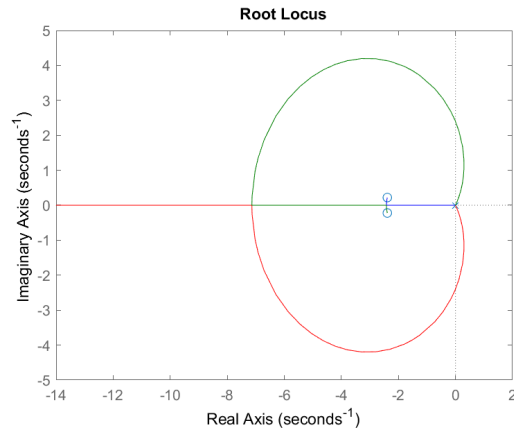
Figura 12: Lugar das raízes para  $H_z$



Fonte: Autoria Própria.

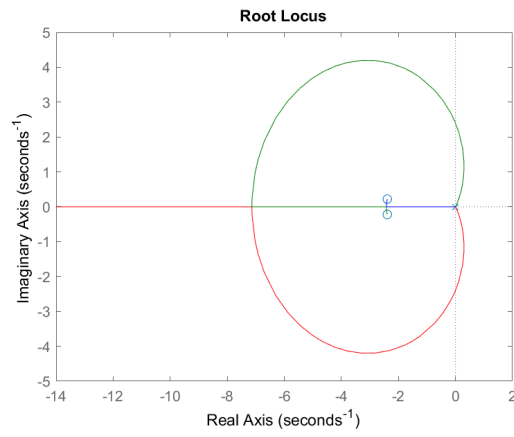
Após tentativa e erro de alocação de zeros e pólos, de forma a levar o lugar das raízes para dentro das especificações, no caso tempo de acomodação de 3s e *overshoot* percentual de 10%, se obteve a seguinte configuração do lugar das raízes para cada uma das funções de transferência, resultado esse, exibido nas Figuras 13, 14 e 15.

Figura 13: Lugar das raízes para  $H_x$ , sistema compensado



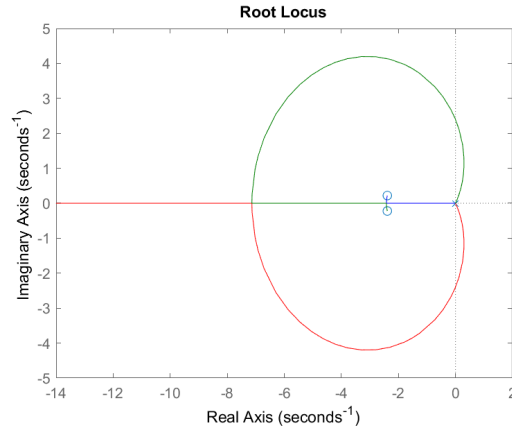
Fonte: Autoria Própria.

Figura 14: Lugar das raízes para  $H_y$ , sistema compensado



Fonte: Autoria Própria.

Figura 15: Lugar das raízes para  $H_z$ , sistema compensado



Fonte: Autoria Própria.

Assim, os controladores foram obtidos:

$$C_x = 190.9\left(\frac{1}{0.83s} + 1 + 0.198s\right)$$

$$C_y = -153\left(\frac{1}{0.9s} + 1 + 0.22s\right)$$

$$C_z = 190.9\left(\frac{1}{0.83s} + 1 + 0.198s\right)$$

## 4.2 Resultados

Inicialmente, os controladores PID não apresentaram bom desempenho e levaram o sistema a saturação, o que forçou a alteração dos valores. Sobre esse ponto, o valor do ganho derivativo foi aumentado até que o sistema atingisse a estabilidade, assim sendo, os controladores PID adotados são:

$$C_x = 0.001\left(\frac{1}{0.003s} + 1 + 60s\right)$$

$$C_y = -0.01\left(\frac{1}{0.01s} + 1 + 30s\right)$$

$$C_z = 0.4\left(\frac{1}{0.04s} + 1 + 5.56s\right)$$

Além disso, para diminuir o sobressinal gerado, foi acrescentado um filtro de alta frequência pra fazer cancelamento de zeros em todos as malhas que utilizam do PID.

Para o controlador LQR, o valor apresenta lentidão e conseqüentemente gerava instabilidade, dessa forma a matriz foi considerada como a identidade e R como a identidade multiplicada por 0.5. O valor de ganho obtido foi:

$$K = \begin{bmatrix} 1.4142 & 1.4501 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.4142 & 1.4501 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4142 & 1.4744 \end{bmatrix}$$

#### 4.2.1 Estabilização

A primeira referência considerada foi a saída da origem até estabilizar no ponto (2,2,10). Esse resultado pode ser visto na Figura 16. Nele é possível perceber que a resposta do controlador é relativamente rápida, todavia o sinal em x é mais lento ao ser comparado com as outras variáveis de posição. O tempo de acomodação, das 3 malhas de posição é em torno de 20 segundos, tempo maior que o calculado, mas um tempo factível, diferente dos 3 segundos usados inicialmente, o que pode ser comprovado na Figura 16. Na sequência, é possível ver a existência de perturbações na planta e como ela afeta a resposta. O controlador consegue rejeitar as perturbações, mas isso ocorre de forma lenta, uma vez que o controle foi feito priorizando eliminar o erro com relação a entrada de referência e não para solucionar o problema de rejeição de perturbação. Ainda sobre a perturbação, elas ocorrem a partir de 200 segundos, perceptível pelas mudanças nos valores de posição, elas são modeladas como degraus e possuem pequenas amplitudes, que é decorrente de sua natureza.

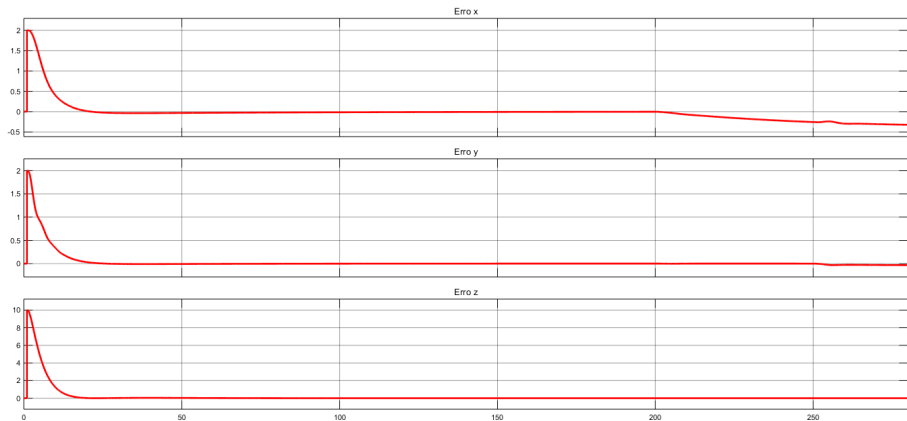
Figura 16: Estabilização em (2,2,10)



Fonte: Autoria Própria.

Na sequência, a Figura 17 mostra a evolução do sinal do erro, é perceptível que ele tende a zero e uma pequena alteração do seu valor ocorre justamente a partir dos 200 segundos, que é onde ocorrem as perturbações.

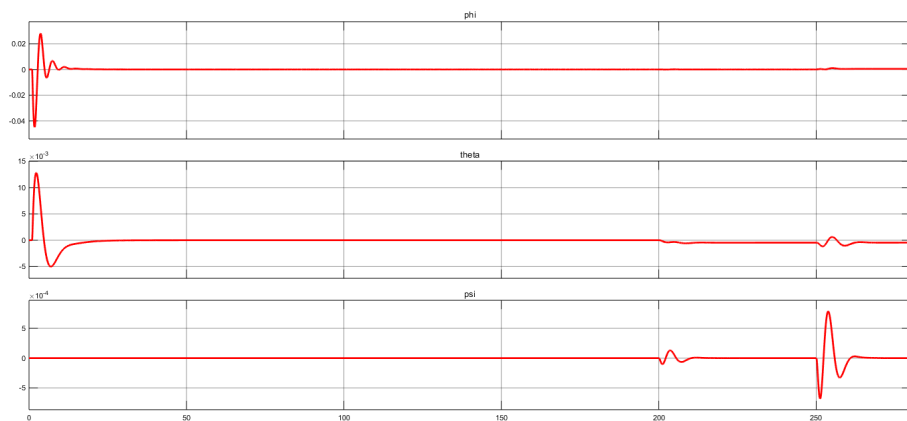
Figura 17: Evolução do sinal do erro na Estabilização em (2,2,10)



Fonte: Autoria Própria.

Analisando a Figura 18 é possível observar a evolução da posição angular do quadricóptero. O VANT varia brevemente seus ângulos a fim de atingir a posição e ficar estável.

Figura 18: Evolução da posição angular na Estabilização em (2,2,10)

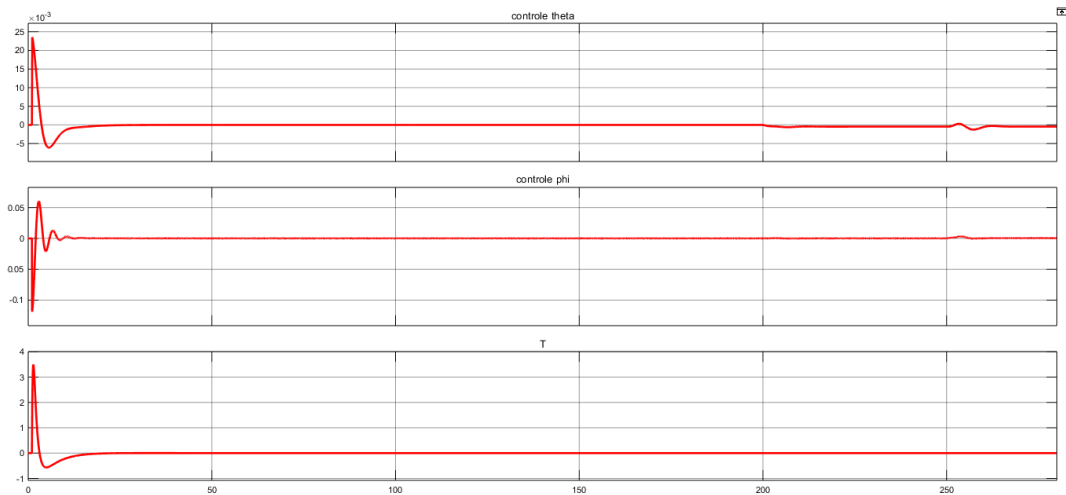


Fonte: Autoria Própria.

Por fim, as Figuras 19 e 20 mostram o sinal de controle empregado para estabilização do VANT. No momento inicial existe um esforço de controle

grande para tirar o VANT da inércia e levá-lo para o ponto desejado, sendo que o esforço se estabiliza logo na sequência, voltando a atuar de forma agressiva no momento em que é percebida a perturbação, como era de se esperar.

Figura 19: Evolução dos sinais de controle para posição na estabilização



Fonte: Autoria Própria.

Figura 20: Evolução dos sinais de torque no tempo para estabilização

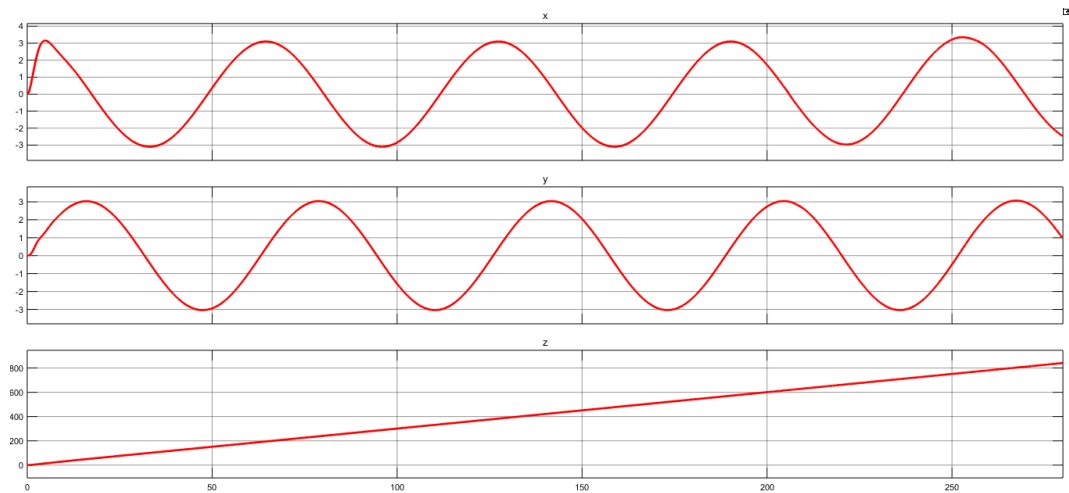


Fonte: Autoria Própria.

## 4.2.2 Seguimento de Referência

Na sequência, é desejado que o quadricóptero siga uma referência circular. Para isso, as entradas de posição são inseridas funções senoidais e na entrada de altitude é inserido uma referência em rampa, a combinação das 3 entradas gera uma trajetória helicoidal. As Figuras 21 e 22 mostram o a trajetória helicoidal, na Figura 22 em azul está a trajetória e em vermelho o caminho percorrido pelo quadricóptero. Além disso, na Figura 23 está o sinal do erro relativo a trajetória e ao caminho percorrido pelo quadricóptero, analisando essa imagem é possível observar que o erro relativo é bem baixo, conforme fora projetado os controladores.

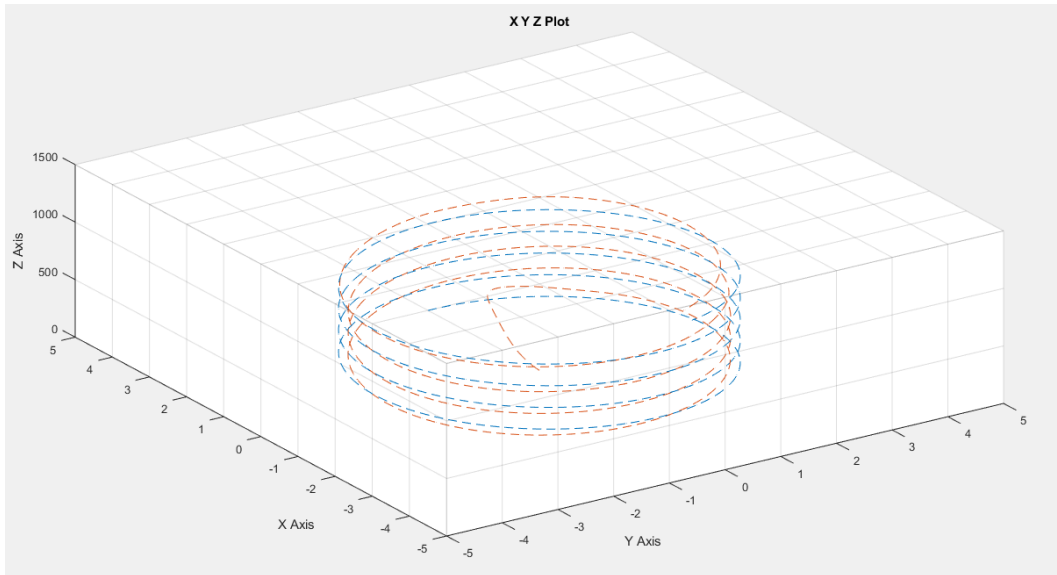
Figura 21: Seguimento de referência helicoidal



Fonte: Autoria Própria.

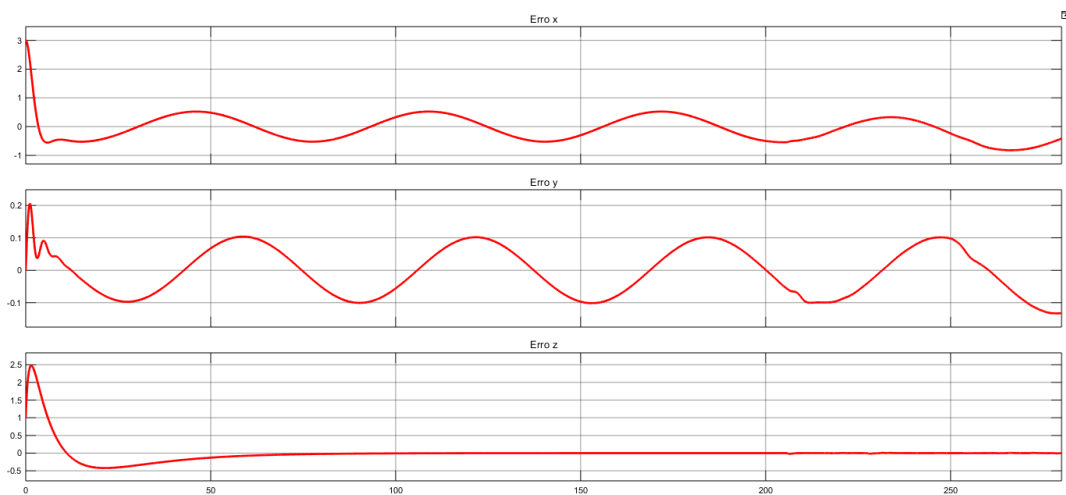


Figura 22: Seguimento de referência helicoidal sobre o plano



Fonte: Autoria Própria.

Figura 23: Sinal do erro na referência helicoidal

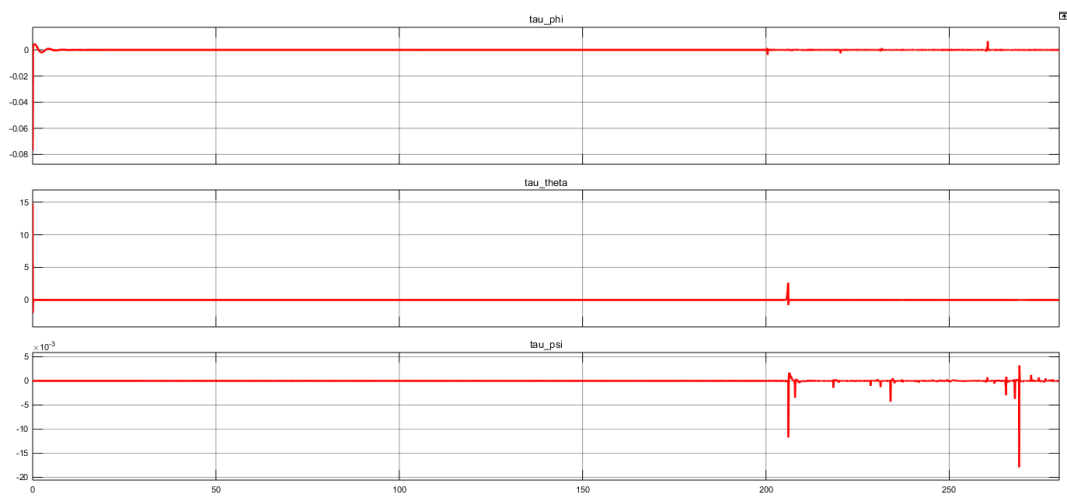


Fonte: Autoria Própria.

Em conclusão, a Figura 24 mostra o esforço de controle empregado para a malha de atitude. Sobre ela, é possível ver que apenas no instante inicial existe um pico do sinal de controle, isso se deve a necessidade de percorrer

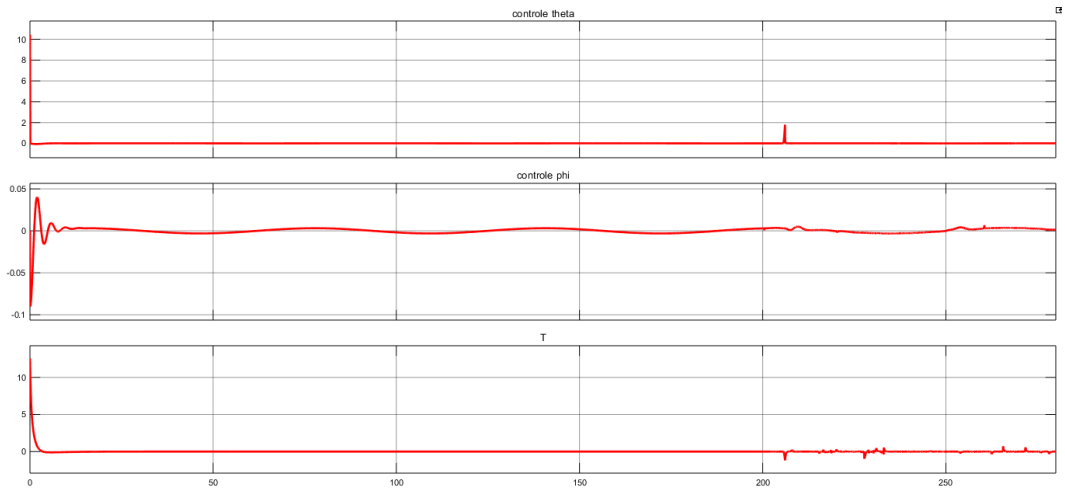
um caminho maior até atingir a trajetória, uma vez que a trajetória e o quadricóptero se iniciam em pontos diferentes. Por fim, a Figura 25 mostra o esforço de controle para as posições, que, igualmente ao que ocorre com a atitude, tem seu pico no primeiro instante e depois mantém valores baixos. Finalmente, a Figura 26 mostra a evolução das posições angulares no tempo, é possível perceber que não houve mudanças bruscas, logo o sistema permaneceu estável.

Figura 24: Esforço de controle malha de atitude na referência helicoidal



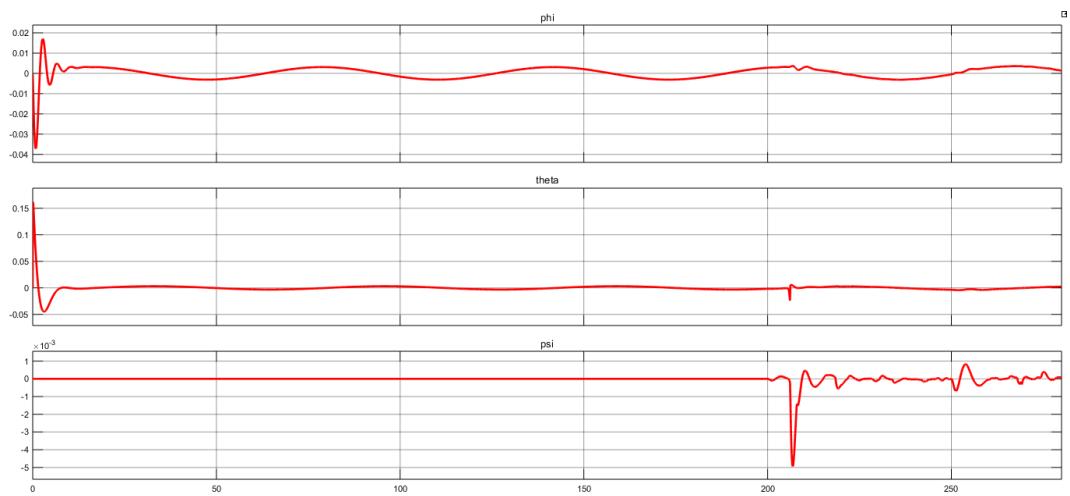
Fonte: Autoria Própria.

Figura 25: Esforço de controle malha de posição na referência helicoidal



Fonte: Autoria Própria.

Figura 26: Posições angulares na referência helicoidal



Fonte: Autoria Própria.

## 5 Conclusão

Sobre o desenvolvimento do trabalho, tudo ocorreu de forma objetiva e assertiva. Todavia, algumas considerações devem ser feitas. Inicialmente, a modelagem do sistema apresenta variações entre autores, assim se faz muito necessário entender o processo físico e adequar o modelo a aplicação.

Sobre o controle, para o LQR o valor de tempo de acomodação não pode ser estipulado a priori, o que dificulta seu uso em sistemas em cascata, dessa forma, os ajustes de tempo devem ser feitos via tentativa e erro, até atingir a melhor especificação. Sobre os controladores PID, ao aplicar os controladores sobre o projeto real, foi bem oneroso o trabalho de ajuste de parâmetros, uma vez que o sistema não se estabiliza inicialmente, após a estabilização é possível de se obter um direcionamento sobre qual ganhos devem ser alterados. Ademais, os controladores foram projetados pensando na solução do problema de seguimento de referência e não no problema de rejeição de perturbação, assim sendo, as perturbações, por menores quais sejam, demoram um espaço de tempo considerado grande até serem totalmente eliminadas.

Por fim, é interessante pensar o projeto sobre o ponto de vista de implementação real, nesse caso, deverá se inserir os motores na planta, uma vez que esse modelo considera apenas os torques e o empuxo no centro de massa. Além disso, é interessante inserir alguma ferramenta de filtragem para os sinais medidos, tendo em consideração que incertezas na implementação real vão existir, podendo implantar filtro de média móvel ou até filtragem estocástica, como o filtro de Kalman pra aplicação discreta ou Kalman-Bucy para o tempo contínuo.

## Referências

- [1] G. V. Raffo, *Robust Control Strategies for a QuadRotor Helicopter*. PhD thesis, Universidad de Sevilla, 2011.
- [2] S. BOUABDALLAH, *Design and control of quadrotors with application to autonomous flying*. PhD thesis, ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE, 2007.
- [3] G. V. Lima, “Modelagem dinâmica e controle para navegação de um veículo aéreo não tripulado do tipo quadricóptero,” Master’s thesis, Universidade Federal de Uberlândia, 2015.
- [4] J. S. d. M. Gabriela V. Lima; Rafael M. J. A. de Souza; Aniel S. de Moraes, “Modelagem dinâmica de um veículo aéreo não tripulado do tipo quadricóptero,” 2014.
- [5] W. d. S. M. F. Bruna Vitória Costa Oliveira, Italo Jose Dias, “Notas de aula da disciplina técnicas de controle de processos industriais,” 2020.
- [6] PAULA, “Veículos aéreos não tripulados do tipo multirrotor, abordagem teórica e ênfase no estudo do quadrirrotr,” 2012.