Programação Inteira — Exemplos de Modelagem

Prof. Teobaldo Bulhões

July 9, 2020

Sumário

Problema de Cobertura por Vértices

Entrada

- Grafo $G = (V, E)$
  - $V = \{1, \ldots, n\}$: conjunto de vértices
  - $E \subseteq V \times V$: conjunto de arestas

Tarefa

Encontrar um subconjunto $S \subseteq V$ de cardinalidade mínima que cubra todas as arestas de G. Isto é, para toda aresta $(i, j) \in E$, pelo menos um dos vértices i e j deve pertencer a S.

Problema de Cobertura por Vértices

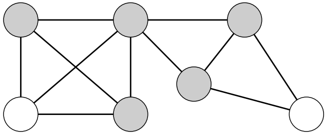


Figura 1: Um grafo simples com 7 vértices e 11 arestas. Os cinco vértices cinzas cobrem todas as arestas do grafo.

Formulação

- Variáveis:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se o vértice } i \in V \text{ for selecionado.} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Formulação

$$\min \sum_{i \in V} x_i \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & x_i + x_j \geq 1, & \forall (i,j) \in E \quad (1.2) \\ & x_i \in \{0, 1\}, & \forall i \in V. \quad (1.3) \end{aligned}$$

Problema do Clique Máximo

Entrada

- Grafo $G = (V, E)$
  - $V = \{1, \ldots, n\}$: conjunto de vértices
  - $E \subseteq V \times V$: conjunto de arestas

Tarefa

Encontrar um subconjunto $S \subseteq V$ de cardinalidade máxima tal que $(i, j) \in E$, para todo par de vértices distintos i e j pertencentes a S.

Problema do Clique Máximo

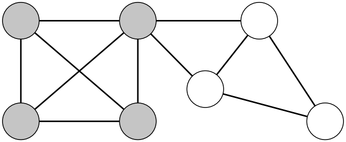


Figura 2: Um grafo cujo clique máximo possui cardinalidade 4 (vértices em cinza).

Formulação

- Variáveis:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se o vértice } i \in V \text{ for selecionado.} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Formulação

$$\min \sum_{i \in V} x_i \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & x_i + x_j \leq 1, && \forall i, j \in V, i \neq j, (i,j) \notin E && (1.5) \\ & x_i \in \{0, 1\}, && \forall i \in V. && (1.6) \end{aligned}$$

Problema de Coloração de Grafos

Entrada

- $G = (V, E)$
  - $V = \{1, \ldots, n\}$: conjunto de vértices
  - $E \subseteq V \times V$: conjunto de arestas
- C: conjunto de $n = |V|$ cores

Tarefa

Colorir os vértices do grafo G com o menor número de cores de modo que dois vértices adjacentes possuam cores distintas.

Problema de Coloração de Grafos

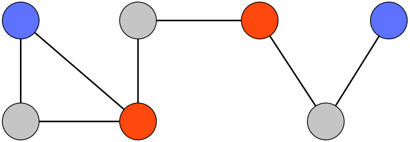


Figura 3: Um grafo que pode ser colorido com três cores. Verifique que vértices adjacentes possuem cores distintas.

Formulação

- Variáveis:

$$x_{jc} = \begin{cases} 1, & \text{se o vértice } j \in V \text{ receber a cor } c \in C \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$y_c = \begin{cases} 1, & \text{se a cor } c \in C \text{ for utilizada em ao menos um vértice} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Formulação

$$\min \sum_{c \in C} y_c \tag{1.7}$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.a.} \quad x_{jc} &\le y_c && \forall j \in V, \forall c \in C, && (1.8)\\
x_{ic} + x_{jc} &\le y_c, && \forall (i,j) \in E, \forall c \in C && (1.9)\\
\sum_{c \in C} x_{jc} &= 1, && \forall j \in J && (1.10)\\
y_c &\in \{0,1\}, && \forall c \in C && (1.11)\\
x_{jc} &\in \{0,1\}, && \forall j \in V, \forall c \in C. && (1.12)
\end{aligned}
$$

Problema da "Bipartização" de Grafos

Entrada

- $G = (V, E)$
  - $V = \{1, \ldots, n\}$: conjunto de vértices
  - $E \subseteq V \times V$: conjunto de arestas

Tarefa

Remover um número mínimo de arestas de G de modo a transformá-lo em um grafo bipartido.

Problema da "Bipartização" de Grafos

$G = (V, E)$ é bipartido se for possível particionar V em dois conjuntos V_1 e V_2 tais que:

- $V_1 \cup V_2 = V$
- $V_1 \neq \emptyset$
- $V_2 \neq \emptyset$
- $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
- $\nexists (i, j) \in E$ tal que $i, j \in V_1$ ou $i, j \in V_2$. Ou seja, toda aresta de G tem um extremo em V_1 e um extremo em V_2.

Problema da “Bipartização” de Grafos

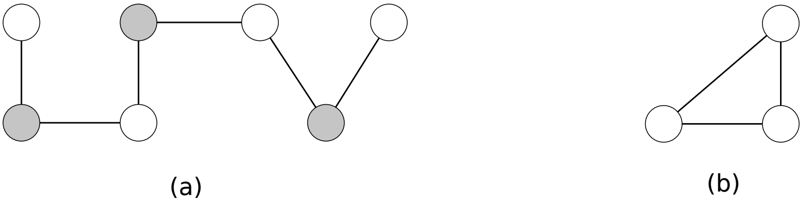


Figura 4: (a) Um grafo bipartido. As partições V_1 e V_2 são compostas, respectivamente, pelos vértices brancos e cinzas. (b) Um grafo que não é bipartido. Observe que esse grafo pode ser “bipartizado” a partir da remoção de um única aresta.

Formulação

- Variáveis:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a aresta } (i,j) \in E \text{ for removida} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$x_j^1 = \begin{cases} 1, & \text{se o vértice } j \in V \text{ estiver na particao } V_1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$x_j^2 = \begin{cases} 1, & \text{se o vértice } j \in V \text{ estiver na particao } V_2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Formulação

$$\min \sum_{(i,j)\in E} y_{ij} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.a.} \quad & \sum_{j\in V} x_j^1 \geq 1, && && (1.14)\\
& \sum_{j\in V} x_j^2 \geq 1 && && (1.15)\\
& x_j^1 + x_j^2 = 1, && \forall j \in V && (1.16)\\
& x_i^1 + x_j^1 \leq 1 + y_{ij}, && \forall (i,j) \in E && (1.17)\\
& x_i^2 + x_j^2 \leq 1 + y_{ij}, && \forall (i,j) \in E && (1.18)\\
& x_j^1, x_j^2 \in \{0,1\}, && \forall j \in V && (1.19)\\
& y_{ij} \in \{0,1\}, && \forall (i,j) \in E. && (1.20)
\end{aligned}$$

Problema de Edição de *p-Cliques*

Entrada

- $G = (V, E)$
  - $V = \{1, 2, \ldots, n\}$: conjunto de vértices
  - $E \subseteq V \times V$: conjunto de arestas
- $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$: número desejado de *cliques*

Tarefa

Realizar o número mínimo de *edições* em G (adições ou remoções de arestas) de modo a transformá-lo em uma união disjuntas de p *cliques*

Problema de Edição de *p-Cliques*

Figura 5: Uma instância (esquerda) com $p = 2$ e uma solução ótima com 3 edições (direita).

Formulação

- Conjuntos:
  - $K = \{1, \ldots, p\}$ Conjunto dos índices dos *cliques*

- Variáveis:

$$w_{ijt} = \begin{cases} 1, & \text{se os vértices } i, j \in V, i < j, \text{ estiverem presentes no } \textit{clique} \\ & \text{de índice } t \in K \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$z_{it} = \begin{cases} 1, & \text{se o vértice } i \in V \text{ estiver presente no } \textit{clique} \text{ de índice } t \in K \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Formulação

$$\min \sum_{(i,j)\in E} (1 - \sum_{t\in K} w_{ijt}) + \sum_{\substack{i,j\in V \\ i<j \\ (i,j)\notin E}} \sum_{t\in K} w_{ijt} \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.a.} \quad w_{ijt} + 1 &\geq z_{it} + z_{jt}, & \forall i,j \in V, i<j, \forall t \in K, && (1.22)\\
w_{ijt} &\leq z_{it}, & \forall i,j \in V, i<j, \forall t \in K, && (1.23)\\
w_{ijt} &\leq z_{jt}, & \forall i,j \in V, i<j, \forall t \in K, && (1.24)\\
\sum_{t\in K} z_{it} &= 1, & \forall i \in V, && (1.25)\\
\sum_{i\in V} z_{it} &\geq 1, & \forall t \in K, && (1.26)\\
w_{ijt} &\in \{0,1\}, & \forall i,j \in V, i<j, \forall t \in K, && (1.27)\\
z_{it} &\in \{0,1\}, & \forall i \in V, \forall t \in K. && (1.28)
\end{aligned}$$

Sumário

Problema da Máxima Cobertura

Entrada

- L: conjunto de locais candidatos para instalação de facilidades (e.g., hospitais)
- C: conjunto de clientes
- $p \in \mathbb{Z}_{>0}$: número de facilidades a serem abertas
- $h_j \in \mathbb{R}_{>0}$: demanda do cliente $j \in C$
- $d_{ij} \in \mathbb{R}_{>0}$: distância entre o local i e o cliente j
- $R \in \mathbb{R}_{>0}$: raio de cobertura das facilidades

Tarefa

Encontrar um subconjunto $L' \subseteq L$ dos locais candidatos que maximize a demanda coberta e tal que $|L'| = p$. Um cliente $j \in C$ é coberto por L' se existir $i \in L'$ tal que $d_{ij} \leq R$.

Problema da Máxima Cobertura

- Exemplo:
  - $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
  - $C = \{1, 2, \ldots, 30\}$
  - $p = 3$
  - $R = 300$
  - $h_1 = 478, h_2 = 474, h_3 = 28, h_4 = 42, h_5 = 418, h_6 = 368, h_7 = 335, h_8 = 154, h_9 = 303, h_{10} = 304, h_{11} = 291, h_{12} = 79, h_{13} = 215, h_{14} = 197, h_{15} = 362, h_{16} = 498, h_{17} = 475, h_{18} = 272, h_{19} = 222, h_{20} = 134, h_{21} = 17, h_{22} = 13, h_{23} = 232, h_{24} = 159, h_{25} = 190, h_{26} = 446, h_{27} = 263, h_{28} = 280, h_{29} = 118, h_{30} = 11$
  - os locais e clientes são pontos no plano cartesiano e as distâncias são as distâncias euclidianas.

Problema da Máxima Cobertura

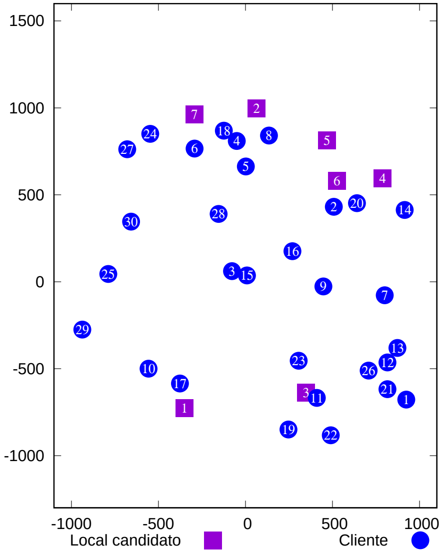


Figura 6: Locais e clientes do exemplo em questão.

Problema da Máxima Cobertura

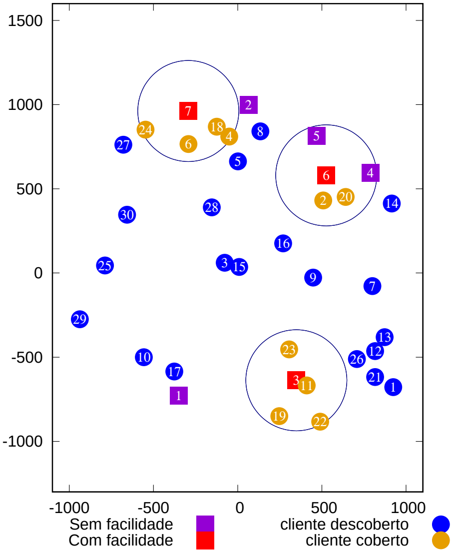


Figura 7: Solucão ótima com $R = 300$. Demanda total coberta: 2207.

Problema da Máxima Cobertura

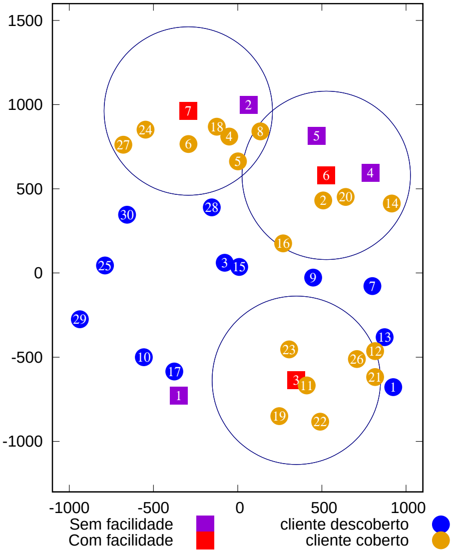


Figura 8: Solucão ótima com $R = 500$. Demanda total coberta: 4279.

- Variáveis:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se o local } i \in L \text{ receber uma facilidade.} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se o cliente } j \in C \text{ estiver coberto.} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Formulação

$$\max \sum_{j \in C} h_j y_j \tag{2.1}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{i \in L} x_i \leq p \tag{2.2}$$

$$y_j \leq \sum_{\substack{i \in L \\ d_{ij} \leq R}} x_i, \qquad \forall j \in C \tag{2.3}$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \qquad \forall i \in L \tag{2.4}$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \qquad \forall j \in C. \tag{2.5}$$

Problema de localização de p-medianas

Entrada

- L: conjunto de locais candidatos para a instalação de facilidades
- C: conjunto de clientes
- $p \in \{1, 2, \dots, |L|\}$: número de facilidades a serem abertas
- $h_j \in \mathbb{R}_{>0}$: demanda do cliente $j \in C$
- $d_{ij} \in \mathbb{R}_{>0}$: distância entre o local candidato i e o cliente j

Tarefa

Escolher p locais para a instalação das facilidades de modo a minimizar $\sum_{j \in C} h_j d'_j$, sendo d'_j a menor distância entre o cliente j e um local escolhido.

A Figura 9 ilustra o problema de localização de *p*-medianas.

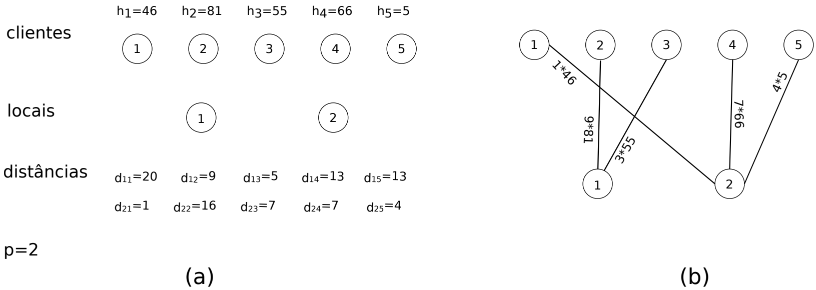


Figura 9: (a) Um instância do problema de localização de *p*-medianas. (b) Uma solução ótima com custo 1532.

Formulação

- Variáveis:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se o local } i \in L \text{ receber uma facilidade.} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o local } i \in L \text{ receber a facilidade que está} \\ & \quad \text{mais próxima do cliente } j \in C \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Formulação

$$\min \sum_{i \in L} \sum_{j \in C} d_{ij} h_j y_{ij} \tag{2.6}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{i \in L} x_i = p, \tag{2.7}$$

$$y_{ij} \leq x_i, \qquad \forall i \in L, \forall j \in C, \tag{2.8}$$

$$\sum_{i \in L} y_{ij} = 1, \qquad \forall j \in C, \tag{2.9}$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \qquad \forall i \in L, \tag{2.10}$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\}, \qquad \forall i \in L, \forall j \in C. \tag{2.11}$$

Sumário

Problema da Mochila

Entrada

- I: conjunto de itens que podem ser roubados por um ladrão
- $w_j \in \mathbb{R}_{>0}$: peso do item $j \in I$
- $v_j \in \mathbb{R}_{>0}$: valor do item $j \in I$
- $C \in \mathbb{R}_{>0}$: peso máximo suportado pela mochila do ladrão

Tarefa

Selecionar um subconjunto dos itens cujo peso total seja menor ou a igual a C e cujo valor total seja máximo.

Formulação

- Variáveis:

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{se o item } j \in I \text{ for selecionado} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Formulação

$$\max \sum_{j \in I} v_j x_j \tag{3.1}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j \in I} w_j x_j \leq C, \tag{3.2}$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \qquad \forall j \in V. \tag{3.3}$$

Problema de Empacotamento

Entrada

- I: conjunto de itens
- $w_j \in \mathbb{R}_{>0}$: peso do item $j \in I$
- $|I|$ *bins* (caixas) idênticos, cada um com capacidade $C \in \mathbb{R}_{>0}$.

Tarefa

Empacotar os itens em um número mínimo de bins, respeitando a capacidade dos bins.

Problema de Empacotamento

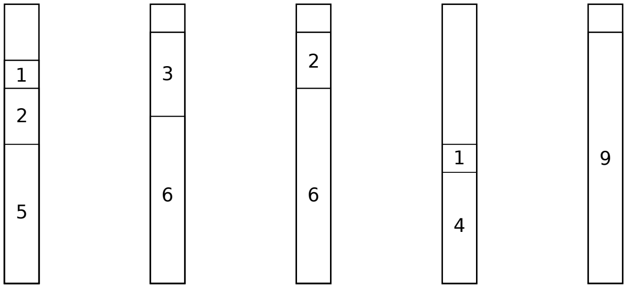


Figura 10: Um exemplo com 10 itens com os seguintes pesos: $w_1 = 1$, $w_2 = 2$, $w_3 = 5$, $w_4 = 3$, $w_5 = 6$, $w_6 = 2$, $w_7 = 6$, $w_8 = 1$,$w_9 = 4$ e $w_{10} = 9$. Os itens foram empacotados em 5 *bins* de capacidade $C = 10$.

Formulação

- Conjuntos:
  - $K = \{1, \ldots, |I|\}$ Conjunto dos índices dos bins

- Variáveis:

$$x_{jt} = \begin{cases} 1, & \text{se o item } j \in I \text{ estiver no bin de índice } t \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$y_t = \begin{cases} 1, & \text{se o bin de índice } t \text{ for usado} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Formulação

$$\min \sum_{t \in K} y_t \tag{3.4}$$

$$\text{s.a.} \sum_{t \in K} x_{jt} = 1, \qquad \forall j \in I, \tag{3.5}$$

$$x_{jt} \leq y_t, \qquad \forall j \in I, \forall t \in K, \tag{3.6}$$

$$\sum_{j \in I} w_j x_{jt} \leq C, \qquad \forall t \in K \tag{3.7}$$

$$x_{jt} \in \{0, 1\}, \qquad \forall j \in I, \forall t \in K, \tag{3.8}$$

$$y_t \in \{0, 1\}, \qquad \forall t \in K. \tag{3.9}$$

Sumário

Problema da Atribuição

Entrada

- F: conjunto de funcionários
- T: conjunto de tarefas a serem realizadas pelos funcionários (assumir que $|F| = |T|$).
- $a_{ij} \in \mathbb{R}$: aptidão do funcionário $i \in F$ para realizar a atividade $j \in T$.

Tarefa

Atribuir tarefas aos funcionários de modo que: cada tarefa seja executada por exatamente um funcionário; cada funcionário execute apenas uma tarefa; e a soma das aptidões utilizadas seja maximizada.

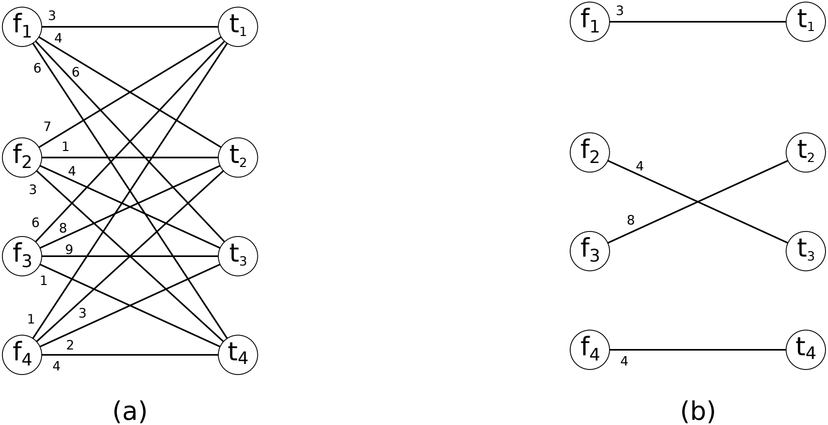


Figura 11: (a) Instância do Problema da Atribuição com 4 funcionários e 4 tarefas. (b) Solução com valor 19.

Formulação

- Variáveis:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o funcionário } i \in F \text{ for atribuído à tarefa } j \in T \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Formulação

$$\max \sum_{i \in F} \sum_{j \in T} a_{ij} x_{ij} \tag{4.1}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j \in T} x_{ij} = 1, \qquad \forall i \in F \tag{4.2}$$

$$\sum_{i \in F} x_{ij} = 1, \qquad \forall j \in T \tag{4.3}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \qquad \forall i \in F, \forall j \in T. \tag{4.4}$$

Generalização do Problema da Atribuição

Entrada

- F: conjunto de funcionários
- T: conjunto de tarefas a serem realizadas pelos funcionários (não necessariamente $|F| = |T|$).
- $b_{ij} \in \mathbb{R}$: aptidão do funcionário $i \in F$ para realizar a atividade $j \in T$.
- $w_{ij} \in \mathbb{R}$: tempo gasto pelo funcionário $i \in F$ para realizar a tarefa $j \in T$.
- $t_i \in \mathbb{R}$: tempo máximo que o funcionário $i \in F$ pode gastar realizando tarefas.

Tarefa

Atribuir tarefas aos funcionários de modo que: cada tarefa seja executada por exatamente um funcionário; cada funcionário não trabalhe mais do que permitido; e a soma das aptidões utilizadas seja maximizada.

Formulação

- Variáveis:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o funcionário } i \in F \text{ for atribuído à tarefa } j \in T \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Formulação

$$\max \sum_{i \in F} \sum_{j \in T} a_{ij} x_{ij} \tag{4.5}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{i \in F} x_{ij} = 1, \qquad \forall j \in T \tag{4.6}$$

$$\sum_{j \in T} w_{ij} x_{ij} \leq t_i, \qquad \forall i \in F \tag{4.7}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \qquad \forall i \in F, \forall j \in T. \tag{4.8}$$

Sumário

Problema do Caixeiro Viajante

Entrada

- $V = \{1, 2, \ldots, n\}$: conjunto de cidades
- $A = \{(i, j) : i \in V, j \in V, i \neq j\}$: conjunto de arcos
- $d_{ij} \in \mathbb{R}$: distância da cidade i para a j (distâncias são assimétricas)

Tarefa

Determinar a ordem de visita às cidades de modo a minimizar a distância total percorrida. O caixeiro deve partir de uma cidade qualquer $i \in V$, visitar todas as outras exatamente uma vez e retornar para a cidade i.

Formulação com fluxo

- Variáveis:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } (i,j) \in A \text{ for utilizado} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$f_{ij} = \text{fluxo no arco } (i,j) \in A$$

$$f_{ij} \geq 0 \text{ e contínua}$$

Formulação com fluxo

$$\min \sum_{(i,j)\in A} d_{ij}x_{ij} \tag{5.1}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j\in V\setminus\{i\}} x_{ij} = 1, \qquad \forall i \in V \tag{5.2}$$

$$\sum_{j\in V\setminus\{i\}} x_{ji} = 1, \qquad \forall i \in V \tag{5.3}$$

$$f_{ij} \leq (n-1)x_{ij}, \qquad \forall (i,j) \in A \tag{5.4}$$

$$\sum_{j\in V\setminus\{i\}} f_{ji} - \sum_{j\in V\setminus\{i\}} f_{ij} = 1, \qquad \forall i \in V \setminus \{1\} \tag{5.5}$$

$$\sum_{j\in V\setminus\{1\}} f_{1j} = n-1 \tag{5.6}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad \forall (i,j) \in A \tag{5.7}$$

$$f_{ij} \geq 0, \qquad \forall (i,j) \in A. \tag{5.8}$$

Formulação sequencial (MTZ)

- Variáveis:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } (i,j) \in A \text{ for utilizado} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$1 \leq u_j \leq n, \forall j \in V: \text{ posição do vértice } j \text{ na solução}$$

Formulação sequencial (MTZ)

$$\min \sum_{(i,j)\in A} d_{ij}x_{ij} \tag{5.9}$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.a.} \quad \sum_{j\in V\setminus\{i\}} x_{ij} &= 1, & \forall i \in V \qquad (5.10)\\
\sum_{j\in V\setminus\{i\}} x_{ji} &= 1, & \forall i \in V \qquad (5.11)\\
u_1 &= 1 & (5.12)\\
u_i - u_j + nx_{ij} &\leq (n-1), & \forall (i,j) \in A, j \neq 1 \qquad (5.13)\\
x_{ij} &\in \{0,1\}, & \forall (i,j) \in A \qquad (5.14)\\
1 \leq u_j &\leq n, & \forall j \in V. \qquad (5.15)
\end{aligned}
$$

Formulação com estágios

- Conjuntos:

$$T = \{1, \ldots, n\} : \text{conjunto de estágios}$$

- Variáveis:

$$y_{ij}^{t} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } (i,j) \in A \text{ for utilizado no estágio } t \in T \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Formulação com estágios

$$\min \sum_{t \in T} \sum_{(i,j) \in A} d_{ij} y_{ij}^t \tag{5.16}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j \in V \setminus \{i\}} \sum_{t \in T} y_{ij}^t = 1, \qquad \forall i \in V \tag{5.17}$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{i\}} \sum_{t \in T} y_{ji}^t = 1, \qquad \forall i \in V \tag{5.18}$$

$$\sum_{(i,j) \in A} y_{ij}^t = 1, \qquad \forall t \in T \tag{5.19}$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{i\}} \sum_{t \in T} t \cdot y_{ij}^t - \sum_{j \in V \setminus \{i\}} \sum_{t \in T} t \cdot y_{ji}^t = 1, \qquad \forall i \in V \setminus \{1\} \tag{5.20}$$

$$y_{ij}^t \in \{0,1\}, \qquad \forall (i,j) \in A, \forall t \in T \tag{5.21}$$

Formulação exponencial

- Variáveis:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } (i,j) \in A \text{ for utilizado} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Formulação exponencial

$$\min \sum_{(i,j)\in A} d_{ij}x_{ij} \tag{5.22}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j\in V\setminus\{i\}} x_{ij} = 1, \qquad \forall i \in V \tag{5.23}$$

$$\sum_{j\in V\setminus\{i\}} x_{ji} = 1, \qquad \forall i \in V \tag{5.24}$$

$$\sum_{(i,j)\in A(S)} x_{ij} \leq |S| - 1, \qquad \forall S \subset V \tag{5.25}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad \forall (i,j) \in A. \tag{5.26}$$

onde $A(S) = \{(i,j) \in A : i \in S, j \in S\}$.

Problema de Roteamento de Veículos

Entrada

- $V = \{0, 1, \ldots, n\}$: conjunto de vértices. O vértice 0 representa o depósito, enquanto que os outros representam clientes.
- $A = \{(i,j) : i \in V, j \in V, i \neq j\}$: conjunto de arcos.
- $c_{ij} \in \mathbb{R}$: custo associado ao arco $(i,j) \in A$.
- $K \in \mathbb{N}$: número de veículos.
- $Q \in \mathbb{N}$: capacidade dos veículos.
- $d_j \in \mathbb{N}$: demanda do cliente $j \in V \setminus \{0\}$.

Tarefa

Determinar até K rotas de modo que: cada cliente seja visitado exatamente uma vez; a demanda total atendida por uma rota não exceda a capacidade Q; e o custo total das rotas seja minimizado.

Problema de Roteamento de Veículos

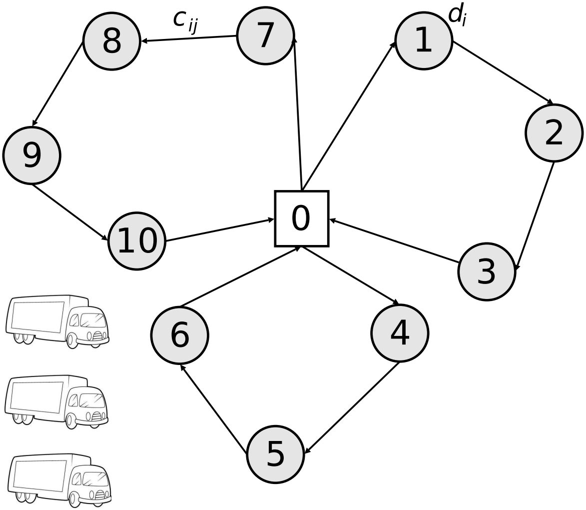


Figura 12: Um exemplo com 10 clientes e 3 veículos.

Formulação com fluxo

- Variáveis:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } (i,j) \in A \text{ for utilizado} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$f_{ij} = \text{fluxo (carga do veículo) no arco } (i,j) \in A$$

$$f_{ij} \geq 0 \text{ e contínua}$$

Formulação com fluxo

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} \tag{5.27}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j\in V\setminus\{i\}} x_{ij} = 1, \qquad \forall i \in V \setminus \{0\} \tag{5.28}$$

$$\sum_{j\in V\setminus\{i\}} x_{ji} = 1, \qquad \forall i \in V \setminus \{0\} \tag{5.29}$$

$$\sum_{j\in V\setminus\{0\}} x_{0j} \leq K, \tag{5.30}$$

$$\sum_{j\in V\setminus\{i\}} f_{ij} - \sum_{j\in V\setminus\{i\}} f_{ji} = d_i, \qquad \forall i \in V \setminus \{0\} \tag{5.31}$$

$$f_{ij} \leq Qx_{ij}, \qquad \forall (i,j) \in A \tag{5.32}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad \forall (i,j) \in A \tag{5.33}$$

$$f_{ij} \geq 0, \qquad \forall (i,j) \in A. \tag{5.34}$$

Formulação exponencial

- Variáveis:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } (i,j) \in A \text{ for utilizado} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Formulação exponencial

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} \tag{5.35}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j\in V\setminus\{i\}} x_{ij} = 1, \qquad \forall i \in V \setminus \{0\} \tag{5.36}$$

$$\sum_{j\in V\setminus\{i\}} x_{ji} = 1, \qquad \forall i \in V \setminus \{0\} \tag{5.37}$$

$$\sum_{j\in V\setminus\{0\}} x_{0j} \leq K, \tag{5.38}$$

$$\sum_{i\in V\setminus S}\sum_{j\in S} x_{ij} \geq r(S), \qquad \forall S \subset V \setminus \{0\} \tag{5.39}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad \forall (i,j) \in A. \tag{5.40}$$

onde $r(S) = \left\lceil \frac{\sum_{j\in S} d_j}{Q} \right\rceil$

Sumário

Problema da Mochila Quadrática

Entrada

- $I = \{1, 2, \ldots, n\}$: conjunto de n itens que podem ser roubados por um ladrão
- $w_j \in \mathbb{R}_{>0}$: peso do item $j \in I$
- $v_{ij} \in \mathbb{R}_{>0}$: valor associado ao par de itens $i, j \in I$. v_{ii} é valor associado ao item $i \in I$.
- $C \in \mathbb{R}_{>0}$: peso máximo suportado pela mochila do ladrão

Tarefa

Selecionar um subconjunto dos itens cujo peso total seja menor ou a igual a C e cujo valor total seja máximo. O valor de um subconjunto é composto pelos valores de seus itens e dos seus pares de itens.

Formulação não linear

- Variáveis:

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{se o item } j \in I \text{ for selecionado} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Formulação não linear

$$\max \sum_{j \in I} v_{jj} x_j + \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in I \\ i < j}} v_{ij} x_i x_j \tag{6.1}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j \in I} w_j x_j \leq C, \tag{6.2}$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \qquad \forall j \in V. \tag{6.3}$$

Formulação linear 1

- Variáveis:

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{se o item } j \in I \text{ estiver na mochila} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se os itens } i, j \in I, i < j, \text{ estiverem na mochila} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Formulação linear 1

$$\max \sum_{\substack{i,j \in I \\ i<j}} v_{ij} y_{ij} + \sum_{j \in V} v_{jj} x_j \qquad (6.4)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j \in I} w_j x_j \leq C, \qquad (6.5)$$

$$y_{ij} \leq x_i, \qquad \forall i,j \in I, i < j, \qquad (6.6)$$

$$y_{ij} \leq x_j, \qquad \forall i,j \in I, i < j, \qquad (6.7)$$

$$y_{ij} + 1 \geq x_i + x_j, \qquad \forall i,j \in I, i < j, \qquad (6.8)$$

$$y_{ij} \in \{0,1\}, \qquad \forall i,j \in I, i < j, \qquad (6.9)$$

$$x_j \in \{0,1\}, \qquad \forall j \in I. \qquad (6.10)$$

Formulação linear 2

- Variáveis

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{se o item } j \in I \text{ estiver presente na solução} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$z_i = \begin{cases} \sum_{j=i+1}^{n} v_{ij} x_j, & \text{se o item } i \in I, i < n, \text{ estiver presente na solução} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Formulação linear 2

$$\max \sum_{i=1}^{n-1} z_i + \sum_{j \in I} v_{jj} x_j \tag{6.11}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j \in I} w_j x_j \leq C, \tag{6.12}$$

$$z_i \leq \Big(\sum_{j=i+1}^{n} v_{ij} \Big) x_i, \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}, \tag{6.13}$$

$$z_i \leq \sum_{j=i+1}^{n} v_{ij} x_j, \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}, \tag{6.14}$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \qquad \forall i \in I, \tag{6.15}$$

$$z_i \in \mathbb{R}, \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}. \tag{6.16}$$

Problema do Caixeiro Viajante suficientemente próximo

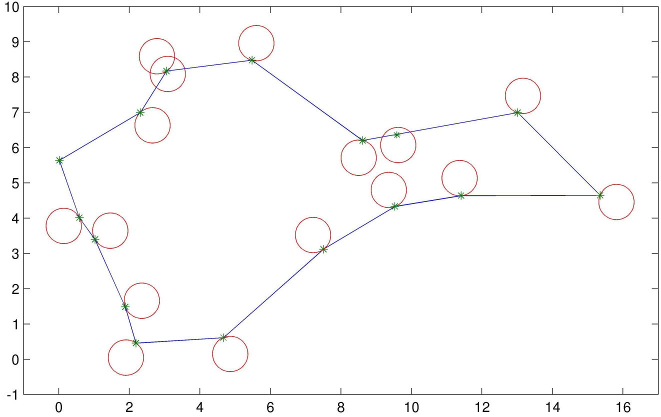
Entrada

- $V = \{0, 1, , \ldots, n\}$: conjunto de pontos. Ponto 0 representa o depósito, enquanto que os outros representam n clientes.
- $A = \{(i, j) : i \in V, j \in V, i \neq j\}$: conjunto de arcos.
- $(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \in \mathbb{R}^2$ e $r_i \in \mathbb{R}$: centro e raio do disco associado ao ponto $i \in V$. Para o depósito, tem-se que $r_0 = 0$.

Tarefa

Determinar uma sequência de pontos visitados de modo que o caixeiro: parta do depósito; passe pelo disco de cada cliente exatamente uma vez; e retorne ao depósito. A sequência escolhida deve minimizar a distância total percorrida.

Problema do Caixeiro Viajante suficientemente próximo



Formulação não linear

- Variáveis:

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } (i,j) \in A \text{ for utilizado} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$x_i, y_i \in \mathbb{R}, i \in V.$$

As variáveis x_i e y_i representam as coordenadas da visita ao disco do ponto i.

Formulação não linear

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(i,j)\in A} e_{ij}\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} & \\
\text{s.a} \quad & (x_i - \bar{x}_i)^2 + (y_i - \bar{y}_i)^2 \leq r_i^2, & \forall i \in V \\
& \sum_{i\in V\setminus\{j\}} e_{ij} = 1, & \forall j \in V \\
& \sum_{i\in V\setminus\{j\}} e_{ji} = 1, & \forall j \in V \\
& \sum_{(i,j)\in A(S)} e_{ij} \leq |S| - 1, & \forall S \subseteq \{1,\ldots,n\} \\
& e_{ij} \in \{0,1\}, & \forall (i,j) \in A \\
& x_i, y_i \text{ livres}, & \forall i \in V.
\end{aligned}
$$

onde $A(S) = \{(i,j) \in A : i \in S, j \in S\}$.