

דו"ח תרגיל MATLAB מס' 2
אלגוריתמים סטטיסטיים לעיבוד אותות 1 – 83321-01
סמסטר אביב תשפ"ג

מגישים:

איתי אהרון גולדברג - [REDACTED]

חן מאיר גולדברג – [REDACTED]

הדו"ח כולל פתרונות עבור ארבעת השאלות, גרפים מתאימים וכן את קטעי הקוד שכתבנו.

סעיף א – חישוב אנליטי של מסנן קלמן

עבור רעש לבן נתון $w[n]$ תהליך AR הבא:

$$x[n] = 0.8x[n-1] + w[n]$$

כמו כן נתון כי השונות של $x[n]$ שווה ל-2. נחשב את שונות הרעש הלבן ע"פ הנוסחה:

$$\sigma_w^2 = R_{xx}(0) + \sum_{k=1}^p a_k R_{xx}(k)$$

נציב ונפשט את הביטוי:

$$\sigma_w^2 = R_{xx}(0) + (-0.8)R_{xx}(1)$$

$R_{xx}(0)$ ידוע ושווה לשונות. ניתן למצוא את $R_{xx}(1)$ ע"פ הנוסחה:

$$R_{xx}(l) = - \sum_{k=1}^p a_k R_{xx}(l-k)$$

אצלנו נקבל:

$$R_{xx}(1) = -(-0.8)R_{xx}(0) = 1.6$$

לכן:

$$\sigma_w^2 = 2 + (-0.8) \cdot 1.6 = 0.72$$

נתונות מדידות רועשות של התהליך: $y[n] = x[n] + v[n]$ כאשר $v[n]$ רעש לבן גאوسی בעל תוחלת 0 ושונות 2. נרשום את משוואות קלמן לשערוך $x[n]$. נחלץ מתוך המשוואות את המשתנים ונרשום אותם במפורש כאשר נקבע $d_n = x(n)$.

משוואות מצב:

$$d_n = \phi_n d_{n-1} + w_n$$

לכן: $\phi_n = 0.8, w_n = w[n], Q_n = 0.72$

משוואת המדידה:

$$y_n = H_n d_n + v_n$$

לכן: $H_n = 1, v_n = v[n], R_n = 2$

משוואות קידום:

$$\hat{x}_{n|n-1} = 0.8 \hat{x}_{n-1|n-1}$$

$$P_{n|n-1} = 0.64 P_{n-1|n-1} + 0.72$$

משוואות עדכון:

$$\hat{x}_{n|n} = \hat{x}_{n|n-1} + K_n (y_n - \hat{x}_{n|n-1})$$

$$P_{n|n} = (1 - K_n) P_{n|n-1}$$

$$K_n = \frac{P_{n|n-1}}{P_{n|n-1} + 2}$$

סעיף ב - ייצור האותות (מטלב)

בסעיף זה ייצרנו עבור $x[n]$ פונקציית מדגם באורך 1024 דגימות וממנה יצרנו מדידות רועשות עבור $y[n]$ באותו אורך. להלן קטע הקוד והשרטוט עבור האות המורעש והאות הנקי:

```
N = 1024; %The sample rate

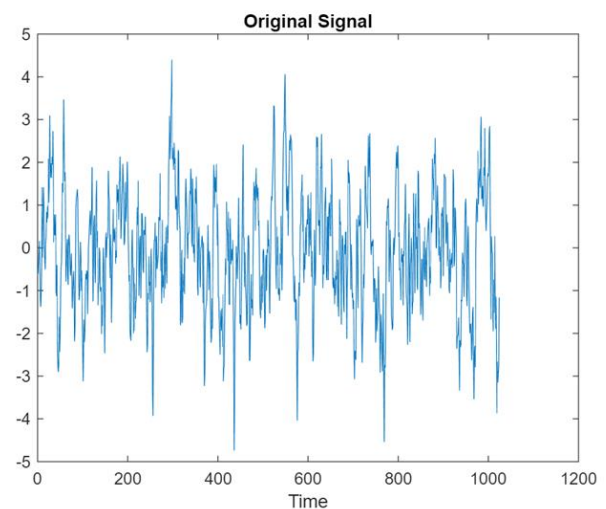
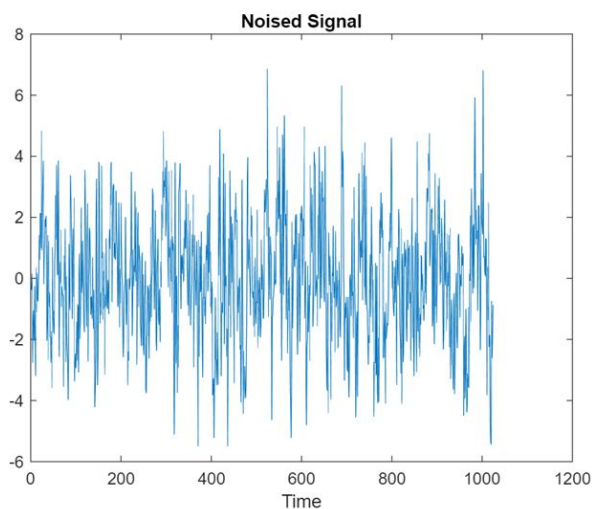
% The value of the variance according to the analytical calculation
sigma_w = sqrt(0.72);
sigma_v = sqrt(2);

% Generate the signals
w = sigma_w*randn(1,2*N);
x_2048 = filter(1,[1,-0.8],w);
x = x_2048(N+1:2*N);

v = sigma_v*randn(1,N);
y = x + v;

% display the signals
plot(x);
title('Original Signal');

xlabel('Time');
plot(y);
title('Noised Signal');
xlabel('Time');
```



סעיף ג - מימוש מסנן קלמן

בסעיף זה מימשנו את מסנן קלמן כפי שפיתחנו בסעיף א'.

להלן קטע הקוד של פונקציית מסנן קלמן:

```
function [x_e, p_e] = kalman_filter(y, N)

p_gl = zeros(1,N); % P_n|n-1
p_e = zeros(1,N); % P_n|n
p_e(1) = 2; % given initial conditions
x_gl = zeros(1,N); % X_n|n-1
x_e = zeros(1,N); % X_n|n
k = zeros(1,N); % K_n

phi = 0.8; % given
Q = 0.72; % analytical calculation
R = 2; % given

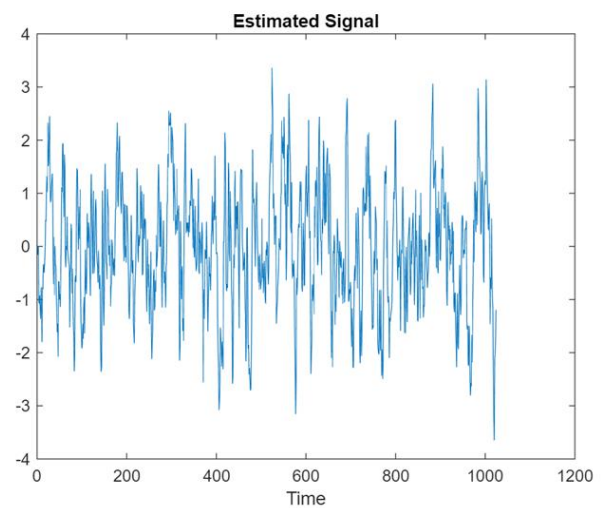
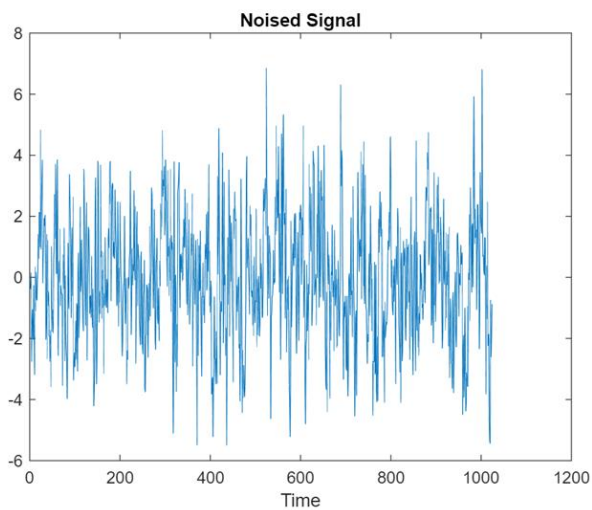
for n = 2:N
    p_gl(n) = phi^2 * p_e(n-1) + Q;
    k(n) = p_gl(n) / (p_gl(n) + R);
    p_e(n) = (1 - k(n)) * p_gl(n);
    x_gl(n) = phi * x_e(n-1);
    x_e(n) = x_gl(n) + k(n) * (y(n) - x_gl(n));
end

end
```

להלן קטע הקוד המפעיל את הפונקציה של מסנן קלמן ולאחריה השוואה בין האות המורעש לאות המשוער:

```
[x_e, p_e] = kalman_filter(y, N);

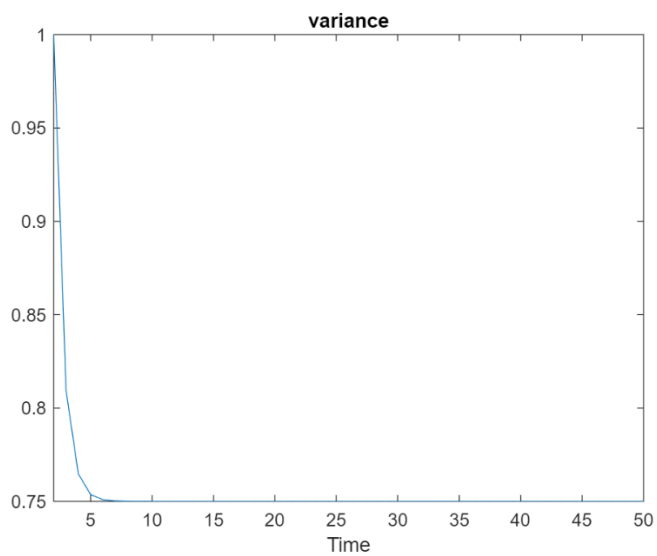
plot(x_e);
title('Estimated Signal');
xlabel('Time(s)');
```



אפשר לראות כיצד שערך האות התבצע בצורה טובה עקב המעבר במסנן קלמן.

להלן קטע הקוד לחישוב השונות לאורך ציר הזמן בתחום [2:50] והגרף שהתקבל:

```
plot(p_e);
title('variance');
xlabel('Time(s)');
xlim([2, 50]);
```



אפשר לראות כיצד השונות התייצבה על ערך קבוע של 0.75 לאחר כ-7 שניות.

סעיף ד – השוואה למסנן וינר הסיבתי

נחשב את מסנן וינר הסיבתי מתוך הנוסחה:

$$H(z) = \frac{1}{\sigma_0^2 \cdot H_{ca}(z)} \cdot \left[\frac{S_{xy}(z)}{H_{ca}^*\left(\frac{1}{z^*}\right)} \right]_+$$

נחשב ונציב את הנעלמים החסרים.

$$R_{xy}(l) = E[x(n)y(n-l)] = E[x(n)x(n-l)] + E[x(n)v(n-l)] = E[x(n)x(n-l)] \\ = R_{xx}(l)$$

$$\Rightarrow S_{xy}(z) = S_{xx}(z)$$

$S_{xx}(z)$ הינו תהליך AR ומשערך הספקטרום שלו נתון ע"י:

$$S_{xx}(z) = \frac{\sigma_w^2}{(1 - 0.8z^{-1})(1 - 0.8z)} \quad \text{לכן נקבל:}$$

$$S_{xy}(z) = \frac{0.72}{(1 - 0.8z^{-1})(1 - 0.8z)}$$

למציאת H_{ca}^* נשתמש במשפט P-W

$$S_{yy}(z) = \sigma_0^2 \cdot H_{ca}(z) \cdot H_{ca}^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$$

נמצא את $S_{yy}(z)$

$$R_{yy}(l) = [y(n)y(n-l)] \\ = E[x(n)x(n-l)] + E[x(n)v(n-l)] + E[v(n)x(n-l)] \\ + E[v(n)v(n-l)] \\ = E[x(n)x(n-l)] + E[v(n)v(n-l)] = R_{xx}(l) + R_{vv}(l)$$

לכן מתקיים:

$$S_{yy}(z) = S_{xx}(z) + S_{vv}(z)$$

מאחר שנתון $S_{vv}(z) = \sigma_v^2 = 2$ סה"כ נקבל:

$$\Rightarrow S_{yy}(z) = \frac{0.72}{(1 - 0.8z^{-1})(1 - 0.8z)} + 2$$

נסדר את הביטוי מחדש כך שנוכל לחלץ את הנדרש

$$S_{yy}(z) = \frac{0.72 + 2(1 - 0.8z^{-1})(1 - 0.8z)}{(1 - 0.8z^{-1})(1 - 0.8z)} = \frac{2.72 - 1.6z^{-1} - 1.6z + 1.28}{(1 - 0.8z^{-1})(1 - 0.8z)} \\ = 3.2 \cdot \frac{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.5z)}{(1 - 0.8z^{-1})(1 - 0.8z)}$$

וכך נוכל לחלץ את הערכים

$$\sigma_0^2 = 3.2, \quad H_{ca}(z) = \frac{(1 - 0.5z^{-1})}{(1 - 0.8z^{-1})}, \quad H_{ca}^*\left(\frac{1}{z^*}\right) = \frac{(1 - 0.5z)}{(1 - 0.8z)}$$

מצאנו את המשתנים החסרים וכעת נותר להציבם בלבד. נחשב תחילה את החלק הסיבתי של המסן

$$\begin{aligned} \left[\frac{S_{xy}(z)}{H_{ca}^*\left(\frac{1}{z^*}\right)} \right]_+ &= \left[\frac{\frac{0.72}{(1 - 0.8z^{-1})(1 - 0.8z)}}{\frac{(1 - 0.5z)}{(1 - 0.8z)}} \right]_+ = \left[\frac{0.72}{(1 - 0.8z^{-1})(1 - 0.5z)} \right]_+ \\ &= \left[\frac{1.2}{(1 - 0.8z^{-1})} - \frac{1.2}{(1 - 2z^{-1})} \right]_+ = \frac{1.2}{(1 - 0.8z^{-1})} \end{aligned}$$

נציב את החלק הסיבתי ונפשט את הביטוי

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{\sigma_0^2 \cdot H_{ca}(z)} \cdot \left[\frac{S_{xy}(z)}{H_{ca}^*\left(\frac{1}{z^*}\right)} \right]_+ = \frac{1}{3.2 \frac{(1 - 0.5z^{-1})}{(1 - 0.8z^{-1})}} \cdot \frac{1.2}{(1 - 0.8z^{-1})} \\ &= \frac{0.3125(1 - 0.8z^{-1})}{(1 - 0.5z^{-1})} \cdot \frac{1.2}{(1 - 0.8z^{-1})} = \frac{0.375}{(1 - 0.5 \cdot z^{-1})} \end{aligned}$$

נחשב את שגיאת המסן שמצאנו ע"י הנוסחה

$$E\{e_0^2(n)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint [S_{xx}(z) - H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \cdot S_{xy}(z)] z^{-1} dz$$

כל הפרמטרים נמצאו כבר בשלם קודם של החישוב לכן נותר להציבם בלבד

$$\begin{aligned} E\{e_0^2(n)\} &= \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{0.72}{(1 - 0.8 \cdot z^{-1})(1 - 0.8 \cdot z)} \left(1 - \frac{0.375}{(1 - 0.5 \cdot z^{-1})}\right) z^{-1} dz \\ E\{e_0^2(n)\} &= \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{-0.5625}{(z - 0.5)(z - 1.25)} dz \end{aligned}$$

ע"י שימוש במשפט השארית נקבל שערכו של האינטגרל הוא

$$E\{e_0^2(n)\} = \frac{-0.5625}{0.5 - 1.25} = 0.75$$

עבור מסן קלמן קיבלנו שאחרי מספר מועט של איטרציות, השונות מתייצבת על הערך 0.75, כלומר קיבלנו את אותו הערך עבור חישוב אנליטי של מסן אחד ועבור חישוב נומרי של המסן השני.