עבודה 4- תכנון אלגוריתמים

1)<u>תיאור האלגוריתם:</u> נשתמש בשיטת הרדוקציה, לבעיית מציאת זרימה בגרף מכוון:

- <u>ממיר הקלט:</u>
  עבור הגרף G הנתון, נבנה רשת זרימה N=<G*=(V*,E*),c ,u ,v> . תחילה, נהפוך את גרף G לגרף מכוון, כלומר כל צלע תגדיר צלע בשני הכיוונים, כעת עבור G המכוון, נגדיר V* כך, $\forall w \in V/\{v,u\}, w_1, w_2 \in V^*$ ^$v, u \in V^*$. נגדיר E* בצורה הבאה: עבור הגרף <u>המכוון</u> G נגדיר:
  $\forall e = (s,t), e \in E$ נגדיר בגרף G^* צלע (s_2, t_1). כאשר עבור צלע מהצורה (u,t), נגדיר (u, t_1) ואם מהצורה (t,u) נגדיר (t_2,u) , כנ"ל עבור v. עבור כל צלע e^*מהצורה הזאת (כלומר $s\neq t$ ב-V) $c(e^*)=\infty$. בנוסף, נגדיר עבור כל קוד' s ב-$V/\{u,v\}$ שמגדיר <u>2</u> קוד' ב-G^*-(s_1, s_2) קשת אשר מקיימת $c(s_1, s_2)$=1. במילים, כל קוד' מגדיר 2 קוד' בגרף G^* כאשר כל הצלעות הנכנסות אל הקוד' נכנסות אל $s1$ והצלעות היוצאות יוצאות מ$s2$ והצלע היחידה שיוצאת מ$s1$ או נכנסת ל $s2$ זה הצלע המכוונת ביניהם.
- נריץ על רשת הזרימה N את אלגוריתם דיניץ כקופסא שחורה ונקבל עבור גרף G^* זרימה מקס'.
- <u>ממיר הפלט:</u>
  נמצא את החתך המינ' עבורו $|f|=c(S,T)$.(כלומר, החתך בעל הקיבול המינ' שמגדיר את הזרימה).(נוכל לעשות זאת לפי משפט *(max-flow-min-cut)* נוכיח בהמשך.
  עבור כל (s,t)- כאשר $s\in S$, $t\in T$, (חוצות חתך): נוסיף את כל קוד' s המקיים זאת (אם s_1 / s_2 נתייחס פשוט לקוד' s כפי שהוא מופיע ב-G המקורי) לקב' S^*
  לבסוף, נחזיר את קב' הקוד' S^* כמנתק (u,v) ב- G בגודל מינימום.
  *סימון- S^* -קב' הקוד' ב-G^*, כאשר $s\in S$, וגם מתקיים עבור חתך (S,T), כי קיימת צלע(s, t) כך ש $s\in S$, $t\in T$
  *סימון: S' - קב' קוד (u, v) מנתק ב-G

<u>הוכחת נכונות האלגוריתם:</u>

<u>משפט:</u> בהינתן גרף G, האלגוריתם המתואר יחזיר קב' S (u, v) מנתקת בגודל מינ'

<u>ט.ע 1:</u> עבור הגרף המתאים G^* כמתואר, אם ננתק את קב' קוד' S^* מהגרף G u ,v יהיו ברכיבי קשירות שונים ב-G.

<u>ט.ע 2</u>: אם קיימת בגרף G^* זרימה מקס' $|f|$, נוכל למצוא את החתך המינ' (S,T) ב- G^*, והוא חתך אשר מקיים $c(S,T)=|f|$.

<u>ט.ע:3</u> קיבול בחתך מינימלי (S,T) בגודל $c(S,T)$ ב-G^* = $|S^*|$ המתאים לחתך הרלוונטי.

<u>ט.ע:4</u>$|S^*|\leq|S'|$, לכל S' ,כאשר S^* קב' המייצגת את החתך המינימלי, ו-S' קב' (u, v) מנתקת ב-G.

<u>אבחנה 1:</u> ממיר הפלט יוצר לנו גרף G^* מכוון, עם זרימה תחילית 0 וקיבולות חוקיות, לכן נוכל להריץ את אלגוריתם דיניץ בצורה תקינה על G^*, ולכן יש לנו זרימה מקס' וחוקית בגודל $|f|$ בגרף.

<u>אבחנה 2:</u> בחתך מינימלי(S,T) , קבוצת צלעות חוצות החתך יכילו אך ורק צלעות מהצורה(s_1, s_2), $s_1\epsilon S, s_2 \in T$. <u>הסבר</u>: כל צלע אחרת, לפי הגדרת קיבול בצלעות G^*, קיבולה אינסוף. חתך שתעבור בו זרימה חוקית ,הזרימה תהיה לכל היותר $|V|$-2 (כמס' הקוד' ב-G שאינם v, u), שכן כדי לעבור בקודקוד מסוים ניכנס דרך $s1$, ונצא דרך $s2$. ולכן זרימה לא תהיה אינסוף. לכן חתך מינימלי שלפי משפט, הינו גודל זרימה מקס' לא יכול להיות אינסוף, לכן בוודאות צלעות חוצות חתך יהיו חייבות להיות מהצורה הנ"ל שקיבולן סופי ושווה ל-1.

אבחנה 3: אם קיימת צלע בגרף G המקורי (u, v) נחזיר *null*, שכן אף קוד' שאינו u, v שננתק לא יחזיר פתרון תקין, כי בכל מצב הם יהיו מחוברים לכן נניח שאין צלע ביניהם.

אבחנה 4: כל צלע חוצת חתך בחתך מינימלי, לא תוכל להכיל את u ,v. הסבר: מפני שראינו באבחנה 2 שהזרימה היא סופית, כל צלע שיוצאת מu הנה בקיבול אינסוף וכך גם עבור צלע שנכנסת אל v. בנוסף, אנו יודעים כי לפי הגדרת (u,v) מנתק, גם S' אינו מכיל את u, v.

הוכחת המשפט:

יהיה גרף G וקוד' u,v כמתואר, נפעיל את ממיר הקלט ונקבל גרף G^* כמתואר, לפי אבחנה 1 נפעיל אלגוריתם דיניץ ונקבל זרימה חוקית בגודל $|f|$, ולפי אבחנה 2 גודל הזרימה הינו סופי. כעת , לפי ט.ע 2 נוכל למצוא את החתך המינ' (S,T) ב-G^*. לפי טענת עזר 3, והגדרת חתך מינ', קב' בגודל מינ' S^* שקולה לקיבול חתך מינ' ב-G^*, לכן , לפי הגדרת S^*, על החתך המינ' (S,T) נמצאים בה קוד' חוצי החתך מ-T, וגודל הקב' מינימלי. לפי ט.ע 1, קבוצה של קוד' S^* שמוגדרת לפי קוד' ב-G, מגדירה קב' מנתקת S' כלשהי ב-G. ממינימליות S^*, לפי ט.ע 4, אז לכל S' $|S^*|\le|S'|$,והיא מנתקת ב-G. בתוספת לאבחנה 4, נראה כי S^* חוקית ומינימלית ,כלומר S^* לפי הגדרתה, הינה קב' (u, v)מנתקת מינימלית ב-G כנדרש.

הוכחת ט.ע 2: נתון כי קיימת ב-G^* זרימה מקס' בגודל $|f|$, אזי, ממשפט *max-flow-min-cut* נובע כי לא קיים מסלול ברשת השיורית N_f מ-u ל-v. (בנוסף, לפי המשפט ידוע כי קיים חתך מינימלי (S,T) אשר $(c(S,T)=|f|)$ נגדיר את S להיות קב' הקוד' הנגישים מ-u ב-N_f ונגדיר את $T=V/S$ אז $u \in S$ וכיוון שאין מסלול ב-N_f מ-u ל-v אז $v \in T$. לכן (S,T)חתך חוקי. לכל קשת (s,t) בחתך כך ש $s \in S$ ו- $t \in T$ מתקיים $c_f(s,t) = 0$ כי אחרת t היה נגיש מ-S. לכן:

$$0 = c_f(s,t) = c(s,t) - f(s,t)$$

ולכן, מכך, ומלמה 3 שלמדנו בכיתה (לכל חתך וזרימה חוקית $|f|=f(S,T)$) נסיק:

$|f|=f(S,T)=\sum_{\substack{s\in S\\ t\in T}} f(s,t) = \sum_{\substack{s\in S\\ t\in T}} c(s,t) = c(S,T)$ כנדרש.

הוכחת ט.ע 3: יהיה חתך כלשהו ב-G^* (S,T) בעל קיבולת $c(S,T)$, מט.ע 2, יהי חתך מינימלי (S,T) ונוכל להסיק כי $|f|=c(S,T)$. מאבחנה 2, נסיק כי כל צלע חוצת חתך היא מהצורה (w_1, w_2), w_1 ב-S ו-w_2 ב-T. כלומר, $\sum_{\substack{w1\in S\\ w2\in T}} c(w_1, w_2)$. מהגדרת G^*, נובע כי קיבול כל צלע כזו היא 1. לכן,

$\sum_{\substack{w1\in S\\ w2\in T\\ (w1,w2)\in E*}} 1$. כלומר, אם עבור כל צלע כזו, אנו סוכמים 1, נוכל להקביל זאת לסכימה של מס' הצלעות שמקיימות זאת, וזה שקול למס' הקוד' w_1 שיוצא מהם צלע חוצת חתך, מפני שלפי הגדרת G^*, ישנה רק צלע אחת בקיבולת אחת שיוצאת מ-w_1, אל w_2 . לפי הגדרה זו, אנו מכניסים כל קוד' w_1 אל S^* לכן $c(S,T)=|S^*|$ כנדרש.

הוכחת ט.ע 1: עבור גרף G^* וקב' הקוד' S^* ,כקב' הקוד' בין צלעות חוצי החתך (המינימלית),נניח בשלילה שבגרף המקורי G הקוד' u, v נמצאים ברכיב קשירות אחד לאחר הסרת קב' S^*. לכן, קיים מסלול ב-G בין u ל-v. נסמנו $P=(u,\dots, w,\dots,v)$. לפי אבחנה 3 , בהכרח יש לפחות קוד' w במסלול שאינו u ,v. נבחין כי אם נסיר את כל צלעות חוצות החתך מהגרף G^*, אין מסלול בגרף זה בין u ל-v לפי הגדרת חתך. מסלול שקיים לאחר הסרת קוד' S^* ב-G, הוא אינו מכיל קוד' שמגדירים צלעות חוצות חתך ב-G^*. נבחין כי מכיוון שיש מסלול בין u ל-v ב-G אז בהכרח יש מסלול כזה גם ב-G^*, מהגדרת

הצלעות המכוונות ב-G^*. לכן, יש מסלול חוצה כל חתך ב-G^* (כי מתחיל ב-u ומסתיים ב-v). כלומר, במסלול ב-G^* שמוגדר לפי P, קיימת צלע חוצת חתך ($w1,w2$) שאינה שייכת ל-S^* בסתירה.

<u>הוכחת ט.ע 4:</u> תהי קב' S' כלשהי. אנו יודעים לפי טענה 3+ 2כי $|f\ max|=min(S,T)=c|S^*|$, לכן נוכל להוכיח כי $|S'| \le |fmax|$. תחילה, נראה שב-G^*, מפני שכל מעבר בקוד' מסויים מחייב מעבר בצלע מהצורה ($w1, w2$) שקיבולה 1, לכן בכל מסלול נוכל להזרים 1 בלבד כאשר הזרימה בשלמים, ולכן כל צלע כזאת תשומש פעם אחת בלבד, בדומה לצלע הנכנסת אליה ($z2,w1$), אם נעבור בה היא תופיע עבור מסלול אחד בלבד. כך גם עבור צלע שתצא מ-v ותיכנס אל u, כלומר כל צלע תשומש לכל היותר פעם אחת במסלול, לכן אם גם גודל הזרימה בכל מסלול הוא לכל היותר 1, נקבל כי עבור קב' המסלולים המקסימלית P, $|P|=|fmax|$. לכן הזרימה המקס' היא לכל היותר כמס' המסלולים הזרים בצלעות ב-G^*(נסמנה ב-R). לפי הגדרת G^*, כל מסלול ב-G, יהיה מוגדר גם ב-G^*, ננסה למצוא את מס' המסלולים הזרים בקוד' ב-G. נבחין כי אם המסלול $p=(u,a,b,\ldots,v)$ ב-G זר בקודקודים אז המסלול המוגדר $p^*=(u,a1,a2,b1,b2,\ldots v)$ בגרף G^* יהיה זר בצלעות, שכן לפי מה שראינו כל מסלול שמוגדר ב-G למסלול אחר בקוד' בוודאי יהיה זר בצלעות ב-G^*. לכן, קב' המסלולים ב-G הזרים בקוד' היא לכל היותר קב' המסלולים בזרים בצלעות ב-G^*. עבור קבוצת מסלולים זרים בקוד' ב- G-נסמנה K, נניח בשלילה כי $|S'|<|K|$. לכן, לאחר הסרת הקבוצה S' קיים לנו לפחות מסלול אחד מ-u ל-v בסתירה לכך ש-S' מנתק (u, v). לכן $|S'| \le |K|$. לכן בסה"כ נקבל $|S'| \le |K| \le |R| \le |fmax|=|S^*|$ כנדרש.

<u>ניתוח זמן ריצה:</u> אתחול ובניית הגרף G^* מכפילה במס' קבוע את מס' הצלעות, לכן $O(|V|+|E|)$.

הרצת אלגוריתם דיניץ, כנלמד בכיתה $O(|V|^2|E|)$, כעת, ע"מ למצוא את החתך המינימלי , נוכל להריץ את אלגוריתם BFS למציאת רכיבי הקשירות, וכך נראה איזה קוד' נגיש ואיזה לא וכך נבחר את החתך. זמן ריצה של אלגוריתם זה: $O(|V|+|E|)$. מציאת הקשתות חוצות החתך, שקולה למעבר על כלל הצלעות בגרף ובדיקה מי מהם שייך ל-S ומי ב-T וכך נדע לתרגם איזה קוד' נוסיף ל-S^*, $O(|E|)$.

סה"כ זמן ריצה כזמן אלגו' דיניץ: $O(|V|^2|E|)$.

2)א)הטענה נכונה. נוכיח את הטענה.

נוכיח תחילה כי האלגוריתם חוקי.

תחילה, נביט בכל צעד באלגוריתם, בכל שלב נמצא זרימה חוסמת חוקית g ב-N_f.

למה 1 בהוכחת פורד פולקרסון שנלמד בכיתה- עבור רשת זרימה N ו-f זרימה חוקית בה, ועבור N_f הרשת השיורית המתאימה, ותהי g זרימה חוקית ב- N_f(בפרט g זרימה חוסמת גם היא חוקית).

זרימה f*=g+f שמוגדרת באופן הבא: f*(u,v)=g(u,v)+f(u,v) לכל u.v ב-V. אזי גם f* היא זרימה חוקית ב-N ו- |f*|=|f|+|g|. לכן, גם בגרף שלנו g זרימה חוקית ב-N_f אזי, זרימה חוקית ב-N תהיה f=f+g, בכל איטרציה.

ע"פ תיאור האלגוריתם בכל שלב מחשבים זרימה g חוקית ברשת השיורית N_f ומוסיפים אותה לזרימה הקיימת לפי הלמה שציינו, לכן בכל שלב הזרימה הינה חוקית. כיוון שכל הקיבולים ב-N_f של קשתות מ- G_f הם חיוביים ממש לפי הגדרתה, אז בהכרח קיבול הזרימה החוסמת $c_f(g) > 0$, ולכן, $|f_g| > 0$, ולכן בנוסף לפי הלמה , הזרימה החדשה בכל איטרציה f+g>f כלומר, גודלה עולה בכל איטרציה עד לעצירתה.

נוכיח כי האלגוריתם עוצר:

מפני שתנאי העצירה הינו שאין יותר מסלולים מ-*s* ל-*t* ברשת השיורית N_f, נצטרך להוכיח כי האלגוריתם אכן עוצר, כלומר, בשלב כלשהו לא יהיה לנו יותר זרימה חוסמת ב-N_f.

<u>טענה:</u> ברשת השיורית N_f אין מסלול בין *s* ל-*t* אמ"מ אין זרימה חוסמת בין *s* ל-*t* ב-N_f.

→ נניח כי אין זרימה חוסמת ב-N_f מ-*s* ל-*t*, נניח בשלילה כי יש מסלול אחד(יותר מזה לא רלוונטי, המקרה שיש יותר מסלולים גם הם תואמים להגדרת זרימה חוסמת) ב-N_f מ-*s* ל-*t*, אזי נוכל להזרים במסלול זה ולהרוות אותו לפי צוואר הבקבוק שלו, בסתירה לכך שאין זרימה חוסמת.

← נניח כי אין מסלול בין *s* ל-*t* ב-N_f אזי, אין לנו דרך להזרים ביניהם, ובפרט למצוא זרימה חוסמת.

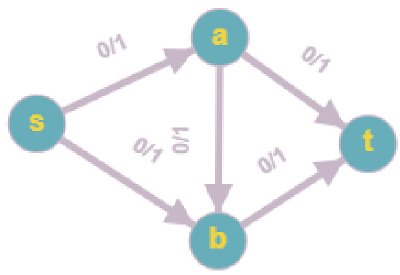
מהטענה שהוכחנו, נראה שהאלגוריתם יעצור כאשר לא נמצא יותר זרימה חוסמת *g* ב-N_f. נבחין כי האלגוריתם אכן יעצור, מפני שנתון כי הזרימה היא בשלמים, ומלמה 1 שראינו כי הזרימה תמיד עולה, לכן בכל איטרציה הזרימה תעלה לפחות ב-1 כלומר, נבצע לכל היותר $|f\ max|$ איטרציות. לאחר לכל היותר מס' זה של איטרציות, האלגוריתם בוודאות יעצור. ומהטענה שהוכחנו, לא קיים מסלול ב-N_f מ-*s* ל-*t*.

לכן, ממשפט *max-flow-min-cut* אם לא קיים מסלול ב-N_f מ-*s* ל-*t*, *f* היא זרימת מקסימום, כנדרש.

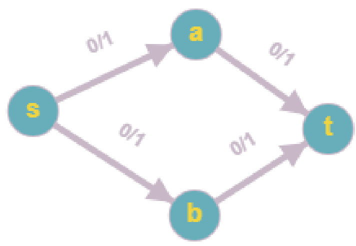
ב)הטענה נכונה. נוכיח ע"י מציאת קלט *N* כזה, שעבור מסויימת של אלגוריתם *A* על *N* , יתבצע מספר איטרציות גדול ממש מכל ריצה של דיניץ.

נבחר תחילה שלכל צלע *(u,v)*ב-*G*, *c(u,v)=1*. כעת, נבנה את *G* בצורה הבאה, לכל קודקוד $v_i \epsilon V/\{s,t\}$, נחבר אותו בגרף בצורה הבאה: ניצור לו צלעות (s, v_i),(v_i, t), (v_{i-1}, v_i). כלומר, כל קודקוד שנוסיף, נחברו ל-*s* ל-*t* ונשלח צלע מהקוד' הקודם שהתווסף אליו. נוכיח ע"י דוגמה עבור 4 קוד':

במצב התחלתי נקבל את הגרף הבא:

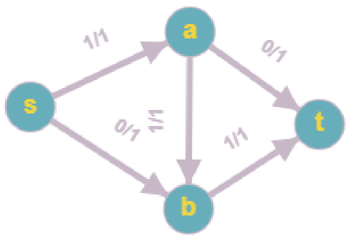


כעת, עבור אלגוריתם דיניץ, לאחר ריצה יחידה, נקבל את רשת השכבות Lf הבאה,



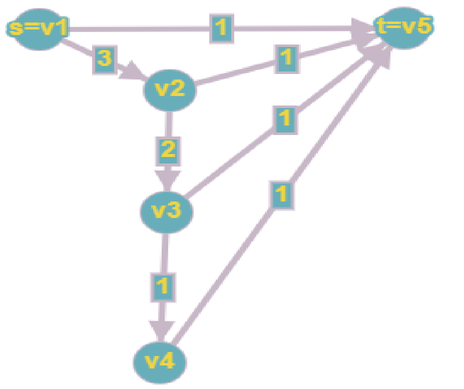
כעת, נבחין כי כשנמצא זרימה חוסמת כאן, ישירות נקבל את הזרימה המקס' 2 ונסיים, בכל מצב של ריצת האלגוריתם.(כלומר אם נרוץ מt לכיוון a או לb זה לא ישנה) כלומר, נצטרך איטרציה בודדת למציאת הזרימה המקס'.

עבור אלגוריתם A נקבל את הרשת השיורית Nf השקולה בצלעות לG נריץ את הזרימה החוסמת הבאה:



נבחין כי כאן הזרימה היא אינה מקסימלית, קיבלנו זרימה חוסמת בגודל 1 לכן, נצטרך לבצע איטרציה נוספת ע"מ למצוא את הזרימה החוסמת המקסימלית בגודל 2(שאנו יודעים שקיימת בוודאות מדיניץ) לכן מצאנו דוגמה לריצה על אלגוריתם A עבור N ,בה מס' האיטרציות גדול ממש ממס' האיטרציות בדיניץ.

ג) הטענה נכונה. נבנה גרף לכל מס' קוד' n , $n>1$ את הגרף הבא: יהי גרף $G=(V,E)$ עבור קב' הקוד V כך ש $n=|V|$, $s=v_1,\dots,v_{i,\dots},v_n=t$, $1\le i\le n$. נבנה את קב' E: לכל v_i , $1\le i\le n-2$, נגדיר צלעות בצורה הבאה: $(v_i,v_{i+1})\in E$, כאשר $c(v_i,v_{i+1})=n-i-1$ בנוסף נגדיר עבור כל v_i , $1\le i\le n-1$, צלע $(v_i,v_n=t)$, כאשר $c(v_i,v_n=t)=1$.(מכאן ינבע שקיימת גם צלע (s,t) בקיבולת 1. נצייר דוגמה עבור המקרה של $n=5$:



נוכיח את הטענה לכל גודל $n>1$, ריצת דיניץ תבצע $n-1$ איטרציות. נוכיח באינדוקציה:

בסיס: עבור $n=2$, הקוד' היחידם s,t, לכן הצלע היחידה לפי הגדרת הגרף G היא (s,t) בקיבול 1, מבצעים איטרציה יחידה של האלגוריתם ונמצא את הזרימה כנדרש ב$n-1=1$ איטרציות.

נניח שעבור גרף עם $n-1$ קוד' , ריצה של אלגו' דיניץ על בניית הגרף תבצע $n-2$ איטרציות, נוכיח את הטענה עבור n קוד.

יהיה גרף G כמתואר, בעל n קוד' כלומר, ישנם $|v-2|$ קוד' שאינם s,t. מפני שישנה צלע ישירה s,t - כאשר נפעיל את אלגוריתם דיניץ בפעם ה-1 , נקבל ברשת השכבות L_f את הגרף שמכיל את s,t והצלע המכוונת ביניהם עם קיבולת 1 וכל שאר הצלעות שיוצאות מ-s (כלומר במקרה שלנו אל $v2$ בלבד), מכיוון ששאר הקוד' יהיו ברמה גדולה מ- t ,(t ברמה 1) שאר הקוד' אינם יופיעו. והצלע $(v2,t)$ אינה תופיע כי היא צלע באותה שכבה, לכן הזרימה שנמצא תהיה בגודל 1 מ-s ל-t. כעת, לאחר שנוסיף את הזרימה, הצלע (s, t) הפכה לרוויה, ולכן תיעלם ב-N_f(הרשת השיורית לאחר איטרציה 1) ולכן גם מ- L_f.

<u>אבחנה:</u> מהגדרת הגרף, $c(s,v2)$ שווה לסכום הקיבולות היוצאות מ-$v2$. בנוסף, כעת הצלע היחידה שקיימת שניתן להזרים בה מ-s (כלומר, שתבנה מסלול זרימה חוקי) היא $(s,v2)$, מכיוון שהקיבולת בה מספיק גדולה עבור כל זרימה אפשרית שתיכנס ל-t, לאחר שמצאנו את הזרימה החוסמת עבור (s, t), והקוד' היחיד שיוצא כעת מ- s הוא -$v2$, וקיבולתו מספיקה לכל זרימה שנחפש, בדיקה של זרימה חוסמת מ-s לאחר האיטרציה ה-1 שקולה לבדיקה של זרימה חוסמת מ-$v2$.

מהאבחנה שקיבלנו, כעת נוכל להסיר את קוד' s מהגרף, שכן הוא אינו רלוונטי להמשך הבדיקה, ונגדיר $v2=s'$(כלומר, קוד' מקור חדש). כעת נבחין, מס' הקוד הינו $n-1$, ושאר הצלעות מקיימות את אותם תנאים עבור גרף בגודל זה, כלומר, לכל v_i , $2 \le i \le n-1$, $(v_i, v_{i+1}) \in E$, כאשר $c(v_i, v_{i+1}) = n-i-1$ בנוסף, v_i , $2 \le i \le n-1$, צלע $(v_i, v_n = t)$, כאשר $c(v_i, v_n = t)$=1. מכיוון שפרט לצלע שחלה ב-s לא חל אף שינוי בקיבול/ קיומן של צלעות מהסרת s, מס' הקוד' והגדרת הצלעות מתאימה להנחת האינדוקציה עבור $n-1$, לכן מה. א דיניץ ירוץ על גרף זה ב $n-2$ איטרציות, וביחד עם ריצת האלגוריתם באיטרציה ה-1 (שבה מצאנו זרימה עבור (s, t) בלבד) נקבל מס' איטרציות $(n-2)+1=n-1$כנדרש.

3)נתאר כעת את האלגוריתם המתאים ע"י שימוש ברדוקציה לתוכנית לינארית.

ממיר הקלט: יהיו קב' קודקודים *P1,P2* ונסמן את גדליהן $|P1|=n,\ |P2|=m$. נסמן את הנק' של הקב' כך: $P1=\{(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)\}$,$P2=\{(w_1,z_1),\dots,(w_m,z_m)\}$, תחילה , נניח כי במידה וקיים ישר אשר מחלק את הקבוצות *P1,P2* נניח כי *P1* מעל הישר, *P2* מתחת לישר על מנת למצוא ישר זה נבנה את מערכת האילוצים הבאה (עבור ישר מהצורה $y=ax+b$) :

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \ge ax_i + b$$

$$\sum_{j=1}^{m} z_j \le aw_j + b = \sum_{j=1}^{m} -z_j \ \ge -aw_j - b$$

$$a,b \in \mathbb{R}$$

עבור שני האילוצים הנ"ל נפעיל את אלגוריתם האליפסואיד אשר יחזיר ישר $y=mx+b$ אשר מקיים את התנאים שהגדרנו עבור *P1* מעל *P2* אם האלגוריתם יחזיר שאין פתרון אזי ניצור מערכת עבורה *P2* היא מעל *P1* בצורה הבאה:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \le ax_i + b = \sum_{i=1}^{n} -y_i \ge -ax_i - b$$

$$\sum_{j=1}^{m} z_j \ge aw_j + b$$

$$a,b \in \mathbb{R}$$

ננסה להפעיל שנית את אלגוריתם האליפסואיד אשר יחזיר ישר $y=ax+b$ אשר יקיים את התנאים שהגדרנו עבור *P2* מעל *P1* , אם האלגוריתם יחזיר גם הפעם שאין פתרון אזי נבדוק האם הישר הינו קבוע $x=c$, *c* ממשי כלשהו. תחילה נבדוק עבור *P1* מימין ו*P2* משמאל.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \ge c$$

$$\sum_{j=1}^{m} -z_i \ge -c$$

$$c \in \mathbb{R}$$

אחרת, אם לא יחזור לנו ישר $x=c$ נפעיל את האלגוריתם עבור המקרה המקביל, *P2* מימין *P1* משמאל בצורה הבאה:

$$\sum_{i=1}^{n} -x_i \ge -c$$

$$\sum_{j=1}^{m} z_i \geq c$$

$$c \in \mathbb{R}$$

אחרת, אם לא חזר פתרון עבור כל אחד מהאלגוריתמים, אין פתרון לבעיה, כלומר אין ישר המקיים זאת.

<u>ממיר פלט:</u> אם האלגוריתם יחזיר פתרון של ישר מסוג *y=ax+b* או *x=c* נחזיר את הישר אחרת נחזיר כי אין פתרון לבעיה.

<u>הוכחת נכונות:</u>

<u>משפט:</u> קיים ישר מפריד בין הקבוצות *P1,P2* אמ"מ האלגוריתם יחזיר פתרון לבעיה.

→ נחלק ל2 מקרים 1)חזר פלט:

נחלק גם פה ל2 מקרים א)פלט מהצורה של a, b

יהיה a ,*b* פלט של האלגוריתם. כלומר, הפרמטרים$a, b \in \mathbb{R}$ מהווים פתרון למערכת האילוצים שהגדרנו מלעיל. נניח בה"כ שהתקבלו מהריצה ה-1 של האליפסואיד, לכן, לפי הגדרת האילוצים לכל $1 \leq i \leq n$

$$y_i \geq ax_i + b$$

כלומר, לכל נקודה בקב' *P1*, (x_i, y_i), ערך ה-*y* גדול יותר מהישר הנתון, ולכן הנק' נמצאת מעל הישר כנדרש. כעת, עבור האילוץ: לכל $1 \leq j \leq m$

$$-z_j \geq -aw_j - b \rightarrow z_j \leq aw_j + b$$

כלומר, לכל נקודה בקב' *P2*, (z_j, w_j), ערך ה-*w* קטן יותר מהישר הנתון, ולכן הנק' נמצאת מתחת הישר

ב) פלט עבור *c* כלשהו, שמגדיר *x=c*. נניח בה"כ שחזר פלט עבור *P1* מימין ל-*P2*, כלומר, התקבל כי קיים *c* ממשי אשר עבור כל ערך *x* בקב' *P1* הוא לפחות *c* ועבור כל *z* בקב' *P2* הוא לכל היותר *c* ולכן, קבוע זה מקיים את הגדרת הפתרון לבעיה , הפרדה בין 2 הקבוצות כנדרש.

2)אם לא חזר פלט ממערכת האילוצים, כלומר אין ערכים המקיימים את המערכת ולפי ההגדרה של האילוציםת אין *c/a,b* שבונה לנו ישר המפריד.

← נניח כי קיים פתרון למערכת האילוצים.

נראה כי מערכת האילוצים חוקית: לפי ההערות בעבודה,

ניתן להגדיר משתנים בתוכניות לינאריות שלא מוגבלים להיות אי-שליליים לכן, לא נבצע הגבלה על x,y,z,w

.בתוכניות לינאריות לא חייבת להיות פונקציית מטרה, לכן אם במערכת האילוצים פה היא לא מוגדרת , כי אין צורך במקסום או מציאת מינימום של ערך, אז לא נגדיר פונק' מטרה.

נבחין כי מערכת האילוצים מוגדרת עם סימנים כיוון זהים, ומתאימה למערכת אילוצים של אלגו' האליפסואיד, לכן הרצת האלגוריתם היא חוקית כי המערכת חוקית ונוכל לקבל ערכים המקיימים את האילוצים השקולים לנק' שאותם תיארנו. כעת, נחלק ל-2 מקרים:

1) ישר *y=ax+b* המפריד בין קב' *P1,P2*. בה"כ נניח כי כל נקודות *P1* נמצאות מעל הישר ו *P2* מתחתיו אזי עבור כל נקודה,(x_i, y_i) , ערך ה-*y* גדול יותר מהישר הנתון כלומר,

$$y_i \geq ax_i + b$$

ועבור כל נק' ב-$P2$ (z_j, w_j) ערך ה-w-(y) קטן יותר מהישר הנתון כלומר,

$$z_j \geq ax_j + b$$

מכיוון שהישר הוא ממשי, אנו יודעים כי $a, b \in \mathbb{R}$ ובסה"כ קיבלנו פתרון חוקי המתאים לפתרון כלשהו שיחזור ממערכת האילוצים.

2)קיים פתרון עבורו $x=c$: פתרון זה מניח שלא קיבלנו פתרון מצורה אחרת, אחרת היינו מוצאים אותו כבר. מפני שיש פתרון כזה, נניח בה"כ כי נקודות $P1$ נמצאות מימין ל-c (שיעור ה-x גדול מ-c)ו- $P2$ משמאל. לכן מתקיים עבור כל נק' ב- $P1$ כי $x \geq c$ מה שמתאים לאילוץ ה-1 במשוואה. ועבור כל z ב- $P2$ מתקיים כי $z \leq c$ מה שמתאים לאילוץ ה-2 c הינו ממשי, ואין לנו פונק' מקסימום או מינימום, לכן קיימת ריצה כלשהי(כי הפתרון הוא לא בהכרח יחיד) שעבורה נקבל את הפתרון c כנדרש.

4)א)נגדיר אינדיקטורים x_i עבור הישרים $1 \leq i \leq n$, l_i , שלפי המערכת שנגדיר, תקבל ערך אם קיימת נקודה על הישר <u>בפתרון</u>-A, ואם לא , ערכו 0. בנוסף נגדיר אינדיקטור לכל $p \in P$, ולכל ישרl_i ,

$$g_{p,l_i} = \begin{cases} 1, & if\ p \in l_i, \\ 0 & else \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) \quad \min \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \\ (2) \quad x_i \geq 0, \ \forall i, 1 \leq i \leq n \\ (3) \quad -x_i \geq -1, \forall i, 1 \leq i \leq n \\ (4) \quad \sum_{l_i \in L} g_{p,l_i} * x_i \geq 1, \forall p, p \in P \\ (5) \quad x_i \in \mathbb{Z}, \forall l_i \in L \end{cases}$$

<u>הוכחת נכונות התוכנית:</u> נסביר מדוע הבעיה מתאימה לבעיה אותה אנו מחפשים. נבחין כי אנו רוצים להפוך למינימום את מס' הישרים הנמצאים בקב' A- כלומר, מינימום של אינדיקטורים עם ערך 1 ייתן לנו מינימום של ישרים המתאימים לאינדיקטור בקבוצה כנדרש.

נרצה שערכי כל x יהיו בין 0 ל-1 ע"מ שבאמת יהוו אינדיקטור, ולכן תנאים (2) ו-(3) דואגים לכך. בנוסף, ערך x בשלמים, 0 או 1 כפי שדאגנו באילוץ (5).

נבחין כי אנו צריכים בנוסף, שעבור כל נק' p בקב' P , ישנו לפחות ישר אחד המיצג אותה, כלומר ישר שהיא קיימת עליו ולכן נעבור על כל הישרים שהנק' נמצאת עליו(שנמצא לפי אינדיקטור g) ונדרוש שסכומם יהיה גדול מ-1, שיש ישר שקיים ב-A (לפחות 1) עבור הנק' p , כפי שכתבנו באילוץ (4). לכן התוכנית מייצגת את הבעיה הדרושה.

נראה כי התוכנית הלינארית חוקית ומתאימה להגדרות. עבור תוכנית לינארית בשלמים, הגדרנו ערכים ששיכים ל-Z כנדרש, בתוכנית מסוג מינימום, נרצה שהאילוצים על המשתנים יהיו עם סימן $\geq$, כפי שמוגדר בתוכנית. המערכת מתאימה למערכת אילוצים להרצת אלגו' האליפוסאיד, ולכן נוכל לקבל פתרון חוקי למערכת האילוצים. ונוכל לקבל פתרון השקול ל-A אופטימלי.

ב) נגדיר את התוכנית הדואלית:(תחילה נסמן כל נק' p- $(p_{1,\dots,}p_m$

$$
\begin{cases}
(1)\quad \max \sum_{i=1}^{m} y_i \\
(2)\quad y_i \ge 0,\ \forall i, 1 \le i \le m \\
(3)\quad y_i \le 1, \forall i, 1 \le i \le m \\
(4)\quad \sum_{p_i \in P} g_{p_i,l_j} * y_i \le 1, \forall l_j, 1 \le j \le n
\end{cases}
$$

הבעיה המתמטית שהתוכנית הדואלית פותרת: מופע של m נקודות-P במישור ו-n ישרים -Lכנתון.

פתרון חוקי: תת קבוצה $B\subseteq P$, קב' נקודות כך שעל כל ישר נמקם לכל היותר נק' אחת מ-B.

פתרון אופטימלי: פתרון חוקי בגודל מקס'(קבוצת נקודות מקס' שעבורה כל אחת מהנק' נמצאת על ישר אחר).

<u>הוכחת נכונות</u> : עבור כל y , נגדיר את הבעיה בשלמים שהוא 0/1 (אינדיקטור) ולכן האילוצים (2) (3) מתאימים לעובדה שהוא 0 או 1. כלומר, משתנה זה יגדיר האם הנקודה ה-i נמצאת בפתרון או לא. נרצה למקסם את מס' הנקודות שמופיעות בפתרון ולכן תנאי זה מתאים לאילוץ (1), כאשר הוא מייצג את מקס' האינדיקטורים y שמופיעים בפתרון B .

נרצה להגביל עבור כל ישר, שיופיע עליו לכל היותר נקודה אחת, ולכן נעבור עבור כל ישר, על כל הנקודות ונגיד שלכל הנקודות שנמצאת על הישר (אינדיקטור g מגדיר לנו את זה), סכום הנקודות שנגדיר שנמצאות על הישר אינו עולה על 1, מה שמקביל בתוכנית הלינארית לכך שסכום האינדיקטורים y לא עולה על 1.ולכן הגדרה זאת מתאימה בדיוק לאילוצים המתוארים ב-(4). לכן בסה"כ ראינו שבדרך פעולה בה נרצה לתת ערכים בין 0 ל-1 האם הנק' נמצאת בקבוצה B או לא , ולמקסם את הקבוצה של הנק' האלה, תחת הגבלה שעל כל ישר יש לכל היותר נקודה אחת, כל האילוצים הללו מתקיימים תחת התוכנית הלינארית בשלמים.

חוקיות הפתרון: עומד בכל תנאי תוכנית לינארית, בנוסף הפתרון המתקבל חוקי. נניח בשלילה שנקבל נקודה שמופיעה על 2 ישרים, אזי , $g_{p_i,l_j} * y_i = 1$ עבור 2 ערכי i שונים, לכן סכומם לא עומד באילוץ (4), סתירה. לכן כל נק' תופיע לכל היותר על ישר אחד כנדרש.

ג) עבור מופע (P,L) כמתואר, פתרון אופטימלי לבעיית הכיסוי בקווים, ניקח את המינימום בין s ל-t ,עבור המינימום הנ"ל נבחר את קב' הישרים שהוא מגדיר וזה יהיה הפתרון המינ' לבעיה, כלומר, נניח כי $s<t$, לכן קב' הקווים עם כיסוי מינימלי תהיה L_y. נניח עבור ההוכחה כי בה"כ $s<t$.

הפתרון חוקי מפני שלכל נק' יש כיסוי בישר לפי ערך נק' ה-y שלה, ולכן בהכרח קיימת על ישר מהקב'.

צריך להוכיח ש $L_y = min = OPT$.

אבחנה1: ישנו פתרון עבור התוכנית הדואלית בו הפתרון הינו $|L_y|$ או $|L_x|$. הסבר: לפי הגדרת התוכנית הדואלית, ולפי הגדרת הנק' על הישרים, נוכל לקחת עבור כל ישר המקביל לציר ה-y(Ly לפי הגדרתה)וקיימת נקודה המופיעה בו אשר לא תופיע באף ישר אחר, כי קב' הישרים שנבחר הן ללא נק' חיתוך, וכולן על ציר קב' הישרים ב-Ly. לכן, זהו פתרון חוקי למערכת האילוצים בשלמים בפרט, ולכן גם לבעיה שהיא אינה בשלמים, מה שנותן פתרון חוקי לבעיה. באותה צורה גם עבור Lx.

אבחנה 2: דואליות חזקה מתקיימת($min=max$) הסבר: ראינו כי קיימים פתרונות פיזיביליים למערכת האילוצים עבור התוכנית והתכנית הדואלית ולכן משפט הדואליות החזקה מתקיים.

טענה: $OPT\leq L_y$. הוכחה: נניח בשלילה ש-$OPT> L_y$. לכן, לפי דואליות חזקה,$min=max$ אזי, ב-OPT קיימים -$|OPT|$ מס' ישרים המגדיר בתוכנית הדואלית מס' נקודות המופיעות בדיוק בישר אחד המקסימלי , לפי אבחנה 1 קיים פתרון Y^*שגודלו כגודל מס' הישרים $|L_y|$, אזי פתרון המתאים ל-OPT גדול מגודל Y^* לפי ההנחה, אבל אם מס' הנקודות ב-OPT גדול מ$|L_y|$, מעיקרון שובך היונים קיימות לפחות 2 נקודות $p1,p2$ עם אותו ערך x הנמצאות על אותו ישר, בסתירה לחוקיות התוכנית הדואלית.

טענה: $OPT\geq L_y$ הוכחה: נניח בשלילה כי $OPT<L_y$. תחילה, נראה כי ראינו כי -L_y מהווה פתרון חוקי לבעיית הכיסוי בקווים, מאותה סיבה נסיק גם כי L_x מהווה פתרון. לכן, לפי הגדרת הבעיה, קיים ישר ב-L_y שאינו קיים ב-OPT (OPT מינימלי וקטן ממש ממנו לכן קיים לפחות ישר אחד כזה)- נסמנו l^*. מהגדרתנו וההנחה ש$s<t$, גם הפתרון $L_x \geq L_y \geq OPT$ ולכן קיים גם ישר ב-L_x שאינו שייך לפתרון OPT נסמנו l^{**}. מהגדרת הקלט, נבחין כי עבור כל חיתוך שקיים לערכים בין 1- לt ול-s קיימת נקודה p, לכן גם עבור הישרים החוקיים l^*,l^{**} שביניהם יהיה חיתוך קיימת נקודה p כזו. מפני שראינו כי הישרים אינם חלק מהפתרון, ומהגדרת הקלט, הישרים היחידים שעוברים דרך נקודה זו הם l^*,l^{**}, לכן קיבלנו כי נקודה זו אינה מכוסה בפתרון OPT בסתירה לחוקיות ולמינימליות OPT.

לכן, אם $OPT\geq L_y$ וגם $OPT\leq L_y$ אז $OPT= L_y$ כנדרש.■.