שאלה 1)

תיאור מילולי של האלגוריתם: 1)ממיר הקלט: בהינתן גרף מכוון G וקוד' (s ,u ,t) , נבנה גרף מכוון חדש 'G בו נפצל את קוד' s לשני קודקודים שונים s1 וs2 כך ש-s1 יצאו הקשתות היוצאות מקוד' s המקורי ללא הקשת (s, u) במידה והיא קיימת, כלומר indeg(s1)=0. כמו כן , נגדיר את הקוד' s2 כך שכל הצלעות שנכנסות ל s המקורי יכנסו לs2 כלומר, קשת היציאה היחידה שלו הינה u במידה וקיימת קשת (s, u) בגרף המקורי. אח"כ נריץ את ה"קופסא השחורה כלומר, בעיה א' מקוד' s1 לקוד' t. ממיר הפלט: בהינתן פלט לבעיה א' ,אותו המסלול יהווה פלט לבעיה ב' ונחזיר את האורך הנתון כפלט.

הוכחת נכונות האלגוריתם: משפט: לכל גרף G וקודקודים (s, u, t) האלגוריתם יחזיר את אורך המסלול הקצר ביותר בין s ל t כך ש קוד' u אינו הקוד' ה-2 במסלול אמ"מ קיים מסלול קצר ביותר ב'G בין s1 לt באותו אורך.

ט.ע 1) אם בגרף G וקודקודים (s, u, t) המסלול הקצר ביותר הוא באורך k בין s ל t כך ש קוד' u אינו הקוד' ה-2 במסלול אז קיים מסלול קצר ביותר ב'G בין s1 לt באורך k גם כן.

ט.ע 2)אם בגרף 'G המסלול הקצר ביותר בין s1 לt באורך k אזי קיים בגרף המקורי G מסלול קצר ביותר בין sל t באורך k כאשר u אינו הקוד' ה-2 במסלול.

הוכחת המשפט: 🡸יהיה גרף G מכוון , קלט תקין לבעיה. נניח כי אורך המסלול הקצר ביותר בין s ל t כאשר u אינו הקוד' ה-2 במסלול הוא k אזי, מט.ע 1 נקבל כי קיים מסלול קצר ביותר ב'G בין s1 לt באורך k.

🡺 יהי גרף 'G תקין, נפעיל עליו את ה"קופסא השחורה" (בעיה א') ובכך נקבל את המסלול הקצר ביותר בין s1 לt באורך k מט.ע 2 נקבל כי קיים בגרף G מסלול קצר ביותר בין קוד' s לt כאשר קוד' u אינו הקוד' ה-2 במסלול, באורך k.

הוכחת ט.ע 1: יהיה G וקוד' (s, u, t) קלט תקין לבעיה. נניח כי אורך המסלול הקצר ביותר P בין s לt (כאשר u אינו הקוד' ה-2 במסלול) הוא k. P={s=v0,v1,v2,…,t}(כאשר $v_1 \neq u$) יהיה גרף 'G מוגדר ככתוב בממיר הפלט נתון כי מs1 אין קשתות יוצאות לu לכן גם במסלול תקני ב'G $v'_1 \neq u$ וכל שאר הקשתות היוצאות מ s1 ב'G שקולות לשאר הקשתות היוצאות מs בגרף G אם קיימות, אם לא קיימות נקבל מסלול באורך אינסוף ב2 הגרפים שכן גם ב'G מs1 לא יהיו צלעות וסיימנו. לכן, מסלול אשר יוצא מs1 שקול ליציאה ממסלול מs בגרף G. נבחין בין 2 מקרים: 1) במסלול P לכל $i \neq 0$,$v_i \neq s$:כלומר, אי קיום מעגל במסלול החוזר לs. לפי הגדרת s2, הוא שקול לכל הקשתות הנכנסות אל s בתוספת הקשת (s ,u)במידה וקיימת. לכן אי קיום מעגל זה שקול למסלול ב'G ללא s2, הקוד' היחידים במסלול יהיו אלה המשותפים לG ו'G כאשר נקביל את נק' ההתחלה s וs1 לכן, המסלול הקצר ביותר בין אותם הקוד' (G'/{s1,s2}=G/{s}) יהיה זהה {v1,v2,…,t}={v1',v2',…,t} ובתוספת הצלע המכילה את s/s1 בהתאם נקבל k=k' כנדרש.

2) במסלול P קיים $v_i = s, i \neq 0$ כלומר, קיים מסלול מעגלי החוזר אל קוד' s.לפי הגדרת s2, הוא שקול לכל הקשתות הנכנסות אל s בתוספת הקשת (s ,u)במידה וקיימת, לכן קיום s2 שקול לעובדה כי במסלול P קיים מעגל החוזר לs.נניח בשלילה כי $v_{i+1} \neq u$ אזי המסלול הקצר ביותר מכיל שכן של *s* שאינו *v1* בסתירה לכך שהמסלול *p* הוא הקצר ביותר(אחרת אין צורך לבצע מעגל). לכן הגעה חוזרת ל*s* שקולה לכך שהקשת הבאה היא (*s ,u*) ובגרף *'G* שקולה לצלע (*s2,u*) שאר הקשתות שנמצאות במסלול (לפני ואחרי) *P* נמצאות גם ב*'G* לכן *k=k'*. נניח בשלילה שקיים מסלול קצר ביותר ב*'G* באורך *k'<k* בסתירה לכך שהחל מקוד' *v1* במסלול *P*(שנמצא ב2 הגרפים) אורך המסלולים (ומס' הקשתות באופן כללי זהה) ורשימת הקשתות שיוצאות מ *s1* מוכלת ברשימת הקשתות שיוצאות מ*s*(כלומר, אורך מסלול היוצא מ*s1* ל *t*הוא לפחות מאורך מסלול מ*s* ל*t*), והגעה ל*s2* כפי שהראינו שקולה להגעה ל*s* בפעם השנייה. לכן, אורך המסלולים זהה.

הוכחת ט.ע 2: יהי גרף G' בו P'–מסלול הקצר ביותר בין s1 לt ונגדיר P'={s1=v'0,v'1,v'2,…,t=Vn} ונגדיר את אורכו *k'*.יהיה גרף *G* קלט תקין לבעיה. נתון כי מs1 אין קשתות יוצאות לu לכן במסלול תקני בG' $u \neq v'_1$ וכל שאר הקשתות היוצאות מ s1 בG' שקולות לשאר הקשתות היוצאות מs בגרף G אם קיימות, אם לא קיימות נקבל מסלול באורך אינסוף ב2 הגרפים שכן גם בG' מs1 לא יהיו צלעות וסיימנו. לכן, מסלול אשר יוצא מs1 שקול ליציאה ממסלול מs בגרף G. נבחין בין 2 מקרים: **1)** s2 אינו נמצא במסלול P'-כלומר, לכל $i \neq 0$,הקשת (v'_i, v'_{i+1}) קיימת גם בגרף *G* המקורי מפני שכל קוד' v'_i שאינו *s2, s1* קיים על כל צלעותיו גם בגרף המקורי. הקוד' היחידים במסלול P' יהיו אלה המשותפים לG וG' כאשר נקביל את נק' ההתחלה s1 וs לכן, המסלול הקצר ביותר בין אותם הקוד' (G'/{s1,s2}=G/{s}) יהיה זהה {v1',v2',…,t}={v1,v2,…,t} ובתוספת הצלע המכילה את s/s1 בהתאם נקבל k=k' כנדרש.

2) *s2* נמצא במסלול *P'*- לפי הגדרת s2, הוא שקול לכל הקשתות הנכנסות אל s בתוספת הקשת (s ,u)במידה וקיימת לכן, אם *s2* נמצא P'={s1=v'0,v'1,v'2,…s2,u,…,t=Vn} כאשרv'1,הוא אינו *u*. לכן נוכל להקביל זאת להתחלה חוקית של מסלול ב*G* מ *s*(לפי הגדרת *s1* הינו כל הקשתות היוצאות מ *s* ללא *u*) עד ל*s2*. כאשר נגיע ל*s2* לפי הגדרתו , הינו כל הצלעות הנכנסות משכניו של *s* לכן קיום זה שקול למעגל ב*G* ומכאן והלאה הקוד' הקיימים במסלול ב *P'* והקשתות היוצאות מהן זהות גם ב*G* ולכן אורך המסלולים זהה, כלומר *k=k'* כנדרש. לפי הגדרת המסלול ב*G'*, נוכל להגיע מ*s2* אך ורק ל*u*, והראינו שמעגל החוזר ל*s* בגרף *G* , בהכרח גורם להגעה לקוד' *u* במציאת מסלול קצר ביותר, אחרת היה מסלול קצר יותר בסתירה למינימליות המסלול. לכן מסלול קצר ב*G'* שקול באורכו בדיוק למסלול מינימלי ב*G*(שקילות של כל קשת, לקשת אחרת בגרף *G*).

<u>**זמן ריצה:**</u> <u>ממיר הקלט</u>: בניית הגרף *G'* תתבצע ב*O(V+E)* כאשר נבנה את אותן הצלעות אך נפצל צלעות שיוצאות מ*S* ל2 קוד' כך שיצאו מ*s1* ויכנסו ל*s2* כמו כן, נעביר את *(s,u)* לצאת מ*s2* לכן מס' הקוד' גדול ב1 בסה"כ , זמן הריצה של בניית הגרף *O(V+E)-G'* <u>קופסא שחורה</u>: נתון *O(V+E)*. <u>ממיר הפלט</u>: *O(1)* הוכחנו כי הקופסא השחורה פולטת אורך מסלול *K* הזהה לאורך מסלול הנדרש לכן נחזיר בפעולה פשוטה את *K*. לכן סה"כ זמן הריצה הכולל:*O(V+E)*.

שאלה 2)

<u>**תיאור מילולי של האלגוריתם:**</u>

1) <u>ממיר הקלט:</u>בהינתן גרף מכוון *G=(V,E)* עם פונקציית משקל *w:E(G)➔ R+* קוד' מקור *s* ו*kER+* . נבנה גרף חדש *G'=(V',E')* כך ש *V=V'* וגם *E'=E* ונגדיר בגרף זה פונקציית משקל חדשה על צלעות *E'* כך {0,1} *w':E(G')➔* ונגדיר לכל *e' E E'* אשר מקביל לצלע *e* *E E* בגרף *G* המקורי (בקוד, ובכיוון של הקשת) בצורה הבאה, אם *w(e)>=k* אזי בגרף *G'* *w'(e')=1* אחרת *w'(e')=0*. כעת קיבלנו גרף *G'* העונה לקריטריונים של קלט לבעיה א'.

2) בשלב זה נפעיל את "הקופסא השחורה" על גרף G' , מקוד' מקור $s'=s$ (אותו קוד' בגרף המקורי עם אותן צלעות במשקלים שונים).

3) <u>ממיר הפלט:</u> בהינתן פלט לבעיה א' ,אותו הפתרון יהווה פלט לבעיה ב' וtrue or false עבור כל קודקוד בגרף G המקורי האם קיים מסלול עם צוואר בקבוק לפחות k אל עבר קודקוד s כלשהו שמוגדר בקלט (לצורך העניין נוכל להמיר כל קודקוד 'v ולפלוט אותו כv בגרף המקורי G) .

<u>הוכחת נכונות האלגוריתם:</u>

<u>משפט:</u> בהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$ עם פונקציית משקל $w:E(G)\rightarrow R+$ קוד' מקור s ו$kER+$, האלגוריתם יחזיר עבור כל $v\ E\ V$ בגרף G האם קיים מסלול עם צוואר בקבוק לפחות k מv אל s .

<u>ט.ע.:</u> אם בגרף G עבור קודקוד מקור s לכל $v\ E\ V-\{s\}$ הפתרון לבעיה עבור מסלול

$\{s,\ v0,v1,\ldots,vn\}=P$ כלשהו בגרף G האם קיים צוואר בקבוק לפחות k עבור המסלול אמ"מ בגרף G' הפתרון לבעיה עבור מסלול $\{s',\ v'0,v'1,\ldots,v'n\}=P'$ (מסלול שקול בגרף G') עם צוואר בקבוק 1 מs ל v' עבור כל $v'\ E\ V'$ תהיה זהה .

<u>הוכחת המשפט:</u> יהי גרף G ובו פונקציית משקל w כמתואר וקודקוד מקור s כמתואר במשפט נפעיל את ממיר הקלט ונקבל גרף G' כמתואר, כאשר כל הקודקודים שקולים בכיוונים לקשתות מגרף G .נפעיל את הקופסא השחורה ונקבל פתרונות עבור כל $v'\ E\ V'$ האם קיים מסלול עם צוואר בקבוק 1 לכן על פי טענת העזר נקבל פתרון לבעיית צוואר הבקבוק בגרף G עבור כל קודקוד $v\ E\ V$ מתאים כנדרש.

<u>הוכחת ט.ע</u>: $\rightarrow$ יהי גרף G' עם קודקוד מקור s' ופונקציית $w':E(G')\rightarrow\{0,1\}$ יהי $v'n\ E$ V'/s' קודקוד כלשהו נסמן את המסלול(אם קיים) s' כ$P'=\ \{s',\ v'0,v'1,\ldots,v'n\}$(מסלול כלשהו מ s' ל$v'n$) כך שכל הקשתות שקיימות ב G' הן זהות בדיוק לקשתות בגרף G פרט למשקלן, לכן לכל מסלול P' קיים מסלול זהה P .

נחלק ל -2 מקרים:

1) כאשר המסלול P' יהיה עם צוואר בקבוק 1, אז לפי הגדרת משקל הצלעות בגרף G' לכל$w(vi,vi+1)>=k$ $0=<i<n$ אשר קיימת במסלול $\{s,\ v0,v1,\ldots,vn\}=P$ כלומר משקלה של כל צלע במסלול הוא לפחות k ולכן תחזור תשובה חיובית גם עבור גרף G על השאלה האם קיים מסלול עם צוואר בקבוק לפחות k .

2) כאשר למסלול P' אין מסלול עם צוואר בקבוק 1 , אזי לפי הגדרת משקל הצלעות בגרף G' קיימת לפחות קשת אחת $\{Vi,Vi+1\}$ אשר משקלה שווה ל-0 אזי בתרגום לגרף המקורי במסלול השקול למסלול זה P תהיה לפחות קשת אחת שמשקלה קטן מk כלומר עבור מסלול זה המשקל המינימלי באחת הקשתות קטן מ k ולכן במסלול זה לא קיים צוואר בקבוק עם לפחות k.

$\leftarrow$ יהי גרף G עם קודקוד מקור s ופונקציית $w:E(G)\rightarrow R+$ יהי $vn\ E\ V/s$ קודקוד כלשהו נסמן את המסלול(אם קיים) s כ$P=\ \{s,\ v0,v1,\ldots,vn\}$(מסלול כלשהו מ s לvn) כך שכל הקשתות שקיימות ב G הן זהות בדיוק לקשתות בגרף G' פרט למשקלן, לכן לכל מסלול P קיים מסלול זהה P' בגרף G'.

נחלק ל2 מקרים:

1) כאשר המסלול P יהיה עם צוואר בקבוק לפחות k אז לפי הגדרת משקל הצלעות בגרף G , לכל$w'(v'i,v'i+1)=1$ $0=<i<n$ אשר קיימת במסלול $\{s',\ v'0,v'1,\ldots,v'n\}=P'$ כלומר משקלה של כל צלע במסלול הוא 1 ולכן תחזור תשובה חיובית גם עבור גרף G' על השאלה האם קיים מסלול עם צוואר בקבוק 1.

2) כאשר למסלול P אין מסלול עם צוואר בקבוק לפחות k , אזי לפי הגדרת משקל הצלעות בגרף G קיימת לפחות קשת אחת $\{Vi,Vi+1\}$ אשר משקלה קטן מk אזי בתרגום לגרף G' במסלול השקול למסלול זה P' תהיה לפחות קשת אחת שמשקלה 0 . כלומר עבור מסלול זה המשקל המינימלי באחת הקשתות הוא 0 ולכן במסלול זה לא קיים צוואר בקבוק 1.

<u>זמן ריצה:</u>

1) <u>ממיר הקלט:</u> נבחין כי בניית G' מתבססת על אותן צלעות וקודקודים בדיוק מהגרף G ולכן בנייתו תהיה בזמן ריצה $O(V+E)$.
2) <u>ממיר הפלט :</u> האלגוריתם יחזיר את אותה התשובה עבור שני הגרפים לכן $O(1)$
   - אם נמיר כל v' ל v סדר גודל של $O(v)$.

שאלה 3)

<u>תיאור מילולי של האלגוריתם:</u>

<u>ממיר הקלט:</u> בהינתן גרף $G=(V,E)$ תקין וקוד' s,t כמתואר בבעיה ב, נבנה גרף G' אשר בנוי מ"שכבות" כאשר בשכבה ה-1 יהיה קוד' המקור s , לאחר מכן ,בכל שכבה, נמקם את כל הקוד' של הגרף נסמנם, עבור השכבה ה-1 והלאה $Vi=(s^i, t^i, v_1^i, \cdots V_n^i)$ לכל

$1 \le i \le k-1$ כלומר, k-1 שכבות בהן נמצאים כל הקוד'. צלעות הגרף יוגדרו בצורה הבאה: לכל **שיוצאת** מ s בגרף המקורי, נעביר צלע מכוונת אל הקוד' המתאים בשכבה ה-1 וכך הלאה. לכל קוד' מתאים למשל בשכבה $V1=(s^1, t^1, v_1^1, \cdots V_n^1)$ נעביר את כל הצלעות היוצאות ממנו אל קוד' מתאים בשכבה $V2$ וכן הלאה, ולבסוף לאחר k-1 שכבות כאלה, בשכבה האחרונה נחבר את קוד' t לבד, ואליו יכנסו מהשכבה k-1 כל הקוד' שנכנסים אל t. כלומר, בסה"כ $k+1$ שכבות.(לכן, בסה"כ מסלול מs בשכבה הראשונה ל t בשכבה ה$k+1$ צריך להיות k בדיוק אם קיים כזה). גרף זה יהיה גרף חסר מעגלים, כי בין כל שכבה לעצמה, לא נעביר אף צלע.

2)הפעלת ה"קופסא השחורה" על גרף G' ונקבל האם יש מסלול באורך k.

3)ממיר הפלט: כאשר נקבל תוצאה מהקופסא השחורה, נקבל התאמה לפתרון בעיה ב' כלומר, האם קיים מסלול מs לt. האלגוריתם יחזיר את התשובה הרצויה, כי הוא מהווה בגרף המקורי מסלול מסוים מאורך k (כי בכל שכבה שמנו את הצלעות היוצאות מקוד' לאחר, אם הגענו מ s ל t בG', סימן שקיים מסלול כזה בגרף המקורי).

<u>הוכחת נכונות האלגוריתם:</u>

<u>משפט:</u> בהינתן גרף G וקוד' s ,t קלט תקין, האלגוריתם יחזיר האם קיים מs לt באורך kבדיוק.

<u>ט.ע</u>: בגרף G קיים מסלול באורך k בדיוק מ s ל t אמ"מ בגרף G' קיים מסלול באורך k בדיוק.

<u>הוכחת המשפט:</u> יהיה גרף G וקוד' s, t קלט תקין . נפעיל על הגרף את ממיר הקלט ונקבל גרף חדש G' , נפעיל את ה"קופסא השחורה" ונקבל פתרון האם קיים מסלול באורך k בגרף הנתון. לפי ט.ע נקבל תשובה דומה עבור הגרף G המקורי, עבור מסלול בין s ל-t כנדרש.

<u>הוכחת ט.ע</u>:

➔ נניח כי בגרף G' קיים מסלול באורך k כלשהו P ונגדירו כך: $P=\{r_1, r_{2,\ldots} r_{k+1}\}$. נתון כי הגרף מעביר קשתות אך ורק משכבה אחת לאחרת, לכן בכל שכבה, אין קשתות מכוונות בין קוד' באותה שכבה, לכן כאשר הקשתות מכוונות אך ורק כלפי הדרגה הבאה, הגרף הוא חסר מעגלים (אם נניח בשלילה כי קיים מסלול שאינו מהשכבה העליונה לתחתונה, נקבל כי חייב להיות מעגל, בסתירה

לבניית הגרף) ולכן המסלול באורך k היחידי שיכול להגיע הוא מהשכבה העליונה לתחתונה, כלומר $s = r_1$, $s = r_{k+1}$, $(r_i\ E\ Vi\ )$

נבחין כי כל צלע (r_i, r_{i+1}) במסלול, מוגדרת ע"י צלע במסלול המקורי, כלומר , רצף קשתות במסלול P יגדיר לנו רצף של קשתות בגרף המקורי. (r_1, r_2) לפי הגדרת בנייתה, מוגדרת כצלע היוצאת מ-s בגרף המקורי, אל קוד' אחר בגרף G והצלע (r_k, r_{k+1}) מוגדרת לפי צלע בגרף G מקוד' כלשהו בגרף הנכנס אל t לכן, נקבל מסלול אשר מתחיל מ-s ומגיע אל t בגרף המקורי באורך k בדיוק. נבחין כי אם לא קיים מסלול באורך k בגרף G' , לא נוכל לבנות מסלול כזה ב-G המקורי, שכן לא נמצא צלעות בגרף המקורי שיגדירו לנו את המסלול בגרף G'.

➔ נניח כי בגרף G קיים מסלול P באורך k בין קוד' s ל- t ונגדירו $P=\{s, v_{1,\dots}, v_{k-1}, t\}$ לפי הגדרת G' נוכל לבנות מסלול בין הרמות. הרמה ה-1 מתחילה בקוד' s ומכיוון שמסלול P מוגדר כמתחיל מקוד' זה, נקבל התחלה חוקית של מסלול , ומכאן כל צלע במסלול P מגדירה גם היא צלע בין בין שכבות כלומר, אם קיימת צלע (v_i, v_{i+1}) ב-G, אזי ב-G' תוגדר לנו צלע בין 2 שכבות, שכבה Vi ושכבה $Vi+1$ כך (v_i^i, v_{i+1}^{i+1}) עד שנגיע לשכבה התחתונה. הצלע (v_{k-1}, t) במסלול P המקורי יגדיר לנו בגרף G' מעבר תקין לשכבה ה-$k+1$ שבה נמצא רק קוד' t וקשת אליה תגיע רק כקשת נכנסת אל t כפי שנקבל מהצלע (v_{k-1}, t) לכן בסה"כ קיבלנו שיש קשת בין כל שכבה עד לשכבה התחתונה, בין $k+1$ קוד' כלומר קיבלנו מסלול באורך k בגרף G' כנדרש.

<u>ניתוח זמן ריצה:</u>

<u>ממיר קלט:</u>

בכל שכבה פרט לראשונה ולאחרונה בגרף G' החדש אנו עוברים על כל הקוד' והצלעות ומעבירים אותם אל הקשתות החדשות כלומר בכל ה-$k-1$ שכבות הגרף הנבנה בשכבה יהיה בסדר גודל של $O(V+E)$ לכן בכל השכבות נקבל $O(k(V+E))$ אבל מהנתון ש-k הינו קבוע נקבל זמן ריצה בסה"כ $O(V+E)$.

ממיר פלט: התשובה שניתנת מה "קופסא השחורה" זהה לתשובה שאותה נצטרך לכן $O(1)$.

שאלה 4)א)

<u>תיאור מילולי של האלגוריתם:</u>

1. נמיין את המתנות לפי המחיר נסמן את המיון לכל *1,....,2n* כך שמחיר יסומן $(a_1 \leq a_2 \leq$ $A = \cdots \leq a_{2n})$.
2. נאתחל קבוצה *G=∅*.
3. נאתחל משתנה *I=1* אשר יצביע על אינדקס של זוג סדור
4. *While A !=∅*.

נוסיף זוג סדור *Ri={*a_{min}, a_{max} *}*

GURi

A=A/Ri

i++

5. *Return G*.

<u>הוכחת נכונות האלגוריתם:</u>

<u>סימונים:</u>

- *G={r1,r2,..., n}*_הפתרון שהאלגוריתם החמדן יחזיר על פי סדר *min-max* .
- *O=(j1,j2,..., n}* פתרון אופטימאלי כלשהו הממוין עפ"י זוגות אופטימליים כלשהם.

<u>טענה עיקרית:</u> האלגוריתם יחזיר חלוקה אופטימלית של המתנות לנכדים.

<u>טענה נשמרת:</u> בכל שלב של האלגוריתם קיים פתרון אופטימלי שמרחיב את הבחירות שהאלגוריתם עשה כלומר בכל שלב *L* קיים פתרון אופטימלי $O = j1 \ldots jn$ כך שמתקיים $G_l \subseteq O$ עבור כל *1<l<n*.

<u>הוכחת הטענה העיקרית:</u>

במהלך ריצת האלגוריתם בכל שלב לפי טענה נשמרת הפתרון $G_l \subseteq O$ לכן בפרט גם בשלב *n* (השלב האחרון של הריצה) גודל הקבוצות יהיה זהה ויכיל *n* זוגות של מתנות. לכן הפתרון האופטימלי המובטח מהטענה הנשמרת הוא בדיוק הפלט של האלגוריתם.

<u>הוכחת הטענה הנשמרת:</u> נוכיח באינדוקציה על מספר הזוגות שכבר הכנסנו.

בסיס: עבור *G=∅* כל קב' ריקה מוכלת בפתרון *O* כלשהו, בפרט *G* כנדרש.

<u>הנחת האינדוקציה:</u> נניח שלאחר *l-1* פעולות קיים פתרון אופטימלי $G_{l-1} \subseteq O$

<u>צעד:</u> נבחר בזוג מן הרשימה *A* המינימלי והמקסימלי שעוד בה $r_l = (a_{lmin}, a_{lmax})$. שאותו נרצה להוסיף ל*G* .

נבחין ב2 מקרים:

1) המקרה הפשוט בו r_l *E* O כלומר $G_l = G_{l-1} \cup r_i$, $G_l \subseteq O$.
2) המקרה הפחות פשוט בו הזוג $r_i \notin O$. נתון כי הוא *O* הוא פתרון אופטימלי מלא לכן בפרט קיימים בו המתנות a_{lmin}, a_{lmax} בזוגות אחרים. יהיו *a' ,a''* אשר מקיימים זוגות ב*O* $(a_{min}, a'), (a_{max}, a'')$, מהנחת האינדוקציה נוכל להסיק כי *a' ,a''* נמצאים בין a_{lmin}, a_{lmax} מפני שבהנחת האינדוקציה הנחנו $G_{l-1} \subseteq O$ ואנחנו יודעים כי הזוגות האלה מכילים מינימום ומקסימום עד שלב *l-1*.,בגלל שהזוגות אלה אינם שייכים ל *G* ולכן הם חייבים להיות בין $a_{min} \leq a', a'' \leq a_{max}$. לכן מטענת העזר נובע יהיו $a_{m\}in} \leq a', a'' \leq$ a_{max} , אז מתקיים

לכן , $min\{(a_{min}+a'),(a_{max}+a'')\} \le \min\{(a_{min}+a_{max}),(a'+a'')\}$
נוכל לבנות פתרון אופטימלי לפחות כמו O ונסמן
$O'=O\ U\ (a_{min},a_{max}),(a',a'')\}\ /\{(a_{min},a'),(a_{max},a'')$
ולכן , $G_l \subseteq O'$ והטענה נשמרת כנדרש.

הוכחת טענת עזר:

נסמן $a_{min}=x, a'=x+a, a''=x+b\ , a_{max=}\ x+y$. כאשר($y\ ,a\ ,b \ge 0$)
, $(y \ge a,b)$.

נראה כי: $min\{x+(x+a),\ (x+b)+(x+y)\}=min\{2x+a,2x+b+y\}=2x+a$ מפני שלפי הנתון
($y\ ,a\ ,b \ge 0$), $(y \ge a,b)$.

כעת נבחין כי $Min\{x+(x+y),(x+a)+(x+b)=min\{2x+y,2x+a+b\}$ ובנוסף $2x+y \ge 2x+a$
ולכן נוכל לומר: $2x+a+b \ge 2x+a$

$min\{(a_{min}+a'),(a_{max}+a'')\} \le \min\{(a_{min}+a_{max}),(a'+a'')\}$ כנדרש.

זמן ריצה:

ביצענו בתחילת האלגוריתם מיון של כל המתנות לפי המחירים הקטן לגדול בזמן ריצה של $O(nLogn)$.
כמו כן ביצענו לולאת מעבר על G שרצה n פעמים והפעולות בתוכה בסדר גודל $O(1)$.

לכן בסה"כ זמן הריצה הוא $O(nLogn)$.

4.ב **תיאור האלגוריתם:**

1.נאתחל $K=(v1,v2,\dots,vn)$ רשימה של קודקודי הגרף. ונאתחל צבע קוד' $null$=

2 $While\ k!=\emptyset$

- נבחר קודקוד v מסוים מהרשימה.
- נעבור על רשימת שכניו ונחפש צבע של קוד' פנוי
- נצבע אותו בצבע ונשמור בשדה ונוציא אותו מהרשימה.

3.נחזיר את הגרף עם הקודקודים הצבועים.

הוכחת נכונות:

משפט: האלגוריתם יחזיר גרף G בעל דרגה מקס' d עם צביעה חוקית ב$d+1$ צבעים.(נוכיח כי כל גרף בעל דרגה מקס' d הוא $d+1$ צביע)

טענה נשמרת: לכל $Vk=\{v_1,v_{2,\dots},v_k\}$ קיים פתרון לצביעה חוקית ב$d+1$ צבעים O אשר $v_k \subseteq O$

הוכחת המשפט: יהי קודקוד v כלשהו בגרף. ונצבע באותו באחד הצבעים. כעת נבחר קוד' אחר v' שעדיין אינו צבוע, ונצבע אותו בצבע השונה משאר הצבעים. נבחין כי דרגת קוד' מקסימלית היא d לכן שאר שכניו יוכלו להיות צבועים בd צבעים ונישאר עם גרף חוקי, כאשר תמיד יהיה צבע פנוי לקוד' v'' . נחזור

על התהליך עד שכל הקוד' יהיו צבועים. לפי הטענה הנשמרת נקבל שלכל *Vk*, $1 \leq k \leq n$ קיים פתרון המוכל בפתרון חוקי *O*, לכן בפרט עבור *Vn* כלומר, צביעה חוקית לכל הקוד'.

טענה נשמרת: לכל *Vk=*$\{v_1, v_{2,...}, v_k\}$ קיים פתרון לצביעה חוקית ב*d+1* צבעים *O* אשר $v_k \subseteq O$

נוכיח באינדוקציה: בסיס: כאשר אף קוד' אינו צבוע, נצבע קוד' בצבע מסוים ונסיים

ה.א: נניח שלאחר *k-1* צביעות קוד' קיים פתרון לצביעה חוקית אשר $v_{k-1} \subseteq O$

צעד: עבור *k* קוד' , ניקח את הקוד' ה*k* ונסתכל על רשימת שכניו, מפני שבצעד ה*k-1* ומטה, קיים פתרון חוקי , ומהעובדה שיש לקוד' לכל היותר *d* שכנים מהגדרת הגרף אזי, שכניו צבועים בלכל היותר *d* צבעים, כלומר נוכל לצבוע אותו בצבע נוסף (יש לנו *d+1*) ונקבל כי קיים פתרון אופטימלי כלשהו , *O'* $v_k \subseteq O'$ פתרון חוקי כנדרש.

זמן ריצה: נבחין כי באלגוריתם זה, בכל איטרציה אנו עוברים על רשימת שכנויות של כל קוד', מפני שהדרגה מקס' היא *d* ונעבור על כל הקוד' (כלומר *n* איטרציות), לכן בסה"כ נקבל זמן ריצה של *O(dn)*.

שאלה 5)

תיאור האלגוריתם: נאתחל *X=*$\{x_1, \dots, x_n\}$ קב' של מס' ממשיים כמתואר במופע $(x_1 \leq x_2 \dots)$
נאתחל משתנה *i=1* המסמל את מס' האינטרוולים וקב' פתרון *G=*∅
While$(x \neq \emptyset)$
עבור x_{min} ברשימה *X* צור אינטרוול $a_i = (x_{min}, x_{min} + 1)$
$G = GUa_i$
נחפש ב*X* את כל המס' אשר נמצאים בטווח a_i -נסמן: X_i
נסיר את קב' מספרים זו :כלומר : $X = X / X_i$
i🡐*i+1*
נחזיר את *G* פתרון אופטימלי, בעל מס' אינטרוולים *i* מינימלי
הוכחת נכונות האלגוריתם
טענה ראשית: האלגוריתם יחזיר פתרון אופטימלי של מס' האינטרוולים באורך 1 אשר מכסים את כל המס' מקב' *X*.
טענה נשמרת: יהיה פתרון אופטימלי *O* לאלגוריתם בעל *K* אינטרוולים, אזי, בכל שלב *l* של האלגוריתם,$1 \leq l \leq k$ קב' האינטרוולים *G* (הפתרון שלנו) מוכלת ב*O* פתרון אופטימלי.
הוכחת טענה ראשית: אם בכל שלב , *l* של האלגוריתם, אנו יודעים לפי הטענה הנשמרת
שהפתרון מוכל בפתרון אופטימלי *O* כלשהו, אזי, בפרט גם עבור השלב האחרון באלגוריתם שלנו נעצור
כאשר הרשימה *X* ריקה כלומר, האינטרוולים יכסו את כל ערכי *X* וגם האינטרוול האחרון יהיה מוכל בפתרון

O אופטימלי.
<u>הוכחת טענה נשמרת:</u>
נוכיח באינדוקציה את הטענה על הצעד l באלגוריתם, כלומר על אינטרוול a_l
בסיס: עבור $i=0$ בשלב זה פתרון G מוכל בכל פתרון אופטימלי.
הנחת האינדוקציה: עבור השלב ה $l-1$, נניח כי הפתרון $G_{l-1} \subseteq O$,כאשר $G_{l-1} = \{a_1, a_2, \dots, a_{l-1}\}$
ו-O פתרון אופטימלי.
צעד: בשלב ה-l , נבחר את x_{l-min} שהינו המס' הקטן ביותר שקיים ברשימה X בשלב זה. כעת נבנה את
האינטרוול הl כך: $a_l = [x_{l-min}, x_{l-min} + 1)$. לפי ה.א , עד שלב זה הפתרון $G_{l-1} \subseteq O$, כאשר O פתרון
אופטימלי כלשהו, לכן, כאשר בשלב זה נכניס אינטרוול חדש אשר כולל את כלל האיברים ב-X אשר שייכים
לאורך הקטע 1 זה, לכן לכל קטע אחר שיכיל את x_{l-min}, במצבו האופטימלי יוסיף איברים מהרשימה
אשר נמצאים במרחק 1 מ-x_{l-min} כלומר, אם נסמן את האינטרוול a'_l ב-O שמכיל את x_{l-min} ניצור פתרון
אופטימלי חדש $O'=(O\ U a_l)/a'_l$. הפתרון חוקי כי עדיין נכסה את כל המס' בX ונקבל במצב זה ש -
$G_l \subseteq O$ כי כעת כללנו גם את האינטרוול ה-l בפתרון האופטימלי. (נבחין כי אם נבחר אינטרוול שיתחיל
לפני x_{l-min} אזי, ממינימליות x_{l-min}, לא נכיל את איבר שנמצא לפניו, ולכן, המצב האידיאלי זה להתחיל
את האינטרוול מ-x_{l-min}, לכן O' טוב לפחות כמו O). אופטימליות האלגוריתם נובעת מכך שכל אינטרוול
ב-G נמצא לפתרון האופטימלי ולכן- $G=O$.
<u>ניתוח זמן ריצה:</u> האלגוריתם רץ לכל היותר n פעמים(במידה ונצטרך n אינטרוולים)
בכל פעם, נוריד את מס' האיברים ב-X שמוכלים באינטרוול,(נעבור על X) ולכן, יש כאן התאמה, בין מס'
הפעמים שנרוץ באלגוריתם לבין מס' האיברים שנוריד מהרשימה, כלומר, לדוג' ,נוריד 2 איברים שמצאנו
שנכללים באינטרוול, אזי כעת האיטרציה הבאה תרוץ מהאיבר השלישי, לכן, בסה"כ זמן ריצה $O(n)$