עבודה 3- תכנון אלגוריתמים

1) א)a) נוכיח את הטענה ונראה כי ריצת דייקסטרה על הגרף הנתון מהצומת s תחזיר עץ מסלולים קלים ביותר. נשתמש בהוכחה בסימונים הנתונים בהוכחת אלגו' דייקסטרה: D_i את הערך של $\text{dist}(v_i)$ ברגע שבו v_i נכנס לקב' S.

ט.ע 1: $D_1 \le D_2 \le \cdots \le D_n$

הוכחת ט.ע 1:

*אבחנה: D_0 לא נכלל, לכן הטענה נכונה, אחרת, מפני שחלק מהצלעות היוצאות מ-s שליליות D_1 היה קטן יותר.

נרצה להוכיח- $\forall i, 1 \le i \le n-1$, $D_i \le D_{i+1}$. באיטרציה ה-i, נרצה להכניס את הקוד' ה-v_i ל-S. לכן, אם בחרנו בקוד' v_i מתקיים כי- $D_i = dist(v_i) \le dist(v_{i+1})$, ובאיטרציה ה-$i$ נבצע את פעולת ה-$relax$ ונעדכן את ערכו של $dist(v_{i+1})$. ולכן, נקבל לאחר העדכון,

$$dist(v_{i+1}) = dist(v_i) + w(v_i\ , v_{i+1}) \ge dist(v_i) = D_i$$

ולכן, בסוף האיטרציה ה-i נקבל כי- $D_i = dist(v_i) \le dist(v_{i+1}) = D_{i+1}$

לפי האבחנה, נראה כי מפני שאין קשתות חוזרות ל-s (ואין מעגל שלילי)אז לכל i שנבחר, הקשתות יהיו קשתות אי שליליות, ורק עבור צלע $w(v_0\ , v_1)$ המשקל שלילי, לכן עובד לכל ערך אחר, כפי שהוכחנו באלגו' דייקסטרה.

ט.ע2: בסיום ריצת האלגו' אין שום relax אפשרי.

הוכחת ט.ע2: עבור קשת (u,v), נפצל ל-2 מקרים:

א)אם u נכנס ל-S לפני v , ז"א שכשהכנסנו את u ל-S ביצענו relax(u,v). ולאחר פעולה זו קיבלנו dist(v)≤ $dist(u) + w(u,v)$ לפי הגדרת relax. ולאחר מכן הערך של dist(v) יכול רק להיות קטן יותר מהגדרת relax. לכן, גם בסיום ריצה:dist(v)≤ $dist(u) + w(u,v)$.

נבחין כי מפני שאין לנו מעגלים שליליים בגרף(אין צלעות הנכנסות אל s שיסגרו מעגל) אז הטענה הזו נכונה.

ב)אם v הוא זה שנכנס קודם, אזי, לפי ט.ע 1 בסיום הריצה מתקיים: dist(v)≤ $dist(u)$. ולכן, גם הטענה :dist(v)≤ $dist(u) + w(u,v)$, מפני שאין צלעות נכנסות ל-s ולכן, כל צלע w(u,v) כזו שנוסיף, תהיה צלע אי שלילית ולכן הטענה מתקיימת. כלומר, לא ניתן לבצע פעולות $relax$ על הקשת (u,v).

ט.ע 3: אם האלגו' עוצר, אזי לכל קוד' u מתקיים $dist(u) = \delta(s,u)$.

הוכחה: נניח בשלילה כי האלגו' עוצר אבל ישנו קשת u כך ש- $dist(u) \ne \delta(s,u)$. אנו יודעים כי: $dist(u) > \delta(s,u)$.לכן, קיים מסלול מ-s ל-u שמשקלו קטן ממש מ-dist(u).

נסמן את מסלול זה ב-P. עבור כל צומת $v \in P$ נסמן את משקל קשתות המסלול מ-s ל-v ב-$w_p(v)$. לכן מההנחה על המסלול נוכל לומר ש: dist(u)> $w_p(u)$ אך מצד שני dist(s)≤ $0 = w_p(s)$.

1. יהי y הצומת ה-1 במסלול P כך ש : dist(y)> $w_p(y)$
2. יהי x הצומת לפני y במסלול. מהראשוניות של y מתקיים dist(v)> $w_p(v)$
3. אין יותר פעולות Relax אפשריות ולכן dist(y)≤ $dist(v) + w(v,y)$
4. כמו כן $w_p(y)$ זהו משקל המסלול מ s ל y כאשר הקודקוד לפני y במסלול זה הוא x ולכן $w_p(y) = w_p(v) + w(u,v)$

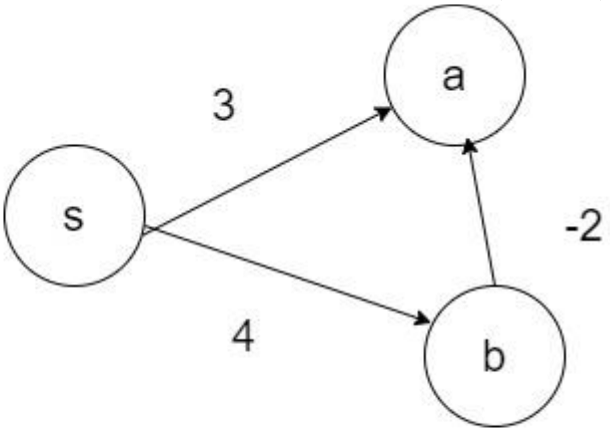
מסעיפים 1,2,3,4מקבלים

$w_p(y)$ < dist(y)≤ $dist(v) + w(v,y) \le w_p(v) + w(u,v) = w_p(y)$ בסתירה.

הוכחת המשפט:

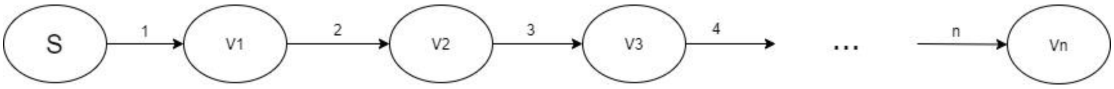
לפי ט.ע 2 אין relax אפשרי, וזהו תנאי העצירה של האלגו'. לכן לפי ט.ע 3 כי אם האלגוריתם עוצר אזי $dist(u) = \delta(s,u)$. בסיום הריצה יתקיים עבור כל v ב-V כי, $dist(v) = \delta(s,v)$. כנדרש.

b)נפריך את הטענה נגדיר קוד' מקור s בגרף הבא , והקשת השלילית הינה (a,b), שאר הקשתות מקיימות את שאר התנאים.



נבחין כעת , כי ע"פ אלגוריתם דייקסטרה, אחרי שנבחר את קוד' s ולאחר ביצוע relax נבחר את קוד' a, כעת, אין קשתות נוספות לבצע relax ונסיים כאשר המרחק שלו נקבע ל-3, ולפי דייקסטרה לא ישתנה יותר. לאחר מכן נרוץ על b ונסיים כאשר המרחק המעודכן הוא 4, כלומר, עץ המסלולים הוא בעל צלעות (s,a) , (s,b) אבל, נבחין כי זה אינו עץ מסלולים קל ביותר. אילו הינו רצים בצורה שונה על הגרף הנתון היינו מקבלים את עץ המסלולים הקל ביותר שהינו הצלעות (b, a) , (s, b) במרחקים 4, 2.

ב) עבור כל n טבעי, נגדיר את הגרף G בצורה הבאה:s-קוד' מקור, v_n קוד' בור.



עבור G וקוד' מקור s , נגדיר סדר ריצה על הגרף של בלמן-פורד של הצלעות בצורה הבאה:

$$(v_{n-1}, v_n), (v_{n-2}, v_{n-1}), \ldots, (s, v_1)$$

נראה דוג' לשלב באיטרציה: עבור השלב ה-1 נבחין כי מכיוון כי אנו רצים על צלעות שמלכתחילה המרחק מעודכן באינסוף, ולכן עבור כל צלע שאינה (s, v_1), לא יתעדכן דבר. וdist של אותו קוד' (פרט לv1), לא יתעדכן. כאשר נתקדם לאיטרציה הבאה, נוכל להבחין כי אנו כרגע בצמצום של הבעיה לתת בעיה שמתחילה מv1 עד v_n, ושוב דבר לא יתעדכן פרט לצלע (v_1, v_2) שתגדיר שינוי ב $dist$ של v_2 בלבד. וכך הלאה, עד שנגיע לשלב האחרון באלגוריתם. כלומר , נקבל כי נבצע את השלב כמרחק של s מהקוד' האחרון, $|V|$-1 איטרציות כנדרש, כאשר בריצה כזו, פונקציית המשקל אינה משנה, ובגרף אין מעגלים שליליים כנדרש.

ג)הטענה נכונה, נבחין כי עבור גרף G ופונק' w כמתואר, נוכל להפעיל את אלגוריתם בלמן-פורד(בלי האופציה של מציאת מעגלים שליליים, לא רלוונטי) מטענה שהוכחנו בכיתה, נוכל להבין כי עבור קב' הקוד' $V^t \subseteq V$, כאשר בקב' נמצאים כל הקוד' שהמסלול הקל ביותר באורך t או פחות מ-s , מתקיים כי בסוף האיטרציה הt $dist(s, u)$=$\delta(s,u)$ לכל $u \in v^t$. בפרט, הטענה נכונה עבור k. לכן, אם כל הקוד'

בגרף, אורך המסלול הקל ביותר הוא לכל היותר k נקבל כי אחרי האיטרציה ה-k, לכל קוד' $v \in V$.
$dist(s, v)=\delta(s,v)$. מפני שנוכל לשמור כפי שאנו יודעים את $\pi(v)$ וכך נדע גם את המסלול עצמו.
לכן ראינו כי נרוץ לכל היותר k איטרציות ונמצא את המסלול הקל ביותר עבור כל קוד' כנדרש, בכל איטרציה של בלמן פורד בודקים את כלל הצלעות לכן זמן ריצה כנדרש $O(k|E|)$.

2)א)עבור גרף $G=(V,E)$ עם פונק' משקל w אי שלילית על הקשתות, תהי צומת $x \epsilon V$. נתאר את האלגוריתם:

1)נבנה גרף נוסף $G^* =(V,E^*)$ ו- w^*,פונק' משקל ,כאשר עבור כל צלע $e=(u, v) \epsilon E$,נגדירה בG^* כצלע $e^*=(v ,u)$ בG^* כאשר $w(e)=w^*(e)$, כאשר בגרף G^* נשמיט את הצלעות היוצאות מ-x ב-G המקורית (כלומר, בגרף G^*, קוד' x יהיה קוד' מקור, ללא צלעות נכנסות)

2)נפעיל אלגוריתם דייקסטרה על G^*,w^* מ-x קוד' מקור, ונשמור את המרחק שקיבלנו מכל קוד'

3)עבור הגרף המקורי, נתבונן בגרף $G'= G/\{E_x\}$כאשר $E_x = \{(v,x)|\forall v \in V, (v,x) \in E\}$. נריץ את אלגוריתם דייקסטרה מx כקוד' מקור, ונשמור את כל המרחקים המינ' עבור כל קוד' מ-x.

4)עבור כל זוג u, v נחשב ונחזיר $\delta(x,u)$ב-G^* +$\delta(x,v)$ בG'.

הוכחת נכונות אלגוריתם:

<u>טענה ראשית:</u> האלגוריתם יחזיר עבור כל זוג צמתים $u, v \in V$ את משקל המסלול המינימלי ביניהם העובר בקוד' x , אם לא קיים מסלול כזה, יוחזר ∞.

<u>טענת עזר 1:</u> בריצת אלגוריתם דייקסטרה בגרף G^*, הריצה חוקית ועבור כל קוד' $u \in V$, כאשר נקבל : $\delta(x,u)$ בגרף G^*, הוא שווה ל $\delta(u,x)$ ב-G. אם אין מסלול כזה בG^*, יוחזר ∞.

<u>טענת עזר 2:</u> בריצת אלגוריתם דייקסטרה בגרף G', הריצה חוקית ועבור כל קוד' $v \in V$, כאשר נקבל : $\delta(x,v)$ בגרף G', הוא שווה ל $\delta(x,v)$ ב-G. אם אין מסלול כזה בG', יוחזר ∞.

<u>אבחנה:</u> $\delta(u,v)=\delta(x,v)+ \delta(u,x)$ ב-G, אשר עובר בהכרח ב-x.

כלומר, במילים: משקל מסלול קל ביותר מu ל-v שעובר בוודאות ב-x הוא איחוד של משקל מסלול קל ביותר מu ל-x ומ-x ל-v.

<u>הוכחת טענה ראשית:</u> יהיו קוד' $u, v \in V$ ונרצה למצוא מסלול ביניהם העובר בצומת x. לפי האבחנה, נחפש את 2 חלקי המסלול, כלומר מu ל-x ומ-x ל-v, ובכך נקבל משקל מסלול קל ביותר מu ל-v העובר בx. 1)לפי טענה 1, כאשר נפעיל דייקסטרה על גרף G^* נקבל $\delta(x,u)$, ערך זה שווה ל-$\delta(u,x)$ ב-G. ריצה זו חוקית, מפני ש$u \in V$, אזי בפרט קיים גם בG^* ולכן לפי אלגו' דייקסטרה יחזור בוודאות הערך.
2) לפי טענה 2, כאשר נפעיל דייקסטרה על גרף G' נקבל $\delta(x,v)$ בG', השווה ל-$\delta(x,v)$ ב-G. ריצה זו חוקית, מפני ש$v \in V$, אזי בפרט קיים גם בG' ולכן לפי אלגו' דייקסטרה יחזור בוודאות הערך.

לכן, לפי האבחנה נקבל כי: $\delta(u,v)=\delta(x,v)+ \delta(u,x)$ כנדרש.

נבחין כי ,במידה ואין לנו מסלול קצר ביותר באחד מהשלבים, ז"א לא קיים מסלול בין u ל-x או x ל-v, לכן הערך של אחד מהם (או שניהם) יהיה ∞ וזה מה שיוזן בערך $\delta(u,v)$.

<u>הוכחת ט.ע 1:</u> יהיה גרף G^* ופונק' משקל w^* כמתואר. יהיה צומת $x \in V$ כמתואר, לכן, לפי תיאור הגרף, אין צלעות נכנסות אל קוד' x (כי תיארנו אותו כגרף הופכי לG, בו כל הצלעות שיוצאות מx בגרף המקורי, אינן קיימות בG^*) נבחין כי לפי הגדרת w^*, משקל הצלעות הוא בדיוק כמשקל הצלעות בG, ולכן , כאשר בG אין צלעות שליליות ,אז גם בG^* אין כזה, ולכן דייקסטרה מקוד' x כקוד' מקור חוקי.

יהיה קוד' $u\in V$, נבחין כי אם יש מסלול בין u ל-x בגרף G המקורי, אזי המסלול יגמר בצלע הנכנסת בx ונעבור בx בדיוק פעם אחת, בסוף. אחרת, אם נמשיך אחרי x, מפני שמשקל הקשתות חיובי, כאשר נחזור שוב, נוכל רק להגדיל את המשקל(או להיות שווים) ובכל מקרה, לא נקטין את המשקל. לכן, אין צורך בקשתות היוצאות מ-x ב-G המקורי(ולכן אין קשתות נכנסות ל-x בG^*).

נבחין בין 2 מקרים: 1) אין מסלול בגרף G^* בין x ל-u, אזי לאחר הרצת דייקסטרה נקבל $dist(u)=\infty$. נניח בשלילה שקיים מסלול בG מu ל-x (משקל לא אינסוף) ונסמנו $P=(u,\dots,x)$ אזי, אם נהפוך את כיווני הצלעות (מתאים להגדרת G^*) נקבל מסלול $P^*=(x,\dots u)$. בסתירה לאי קיום המסלול בG^*. לכן אין מסלול בG^* בין x לu אמ"מ אין מסלול בין u ל-x ב-G(הוכחה בכיוון השני, זהה, לכן אמ"מ)

2)קיים מסלול בגרף G^* בין x לu. יהיה $P^*=(x,\dots,u)$ המסלול המינ' שנמצא לפי דייקסטרה. אזי, $w^*(P^*)=\delta*(x,u)$. לכן, לפי הגדרת G^*, נוכל לקבל מסלול הפוך בגרף G $P=(u,\dots,x)$ כאשר $w(P)=w^*(P^*)$. נניח בשלילה כי קיים בP מסלול קל יותר מu ל-x. יהיה P' כזה, נבחין, כי אם אינו מכיל צלעות מהצורה (x,v) ב-G אזי, כל הצלעות קיימות גם בG^* וצריכות להשלים מסלול מינ' בG^* שאינו P^*, בסתירה למינ' P^* לפי אבחנה שראינו מלעיל, מסלול מינ' יעבור ב- x בדיוק פעם אחת ב-G לכן צלעות (x,v) אינן קיימות ב P' לכן, P' אינו מינימלי בסתירה. כלומר, נקבל כי (x,u) בגרף G^*, שווה ל $\delta(u,x)$ ב-G כנדרש.

<u>הוכחת ט.ע 2:</u> יהיה גרף G' ופונק' משקל $w'=w$ כמתואר. יהיה צומת $x\in V$ כמתואר, לכן, לפי תיאור הגרף, אין צלעות יוצאות מקוד' x. נבחין כי כעת, הגרף מוגדר כמו הגרף המקורי, ללא צלעות היוצאות מ-x, והמשקלים זהים לגרף G לכן הגרף בעל משקולות חיוביות ונוכל להריץ דייקסטרה באופן חוקי מx. נבחין כעת שוב, כי מסלול בעל משקל מינ' ב-G, לא יחזור לקוד' x, מפני שאם יצאנו ממנו פעם אחת, לא נצטרך לצאת ממנו פעם שנייה (כל המשקולות חיוביים, לכן נסתור את מינ' המשקל), לכן, הורדת צלעות הנכנסות אל x בריצת האלגוריתם לא רלוונטיות ולא יופיעו במסלולים מינ' אפשריים מ-x ל-v. כלומר, הריצה תהיה זהה, ותחזיר משקלים ומסלולים זהים. לכן, מפני שהגרף הינו זהה לגרף G פרט לצלעות הנכנסות ל-x נקבל כי לאחר הפעלת אלגו' דייקסטרה , נקבל כי

$\delta(x,v)$ בגרף G'= $\delta(x,v)$ ב-G כנדרש. מפני שהאלגוריתם רץ בצורה זהה, אם אין מסלול בG' יוחזר אינסוף, וכך גם בG.

<u>ניתוח זמן ריצה:</u> נבחין כי ריצת אלגו' דייקסטרה מתבצעת באופן בלתי תלוי פעמיים לכן זמן הריצה יהיה $O(|E|+|V|*Log|V|)$, עבור החזרת הפלט נוכל להכניס את כל הערכים למערך דו מימדי מגודל $|V|X|V|$

ובכל תא לשים את הערך $\delta(x,v)$ בגרף G'+(x,u) בגרף G^*, כלומר זמן ריצה של $O(|V|^2)$.

2)ב) נשתמש בשיטת הרדוקציה כדי לפתור את הבעיה הנתונה.

<u>תיאור מילולי של האלגוריתם:</u>

1)<u>ממיר קלט:</u> בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$ וזוג צמתים$s,t\in V$ ותת קבוצה של צמתים $U\subseteq V$. נבנה גרף מכוון חדש $G'=(V',E')$ כך ש$V=V'$ ועבור כל קשת $(u,v)\in E$ ניצור שתי קשתות מכוונות $(u',v')\in E'$ וגם $(v',u')\in E'$ בעל פונקציית משקל $w:E'\rightarrow R+$ שמגדירה משקל בצורה הבאה: $w(u',v')=1$, $\forall (u',v')\in E' | v'\in U$ אחרת $w(u',v')=0$ (כלומר הצלע נכנסת אל אחד מהקודקודים ששייך לקבוצה U).

2) בשלב זה נפעיל את אלגוריתם דייקסטרה על גרף G', החל מקודקוד מקור s (ניתן לעשות זאת כי כל המשקלים אי שליליים).

3) <u>ממיר פלט:</u> בהינתן הפלט של אלגוריתם דייקסטרה לו מצאנו את המסלול בעל המשקל המינימלי מקודקוד מקור s בגרף G' לכל קודקוד. נבחר את המסלול שיתקבל עבור t, ואותו מסלול שקול לפתרון למציאת מסלול העובר בכמות מינימלית של צמתים מהקבוצה U בגרף G בין s ל t.

<u>**הוכחת נכונות האלגוריתם:**</u>

<u>משפט:</u> בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$ עם זוג צמתים $s, t \in V$ ותת קבוצה של $U \subseteq V$ האלגוריתם יחזיר כפלט את המסלול העובר במספר מינימלי של צמתים מהקבוצה U , אם לא קיים כזה יוחזר ∞.

<u>אבחנה:</u> אם s ,t הם קוד' ב-U לא נתייחס למקרה זה, שכן כל מסלול ביניהם חייב לעבור בהם.

<u>ט.ע:</u> קיים מסלול P' בעל משקל קל ביותר מקודקוד מקור s לt בגרף G' אמ"מ אותו מסלול(על פי אותו סדר מעבר צלעות) בין s לt בגרף G עובר במספר מינימלי של צמתים מהקבוצה U .

<u>הוכחת המשפט:</u> יהי גרף G כמתואר עם זוג צמתים s ,t כמתואר וקבוצה U נפעיל את ממיר הקלט ונקבל גרף G' מכוון, ובו פונקציית משקל w עבורה כל משקלי הצלעות בגרף G' חיוביים. לכן נוכל להפעיל את אלגוריתם דייקסטרה מקודקוד s. לכן על פי טענת העזר נקבל פתרון למציאת מסלול מ-s לt העובר במספר מינימלי של צמתים מהקבוצה U . לפי האלגוריתם אם אין מסלול בגרף G' בין s לt אז גם לא יהיה ביניהם בגרף G ונחזיר ∞ שאנו נקבל כפלט מגרף G' .

<u>הוכחת ט.ע:</u> ← יהי גרף G ובו מסלול בין s ל t העובר במספר מינימלי של צמתים מהקבוצה U נסמנו P=(s,…,t) אזי נבחין כי בגרף G' לכל $P \ni$(u ,v) מגדירה צלע מכוונת בעלת משקל בגרף G' , יהי המסלול P'=(s,…,t) המוגדר על אותן צלעות של P . נניח בשלילה כי קיים מסלול P*=(s,…,t) בגרף G' בעל משקל מינימלי קטן מ P' . נגדיר קבוצה $E_1 = \{(u',v')|(u',v')\epsilon P'/P^*\}$ וקבוצה

$E_2 = \{(u',v')|(u',v')\epsilon P^*/P'\}$. לפחות אחת מהקב' לא קב' ריקה, אחרת המסלולים זהים או לא קיימים. לכן, מההנחה ש P' כעת המינימלי, נסיק כי , $w(E_1) < w(E_2)$, ולפי הגדרת G' נקבל כי עבור הגרף המקורי G המסקנה היא שבגרף G ,במסלול המתאים ל P' עברנו בפחות צמתים ממסלול P המקורי המוגדר לפי P^* בסתירה למינימליות P.

→ יהי מסלול P' בעל משקל קל ביותר בגרף G' מקוד' s לקוד' t. נסמנו $P'=(s,...,t)$. לפי הגדרת G', הגרף בנוי לפי קשתות מG ונגדיר את המסלול P המתאים ב-G $P=(s,...t)$. נניח בשלילה שקיים מסלול ב-G שעובר בפחות צמתים מקב' U. יהיה מסלול P^* המסלול המינימלי לפי ההנחה. נגדיר קבוצה=E_1 $\{(u,v)|(u,v)\epsilon P/P^*\}$ וקבוצה $E_2 = \{(u,v)|(u,v)\epsilon P^*/P\}$.

לכן, לפחות אחת מהקב' לא ריקה, אחרת המסלולים היו זהים או שאחד מהם ריק. לפי ההנחה בשלילה נוכל להסיק כי בקב' E_1 קיימות יותר צלעות הנכנסות אל קוד' מקב' U, ולכן, לפי הגדרת G', הצלעות במסלול P' ב-G' הממושקלות ב-1 ולא ב-0 גדול מאשר במסלול המתאים ל-P^* בסתירה להנחה שהמסלול P' בעל משקל מינימלי.

ניתוח זמן ריצה: עבור ממיר הקלט: יצירת הגרף החדש ויצירת פונק' המשקל המתאימה, יצירת צלעות ב-2 הכיוונים לא משנה, עדיין לינארי בE,V לכן, $O(|V|+|E|)$

הפעלת דייקסטרה על G', כאשר מס' קוד $|V|$ ומס' צלעות בדיוק $2|E|$ לכן, $O(|E|+|V|*|LogV|)$

ממיר הפלט: ראינו כי המסלול שנקבל בG' זהה למסלול שנקבל מדייקסטרה: לכן בשחזור המסלול נחזיר את הערך שחוזר מדייקסטרה, עבור מסלול P- $O(P)$. לכן בסה"כ ריצה:$O(|E|+|V|*|LogV|)$.

3)נשתמש ברדוקציה ע"מ לתאר את האלגוריתם:

<u>תיאור מילולי של האלגוריתם: ממיר הקלט:</u> בהינתן גרף *G=(V,E)* וקוד' מקור $s\in V$ ופונק' צביעה *c* על קשתות הגרף, נבנה גרף חדש *G'=(V',E')* באופן הבא: קב' הקוד' *V'* תגדיר עבור כל קוד' $v \in V$ / *s* בגרף *G* שני קוד' בגרף *G'*, v'_b, v'_p(עבור צבע כחול וסגול). עבור קוד' *s* נגדיר אותו כאותו קוד' מקור.בנוסף, נגדיר פונק' משקל *w* על צלעות *G'* עליה נרחיב בהמשך. נגדיר את קב' הצלעות *E'* בצורה הבאה: 1) $\forall v, e = (s, v)\epsilon E$, צבע *c(e)* יגדיר את הצלע ב*G'* כאשר אם הצבע סגול אז $e' = (s, v'_p)\epsilon E'$, אחרת, $e' = (s, v'_b)\epsilon E'$. על צלעות אלה נגדיר את המשקל *w(e')=0*

2)$\forall e, e = (u, v)\epsilon E, u \notin s$, נניח בה"כ כי *c(e)=purple*נתבונן בצלעות הנכנסות אל *u*, אם קיימת צלע ב-*G* (*k* ,*u*) עבורה *c(k, u)=blue*, נגדיר צלע ב-*G'* כך: *e'*=$(u'_b, v'_p)\epsilon E'$, *w(e')=1*.

אם קיימת צלע ב-*G* (*r, u*) עבורה *c(r, u)=purple*, נגדיר צלע ב-*G'* כך: *e'*=$(u'_p, v'_p)\epsilon E'$, *w(e')=0*.

כלומר, עבור קוד' שקיימת בו החלפה(נכנס אליו צבע אחד ויש לו צלע היוצאת בצבע אחר) נגדיר את הצלע המתחלפת במשקל 1, ואם המסלול נשאר באותו צבע המשקל 0. בה"כ, המקרה עבור צלע הצבועה בכחול, המקרה זהה רק מוגדר בהתאם לצבעים.

כעת, נפעיל אלגוריתם דייקסטרה ב-*G'* היוצא מקוד' *s* .

<u>ממיר הפלט:</u> לכל קוד' $v \in V$ / *s*, נחזיר $min\{\delta(s, v'_b), \delta(s, v'_p)\}$ כפתרון לבעיה של מס' החלפות מינימלי(עבור *s* יחזור תמיד 0).

הוכחת נכונות האלגוריתם:

<u>משפט:</u> בהינתן גרף *G* וקוד' *s* כמתואר, האלגוריתם יחזיר מס' מינימלי של החלפות צבע במסלול כלשהו *P* מבין כל המסלולים מ-*s* ל-*v* לכל $v \in V$.

<u>טענת עזר:</u> בגרף *G*, מסלול $P=(s, v_1, v_2, \dots v)$ מסויים מ*s* ל-*v* בעל *cc(P)=x*אמ"מ מסלול בגרף *G'*לקוד' v'_b/v'_p כך ש: $P'=(s, v'_{1b/p}, v'_{2b/p}, \dots, v'_{b/p})$ כאשר *w(P')=x*.

<u>טענת עזר2:</u> בגרף *G* קיים מסלול בין *s* ל*v* אמ"מ קיים מסלול ב-*G'* בין *s* לv'_b/v'_p.

<u>אבחנה:</u> לפי הגדרת *G'*, כל מעבר בה"כ מקוד' מהצורה $v'_{(i)b}$ אל קוד' $v'_{(i+1)p}$, מוגדרת לפי החלפת צבעים בין צלעות העוברות בקוד' בגרף המקורי *G*.

<u>הוכחת המשפט:</u> יהיה גרף *G* כמתואר, אזי , נפעיל עליו את ממיר הקלט ונקבל גרף *G'* כמתואר. לאחר שנפעיל את הקופסא השחורה(אלגו' דייקסטרה), נקבל משקלים מינימליים מ- *s*עבור כל קוד' *v'* .. נתבונן במשקל מסלולים מינימליים מ-*s* אל צמד קוד' v'_b, v'_p, ונקבל לפי אלג' דייקסטרה את $\delta(s, v'_b), \delta(s, v'_p)$, כלומר, משקלים מינימליים של המסלולים. לפי ט.ע2, קיימים מסלולים *P1,P2* בגרף *G* מ-*s* ל*v* כאשר,לפי ט.ע 1 *cc(P1)=* $\delta(s, v'_b)$,*cc(P2)=* $\delta(s, v'_p)$, נבחר את המינ' מבין מסלולים אלה(כי מטרתנו היא מס' החלפות מינימלי), נניח בשלילה כי קיים מסלול ב-*G* מ*s* ל-*v* בעל מס' החלפות קטן יותר. לכן, לפי הט.ע קיים מסלול מ*s* ל$v'_{b/p}$ בעל משקל זהה, כלומר, קטן יותר מ- δ בסתירה. כלומר, קיבלנו את מס' ההחלפות המינימלי כנדרש. *נבחין כי אם אין מסלולים כאלו ב-*G'* לפי ט.ע 2 , אין מסלול גם ב-*G*, כלומר נקבל כי $\infty = min\{\infty, \infty\}$=$min\{\delta(s, v'_b), \delta(s, v'_p)\}$, כנדרש.■

<u>הוכחת ט.ע2:</u>→ יהיה מסלול ב*G'* בין *s* לv'_b/v'_p.נניח בה"כ מסלול ל-v'_b. נגדיר אותו $P'=(s, v'_{1b/p}, v'_{2b/p}, \dots, v'_b)$. תהי הצלע : $(v'_{ib/p}, v'_{(i+1)b/p})\epsilon P'$ לכן, לפי הגדרת *G'* היא

מוגדרת לפי צלע ב-G, (v_i, v_{i+1}), הטענה נכונה עבור כל צלע ב-P', לכן קיים מסלול ב-G אשר הינו $P=(s,v_1, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v)$.

← יהי מסלול ב-G מ-s ל-v ונסמנו: $P=(s, v_1, v_2, \dots v)$. נבחין כי לכל צלע $e=(v_i, v_{i+1})\epsilon P$ יש צבע מסוים לפי הגדרת G, נניח בה"כ כחול. כעת נתבונן בצלע $(v_{i-1}, v_i)\epsilon P$, אשר גם לה יש צבע מסוים. נבחין כי אם צבעה כחול, נקבל צלע בגרף החדש $e'=(v'_{ib}, v'_{(i+1)b})\epsilon P'$. אחרת אם צבעה סגול נקבל את הצלע $e'=(v'_{ip}, v'_{(i+1)b})\epsilon P'$. כעת נתבונן בקשת $k=(v_{i+1}, v_{i+2})\epsilon P$, אזי לפי צבע הקשת, נוכל להמשיך את הצלע e' בגרף G'. כלומר, אם צבע הצלע e כחול, נבחין כי הקשת k מגדירה לפי בחירת G', כך ש $k'=(v'_{(i+1)b}, v'_{(i+2)p/b})$, נבחין כי הקשת e' נכנסת אל קוד' $v'_{(i+1)b}$ ב-2 המקרים, כנדרש להמשכת מסלול ב-G' לכן ישנה המשכיות, ונוכל לכל קשתות אלה לבנות מסלול $P'=(s, v'_{1b/p}, v'_{2b/p}, \dots, v'_b)$.

<u>הוכחת ט.ע1:</u> ← נניח בגרף G, מסלול $P=(s, v_1, v_2, \dots v)$ מסויים מs ל-v בעל $cc(P)=x$ לפי ט.ע 2, אנו יודעים כי בהכרח קיים מסלול גם בגרף G' מקוד' s ל-$v'_{b/p}$. נניח בה"כ שהצלע האחרונה ב-P הנכנסת אל v היא כחולה, לכן נגדיר מסלול $P'=(s, v'_{1b/p}, v'_{2b/p}, \dots, v'_b)$. נניח בשלילה כי $w(P')\neq x$. נחלק ל2 מקרים:1) $w(P')> x$, כלומר, קב' הקשתות עם משקל 1 ב-P' גדול מאשר החלפות הצבעים ב-P המתאים. אנו יודעים כי כל צלע מוגדרת לפי צלע כלשהי ב-G אזי קיימת לפחות צלע אחת $e'=(v'_{ib}, v'_{(i+1)b})\epsilon P'$ אשר משקלה 1, והצלע המתאימה $e=(v_i, v_{i+1})\epsilon P$ לפי הגדרה G' אמורה להחליף צבע אך לא החליפה, בסתירה להגדרת הגרפים.

2) $w(P')< x$ כלומר, קב' הקשתות עם משקל 1 ב-P' קטן מאשר החלפות הצבעים ב-P המתאים. מקרה זה דומה, אך כעת קיימת צלע ב-P שלפניה הופיעה צלע בצבע אחר, אך הצלע ב-P' הוגדרה ללא משקל, סתירה להגדרה.

← נניח מסלול בגרף G' לקוד' v'_b/v'_p כך ש: $P'=(s, v'_{1b/p}, v'_{2b/p}, \dots, v'_{b/p})$ כאשר $w(P')=x$. אזי לפי ט.ע 2, קיים מסלול המוגדר: $P=(s, v_1, v_2, \dots v)$. נניח בשלילה כי $cc(P)\neq x$. נניח בה"כ כי $cc(P) < x$. כלומר, קב' הצלעות בעלות משקל 1 >קב' ההחלפות צבעיים של הצלעות במסלול P. לפי האבחנה, כל החלפה ב-G מוגדרת ב-G', אם הגיעה לאחר צלע בצבע אחר בצלע בין קוד' בה"כ $v'_{(i)b}, v'_{(i+1)p}$, ועל צלע כזאת הגדרנו משקל 1. לכן, אם גודל קב' הצלעות עם משקל 1 גדול יותר, אז ישנה לפחות צלע אחת ב-G', שאינה מגדירה חילוף, בסתירה להגדרה.■

<u>ניתוח זמן ריצה:</u> עבור שלב ממיר הקלט: בניית גרף G' עם $2V$-1 קוד' תדרוש לעבור על צלע וקודמתה, ונבנה עבור כל צלע לכל היותר 2 צלעות נוספות בגרף G'.(אם מוגדר חילוף צבעים, אך אם יש צלע נוספת בצבע דומה שנכנסת אל הקוד', נוסיף גם צלע במשקל 0).

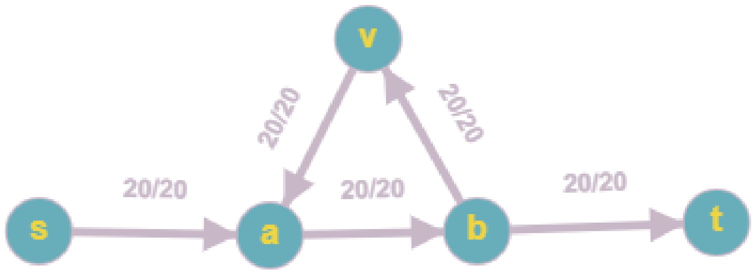
לכן זמן ריצה $O(2|E|+2|V|)=O(|V|+|E|)$.

עבור הקופסא השחורה: אלגוריתם דייקסטרה: $O(|E|+|V|log|V|)$.

ממיר הפלט: לכל v, נעבור על כל זוג קוד' v'_b, v'_p ונחזיר את המינימום מביניהם, $O(2|V|)=O(|V|)$

לכן בסה"כ נקבל: $O(|E|+|V|log|V|)$.

4)א)נפריך ע"י דוג' נגדית:



נבחין כי זרימה חוקית ב- $N1$ מ-s ל-v תהיה במסלול $P1=(s,a,b,v)$.הינה זרימה חוקית בגודל 20

זרימה חוקית ב- $N2$ מ-v לt תהיה במסלול $P2=(v,a,b,t)$. הינה זרימה חוקית בגודל20

כאשר סכום הזרימות הנתונות מגדירה על הקשת (a,b) בגודל 40 (כי נכנס אליה 40) בסתירה לקיבולת שלה (20)לכן סכום הזרימות אינן זרימה חוקית בגודל 20.

4)ב)