

Computografie und

Animation

SS 2013

Vorlesungsmitschrift aus SS 2013

Herr Prof. Schömer

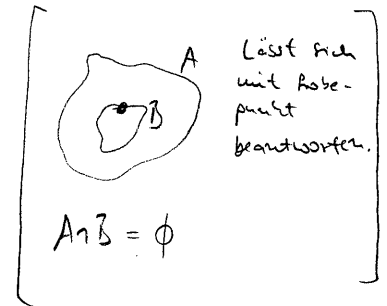
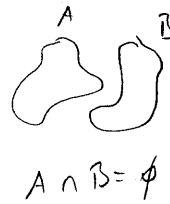
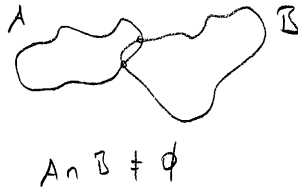
Universität Mainz, Informatik

Kollisionserkennung:

Gegeben: 2 Objekte in B-Rep. / Dreiecksnetze, starre Körper A und B

↑ Oberflächenbeschreibung

Frage: $A \cap B = \emptyset$?

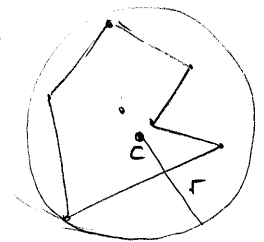


Idee: Verwende Kugeln zur Approximation

Bestimmung einer Kugel: Gegeben eine Menge von Punkten $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ von Punkten im \mathbb{R}^d

Gesucht: Kugel, eine "gute" einschließende Kugel $K = (c, r)$

Vorgehensweise: Bestimme Schwerpunkt, $c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i$
" Radius $r^2 = \max_{i=1..n} (p_i - c)^2$



Bestimmung eines Kugelquaders: (achsenorientiert, AABB)

Gesucht: kleinster einschließender achsenorientierter Quader $Q = [x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}] \times \dots$

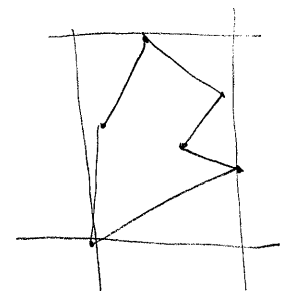
$$x_{min} = \min_{i=1..n} p_{ix}$$

y, z analog

$$x_{max} = \max_{i=1..n} p_{ix}$$

Laufzeit $\mathcal{O}(d \cdot n)$

n: Anzahl Punkte
d: Dimension



Kollisionserkennung für AABB's

$$Q_A = [x_{min}^A, x_{max}^A] \times [y_{min}^A, y_{max}^A] \times [z_{min}^A, z_{max}^A]$$

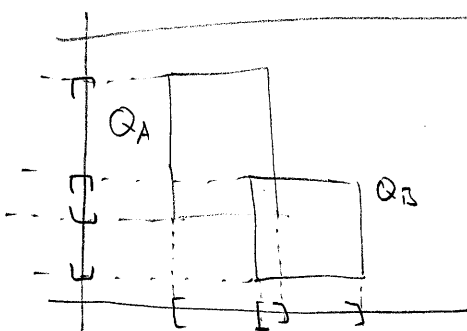
$$Q_B = [x_{min}^B, x_{max}^B] \times \dots$$

$$Q_A \cap Q_B = \emptyset \iff$$

$$\begin{aligned} & [x_{min}^A, x_{max}^A] \cap [x_{min}^B, x_{max}^B] = \emptyset \\ \text{oder} & [y_{min}^A, y_{max}^A] \cap [y_{min}^B, y_{max}^B] = \emptyset \\ \text{oder} & [z_{min}^A, z_{max}^A] \cap [z_{min}^B, z_{max}^B] = \emptyset \end{aligned}$$

Beweis: " \Leftarrow " klar

" \Rightarrow " indirekt $\neg(A \cap B) = \neg A \vee \neg B$



Hüllquader mit bel. Orientierung (OBB's)

Gesucht: gute Orientierung

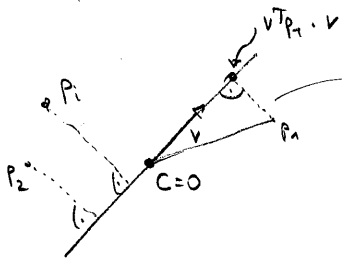
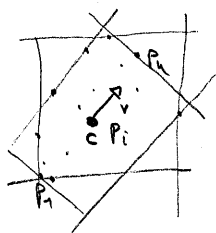
[beste ist zu teuer, O(n³) für 3D]

1. Schritt

Schwerpunktbestimmung

$$c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i$$

verschiebe Punkte, so dass $c=0$



Pythagoras

$$\min_v \sum_{i=1}^n p_i^2 - (v^T p_i)^2$$

alternativ: verwende Kreuzprodukt

$$= |p \times v|^2 = (p \times v)^T (p \times v) = p^2 \cdot v^2 - (p^T v)^2$$

[Suche Gerade, die quadratische Abstände minimiert]

(Lagrange-Identität:

$$(a \times b)^T (c \times d) = (a^T c) \cdot (b^T d) - (a^T d) \cdot (b^T c)$$

VL2

Minimierungsproblem unter Nebenbedingung

$g, f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ (stetig, diffbar, ...) $\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$ unter NB $g(x) = 0$

Lagrange-Parameter

Lagrange-Funktion

$$L(x) = f(x) + \lambda g(x)$$

notwendige Bed. für lokales Minimum

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g(x)}{\partial x} = 0$$

$$PL = Pf + \lambda \nabla g = 0$$

Gradienten zeigen im Optimum in die gleiche Richtung

$$L(v) = \sum_{i=1}^n p_i^2 - (p_i^T v)^2 + \lambda (v^2 - 1)$$

$$(p_i^T v)^2 = (v^T p_i)(p_i^T v)$$

$$= \sum_{i=1}^n p_i^2 + \sum_{i=1}^n v^T p_i p_i^T v + \lambda (v^2 - 1)$$

Distributivgesetz

$$= \sum_{i=1}^n p_i^2 - v^T \left(\sum_{i=1}^n p_i p_i^T \right) v + \lambda (v^2 - 1)$$

$p_i p_i^T$: dyadisches Produkt

$$C := \sum_{i=1}^n p_i p_i^T = \begin{bmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i y_i & \sum x_i z_i \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$$

Kovarianz-Matrix

$$\frac{\partial L}{\partial v} = -2 \left(\sum_{i=1}^n p_i p_i^T \right) \cdot v + \lambda \cdot 2v = 0 \Leftrightarrow$$

$$Cv = \lambda v$$

Eigenwertproblem

→ charakteristisches Polynom $\det(2I - C) = 0$
 $=: \chi_C(\lambda)$

Eigenwerte sind gerade die Nullstellen des char. Polynoms $\chi_C(\lambda)$

Formelsammlung:
matrixcook-book

$$f(x) = x^T A x \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^d, A \in \mathbb{R}^{d \times d}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (A + A^T)x$$

← Übungsaufgabe!

nachgerechnet für d=3 an der Tafel

Es gilt $C = C^T$, C ist symmetrisch \Rightarrow Eigenwerte sind reell

C ist positiv ^{sem} definit \Rightarrow alle Eigenwerte sind ~~positiv~~ nicht negativ

\uparrow
 A heißt positiv ^{sem} definit $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : x^T A x \geq 0$

für C : $x^T C x = x^T (\sum p_i p_i^T) x = \sum (p_i^T x)^2 \geq 0$

\rightarrow Es existieren 3 lokale Optima,

$\min_{v \in \mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^m p_i^2 - (p_i^T v)^2$ unter der Nebenbedingung $|v|^2 = 1$

$= \min_{v \in \mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^m p_i^2 - v^T C v = \min_{\substack{v \in \mathbb{R}^d \\ \|v\|=1}} \sum_{i=1}^m p_i^2 - v^T C v = \sum_{i=1}^m p_i^2 - \max_{\substack{v \text{ Eigenvektor von } C \\ \|v\|=1}} \lambda(v)$

○

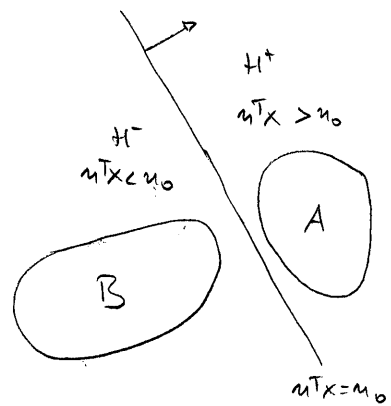
Algorithmus zur Bestimmung einer DBB zur Punktmenge $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$

1. Bestimme Kovarianzmatrix $C = \sum_{i=1}^m p_i p_i^T$
2. Wähle als Achsenrichtungen der DBB die Eigenvektoren von C . Diese stehen senkrecht aufeinander

Lemma von der separierenden Ebene (SAT)

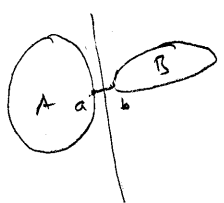
○ Seien A und B 2 konvexe Körper.

$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \exists \text{ Ebene } H : A \subseteq H^+, B \subseteq H^-$



Bew. " \Leftarrow " klar

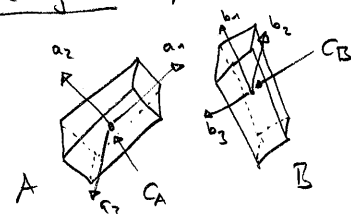
" \Rightarrow " Beweisidee: $A \cap B = \emptyset$, Finde ein Punktepaar (a, b) mit $a \in A, b \in B$, das minimalen Abstand aufweist. Normalenvektor von H entspricht $b - a$.



Nun geht Konvexitätsbeziehung mit ein...

Spezialfall: A und B sind Quader (ORB)

Halbachsenlängen α_i, β_i



$R_A = [a_1 \ a_2 \ a_3]$

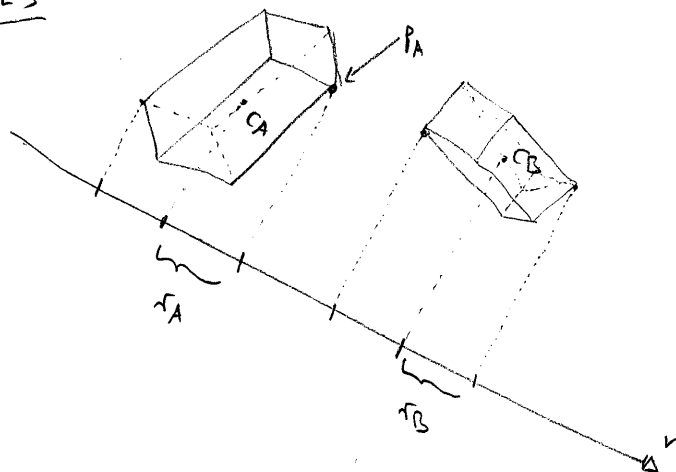
$R_B = [b_1 \ b_2 \ b_3]$

Vertices von A :

$V = c_A \pm \alpha_1 a_1 \pm \alpha_2 a_2 \pm \alpha_3 a_3$

\rightarrow 2³ viele \pm Möglichkeiten zur Kombination

nächste Woche SAT Theorem



Halbachsenlängenvektoren α, β

$\|v\|=1$ (wird später nicht mehr notwendig sein)

$$|v^T(c_B - c_A)| > r_A + r_B$$

$\Rightarrow A$ und B disjunkt

Sei P_A eine Ecke von A , Eckenmenge von A : V_A

$$P_A = c_A \pm \alpha_1 a_1 \pm \alpha_2 a_2 \pm \alpha_3 a_3$$

← Durch Vorzeichenwahl kann man alle Ecken erreichen

Ecke in maximaler und minimaler Richtung v

$$\min_{P_A \in V_A} \{v^T P_A\}$$

$$\max_{P_A \in V_A} \{v^T P_A\}$$

↑

$$\max_{P_A \in V_A} v^T (c_A \pm \alpha_1 a_1 \pm \alpha_2 a_2 \pm \alpha_3 a_3) = v^T c_A + \alpha_1 |v^T a_1| + \alpha_2 |v^T a_2| + \alpha_3 |v^T a_3|$$

$$\Rightarrow r_A = \sum_{i=1}^3 \alpha_i |v^T a_i|$$

Der Test ist nun: $|v^T(c_B - c_A)| > \sum_{i=1}^3 \alpha_i |v^T a_i| + \beta_i |v^T b_i| \Rightarrow A \cap B = \emptyset$

↑ v geht linear ein, d.h. $\|v\|=1$ nicht notwendig (kann gespeichert)

Separating Axis Test für OBBS

Gegeben zwei OBBS A und B mit Halbachsenlängen α_i, β_i $i=1,2,3$ und den Schwerpunkten c_A und c_B und den Orientierungen P_A und P_B , dann gilt:

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \exists v \in \{a_i \mid i=1,2,3\} \cup \{b_i \mid i=1,2,3\} \cup \{a_i \times b_j \mid 1 \leq i,j \leq 3\}$$

$$|v^T(c_B - c_A)| > \sum_{i=1}^3 \alpha_i |v^T a_i| + \beta_i |v^T b_i|$$

Beweis: Verweis auf SAT

ZZ dass obige 15 Richtungen für v ausreichen.

" \Rightarrow " betrachte das nächstgelegene Punktpaar $(P_A, P_B) \in A \times B$

$v = P_B - P_A$. Bewege A und B in Richtung v aufeinander zu bis Berührung eintritt. Betrachte mögliche Berührungssituationen.

mögliche Beziehungen:

- 1) Ecke von A \leftrightarrow Fläche von B
- 2) Ecke von B \leftrightarrow Fläche von A
- 3) Kante von A \leftrightarrow Kante von B
- 4) " " B \leftrightarrow " " A

Übungsaufgabe

SAT für
Dreiecke

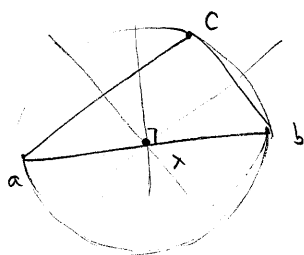
Eutratete Fälle sind durch (1)-(4) auch abgedeckt:

Ecke \rightarrow Kante

Ecke \rightarrow Ecke

Algorithmus von Emo WELZL zur Bestimmung der kleinsten
einschließenden Kugel für eine Punktmenge $P = \{P_1, P_2, P_3, \dots, P_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$

○ Kriterium für ein Dreieck



im 2D: Schnitt der Mittelsenkrechten
für höhere Dimensionen?

algebraisch

$$(x-a)^2 = r^2 \rightarrow 1) x^2 - 2a^T x + a^2 = r^2$$

$$(x-b)^2 = r^2 \rightarrow 2) x^2 - 2b^T x + b^2 = r^2$$

$$(x-c)^2 = r^2 \rightarrow 3) x^2 - 2c^T x + c^2 = r^2$$

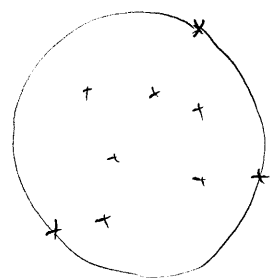
$d+1$ Gleichungen
 \rightarrow $d+1$ Punkte i.a.

$$2) - 1) \quad 2(a-b)^T x + b^2 - a^2 = 0$$

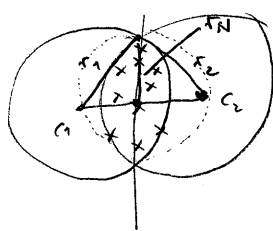
$$3) - 1) \quad 2(a-c)^T x + c^2 - a^2 = 0$$

Problem bei kollinearen Punkten

$d=2$



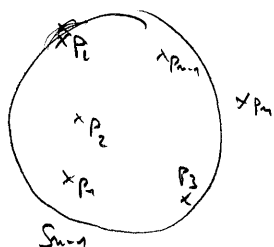
Beweis der Eindeutigkeit:



r_N nach Pythagoras kleiner als r_1 und r_2

Annahme: Problem sei gelöst für $n-1$ Punkte:

S_{n-1} sei kleinste einschließende Kugel für die Punkte $\{P_1, \dots, P_{n-1}\}$



$$\text{Fall 1: } P_n \in S_{n-1} \Rightarrow S_n = S_{n-1}$$

$$\text{Fall 2: } P_n \notin S_{n-1} \Rightarrow P_n \text{ liegt auf Rand von } S_n : P_n \in \partial S_n$$

Idee des Algorithmus von WELZL

Sphere SES (Pointset P, Pointset R) {

- // suche kleinste einschließende Kugel für P unter der
- // Nebenbedingung, dass Punkte aus R auf dem Rand liegen

Sphere S(R); // Erfüllung der Nebenbedingung: R auf dem Rand, $|R| \leq d+1$

for ($i=1; i \leq |P|, i \leq i++$) // nimm inkrementell einen Punkt nach dem
// anderen hinzu

if ($p_i \notin S$)

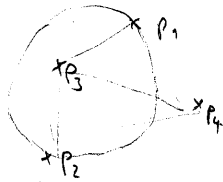
$S = \text{SES}(\{p_1, p_2, \dots, p_{i-1}\}, R \cup \{p_i\})$;

return S;

}

Beispiele

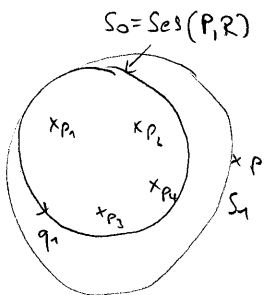
Siehe Übungsblatt



Welzel 2D

16. Mai

VL 4



Füge neuen Punkt hinzu p

$$S_1 = \text{SES}(P \cup \{p\}, R) = \begin{cases} S_0 & \text{falls } p \in S_0 \\ \text{SES}(P, R \cup \{p\}) & \text{falls } p \notin S_0 \end{cases}$$

Annahme: $p \notin \partial S_1$

Beweisidee: Transformiere S stetig in S_1 , so dass die Punkte aus P im Inneren bleiben und die Punkte aus R auf dem Rand

$$S(\lambda) = (1-\lambda)S_0 + \lambda S_1$$

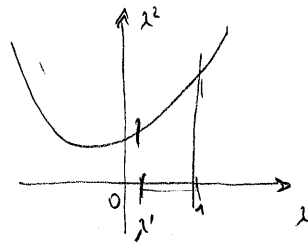
$$\lambda \in [0,1]$$

$$S_i = \{x \mid (x-c_i)^2 - r_i^2 \leq 0\}$$

$$S(\lambda) = \{x \mid (1-\lambda)((x-c_0)^2 - r_0^2) + \lambda((x-c_1)^2 - r_1^2) \leq 0\}$$

- $S(\lambda)$ ist eine Kugel mit Mittelpunkt c_λ und Radius r_λ

- r_λ^2 ist quadratische Funktion in λ



← Übung

Sei $p' \in P$ $p' \in S_0$ $p' \in S_1 \Rightarrow p' \in S(\lambda)$

Sei $q \in R$ $q \in \partial S_0$ $q \in \partial S_1 \Rightarrow q \in \partial S(\lambda)$

$\exists \lambda' \in (a_1) : p \in \partial S(\lambda'), \text{ da } p \notin S_0 \text{ und } p \in S_1$

$\Rightarrow r(\lambda') < r(\lambda)$
 Kontradiction

Laufzeit

Rückwärtsanalyse: Sei $T_k(n)$ die erwartete Laufzeit des Merge Algorithmus bei zufälliger Einfüge-reihenfolge, wobei k Punkte bereits auf dem

$$T_0(n) = \underbrace{\frac{d+1}{n} \cdot T_1(n)}_{\text{(Eigenschaft } n-1)} + \underbrace{\frac{d+1}{n-1} T_1(n-1)}_{\text{Fall bekannt}} + \frac{d+1}{n-2} T_2(n-2) + \dots + C \cdot n$$

$$= C \cdot n + \sum_{i=1}^n \frac{d+1}{i} T_1(i)$$

$$T_k(n) = C \cdot n + \sum_{i=1}^n \frac{d+1-k}{i} T_{k+1}(i)$$

$$T_{d+1}(n) = C \quad T_d(n) = Cn + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \cdot C = \mathcal{O}(n)$$

Beh. $T_k(n) = \mathcal{O}(n)$

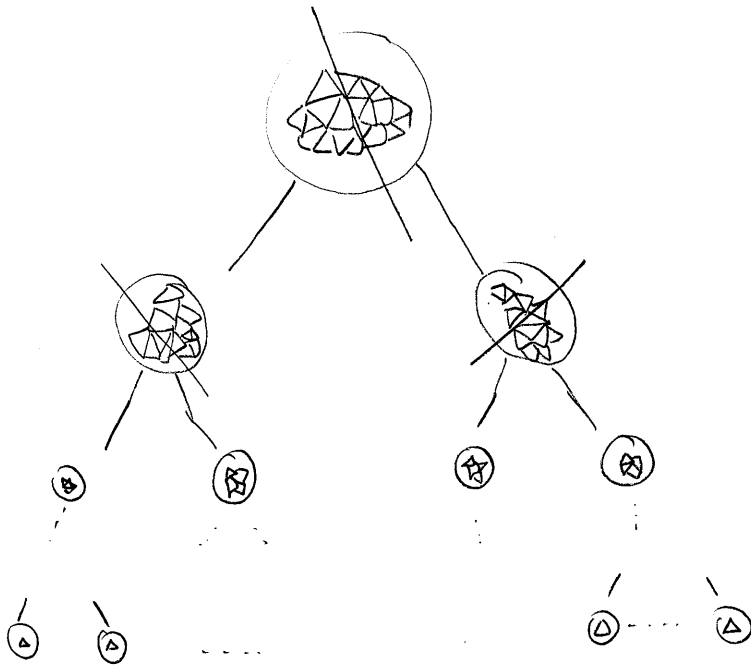
Beweis durch Rückwärtseinsetzen: $k \rightarrow k-1$

$$T_{k-1}(n) = Cn + \sum_{i=1}^n \frac{d+1-(k-1)}{i} \underbrace{T_k(i)}_{\leq C \cdot i} = Cn + (d+1-k-1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} C \cdot i = (C + (d+1-k-1) \cdot C) n = \mathcal{O}(n)$$

A wenn wir
konstant - eine
↑
Weil wir
 T_0 und T_1
betrachtet!

Insf:
Dimension geht wie
d! ein in Konstante

Das muss
stellen



Stack $\langle BV, BV \rangle$ S;

BV $B_1 = H_1.root;$

BV $B_2 = H_2.root;$

if $(B_1 \cap B_2 \neq \emptyset)$ S.push(B_1, B_2);

while (!S.isEmpty()) {

$(B_1, B_2) = S.pop();$

for all $(C_1: \text{child}(B_1))$

for all $(C_2: \text{child}(B_2))$

if $(C_1 \cap C_2 \neq \emptyset)$ S.push(C_1, C_2);

← Es fehlt der Test, ob leer

es fehlt der
Test, ob es
auf Null und
das andere nicht

→ :

if $(\text{child}(B_1) = \emptyset \text{ and } (\text{child}(B_2) = \emptyset))$ {

for all $(T_1: \text{triangles}(B_1))$

for all $(T_2: \text{triangles}(B_2))$

if $(T_1 \cap T_2 \neq \emptyset)$

return collision;

}

return no_collision;

Bewegungsgleichungen

KINETIK

Translation

 c Schwerpunkt

$$\frac{dc}{dt} = \dot{c} = v \quad \text{Schwerpunktsgeschwindigkeit.}$$

$$1) \quad \frac{dc}{dt} = \frac{c(t+\Delta t) - c(t)}{\Delta t} = v(t)$$

 $c(t+\Delta t) = c(t) + \Delta t \cdot v(t)$ explizites Euler

○

$$2) \quad \frac{dc}{dt} = \frac{c(t+\Delta t) - c(t)}{\Delta t} = v(t+\Delta t)$$

 $c(t+\Delta t) = c(t) + \Delta t \cdot v(t+\Delta t)$ implizites Euler
 \uparrow Taylor-Entwicklung...

kritisch: Runge-Kutta, Leapfrog

- Schrittweitensteuerung (z.B. vergleiche
 z-feldschritte mit einem feldschritt,
 wenn Fehler zu groß, dann verkleinere
 schrittweite)

○

Rotation

 R, q Orientierung

$$\frac{dR}{dt} = \dot{R} = \Omega R$$

 \uparrow Was ist das: $R \cdot R^T = E$ | differenzieren nach t

$$\dot{R} \cdot R^T + R \cdot \dot{R}^T = 0$$

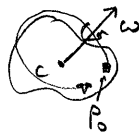
$$\Omega + \Omega^T = 0$$

 $\Omega^T = -\Omega \Rightarrow \Omega$ ist schiefsymmetrisch

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_2 & \omega_3 \\ \omega_2 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_3 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{R} = \Omega \cdot R$$

Betrachte dreieckiges Objekt



Winkelgeschwindigkeit

 \dot{r} momentane Drehrate p_0 dreht sich um ω , beschreiben
durch $p(t)$

$$p(t) = R(t) \cdot p_0$$

$$\dot{p}(t) = \dot{R}(t) \cdot p_0 = \omega(t) \times p(t) = \omega(t) \times R(t) \cdot p_0$$

$$\Rightarrow \dot{R} = [\omega \times] R$$

$$\Omega = \omega \times$$

$$\dot{R} = \Omega R = \omega \times R$$

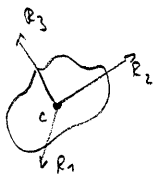
$$R_{ij}(t+\Delta t) \doteq R_{ij}(t) + \Delta t \left(\omega(t) \times R(t) \right)_{ij}$$

Problem: Diskretisierungsfehler führt zur nicht-
Orthogonalität

Besser: Verwendung von Quaternionen

$$\frac{dq}{dt} = \dot{q} = \frac{1}{2} \omega \cdot q$$

$$q(t+\Delta t) = q(t) + \frac{1}{2} \Delta t \omega(t) \cdot q(t)$$

Übungsaufgabe
Nachrechnen
 $q(t+\Delta t)$
danach normieren

Drehung eines Vektors: $p(t) = q(t) p_0 q(t)^*$

$$\frac{1}{2}(\underline{\omega} p - p \underline{\omega}) = \underline{\omega} \times p(t) = \dot{p}(t) = \dot{q} p_0 q^* + q p_0 \dot{q}^*$$

DYNAMIK

Translation

$$a = \dot{v} = \frac{1}{m} \cdot F \quad \text{Newton'sche Bew. Gl.}$$

$$p = m v \quad \text{linearer Impuls}$$

$$F = \dot{p} = m \dot{v} = m a$$

Rotation

Coriolis-Term

$$\underline{\dot{\omega}} = \underline{I}^{-1} (\underline{D} - \underline{\omega}^* \underline{I} \underline{\omega})$$

Newton-Euler'sche Bewegungsgleichung

$$L = \underline{I} \cdot \underline{\omega} \quad \text{Drehimpuls}$$

$$\underline{I} = \int_M \underline{r} \underline{r}^T E - \underline{r} \underline{r}^T d m \quad (\text{distinkt siehe unten})$$

Trägheitsmatrix (Inertia)

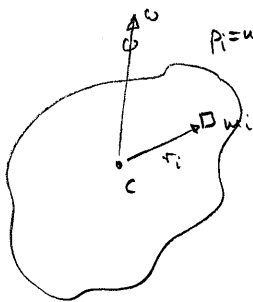
Differentieller Impuls

$$\underline{\dot{D}} = \underline{\dot{L}} = \underline{\dot{I}} \underline{\omega} + \underline{I} \underline{\dot{\omega}} = \underline{\omega}^* \underline{I} \underline{\omega} + \underline{I} \underline{\dot{\omega}}$$

\underline{I} ist nicht wie m zeitlich konstant im Weltkoordinatensystem!

$$\underline{\dot{I}} = \underline{\omega}^* \underline{I} - \underline{I} \underline{\omega}^*$$

Drehimpuls + Drehmoment



$$p_i = m_i v_i$$

$$v_i = \underline{\omega} \times \underline{r}_i$$

Drehimpuls:

$$L = \sum_i \underline{r}_i \times p_i = \sum_i \underline{r}_i \times (m_i \underline{\omega} \times \underline{r}_i)$$

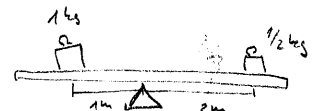
$$\stackrel{(*)}{=} \sum_i m_i \underline{\omega} \underline{r}_i^T \underline{r}_i - \underline{r}_i \underline{r}_i^T \underline{\omega}$$

$$= \left(\sum_i m_i [\underline{r}_i^T E - \underline{r}_i \underline{r}_i^T] \right) \underline{\omega}$$

Trägheitsmatrix \underline{I}

$$(*) \quad a \times (b \times c) = b a^T c - c a^T b$$

$$\text{Drehmoment: } \underline{D} = \sum_i \underline{r}_i \times \underline{F}_i$$



Zeitableitung der Trägheitsmatrix

$$\underline{I} = \int_M \underline{r} \underline{r}^T E - \underline{r} \underline{r}^T d m$$

$$= \int_M \underline{r}_0^T \underline{R}^T \underline{R} \underline{r}_0 E - \underline{R} \underline{r}_0 \underline{r}_0^T \underline{R}^T d m = \underline{R} \left[\int_M \underline{r}_0^T \underline{r}_0 E - \underline{r}_0 \underline{r}_0^T d m \right] \underline{R}^T$$

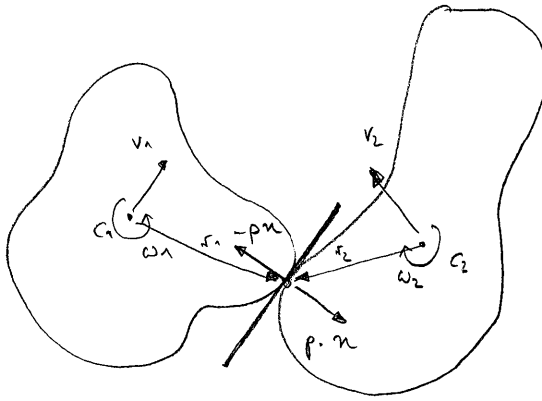
$$\underline{I} = \underline{R} \cdot \underline{I}_0 \underline{R}^T \quad \leftarrow \text{so verändert sich } \underline{I} \text{ mit der Zeit}$$

$$\Rightarrow \underline{\dot{I}} = \underline{\dot{R}} \cdot \underline{I}_0 \underline{R}^T + \underline{R} \underline{\dot{I}}_0 \underline{R}^T = \underline{\omega}^* \underline{R} \underline{I}_0 \underline{R}^T + \underline{R} \underline{I}_0 (\underline{\omega}^* \underline{R})^T = \underline{\omega}^* \underline{I} - \underline{I} \underline{\omega}^*$$

Ü-Aufgabe:

▷ Eigenvektoren \underline{I} und Covarianz

▷ Würfel fallen lassen



p = Betrag des Impulses, der zwischen Objekt 1 und 2 ausgetauscht wird, so dass im folgenden eine Durchdringung der Objekte vermieden wird.

$$\|n\| = 1$$

Impulsbetrachtung vor und nach dem Stoß:

$$\begin{aligned} m_1 \vec{v}_1' &= m_1 \vec{v}_1 - p \vec{n} \\ m_2 \vec{v}_2' &= m_2 \vec{v}_2 + p \vec{n} \end{aligned}$$

("'" ist nach dem Stoß)

$$\begin{aligned} I_1 \vec{\omega}_1' &= I_1 \vec{\omega}_1 - \vec{r}_1 \times p \vec{n} \\ I_2 \vec{\omega}_2' &= I_2 \vec{\omega}_2 + \vec{r}_2 \times p \vec{n} \end{aligned}$$

} Drehimpuls nicht erhalten?

○ \rightarrow 13 Unbekannte, nur 12 Gleichungen \rightarrow zusätzliche Eigenschaft:

Newton'sche Hypothese

Relative Kontaktgeschwindigkeit in Normalenrichtung Kontakt

$$n^T (\vec{v}_1' + \vec{\omega}_1' \times \vec{r}_1 - (\vec{v}_2' + \vec{\omega}_2' \times \vec{r}_2)) = -e n^T (\vec{v}_1 + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 - (\vec{v}_2 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2))$$

\uparrow
Elastizitätskoeffizient $e \in [0, 1]$

Wenn man Coulomb'sche Reibung einbauen möchte, so kann es zu Inkonsistenzen kommen, z.B. bei "Lehr an Wand" Beispielen. Lösung ist die verallgemeinerte Shoup-Hypothese

$$n^T \left(\vec{v}_1 - \frac{1}{m_1} p \vec{n} + (\vec{\omega}_1 - I_1^{-1} (\vec{r}_1 \times p \vec{n})) \times \vec{r}_1 - \vec{v}_2 - \frac{1}{m_2} p \vec{n} - (\vec{\omega}_2 - I_2^{-1} (\vec{r}_2 \times p \vec{n})) \times \vec{r}_2 \right) = -e n^T (\dots)$$

$$-\frac{1}{m_1} p - n^T (I_1^{-1} (\vec{r}_1 \times p \vec{n}) \times \vec{r}_1)$$

$$\begin{aligned} &= n^T (a \times \vec{r}_1) \\ &= a^T (\vec{r}_1 \times n) = (\vec{r}_1 \times n)^T a \\ &= \vec{r}_1^T (n \times a) \end{aligned}$$

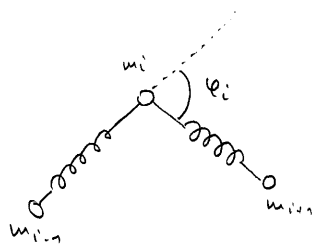
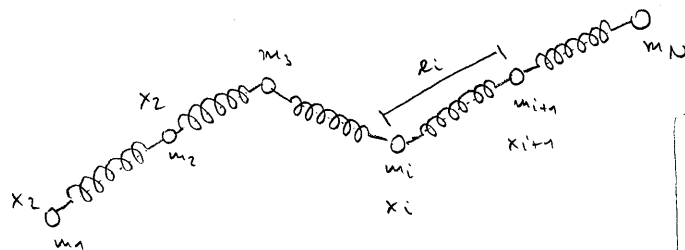
$$-\frac{1}{m_1} p - p (\vec{r}_1 \times n)^T I_1^{-1} (\vec{r}_1 \times n) - \frac{1}{m_2} p - p (\vec{r}_2 \times n)^T I_2^{-1} (\vec{r}_2 \times n) = -(1+e) (\vec{v}_1 + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 - \vec{v}_2 - \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2)^T n$$

$$p = \frac{(1+e) (\vec{v}_1 + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 - \vec{v}_2 - \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2)^T n}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + (\vec{r}_1 \times n)^T I_1^{-1} (\vec{r}_1 \times n) + (\vec{r}_2 \times n)^T I_2^{-1} (\vec{r}_2 \times n)}$$

Bei stationärem Objekt $m_2 \rightarrow \infty$
 $I_2 \rightarrow (\infty, \infty)$

Simulation fester Objekte

Feder-Masse-System



$$\cos \varphi_i = \frac{(x_{i+1} - x_i)^T (x_i - x_{i-1})}{| \dots | | \dots |}$$

Hooke'sches Gesetz

$$\vec{F}_i = -d_i \Delta x_i$$

$$= -d_i \cdot (|x_{i+1} - x_i| - l_i)$$

nur für System aus 2 Punkten

Energiebetrachtung:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} d_i (\Delta x_i)^2$$

$$\left(-\frac{\partial E}{\partial s} = -d \cdot s = F \right) \bigcirc$$

Nehmen wir an, das i-te Teilchen bewegt sich zu einem neuen Ort.

$$\frac{\partial E_{pot}}{\partial x_i} = -F_i$$

allgemeiner

kompakte Schreibweise

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \phi^T D \phi$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} v^T M v$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3N} \quad \text{verallgemeinelter Geschw.-Vektor}$$

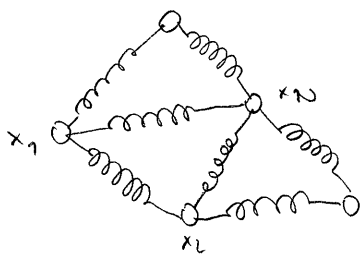
Gewichtung der Zwangsbedingungen

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_2 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & m_2 & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & m_3 & E_{33} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\phi = \begin{bmatrix} |x_2 - x_1| - l_1 \\ |x_3 - x_2| - l_2 \\ \vdots \\ |x_N - x_{N-1}| - l_{N-1} \end{bmatrix}$$

ϕ : Vektor der Zwangsbedingungen



$$\phi_i = |x_i - x_{i-1}| - l_i$$

← lineare Kette, ansonsten
Indizes entsprechend
wählen

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3N}$$

$$v = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} = \dot{x} \in \mathbb{R}^{3N}$$

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_M \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^M$$

↑
Anzahl der
Einschränk.
hängt ab
von Lage der
Massen

Verbr. der Zwangsbed.

Massenmatrix

$$M = \begin{bmatrix} m_1 \mathbb{1} & & & \\ & m_2 \mathbb{1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_N \mathbb{1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3N \times 3N}$$

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_M \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{M \times M}$$

verallgemeinerte Kraftfelder:

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3N}$$

In dieser Notation lässt sich Energie ausdrücken:

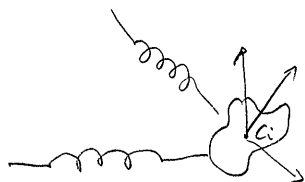
$$E_{\text{kin}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} v^T M v$$

$$E_{\text{pot}} = \sum_i \frac{1}{2} d_i \phi_i^2 = \frac{1}{2} \phi^T D \phi$$

← potentielle Energie,
die sich aus
Zwangsbedingungen
ergibt.

EXKURS

wenn Massenpunkte durch Körper ersetzt werden, dann



wird x zu (c, q) also $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^7$

und verallgemeinerte Ortsvektor wird zu Gemisch aus Schwerpunkt
und Quaternion.

Die Massenmatrix wird dann zu

$$\begin{bmatrix} m_1 \mathbb{1} & & \\ & I_1 & \\ & & m_2 \mathbb{1} \\ & & & I_2 \end{bmatrix}$$

z.B.

$$E_{kin} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_i \frac{1}{2} \omega_i^T I_i \omega_i$$

in V stehen dann auch Winkelgeschwindigkeit.

⇒ Erweiterung auf gekoppelte starr Körper möglich. + Kraftvektor wird um Drehmomente ergänzt.

Man sollte dafür sorgen, das System Energie verliert.

$$\vec{F}_{Dämpfung} = -c \cdot \vec{v}$$

▷ Wie kann man aus den beiden Energiebetrachtungen die Bewegungsgleichungen herleiten?

$$\frac{\partial E_{pot}}{\partial x_i} = -F_i$$

$$\frac{\partial E_{pot}}{\partial x} = -\vec{F}$$

← ergibt verallgemeinerten Kraftvektor

nun Newton:

$$M \cdot \dot{v} = \vec{F} = - \frac{\partial \sum_i \overset{\text{konst.}}{\phi_i^T} D \phi_i}{\partial x} = - \frac{\partial \phi^T}{\partial x} \cdot D \cdot \phi$$

← siehe matrix-coorbs

Nebenrechnung: $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_M}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_M}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \phi_M}{\partial x_N} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{M \times 3N}$

=] (Jacobi Matrix)

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi^T}{\partial x} \in \mathbb{R}^{3N \times M}$$

"J^T"

Es folgt also:

$$M \dot{v} = -J^T D \phi + \vec{F}_{ext}$$

Es können nun noch äußere Kräfte einwirken \vec{F}_{ext}

z.B. Gravitation, Wind, Kontaktkräfte

Damit könnte man durch 2-maliges aufintegrieren eine Simulation machen. Jedoch ist dies in der Praxis nicht empfehlenswert

Durch Steifigkeit des Systems ist explizites Euler Verfahren nicht gut genug. Energieerhaltung vor allem bei starken Federn. "Das System explodiert"

Explizites Eulerverfahren

Implizites Eulerverfahren

$$\dot{y} = f(t)$$

$$y_{t+\Delta t} = y_t + \Delta t \cdot f_t$$

$$y_{t+\Delta t} = y_t + \Delta t f_{t+\Delta t} \quad \leftarrow \text{Lösung numerische Stabilität}$$

Wir nehmen implizites Verfahren

$$\frac{v_{t+\Delta t} - v_t}{\Delta t} = -M^{-1} J^T D \phi + M^{-1} F_{\text{ext}}$$

$$= -M^{-1} J^T D \phi_{t+\Delta t} + M^{-1} F_{\text{ext}}$$

Welche der Größen sind zeitabhängig?

M : konstant

J : zeitabhängig (dann von x abhängig)

ϕ : zeitabhängig (z.B. zeitveränderlich)

auswerten an $t+\Delta t$

$J_{t+\Delta t}$
wie in vorher

Problem: $\phi_{t+\Delta t}$ kennen wir nicht!

→ Lösung: Approximiere $\phi_{t+\Delta t}$ (z.B. durch Taylorentwicklung)

dann betrachte:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = J \cdot v$$

hier nochmal Euler: (diesmal wieder implizit)

$$\frac{\phi_{t+\Delta t} - \phi_t}{\Delta t} = J \cdot v_{t+\Delta t} \quad \rightarrow \quad \phi_{t+\Delta t} = \phi_t + \Delta t J v_{t+\Delta t}$$

$$v_{t+\Delta t} = v_t - \Delta t M^{-1} J^T D \phi_{t+\Delta t} + \Delta t M^{-1} F_{\text{ext}}$$

2 Gleichungen
2 Unbekannte

Einsetzen
→

$$\begin{aligned} v_{t+\Delta t} &= v_t - \Delta t M^{-1} J^T D [\phi_t + \Delta t J \cdot v_{t+\Delta t}] + \Delta t M^{-1} F_{\text{ext}} \\ &= v_t - \Delta t M^{-1} J^T D \phi_t - \Delta t^2 M^{-1} J^T D J v_{t+\Delta t} + \Delta t M^{-1} F_{\text{ext}} \end{aligned}$$

$$(1 + \Delta t^2 M^{-1} J^T D J) v_{t+\Delta t} = v_t - \Delta t M^{-1} J^T D \phi_t + \Delta t M^{-1} F_{\text{ext}}$$

$$x_{t+\Delta t} = x_t + \Delta t v_{t+\Delta t}$$

$J^T D J$ = sehr
komplex

Für die Jacobi Matrix muss man Zwangsbed. ableiten

$$\phi = |x - x_0| - l$$

$$\phi_i = |x - x_i| - l_i$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{x - x_0}{|x - x_0|}$$

$$\text{denn } \frac{\partial |x|}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^T x}}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^T x}} = \frac{x}{|x|}$$

Bei Fixierungen von Punkten einfach Masse auf ∞ setzen, oder Constraints erzwingen, indem Federkonstanten $\rightarrow \infty$ gesetzt werden

Normal. Lagrange-Mech. Ansatz:

$$\begin{bmatrix} \underline{1} & \Delta t M^{-1} J^T D \\ -\Delta t J & \underline{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{t+\Delta t} \\ \phi_{t+\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_t + \Delta t M^{-1} F_{\text{ext}} \\ \phi_t \end{bmatrix}$$

Führen folgende Substitution durch:

$$\lambda_{t+\Delta t} = -D \phi_{t+\Delta t} \quad \left(\phi_{t+\Delta t} = -D^{-1} \lambda_{t+\Delta t} \right)$$

Multipliziere mit M die obere Zeile und setze ein

$$\begin{bmatrix} M & -\Delta t J^T \\ -\Delta t J & -D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{t+\Delta t} \\ \lambda_{t+\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M v_t + \Delta t F_{\text{ext}} \\ -D^{-1} \lambda_t \end{bmatrix}$$

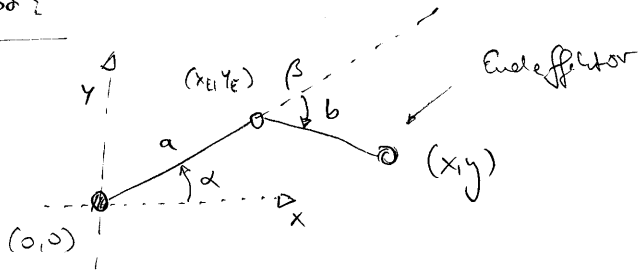
↑ nun kann man auch Federkonstanten auf ∞ setzen
 \Rightarrow Matrixeintrag $= 0$

noch schnell:

$$\rightarrow A = \begin{bmatrix} M & -J^T \\ -J & \frac{1}{\Delta t^2} D^{-1} \end{bmatrix}$$

{ Dualer Lösungsvektor }

$$(\underline{1} + \Delta t^2 M^{-1} J^T D J) = \text{Schurkomplement von } A$$

Robotik

offene kinematische Ketten

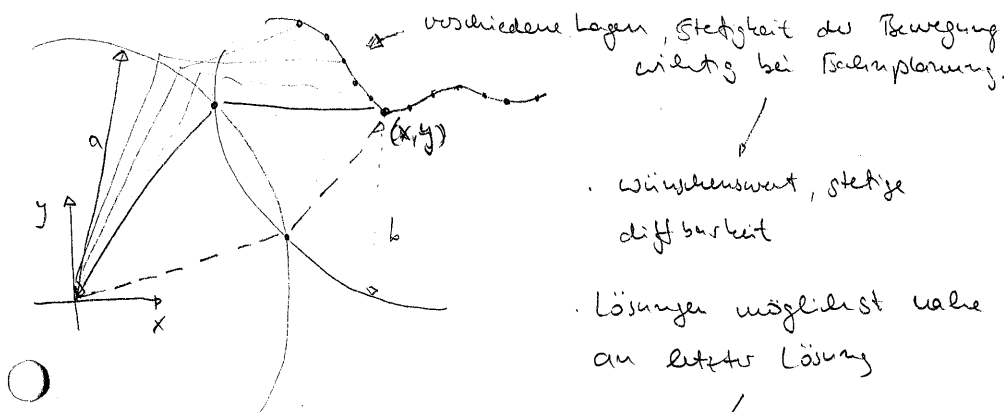
planar 2-gelenk-Roboter vom Typ RR

Gegeben: Gelenkparameter (a, b) Gesucht: Position (x, y) des Endeffektors

VORWÄRTSKINEMATIK - PROBLEM

$$\begin{pmatrix} x_E \\ y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot \cos \alpha \\ a \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_E \\ y_E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \cdot \cos(\alpha + \beta) \\ b \cdot \sin(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$$

RÜCKWÄRTSKINEMATIK - PROBLEM



verschiedene Lagen, Stetigkeit der Bewegung wichtig bei Bahnplanung.

wünschenswert, stetige Differenzierbarkeit

Lösungen möglichst nahe an letzter Lösung

wie löst man dieses Problem nicht

Differentielles kinematisches Problem

$$x = f(\varphi)$$

 φ = Vektor der Gelenkwinkel x = Position des Endeffektors

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1} & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial \varphi_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial \varphi_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$\dot{x} = J \cdot \dot{\varphi}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \approx J \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x \approx J \Delta \varphi \Rightarrow \Delta \varphi \approx J^{-1} \Delta x, \text{ falls } J \text{ invertierbar}$$

Man stellt mehr Freiheitsgrade als Dimensionen auf: $n \geq m$

Fall wenn:

Wenn $m \geq n$ ist so benutzt man Pseudoinverse:

$$J^+ = J^T (J J^T)^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$\underbrace{J J^T}_{\in \mathbb{R}^{m \times m}}$

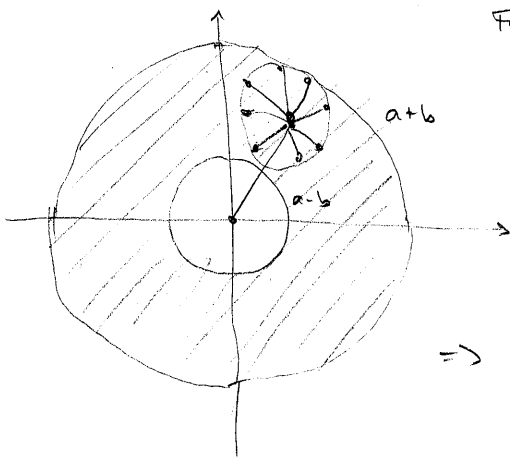
Frage: kann man $J J^T$ invertieren?
Ja, wenn J vollen Rang hat.

$$\Rightarrow \Delta p = J^+ \Delta x = J^T (J J^T)^{-1} \Delta x$$

Probe: $\Delta x = \underbrace{J J^T (J J^T)^{-1}}_{= E} \Delta x$

Falls J nicht regulär ist (z.B. in der Nähe des Randes des Arbeitsraumes)

Arbeitsraum



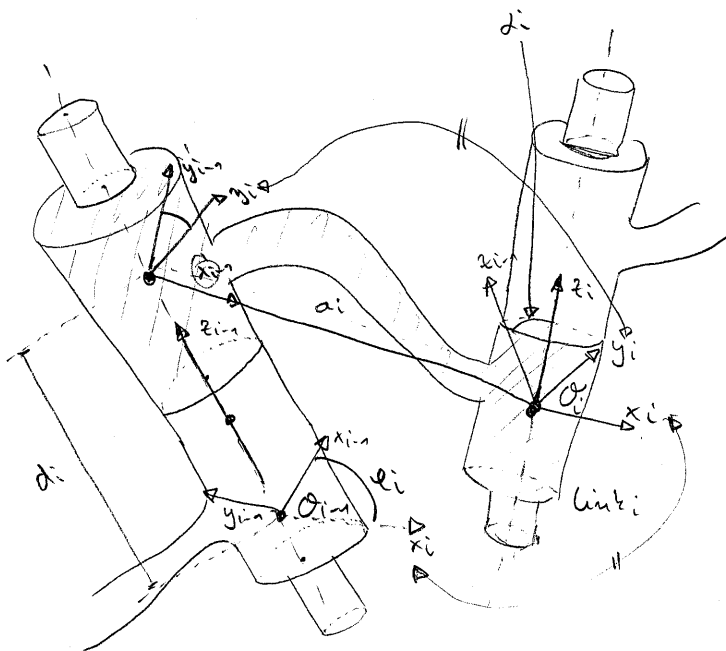
Falls $a \geq b$

$\Rightarrow \det J = 0 \Rightarrow$ Singularität im Arbeitsraum

Übung:

Singuläre Stellen der Jacobimatrix für 2-Gelenkroboter finden.
 $= \det(J) = 0$ finden.

Denavit Hartenberg



1) Identifiziere z-Achsen

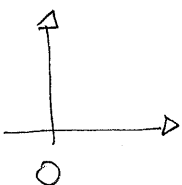
\Rightarrow z-Achsen

2) Bestimme die kürzesten Verbindungsstrecken zwischen den Gelenkachsen

3) Lotfußpunkt wird zum Ursprung des i -ten Koordinatensystems

k_i : Richtung dieser kürzesten Verbindungsstrecke

4) Ergänze die k_i , so dass Rechtssystem



D-H - Parameter

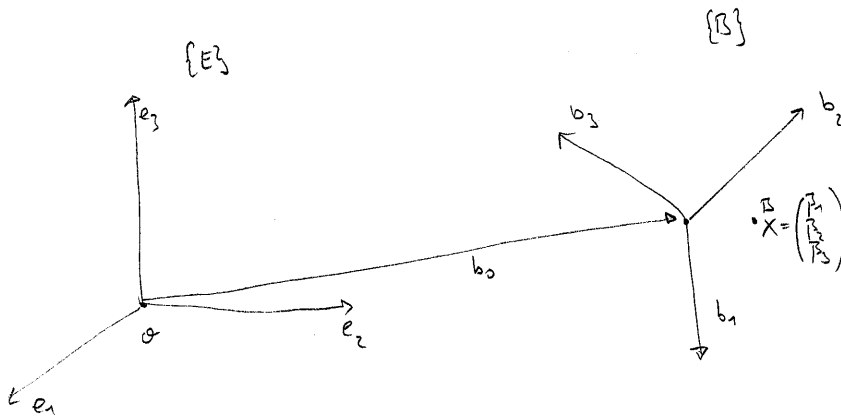
a_i = Linklänge

d_i = Versatz (offset)

θ_i = Gelenkwinkel

$\angle(x_{i-1}, x_i)$

α_i = Verdrehung (Twist) $\angle(y_{i-1}, y_i)$

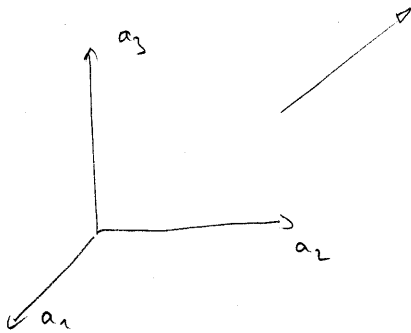


$${}^B X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$T_B = \left(\begin{array}{c|c} R_B & t \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$R = [b_1, b_2, b_3]$$

$$t = b_0$$



$${}^A T_B = \left(\begin{array}{c|c} {}^A R_B & {}^A t_B \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

- 1) leistet Übersetzung der Koordinaten von B nach A
- 2) übergibt Drehen A nach B

$${}^A X = {}^A_1 b_1 + {}^A_2 b_2 + {}^A_3 b_3 + b_0$$

$${}^0 p = {}^0 T_1 \dots {}^{n-2} T_{n-1} {}^{n-1} T_n {}^n p$$

↑
Endeffektor
Weltkoordinaten

↑
Endeffektor
lokale Koordinaten

Wie kommt Transformationsmatrix zustande?

überführt in System in i System.

$${}^i T_{i-1} = R(z_{i-1}, \theta_i) T(z_i, d_i) T(x_i, a_i) T(x_i, \alpha_i)$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Übung

- Trägheit steiner
- Abstand Kollision von 2 Ton
- Trägheit zusammen Summenformel

Viele Spaß

Helmut Stanford

Paper

?

Siggraph

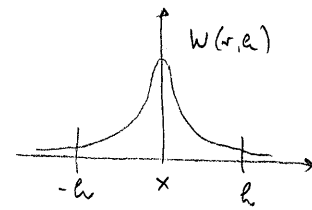
"bunny taking a bath"



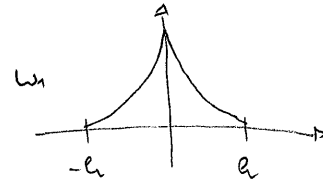
Smoothed Particle Hydrodynamics

VL 4.7.13

↑ verschmierte Masse auf Umgebung
(Dichte)



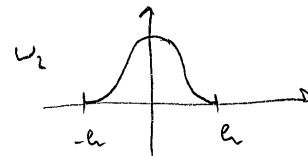
$$W_1(r, h) = \begin{cases} (h-r)^3 & \text{für } 0 \leq r \leq h \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



"Spiky"

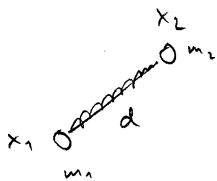
nicht physikalisch

$$W_2(r, h) = \begin{cases} (h^3 - r^3) & \text{für } 0 \leq r \leq h \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Position Based Physics

"Nicht realistisch, fieseln meisten. Starke Vereinfachung, daher große Partikelanzahlen möglich"



Zwangsbed. $\phi(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| - d$

alle Zwangsbedingungen
↓
alle Orte der MP's
↓
 $C(p) = 0$

- 1) $p + \Delta p$ verschieben
- 2) $C(p + \Delta p) = 0$ erzwingen Zwangsbed.

$$C(p + \Delta p) \approx C(p) + [\nabla_p C(p)]^T \Delta p$$

- 4) in welche Richtung soll Δp gerichtet werden

Motivation: $\Delta p = \lambda \nabla_p C$

Beispiele: Attraktion: Punkt muss sich auf 2 Geraden bewegen



— zeit 0
--- zeit 1

identisch
projiziere Punkt auf +
Zwangsbedingungen

"Casars"-Verfahren
Kasmas

$$0 = C(p) + \nabla_p C^T \lambda \nabla_p C \Rightarrow \lambda = - \frac{C(p)}{(\nabla_p C)^T \nabla_p C} \Rightarrow \Delta p = - \frac{C(p)}{(\nabla_p C)^T \nabla_p C} \nabla_p C$$

Beispiel

$$\Phi(p_1, p_2) = |p_1 - p_2| - \alpha$$

$$\nabla_{p_1} \Phi = \frac{p_1 - p_2}{|p_1 - p_2|} \quad \nabla_{p_2} \Phi = \frac{p_2 - p_1}{|p_1 - p_2|}$$

$$\Delta p_1 = \frac{|p_1 - p_2| - \alpha}{1+1} \cdot \frac{p_1 - p_2}{|p_1 - p_2|}$$

$$\Delta p_2 = \frac{|p_1 - p_2| - \alpha}{1} \cdot \frac{p_2 - p_1}{|p_1 - p_2|}$$

} das würde zu einer
Schwerpunktsverschiebung
führen, man kann das
fixieren, indem man wie
folgt gemittelt

$$\Delta p_1 = - \frac{\frac{1}{m_1}}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} \cdot \frac{p_1 - p_2}{|p_1 - p_2|} \cdot \frac{|p_1 - p_2| - \alpha}{2}$$

$$\Delta p_2 = \frac{\frac{1}{m_2}}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} \cdot \frac{p_2 - p_1}{|p_1 - p_2|} \cdot \frac{|p_1 - p_2| - \alpha}{2}$$

(X) mündl. Prüfung ~~Ende August~~ Do

→ Mitte September

→ Double Umfrage

+ Popou fragen?

VL

Therobald et al.

SoG: Sums of Gaussians

Anwendung

Herrn, Pilsch

• CMA

+ Bildverarbeitung

Hagen Probenwieser ?