Κεφάλαιο 12

Ολοκληρώσιμες μιγαδικές συναρτήσεις

Στο κεφάλαιο αυτό ορίζεται αρχικά η έννοια του μιγαδικού επικαμπυλίου ολοκληρώματος και καταγράφονται οι βασικές ιδιότητές του. Επίσης, καταγράφονται και τρόποι υπολογισμού βασικών μιγαδικών ολοκληρωμάτων. Εξετάζονται οι ιδιότητες των συναρτήσεων και των πεδίων ορισμού τους, οι οποίες εξασφαλίζουν την ανεξαρτησία του ολοκληρώματος από την καμπύλη ολοκλήρωσης. Στην κατηγορία αυτή εντάσσονται οι συνεχείς συναρτήσεις, ορισμένες σε πεδίο, των οποίων υπάρχει αρχική, καθώς επίσης και οι ολόμορφες συναρτήσεις ορισμένες σε απλά συνεκτικό πεδίο. Για ολόμορφες συναρτήσεις ορισμένες σε απλά συνεκτικό πεδίο διατυπώνεται το κλασικό θεώρημα Cauchy-Goursat και εξετάζονται ορισμένες σημαντικές συνέπειες του (ολοκληρωτικοί τύποι Cauchy), οι οποίες επίσης χρησιμοποιούνται και για τον υπολογισμό μιγαδικών ολοκληρωμάτων.

12.1 Μιγαδικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής

Στην παράγραφο αυτή εξετάζουμε την κατηγορία των μιγαδικών συναρτήσεων $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ πραγματικής μεταβλητής με πεδίο ορισμού ένα διάστημα I του $\mathbb{R}$. Η μεταβλητή των συναρτήσεων αυτών συμβολίζεται με t και η γενική μορφή τους, μέσω του πραγματικού και του φανταστικού μέρους, είναι

$$f(t) = u(t) + i\,v(t),\ \ t \in I \subseteq \mathbb{R},$$

όπου $u,\, v : I \to \mathbb{R}$.

Σύμφωνα με το γενικό ορισμό της μιγαδικής παραγώγου (11.1.1), η παράγωγος $f'(t)$ της $f(t)$ ορίζεται όπως ακολουθεί

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h},$$

υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει στο $\mathbb{C}$ το αναγραφόμενο όριο.

Εξάλλου, όπως διαπιστώνεται εύκολα, η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα $t \in I$ τότε και μόνο τότε όταν οι u και v είναι παραγωγίσιμες στο t και στην προκειμένη περίπτωση ισχύει

$$f'(t) = u'(t) + i\,v'(t), \;\; t \in I. \tag{12.1.1}$$

Σημείωση 12.1.1 Για την παράγωγο μιγαδικής συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής, από την (12.1.1), συνάγουμε ότι ισχύουν οι γνωστοί κανόνες παραγώγισης αθροίσματος, γινομένου, πηλίκου συναρτήσεων και ο κανόνας της αλυσίδας.

△

Παράδειγμα 12.1.1 Η μιγαδική συνάρτηση $f(t) = e^{at}$, $t \in \mathbb{R}$, όπου $a \in \mathbb{C}$, έχει ως παράγωγο $f'(t) = ae^{at}$.

Λύση. Πράγματι, αν $a = \lambda + i\,\mu$ τότε έχουμε

$$f(t) = e^{at} = e^{\lambda t}e^{i\mu t} = e^{\lambda t}\cos(\mu t) + i\,e^{\lambda t}\sin(\mu t)$$

και με τη βοήθεια της (12.1.1) υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} f'(t) &= (e^{\lambda t}\cos(\mu t))' + i\,(e^{\lambda t}\sin(\mu t))' \\ &= \lambda e^{\lambda t}\cos(\mu t) - \mu e^{\lambda t}\sin(\mu t) + i\lambda e^{\lambda t}\sin(\mu t) + i\mu e^{\lambda t}\cos(\mu t) \\ &= (\lambda + i\mu)e^{\lambda t}(\cos(\mu t) + i\sin(\mu t)) \\ &= ae^{at}. \end{aligned}$$

△

Ορισμός 12.1.1 Έστω $f = u + i\,v : I \equiv [\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ μιγαδική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής. Η συνάρτηση f ονομάζεται *ολοκληρώσιμη* στο $[\alpha, \beta]$ αν οι πραγματικές συναρτήσεις u και v είναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha, \beta]$ και στην περίπτωση αυτή ως ολοκλήρωμα της $f = f(t)$ ορίζουμε

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_\alpha^\beta u(t)dt + i\int_\alpha^\beta v(t)dt.$$

□

Για το ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες που είναι όμοιες με εκείνες του ολοκληρώματος πραγματικής συνάρτησης.

(i) Αν $f, g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμες και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(t) + \mu g(t)] dt = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + \mu \int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt.$$

(ii) Αν $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη και $\gamma \in [\alpha, \beta]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\gamma} f(t)dt + \int_{\gamma}^{\beta} f(t)dt.$$

(iii) Αν $f = u + i\,v : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη και $F = U + i\,V$ είναι μία αρχική της f στο $[\alpha, \beta]$, δηλαδή ισχύει $F' = f$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = F(\beta) - F(\alpha).$$

(iv) Αν $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη, τότε

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)| dt.$$

(v) Αν $f : [\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχής, τότε

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha}^{t} f(\tau) d\tau = f(t)\,,\ t \in [\alpha, \beta].$$

Παράδειγμα 12.1.2 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^{0} \cos(it)dt$.

Λύση. Μια αρχική της $f(t) = \cos(it)$ είναι η $F(t) = \frac{1}{i}\sin(it)$, οπότε από την προηγούμενη ιδιότητα (iii) ευρίσκουμε

$$I = F(0) - F(-1) = -\frac{1}{i}\sin(-i) = -i \sin i.$$

△

12.2 Καμπύλες του μιγαδικού επιπέδου

Έστω μία μιγαδική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής: $z(t) = x(t) + iy(t) : t \in [\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$. Καθώς η μεταβλητή t διατρέχει τα στοιχεία του $[\alpha, \beta]$ το σημείο $(x(t), y(t))$ διαγράφει ένα υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου, το οποίο σε συνήθεις συγκεκριμένες περιπτώσεις προσομοιάζει με την εποπτική εικόνα μιας καμπύλης. Έτσι, οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό της έννοιας της καμπύλης του μιγαδικού επιπέδου, η οποία είναι θεμελιώδης για τη Μιγαδική Ανάλυση.

Ορισμός 12.2.1 Ένα υποσύνολο C του μιγαδικού επιπέδου ονομάζεται *καμπύλη* όταν υπάρχει μία *συνεχής* μιγαδική συνάρτηση μιας μεταβλητής

$$z(t) = x(t) + iy(t) : t \in [\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$$

έτσι ώστε

$$C = \{(x(t), y(t)), t \in [\alpha, \beta]\}.$$

Η συνάρτηση $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ ονομάζεται *παραμέτρηση* της καμπύλης C και οι $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ παραμετρικές εξισώσεις. Επίσης, λέμε ότι η συνάρτηση $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ ορίζει την καμπύλη C και συνοπτικά γράφουμε

$$C : \, z = z(t) = x(t) + iy(t), \, t \in [\alpha, \beta],$$

ή απλούστερα

$$C : \, z = z(t), \, t \in [\alpha, \beta].$$

Τα σημεία $A(x(\alpha), y(\alpha))$ και $B(x(\beta), y(\beta))$ είναι τα άκρα της καμπύλης, το A είναι η αρχή και το B το πέρας αυτής.

□

Προσανατολισμένη καμπύλη. Έστω $C : \, z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ μία παραμετρική καμπύλη του μιγαδικού επιπέδου. Η κατεύθυνση που αντιστοιχεί στη φορά κίνησης του σημείου $z(t)$ επάνω στην καμπύλη, καθώς η παράμετρος t αυξάνει, ορίζει το θετικό προσανατολισμό της καμπύλης, ενώ η αντίθετη κατεύθυνση ορίζει τον αρνητικό προσανατολισμό αυτής (ως προς την παράμετρο t).

Μία καμπύλη $C : \, z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ ονομάζεται

(i) *κλειστή* όταν τα άκρα της συμπίπτουν, δηλαδή: $z(\alpha) = z(\beta)$.

(ii) *απλή* αν η συνάρτηση $z(t)$ είναι 1-1 στο (α, β), δηλαδή αν για κάθε t_1, $t_2 \in (\alpha, \beta)$ με $t_1 \neq t_2$ ισχύει $z(t_1) \neq z(t_2)$.

(iii) *καμπύλη Jordan* όταν είναι απλή και κλειστή.

Παράδειγμα 12.2.1 Το ευθύγραμμο τμήμα C που ενώνει δύο σημεία z_1 και z_2 του μιγαδικού επιπέδου και έχει αρχή το z_1 και πέρας το z_2 ($z_1 \neq z_2$) ορίζεται από την παραμέτρηση

$$z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1), \;\; t \in [0, 1]$$

και είναι μία απλή και μη κλειστή καμπύλη.

△

Παράδειγμα 12.2.2 Ο κύκλος C με κέντρο το $z_0 \in \mathbb{C}$ και ακτίνα $R \in \mathbb{R}$ προσανατολισμένος αντιωρολογιακά ορίζεται από την παραμέτρηση

$$z(t) = z_0 + R\,e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$$

και είναι μία απλή κλειστή καμπύλη.

△

Παράδειγμα 12.2.3 Η απλή και μη κλειστή καμπύλη

$$C : z(t) = e^{it},\ t \in [0, \pi]$$

είναι το άνω ημικύκλιο της περιφέρειας του κύκλου με κέντρο 0 και ακτίνα 1, προσανατολισμένο αντιωρολογιακά.

△

Παράδειγμα 12.2.4 Η έλλειψη με ημιάξονες a και b προσανατολισμένη αντιωρολογιακά έχει ως παραμέτρηση

$$z(t) = a\cos(t) + ib\sin(t),\ t \in [0, 2\pi].$$

Στην περίπτωση $a = b$ είναι περιφέρεια κύκλου με κέντρο το 0 και ακτίνα a.

△

Παράδειγμα 12.2.5 Η καμπύλη

$$C : z(t) = \begin{cases} e^{it}, & -\frac{\pi}{2} \le t \le \pi \\ \frac{2t}{\pi} - 3, & \pi \le t \le 3\pi \end{cases}$$

δεν είναι κλειστή αφού ισχύουν $z(-\pi/2) = -i$ και $z(3\pi) = 3$. Επίσης, δεν είναι απλή διότι $z(0) = z(2\pi) = 1$.

△

Έστω μία παραμετρική καμπύλη $C : z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Η παραμέτρηση $z = z(-t)$, $t \in [-\beta, -\alpha]$ ορίζει τον αντίθετο προσανατολισμό της καμπύλης (ως προς την παραμέτρηση). Η καμπύλη

$$C^- :\ z = z(-t),\ t \in [-\beta, -\alpha]$$

ονομάζεται *αντίθετη* καμπύλη της C. Οι C και C^- έχουν το ίδιο σύνολο σημείων και αντίθετους προσανατολισμούς.

Παράδειγμα 12.2.6 Αν η καμπύλη C ορίζεται από την παραμέτρηση

$$z(t) = e^{it},\ t \in [0, 2\pi],$$

τότε η C^- ορίζεται από

$$z(t) = e^{-it},\ t \in [-2\pi, 0].$$

Η C διαγράφεται κατά φορά αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού, ενώ η C^- διαγράφεται κατά τη φορά της κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

△

Ορισμός 12.2.2 Μία καμπύλη $C:\ z = z(t),\ t \in [\alpha, \beta]$ του μιγαδικού επιπέδου ονομάζεται

(i) C^1 καμπύλη όταν η $z(t)$ έχει συνεχή παράγωγο $z'(t)$ για κάθε $t \in [\alpha, \beta]$.

(ii) *τμηματικά* C^1 καμπύλη όταν αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος C^1 καμπύλες.

(iii) *λεία* καμπύλη όταν είναι C^1 και επιπλέον ισχύει $z'(t) \neq 0$ για κάθε $t \in [\alpha, \beta]$.

(iv) *τμηματικά λεία* καμπύλη όταν αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος διαδοχικές λείες καμπύλες.

□

Το τμήμα της καμπύλης από το σημείο $z_1 = z(t_1)$ μέχρι το σημείο $z_2 = z(t_2)$, όπου $t_1,\, t_2 \in [\alpha, \beta]$, ονομάζεται *τόξο* της καμπύλης.

Ως *μήκος* $L(C)$ μιας απλής και C^1 καμπύλης

$$C:\ z = z(t) = x(t) + iy(t),\ t \in [\alpha, \beta]$$

ορίζεται το ολοκλήρωμα

$$L(C) = \int_\alpha^\beta |z'(t)|dt = \int_\alpha^\beta \left[(x'(t))^2 + (y'(t))^2\right]^{1/2} dt. \tag{12.2.1}$$

Το μήκος απλής και τμηματικά C^1 καμπύλης είναι το άθροισμα των μηκών των C^1 τμημάτων της.

Παράδειγμα 12.2.7 Υπολογίστε το μήκος της περιφέρειας C του κύκλου του μιγαδικού επιπέδου με κέντρο το 0 και ακτίνα R.

Λύση. Η καμπύλη C ορίζεται από την παραμέτρηση

$$z(t) = Re^{it},\ t \in [0, 2\pi],$$

όπου

$$z'(t) = iRe^{it} \quad \text{και} \quad |z'(t)| = R,\, t \in [0, 2\pi]$$

και είναι απλή και λεία. Έτσι, εφαρμόζοντας την (12.2.1), ευρίσκουμε

$$L(C) = \int_0^{2\pi} R\, dt = 2\pi R.$$

△

Για απλές κλειστές καμπύλες του μιγαδικού επιπέδου ισχύει το ακόλουθο σημαντικό

Θεώρημα 12.2.1 (Jordan)

Κάθε απλή κλειστή καμπύλη C του μιγαδικού επιπέδου (καμπύλη Jordan) χωρίζει το επίπεδο σε δύο πεδία που έχουν κοινό σύνορο την καμπύλη C. Το ένα από τα δύο πεδία είναι φραγμένο και ονομάζεται *εσωτερικό* της καμπύλης και συμβολίζεται με εσ(Γ), ενώ το άλλο δεν είναι φραγμένο και ονομάζεται *εξωτερικό* της καμπύλης και συμβολίζεται με εξ(Γ).

□

Μία απλή κλειστή καμπύλη C ορίζεται ως *θετικά προσανατολισμένη* ως προς το εσωτερικό της αν ο προσανατολισμός της συμπίπτει με την φορά κίνησης παρατηρητή, ο οποίος κινούμενος επάνω στην C αφήνει το εσωτερικό της καμπύλης στα αριστερά του.

Ορισμός 12.2.3 Ένα πεδίο Ω ονομάζεται *απλά συνεκτικό* αν το Ω περιέχει το εσωτερικό κάθε απλής κλειστής καμπύλης του. Δηλαδή, σε ένα απλά συνεκτικό πεδίο δεν υπάρχουν οπές.

□

Παράδειγμα 12.2.8 Το πεδίο $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ είναι απλά συνεκτικό.

Τα πεδία

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}, \;\; \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\} \text{ και } \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$$

δεν είναι απλά συνεκτικά.

△

12.3 Μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

Ορισμός 12.3.1 Έστω A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, $C : z = z(t) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ C^1 καμπύλη του A και συνεχής μιγαδική συνάρτηση $f : C \to \mathbb{C}$. Ως *επικαμπύλιο ολοκλήρωμα* της f κατά μήκος της καμπύλης C ορίζεται το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_C f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f\left(z(t)\right) z'(t)\,dt. \tag{12.3.1}$$

□

Αν η καμπύλη C είναι τμηματικά C^1 τότε ως επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ορίζεται το άθροισμα των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων των C^1 τμημάτων της. Εξάλλου, αν η καμπύλη C είναι κλειστή τότε θα συμβολίζουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f κατά μήκος της C με $\oint_C f(z)\,dz$.

Παράδειγμα 12.3.1 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\oint_C z^3\,dz$, όπου C περιφέρεια κύκλου με κέντρο το 0 και ακτίνα το 2, θετικά προσανατολισμένη.

Λύση. Η C ορίζεται από την C^1 παραμέτρηση $z(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, οπου $z'(t) = 2ie^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, οπότε από τον ορισμό (12.3.1) του επικαμπυλίου ολοκληρώματος, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}\oint_C z^3\,dz &= \int_0^{2\pi} 2^3\, e^{3it}\, 2ie^{it}\,dt = 16i \int_0^{2\pi} e^{4it}\,dt \\ &= -16 \int_0^{2\pi} \sin(4t) + 16i \int_0^{2\pi} \cos(4t)\,dt = 0.\end{aligned}$$

△

Παράδειγμα 12.3.2 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\oint_C (z - z_0)^n\,dz,\ n \in \mathbb{Z},$$

όπου C περιφέρεια κύκλου με κέντρο το z_0 και ακτίνα το R, θετικά προσανατολισμένη.

Λύση. Η καμπύλη C ορίζεται από την C^1 παραμέτρηση

$$z(t) = z_0 + Re^{it},\ t \in [0, 2\pi],$$

όπου

$$z'(t) = iRe^{it},\ t \in [0, 2\pi].$$

Έτσι, από τον ορισμό (12.3.1) του επικαμπυλίου ολοκληρώματος, έχουμε

$$\begin{aligned}\oint_C (z-z_0)^n\,dz, &= \int_0^{2\pi} R^n e^{int} iRe^{it}\,dt = iR^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\,dt\\ &= -R^{n+1}\int_0^{2\pi}\sin((n+1)t)\,dt + iR^{n+1}\int_0^{2\pi}\cos((n+1)t)\,dt\\ &= \begin{cases} 0, & n\in\mathbb{Z},\ n\neq -1\\ 2\pi i, & n=-1\end{cases}.\end{aligned}$$

△

Σημείωση 12.3.1 Έστω C καμπύλη του $\mathbb{C}$ και $f : C \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού την καμπύλη C. Τότε, επειδή η καμπύλη C είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στη C, από το Θεώρημα 10.5.4, έχουμε ότι η f είναι φραγμένη στη C.

△

Πρόταση 12.3.1 Έστω C μία τμηματικά C^1 καμπύλη και $f, g : C \to \mathbb{C}$ συνεχείς συναρτήσεις με πεδίο ορισμού την καμπύλη C. Τότε, ισχύουν

(1)
$$\int_{C^-} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz$$

(2)
$$\int_C (af(z)+bg(z))\,dz = a\int_C f(z)\,dz + b\int_C g(z)\,dz,\ \ a,b\in\mathbb{C}$$

(3) Έστω $M > 0$ με $|f(z)| \le M,\ \ \forall z \in C$ (βλ. Σημείωση 12.3.1). Τότε, ισχύει

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le ML, \tag{12.3.2}$$

όπου L είναι το μήκος της καμπύλης C που ορίζεται από τον τύπο (12.2.1).

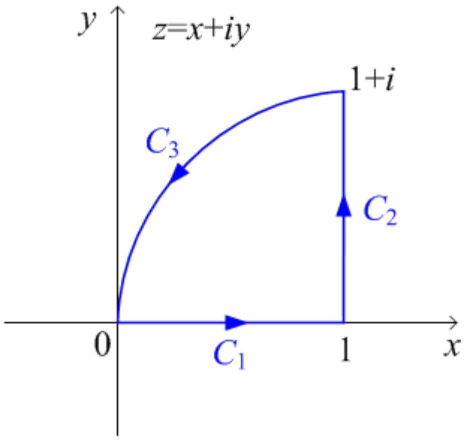
Απόδειξη. Οι (1) και (2) είναι απλές συνέπειες του Ορισμού 12.3.1 του μιγαδικού επικαμπυλίου ολοκληρώματος και των ιδιοτήτων (i) και (ii), οι οποίες ακολουθούν τον Ορισμό 12.1.1.

(3) Υποθέτουμε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι η C είναι C^1 καμπύλη, οπότε από τον Ορισμό 12.3.1 του μιγαδικού επικαμπυλίου ολοκληρώματος και την υπόθεση, έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\int_C f(z)\,dz\right| &= \left|\int_\alpha^\beta f\left(z(t)\right) z'(t)\,dt\right|\\ &\le \int_\alpha^\beta \left|f\left(z(t)\right)\right| |z'(t)|\,dt \le M\int_\alpha^\beta |z'(t)|\,dt = ML.\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 12.3.3 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\oint_C \overline{z}\, dz$ κατά μήκος της κλειστής καμπύλης $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ του Σχήματος 12.1.



Σχήμα 12.1: Καμπύλη ολοκλήρωσης του Παραδείγματος 12.3.3.

Λύση. Από τον ορισμό του επικαμπυλίου ολοκληρώματος για τμηματικά C^1 καμπύλες, έχουμε

$$\oint_C \overline{z}\, dz = \int_{C_1} \overline{z}\, dz + \int_{C_2} \overline{z}\, dz + \int_{C_3} \overline{z}\, dz.$$

Υπολογίζουμε τα επιμέρους ολοκληρώματα.

Το ευθύγραμμο τμήμα C_1 ορίζεται από την παραμέτρηση $z(t) = t,\ t \in [0, 1]$, όπου $z'(t) = 1,\ t \in [0, 1]$, οπότε

$$\int_{C_1} \overline{z}\, dz = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}.$$

Το ευθύγραμμο τμήμα C_2 ορίζεται από την παραμέτρηση $z(t) = 1 + it,\ t \in [0, 1]$, όπου $z'(t) = i,\ t \in [0, 1]$, οπότε

$$\int_{C_2} \overline{z}\, dz = \int_0^1 (1 - it)i\, dt = i + \frac{1}{2}.$$

Η καμπύλη C_3 ορίζεται από την παραμέτρηση $z(t) = 1 + e^{it},\ t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, όπου $z'(t) = ie^{it},\ t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, οπότε

$$\int_{C_3} \overline{z}\, dz = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 + e^{-it})ie^{it}\, dt = -1 + i\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Προσθέτοντας, τώρα, τα επιμέρους ολοκληρώματα ευρίσκουμε

$$\oint_C \overline{z}\, dz = \frac{\pi i}{2}.$$

$\triangle$

Η τιμή του μιγαδικού επικαμπυλίου ολοκληρώματος κατά μήκος καμπύλων με τα ίδια άκρα εξαρτάται γενικά από την καμπύλη. Όμως, υπάρχει μία ευρεία κατηγορία συναρτήσεων $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, όπου το Ω είναι πεδίο, των οποίων το μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι *ανεξάρτητο της τμηματικά C^1 καμπύλης ολοκλήρωσης* του Ω.

Θεώρημα 12.3.1 Έστω $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση στο πεδίο Ω, η οποία έχει μία αρχική F στο Ω (δηλαδή ισχύει $F'(z) = f(z),\ \forall z \in \Omega$). Τότε, για κάθε δύο σημεία a και b του Ω $(a \neq b)$ και για κάθε τμηματικά C^1 καμπύλη C του Ω με αρχή το a και πέρας το b ισχύει

$$\int_C f(z)\, dz = F(b) - F(a).$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό του επικαμπυλίου ολοκληρώματος και με εφαρμογή του κανόνα αλυσίδας, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_C f(z)\, dz &= \int_\alpha^\beta f\left(z(t)\right) z'(t)\, dt = \int_\alpha^\beta F'\left(z(t)\right) z'(t)\, dt \\ &= \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}\left[F\left(z(t)\right)\right]\, dt = F(z(\beta)) - F(z(\alpha)) = F(b) - F(a). \end{aligned}$$

$\square$

Θεώρημα 12.3.2 Για μία συνεχή μιγαδική συνάρτηση $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ στο πεδίο Ω, οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι

1. Το μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο της τμηματικά C^1 καμπύλης ολοκλήρωσης του Ω, δηλαδή για κάθε δύο τμηματικά C^1 καμπύλες C_1 και C_2 του Ω με τα ίδια άκρα ισχύει

$$\int_{C_1} f(z)\, dz = \int_{C_2} f(z)\, dz.$$

2. Για κάθε κλειστή τμηματικά C^1 καμπύλη C του Ω ισχύει

$$\oint_C f(z)\, dz = 0.$$

3. Η f έχει μία αρχική F στο Ω (δηλαδή υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $F : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $F'(z) = f(z),\ \forall z \in \Omega$).

Απόδειξη.

1⇒2. Έστω $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots \cup \Gamma_m$ μία τμηματικά C^1 κλειστή καμπύλη του Ω. Τότε, παρατηρούμε (π.χ.) ότι οι (τμηματικά C^1 προσανατολισμένες) καμπύλες Γ_1 και $\Gamma_2^- \cup \ldots \cup \Gamma_m^-$ έχουν τα ίδια άκρα, οπότε από την υπόθεση έχουμε

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\Gamma_2^- \cup \ldots \cup \Gamma_m^-} f(z)\, dz = -\int_{\Gamma_2} f(z)\, dz - \ldots - \int_{\Gamma_m} f(z)\, dz$$

και έτσι

$$\oint_{\Gamma} f(z)\, dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\, dz + \ldots + \int_{\Gamma_m} f(z)\, dz = 0.$$

2⇒1. Έστω A και B δύο σημεία του Ω και C_1 και C_2 δύο τμηματικά C^1 (προσανατολισμένες) παραμετρικές καμπύλες του Ω με αρχή το A και πέρας το B. Τότε, η (τμηματικά C^1) καμπύλη $C = C_1 \cup C_2^-$ είναι κλειστή και άρα από την υπόθεση έχουμε ότι $\oint_C f(z)\, dz = 0$, οπότε ευρίσκουμε

$$\oint_{C_1} f(z)\, dz - \oint_{C_2} f(z)\, dz = \oint_{C_1} f(z)\, dz + \oint_{C_2^-} f(z)\, dz = \oint_{C} f(z)\, dz = 0.$$

1⇒3. Έστω z_0 σταθεροποιημένο σημείο του Ω. Τότε, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$F : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Έστω τώρα z (τυχόν) σημείο του Ω. Τότε, υπάρχουν $\rho > 0$ με $D_\rho(z) \subseteq \Omega$ (αφού το Ω είναι ανοικτό) και πολυγωνική γραμμή Γ με αρχή το z_0 και πέρας το z, η οποία περιέχεται στο Ω (αφού το Ω είναι πολυγωνικά συνεκτικό) (Σχήμα 12.2). Έστω τώρα $h \in \mathbb{C}$ με $0 < |h| < \rho$ και $w_h = z + h \in D_\rho(z)$ και Γ_h το ευθύγραμμο τμήμα του $D_\rho(z)$ με άκρα τα σημεία z και w_h, το οποίο ορίζεται από την παραμέτρηση $(1-t)z + tw_h = z + ht,\ t \in [0,1]$ και έχει μήκος $|h|$. Τώρα, επειδή οι καμπύλες Γ και $\Gamma \cup \Gamma_h$ είναι τμηματικά C^1 καμπύλες του Ω με (κοινή) αρχή το σημείο z_0 και πέρας το σημείο z και w_h, αντιστοίχως, έχουμε

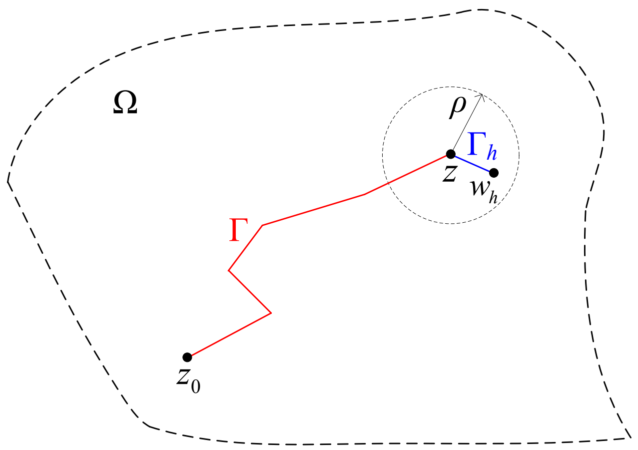
$$F(z+h) = F(z) + \int_{\Gamma_h} f(\zeta)\, d\zeta,$$

οπότε

$$\text{(a)} \qquad \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int_{\Gamma_h} f(\zeta)\, d\zeta - f(z) = \frac{1}{h}\int_{\Gamma_h} (f(\zeta) - f(z))\, d\zeta.$$

Όμως, η f είναι συνεχής στο z και έτσι για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει ένα $\delta > 0$ με $0 < \delta < \rho$ έτσι ώστε να ισχύει

$$\text{(b)} \qquad |f(\zeta) - f(z)| < \epsilon,\ \ \forall \zeta \in \Omega \text{ με } |\zeta - z| < \delta.$$



Σχήμα 12.2: Γεωμετρική ερμηνεία της ανεξαρτησίας του επικαμπυλίου ολοκληρώματος.

Συνδυάζοντας τώρα τις (a), (b) και την ML ανισότητα (12.3.2), για h με $0 < |h| < \delta$, ευρίσκουμε

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int_{\Gamma_h}(f(\zeta)-f(z))\,d\zeta\right| \leq \frac{1}{|h|}\epsilon|h| = \epsilon,$$

που σημαίνει ότι υπάρχει η παράγωγος $F'(z)$ και ισχύει

$$F'(z) = f(z).$$

3⇒1. βλ. Θεώρημα 12.3.1.

□

Παράδειγμα 12.3.4 Υπολογίστε το $\int_C e^z\,dz$, όπου C το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το $z_1 = 1$ και πέρας το $z_2 = 1+i$.

Λύση. Η συνάρτηση $f(z) = e^z$ έχει ως μία αρχική την $F(z) = e^z$ και, επομένως, έχουμε

$$\int_C e^z\,dz = e^{1+i} - e^1 = e(e^i - 1) = e(\cos 1 + i\sin 1 - 1).$$

△

Παράδειγμα 12.3.5 Για κάθε κλειστή και τμηματικά C^1 καμπύλη C ισχύει

$$\oint_C z^n\,dz = 0,\ n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1.$$

Λύση. Η συνάρτηση $f(z) = z^n$ έχει ως μία αρχική την $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$, $n \neq -1$, οπότε από το Θεώρημα 12.3.2 (3 ⇒ 2), προκύπτει το ζητούμενο.

△

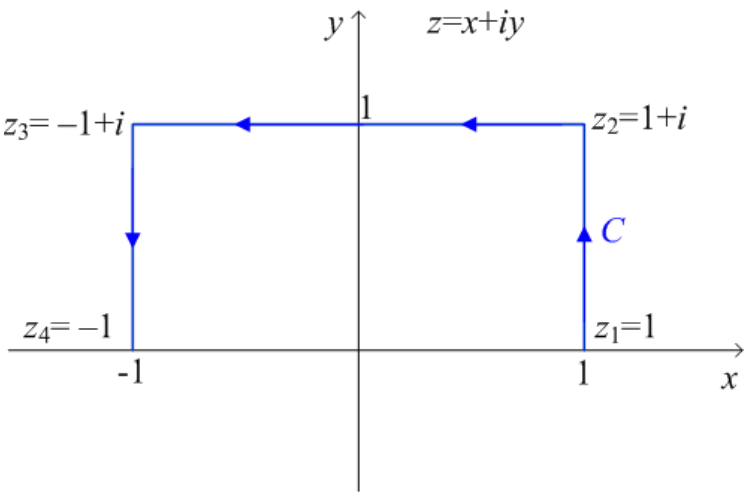
Παράδειγμα 12.3.6 Υπολογίστε το $\int_C z^3\,dz$, όπου C τμηματικά C^1 καμπύλη με αρχή το $z_1 = 1$ και τέλος το $z_2 = \frac{i}{2}$.

Λύση. Η $F(z) = \frac{z^4}{4}$, $z \in \mathbb{C}$, είναι μία αρχική της $f(z) = z^3$, οπότε από το Θεώρημα 12.3.1, ευρίσκουμε

$$\int_C z^3\,dz = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{i}{2}\right)^4 - 1^4\right] = -\frac{15}{64}.$$

△

Παράδειγμα 12.3.7 Υπολογίστε το $\int_C \frac{1}{z^3}\,dz$, όπου C η πολυγωνική γραμμή του Σχήματος 12.3 με αρχή το $z_1 = 1$ και πέρας το $z_4 = -1$.



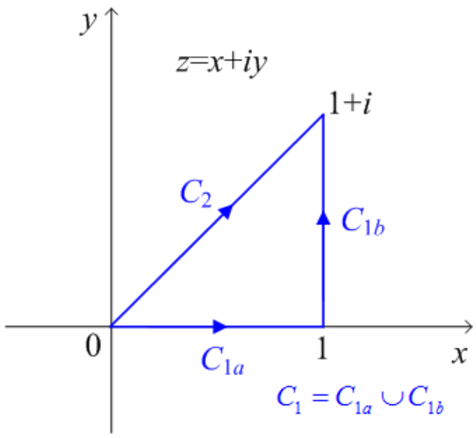
Σχήμα 12.3: Καμπύλη ολοκλήρωσης του Παραδείγματος 12.3.7.

Λύση. Επιλέγουμε το πεδίο Ω έτσι ώστε $C \subseteq \Omega$ και $0 \notin \Omega$. Έτσι, η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{z^3}$, $z \in \Omega$ είναι συνεχής και έχει ως μία αρχική τη συνάρτηση $F(z) = -\frac{1}{2z^2}$ στο Ω. Άρα, από το Θεώρημα 12.3.1, έχουμε

$$\int_C \frac{1}{z^3}\,dz = F(-1) - F(1) = 0.$$

△

Παράδειγμα 12.3.8 Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int_{C_1} z\,dz$ και $\int_{C_2} z\,dz$, όπου οι καμπύλες C_1 και C_2 φαίνονται στο Σχήμα 12.4.



Σχήμα 12.4: Καμπύλη ολοκλήρωσης του Παραδείγματος 12.3.8.

Λύση. Η συνάρτηση $F(z) = \frac{z^2}{2}$ είναι μία αρχική της $f(z) = z$. Επομένως, από το Θεώρημα 12.3.1, ευρίσκουμε

$$\int_{C_1} z\,dz = F(1+i) - F(0) = \frac{(1+i)^2}{2} = i.$$

Εξάλλου, από το Θεώρημα 12.3.2 ($3 \Rightarrow 1$), έχουμε

$$\int_{C_2} z\,dz = \int_{C_1} z\,dz = i.$$

△

12.4 Θεώρημα Cauchy

Στην παράγραφο αυτή εξετάζουμε την ολοκλήρωση μιγαδικών συναρτήσεων με κατάλληλα πεδία ορισμού, των οποίων το μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος απλών κλειστών και τμηματικά C^1 καμπυλών είναι μηδέν. Η κατηγορία αυτή περιέχει (όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο) τις συνεχείς μιγαδικές συναρτήσεις που έχουν μία αρχική συνάρτηση σε ενα πεδίο Ω. Επίσης, περιέχει τις ολόμορφες συναρτήσεις σε απλά συνεκτικό πεδίο Ω, όπως συνάγεται από το ακόλουθο σημαντικό θεώρημα της θεωρίας των μιγαδικών συναρτήσεων.

Θεώρημα 12.4.1 (Cauchy-Goursat.)

Έστω $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση στο απλά συνεκτικό πεδίο Ω. Τότε, για κάθε απλή, κλειστή και τμηματικά C^1 καμπύλη C του Ω ισχύει

$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

□

Οι υποθέσεις του θεωρήματος, ότι η συνάρτηση είναι ολόμορφη και το πεδίο ορισμού της είναι απλά συνεκτικό, είναι απαραίτητες, όπως συνάγεται από τις ακόλουθες περιπτώσεις συναρτήσεων.

(i) Η συνάρτηση $f(z) = \overline{z},\ z \in \mathbb{C}$, δεν είναι ολόμορφη σε κανένα $z \in \mathbb{C}$, αλλά ισχύει

$$\oint_{|z|=1} \overline{z}\,dz = \int_0^{2\pi} e^{-it}\,ie^{it}\,dt = 2\pi i \neq 0.$$

(ii) Η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{z},\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, είναι ολόμορφή στο πεδίο $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2\}$, το οποίο δεν είναι απλά συνεκτικό, αλλά ισχύει

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i \neq 0.$$

Παράδειγμα 12.4.1 Αποδείξτε ότι ισχύει

$$\oint_C \cos(z^4)\,dz = 0,$$

για οποιαδήποτε απλή, κλειστή και τμηματικά C^1 καμπύλη C του $\mathbb{C}$.

Λύση. Η συνάρτηση $f(z) = \cos(z^4)$ είναι ολόμορφη στο απλά συνεκτικό πεδίο $\mathbb{C}$ και έτσι ο ισχυρισμός έπεται από το Θεώρημα Cauchy-Goursat.

△

Παράδειγμα 12.4.2 Ισχύει ότι

$$\oint_C \frac{e^z}{z^2+16}\,dz = 0,$$

όπου C ο μοναδιαίος κύκλος $|z| = 1$ του $\mathbb{C}$.

Λύση. Η συνάρτηση
$$f(z) = \frac{e^z}{z^2+16} = \frac{e^z}{(z-4i)(z+4i)}$$
είναι ολόμορφη σε κάθε απλά συνεκτικό πεδίο Ω με $\pm 4i \notin \Omega$, το οποίο περιέχει την καμπύλη C, και έτσι ο ισχυρισμός συνάγεται ως συνέπεια του Θεωρήματος Cauchy-Goursat.

△

Παράδειγμα 12.4.3 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα
$$I = \oint_C \frac{dz}{z^2+z+1},$$
όπου $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{1}{2}\}$.

Λύση. Η εξίσωση $z^2+z+1=0$ έχει τις ρίζες $z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ και $z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ για τις οποίες ισχύει $|z_1| = |z_2| = 1$, δηλαδή τα σημεία z_1 και z_2 ευρίσκονται στο εξωτερικό του κύκλου C κέντρου 0 και ακτίνας $1/2$. Άρα, επιλέγοντας ένα δίσκο $D_r(0)$ με $\frac{1}{2} < r < 1$ και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Cauchy-Goursat για τον κύκλο C, ο οποίος περιέχεται στον $D_r(0)$, και τη συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{z^2+z+1}$, η οποία είναι ολόμορφη στον $D_r(0)$, ευρίσκουμε $I = 0$.

△

Πόρισμα 12.4.1 Έστω $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη μιγαδική συνάρτηση στο απλά συνεκτικό πεδίο Ω. Τότε, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C f(z)\,dz$ είναι ανεξάρτητο από την τμηματικά C^1 καμπύλη C που βρίσκεται στο Ω και ενώνει δύο σημεία A και B.

Απόδειξη. Έστω A και B δύο σημεία του Ω και C_1 και C_2 απλές τμηματικά C^1 παραμετρικές καμπύλες του Ω με αρχή το A και τέλος το B. Τότε η $C_3 = C_1 \cup C_2^-$ είναι απλή κλειστή και τμηματικά C^1 καμπύλη του Ω. Υπολογίζουμε
$$\oint_{C_3} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2^-} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

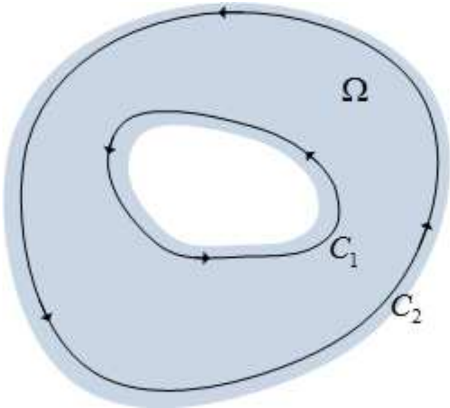
Όμως, από το Θεώρημα Cauchy-Goursat, έχουμε
$$\oint_{C_3} f(z)\,dz = 0$$
και ο ισχυρισμός αποδείχτηκε.

□

Θεώρημα 12.4.2 (Αρχή της συνεχούς παραμόρφωσης)

Έστω $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη μιγαδική συνάρτηση στο πεδίο Ω. Θεωρούμε δύο απλές κλειστές και τμηματικά C^1 θετικά προσανατολισμένες καμπύλες C_1 και C_2 του Ω έτσι ώστε η C_1 να βρίσκεται στο εσωτερικό της C_2 και το μεταξύ τους χωρίο να περιέχεται στο Ω (Σχήμα 12.5). Τότε, ισχύει

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz.$$



Σχήμα 12.5: Γεωμετρική οπτικοποίηση του πεδίου Ω του Θεωρήματος 12.4.2.

Απόδειξη. Θεωρούμε την κλειστή καμπύλη

$$\Gamma = C_1^- \cup L^- \cup C_2 \cup L$$

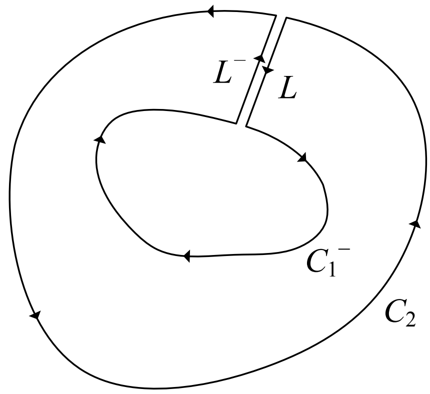
του Σχήματος 12.6 και σημειώνουμε ότι η παρουσία των ευθυγράμμων τμημάτων στην καμπύλη Γ συνεπάγεται ότι το εσωτερικό της Γ είναι απλά συνεκτικό σύνολο. Έτσι, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 12.4.1 (Cauchy-Goursat) για την ολόμορφη συνάρτηση f και την καμπύλη Γ, ευρίσκουμε

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = -\oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz = 0.$$

□

Παράδειγμα 12.4.4 Υπολογίστε το $\oint_C \frac{1}{z}\,dz$, όπου C η έλλειψη με καρτεσιανή εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Σχήμα 12.7).

Λύση. Επιλέγουμε έναν κύκλο C_1 με κέντρο το 0 και ακτίνα ρ, όπου $0 < \rho < \min(a, b)$, ο οποίος είναι απλή, κλειστή, C^1, θετικά προσανατολισμένη καμπύλη, ευρίσκεται στο εσωτερικό της C και η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{z},\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, είναι ολόμορφη σε ένα πεδίο Ω με $0 \notin \Omega$



Σχήμα 12.6: Οπτικοποίηση των γεωμετρικών στοιχείων της απόδειξης του Θεωρήματος 12.4.2.

που περιέχει τις C και C_1 και το μεταξύ τους χωρίο. Έτσι, εφαρμόζοντας το προηγούμενο θεώρημα, έχουμε

$$\oint_C \frac{1}{z}\, dz = \oint_{C_1} \frac{1}{z}\, dz.$$

Όμως, από το Παράδειγμα 12.3.2, έχουμε

$$\oint_{C_1} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i,$$

οπότε

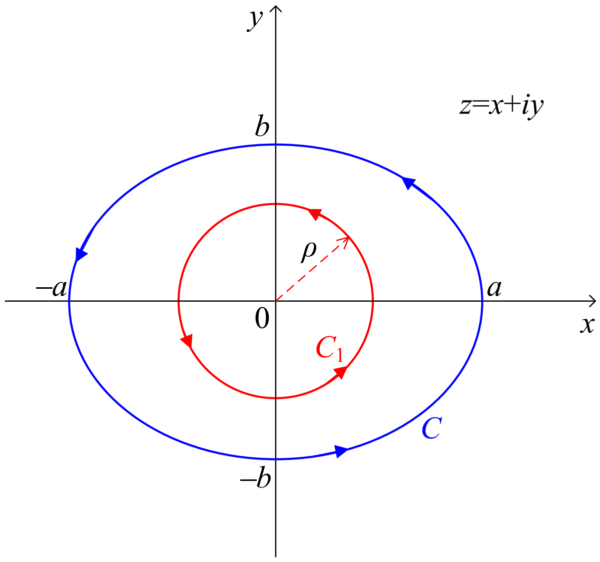
$$\oint_C \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i.$$

$\triangle$

Η αρχή της συνεχούς παραμόρφωσης επιδέχεται την ακόλουθη επέκταση για περισσότερες από δύο καμπύλες.

Θεώρημα 12.4.3 Έστω $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη μιγαδική συνάρτηση στο πεδίο Ω. Θεωρούμε τις απλές κλειστές και τμηματικά C^1 θετικά προσανατολισμένες καμπύλες $C_1, C_2, \ldots, C_n$ του Ω με τις ιδιότητες ότι η C_k βρίσκεται στο εσωτερικό της C, το εσωτερικό της C_k δεν έχει κοινά σημεία με το εσωτερικό της C_i, για $i \neq k$, και το χωρίο μεταξύ της C και της $C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n$ να περιέχεται στο Ω (Σχήμα 12.8). Τότε, ισχύει

$$\oint_C f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\, dz.$$



Σχήμα 12.7: Καμπύλη ολοκλήρωσης του Παραδείγματος 12.4.4.

Απόδειξη. Θεωρούμε την κλειστή καμπύλη Γ του Σχήματος 12.9, της οποίας το εσωτερικό είναι απλά συνεκτικό και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 12.4.1 (Cauchy-Goursat).

□

Παράδειγμα 12.4.5 Υπολογίστε το $\oint_C \frac{1}{z^2+1}\,dz$, όπου C ο κύκλος $|z| = 3$.

Λύση. Ο παρανομαστής γράφεται ως $z^2+1 = (z-i)(z+i)$ και επομένως η ολοκληρωτέα συνάρτηση δεν είναι ολόμορφη στα σημεία $z = i$ και $z = -i$, τα οποία βρίσκονται στο εσωτερικό της καμπύλης C. Αναλύοντας σε απλά κλάσματα, ευρίσκουμε

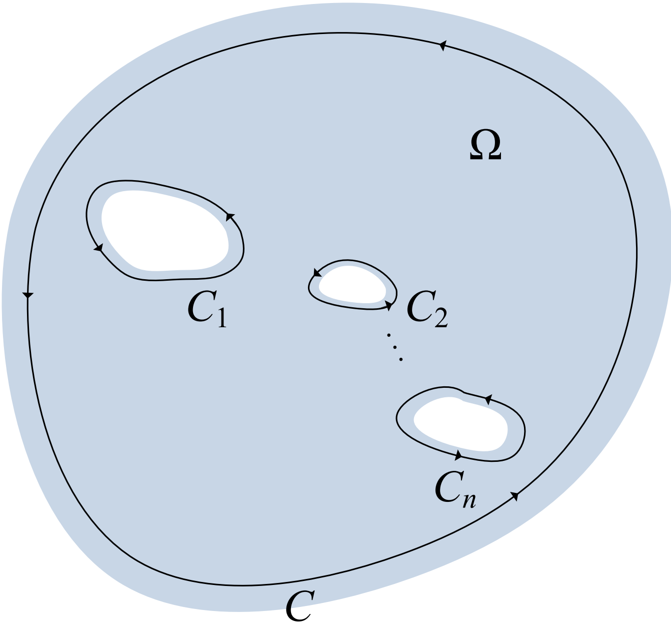
$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i} - \frac{1}{2i}\frac{1}{z+i},$$

και έτσι

$$\oint_C \frac{1}{z^2+1}\,dz = \frac{1}{2i}\oint_C \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)\,dz.$$

Εφαρμόζοντας, τώρα, το Θεώρημα 12.4.3, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{1}{z^2+1}\,dz &= \frac{1}{2i}\oint_{C_1}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)\,dz + \frac{1}{2i}\oint_{C_2}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)\,dz \\ &= \frac{1}{2i}\oint_{C_1}\frac{1}{z-i}\,dz - \frac{1}{2i}\oint_{C_1}\frac{1}{z+i}\,dz + \frac{1}{2i}\oint_{C_2}\frac{1}{z-i}\,dz - \frac{1}{2i}\oint_{C_2}\frac{1}{z+i}\,dz,\end{aligned}$$



Σχήμα 12.8: Γεωμετρική οπτικοποίηση του πεδίου Ω του Θεωρήματος 12.4.3.

όπου C_1 και C_2 κύκλοι με κέντρα τα i και $-i$ αντιστοίχως και κατάλληλες ακτίνες ώστε να βρίσκονται στο εσωτερικό της C (Σχήμα 12.10).

Επειδή η συνάρτηση $\frac{1}{z+i}$ είναι ολόμορφη στη C_1 και το εσωτερικό της και η $\frac{1}{z-i}$ είναι ολόμορφη στη C_2 και το εσωτερικό της, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 12.4.1 Cauchy-Goursat, έχουμε ότι

$$\oint_{C_1} \frac{1}{z+i}\, dz = 0 \quad \text{και} \quad \oint_{C_2} \frac{1}{z-i}\, dz = 0.$$

Εξάλλου, από το Παράδειγμα 12.3.2, υπολογίζουμε

$$\oint_{C_1} \frac{1}{z-i}\, dz = 2\pi i \quad \text{και} \quad \oint_{C_2} \frac{1}{z+i}\, dz = 2\pi i,$$

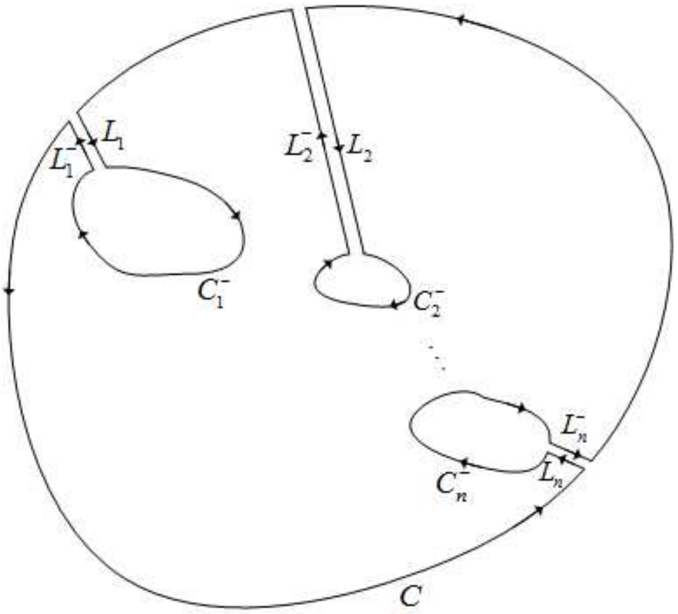
και άρα τελικά ευρίσκουμε

$$\oint_{C} \frac{1}{z^2+1}\, dz = \frac{1}{2i}2\pi i - \frac{1}{2i}2\pi i = 0.$$

△

12.5 Ολοκληρωτικοί τύποι Cauchy

Ο ακόλουθος ολοκληρωτικός τύπος προσδιορίζει, με τη βοήθεια συγκεκριμένου επικαμπυλίου ολοκληρώματος, τις τιμές μιας ολόμορφης συνάρτησης στο εσωτερικά σημεία μιας απλής



Σχήμα 12.9: Οπτικοποίηση των γεωμετρικών στοιχείων της απόδειξης του Θεωρήματος 12.4.3.

κλειστής και τμηματικά C^1 καμπύλης από τις τιμές της συνάρτησης επάνω στα σημεία της καμπύλης.

Θεώρημα 12.5.1 (Ολοκληρωτικός τύπος Cauchy)

Έστω $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση στο απλά συνεκτικό πεδίο Ω και C μια απλή κλειστή και τμηματικά C^1 θετικά προσανατολισμένη καμπύλη του Ω. Αν z_0 είναι ένα σημείο στο εσωτερικό της C, τότε

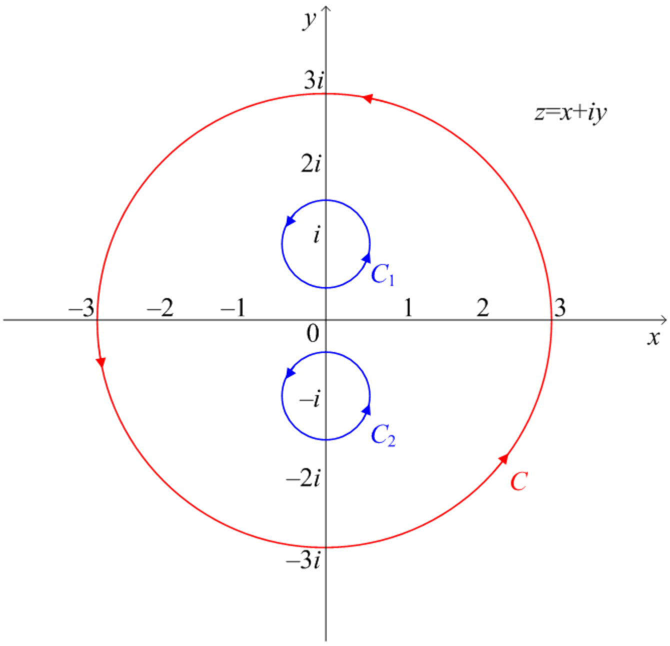
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \qquad (12.5.1)$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση f, ως ολόμορφη, είναι συνεχής στο z_0. Έτσι, για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, έτσι ώστε να ισχύει

(a) $$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon, \ \ \forall z \in \Omega \ \text{ με } \ |z - z_0| < \delta.$$

Εξάλλου, επειδή το z_0 ανήκει στο εσωτερικό της καμπύλης C, υπάρχει ένα $\rho > 0$ με $\rho < \delta$ έτσι ώστε $D_\rho(z_0) \subseteq \varepsilon\sigma(C)$. Τότε, εφαρμοζοντας την αρχή συνεχούς παραμόρφωσης (Θεώρημα 12.4.2) για την καμπύλη C και τον κύκλο C_ρ με κέντρο το z_0 και ακτίνα ρ, ευρίσκουμε

(b) $$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{C_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{C_\rho} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz + \oint_{C_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz.$$



Σχήμα 12.10: Καμπύλη ολοκλήρωσης του Παραδείγματος 12.4.5.

Όμως, από το Παράδειγμα 12.3.2, έχουμε

(c) $$\oint_{C_\rho} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0),$$

ενώ, με τη βοήθεια της (a), παρατηρούμε ότι ισχύει

(d) $$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| < \frac{\epsilon}{\rho}, \quad \forall z \in C_\rho.$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (d) και εφαρμόζοντας την ML ανισότητα (12.3.2), ευρίσκουμε

(e) $$\left|\oint_{C_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| \le \frac{\epsilon}{\rho}2\pi\rho = 2\pi\epsilon.$$

Συνδυάζοντας τώρα τις (b), (c) και (e), ευρίσκουμε

$$\left|\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - 2\pi i f(z_0)\right| = \left|\oint_{C_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| \le 2\pi\epsilon,$$

από την οποία, για $\epsilon \to 0$, συνάγεται

$$\left|\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - 2\pi i f(z_0)\right| = 0 \Rightarrow \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0).$$

□

Παρατηρήσεις.

(i) Ο τύπος (12.5.1) αναφέρεται συνήθως υπό τη χρηστικότερη μορφή

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i\, f(z_0).$$

(ii) Το ολοκλήρωμα $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$ ορίζεται για κάθε $z_0 \in \mathbb{C}$ με $z_0 \notin C$ και ισχύει

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \begin{cases} f(z_0), & z_0 \in \varepsilon\sigma(C) \\ 0, & z_0 \in \varepsilon\xi(C) \end{cases},$$

όπου με $\varepsilon\sigma(C)$ και $\varepsilon\xi(C)$ συμβολίζουμε το εσωτερικό και το εξωτερικό της καμπύλης C. Ο ισχυρισμός του πρώτου κλάδου προκύπτει από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy και του δευτέρου από το Θεώρημα Cauchy-Goursat.

Παράδειγμα 12.5.1 Υπολογίστε το

$$I = \oint_C \frac{z^2-5z+2i}{z+i}\,dz,$$

όπου $C : |z| = 3$.

Λύση. Η συνάρτηση $f(z) = z^2 - 5z + 2i$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και το σημείο $z_0 = -i \in \varepsilon\sigma(C)$. Έτσι, εφαρμόζοντας τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy, ευρίσκουμε

$$I = 2\pi i f(-i) = -\pi(14+2i).$$

△

Παράδειγμα 12.5.2 Υπολογίστε το

$$I = \oint_C \frac{e^z}{z}\,dz,$$

όπου $C : |z| = 1$.

Λύση. Η συνάρτηση $f(z) = e^z$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και το σημείο $z_0 = 0 \in \varepsilon\sigma(C)$, οπότε από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy έχουμε

$$I = 2\pi i f(0) = 2\pi i.$$

$\triangle$

Παράδειγμα 12.5.3 Υπολογίστε το

$$I = \oint_C \frac{e^{az}}{z^2+4}\, dz,$$

όπου $C : |z| = 4$ και $a \in \mathbb{C}$.

Λύση. Αναλύουμε τη συνάρτηση $\frac{1}{z^2+4}$ σε απλά κλάσματα ως εξής

$$\frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{4i}\frac{1}{z-2i} - \frac{1}{4i}\frac{1}{z+2i}$$

και έτσι το ζητούμενο ολοκλήρωμα γράφεται

$$I = \frac{1}{4i}\oint_C \frac{e^{az}}{z-2i}\, dz - \frac{1}{4i}\oint_C \frac{e^{az}}{z+2i}\, dz.$$

Η συνάρτηση $f(z) = e^{az}$, $a \in \mathbb{C}$, είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και τα σημεία $z_1 = 2i$ και $z_2 = -2i$ ανήκουν στο εσωτερικό της C. Έτσι, από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy, ευρίσκουμε

$$I = \frac{1}{4i}2\pi i f(2i) - \frac{1}{4i}2\pi i f(-2i) = \frac{\pi}{2}e^{2ia} - \frac{\pi}{2}e^{-2ia} = \pi i \sin(2a).$$

$\triangle$

Ο ολοκληρωτικός τύπος του επομένου θεωρήματος εκφράζει την τιμή της παραγώγου n-τάξεως μιάς ολόμορφης συνάρτησης σε ένα εσωτερικό σημείο μιας απλής κλειστής και τμηματικά C^1 θετικά προσανατολισμένης καμπύλης με τη βοήθεια ενός μιγαδικού επικαμπυλίου ολοκληρώματος κατά μήκος της καμπύλης αυτής.

Θεώρημα 12.5.2 (Ολοκληρωτικός τύπος Cauchy για παραγώγους)

Έστω $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση στο απλά συνεκτικό πεδίο Ω και C μια απλή κλειστή και τμηματικά C^1 θετικά προσανατολισμένη παραμετρική καμπύλη του Ω. Τότε, η $f(z)$ έχει παραγώγους $f^{(n)}(z_0)$, $n \in \mathbb{N}$, οποιασδήποτε τάξης σε κάθε z_0 που ανήκει στο εσωτερικό της C, οι οποίες δίνονται από τον τύπο

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{12.5.2}$$

$\square$

Παράδειγμα 12.5.4 Υπολογίστε το

$$I = \oint_C \frac{e^z}{z^{n+1}}\, dz,$$

όπου $C : |z| = 1$ και $n \in \mathbb{N}$.

Λύση. Η συνάρτηση $f(z) = e^z$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ με $f^{(n)}(z) = e^z$ και το σημείο $z_0 = 0 \in \varepsilon\sigma(C)$, οπότε από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους, έχουμε

$$I = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(0) = \frac{2\pi i}{n!}.$$

$\triangle$

Παράδειγμα 12.5.5 Υπολογίστε το

$$I = \oint_C \frac{\sin z}{(z - \frac{\pi}{4})^3}\, dz,$$

όπου $C : |z| = 1$.

Λύση. Η συνάρτηση $f(z) = \sin z$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και το σημείο $z_0 = \frac{\pi}{4} \in \varepsilon\sigma(C)$, οπότε από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους, με $n = 2$, λαμβάνουμε

$$I = \frac{2\pi i}{2!} f^{(2)}(\pi/4) = \pi i \left(-\sin(\pi/4)\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i.$$

$\triangle$

Πόρισμα 12.5.1 Κάθε ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ στο ανοικτό σύνολο Ω έχει παραγώγους κάθε τάξης στο Ω.

Απόδειξη. Έστω ένα $z \in \Omega$ και ένα $\rho > 0$ με $D_\rho(z) \subseteq \Omega$. Τότε, η συνάρτηση $f : D_\rho(z) \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη και ο δίσκος $D_\rho(z)$ είναι απλά συνεκτικό σύνολο. Εφαρμόζοντας, τώρα, τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους, στη συνάρτηση f στον κύκλο C_r με κέντρο το 0 και ακτίνα $r < \rho$, συνάγουμε ότι η f έχει παραγώγους κάθε τάξης στο z.

$\square$