4.6 Υποβιβασμός τάξης

Στην Παράγραφο 4.2 αναλύθηκε η γενική μεθοδολογία για την εύρεση της γενικής λύσης ομογενούς Δ.Ε. δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Όταν οι συντελεστές της Δ.Ε. είναι συναρτήσεις, τότε δεν υπάρχει γενική μεθοδολογία για την εύρεση της γενικής λύσης. Σε κάποιες, όμως, περιπτώσεις η ομογενής Δ.Ε. μπορεί να έχει μία λύση $y_1 \neq 0$, η οποία να μπορεί να προσδιορισθεί με εύκολο τρόπο. Τότε, η γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε.

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0, \tag{4.6.1}$$

προκύπτει με κάποιο συγκεκριμένο μετασχηματισμό, ο οποίος ανάγει την (4.6.1) σε μία ισοδύναμη Δ.Ε. πρώτης τάξης. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται *υποβιβασμός τάξης* και χρησιμοποιείται για την εύρεση μιας δεύτερης γραμμικά ανεξάρτητης λύσης y_2 της (4.6.1), όταν είναι ήδη γνωστή μία λύση $y_1 \neq 0$.

Η εφαρμογή της μεθόδου υποβιβασμού τάξης επεξηγείται στο ακόλουθο

Παράδειγμα 4.6.1 Με δεδομένο ότι η $y_1 = x$ είναι μία λύση της Δ.Ε.

$$2x^2y'' - xy' + y = 0, \;\; x > 0,$$

βρείτε τη γενική της λύση.

Λύση. Θέτουμε

$$y(x) = u(x)y_1(x) = u(x)x$$

και αναζητούμε να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση u, ώστε η $y = ux$ να είναι λύση της Δ.Ε. Παραγωγίζοντας, έχουμε

$$y' = u'x + u \quad , \quad y'' = u''x + 2u',$$

και αντικαθιστώντας στη Δ.Ε.

$$2x^3u'' + 3x^2u' = 0, \;\; x > 0,$$

η οποία είναι Δ.Ε. δευτέρας τάξης (όπως και η αρχική), αλλά επειδή δεν περιέχει όρο που να έχει u μπορεί να επιλυθεί θέτοντας $u' = v$, οπότε ανάγεται στη γραμμική Δ.Ε. πρώτης τάξης

$$v' + \frac{3}{2x}v = 0.$$

Η τελευταία λύνεται με τη μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα (βλ. Παράγραφο 2.3) και η λύση της προκύπτει να είναι

$$v = C\,x^{-3/2},$$

επομένως

$$u = c_1\,x^{-1/2} + c_2,$$

και άρα η γενική λύση της δοθείσας Δ.Ε. είναι

$$y = c_1\,x^{1/2} + c_2x.$$

△

Δηλαδή, αν είναι γνωστή μία λύση $y_1 \neq 0$ της (4.6.1), τότε για να βρούμε μία δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση y_2 θέτουμε

$$y_2(x) = u(x)y_1(x), \tag{4.6.2}$$

οπότε

$$y_2' = u'y_1 + uy_1',$$

και

$$y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''.$$

Αντικαθιστώντας τις τελευταίες εκφράσεις στην (4.6.1), λαμβάνουμε

$$y_1u'' + (2y_1' + a_1y_1)u' + (y_1'' + a_1y_1' + a_0y_1)u = 0. \tag{4.6.3}$$

Επειδή η y_1 είναι λύση της (4.6.1), ο συντελεστής του u στην (4.6.3) είναι ίσος με μηδέν, επομένως έχουμε

$$y_1u'' + (2y_1' + a_1y_1)u' = 0, \tag{4.6.4}$$

η οποία, θέτοντας $v = u'$, ανάγεται στη (γραμμική) Δ.Ε. πρώτης τάξης

$$y_1v' + (2y_1' + a_1y_1)v = 0. \tag{4.6.5}$$

Η v προσδιορίζεται με τις τεχνικές της Παραγράφου 2.3 και ακολούθως η u προκύπτει με αόριστη ολοκλήρωση.

Η παραπάνω διαδικασία καλείται υποβιβασμός τάξης διότι αναγόμαστε στη λύση μιας Δ.Ε. πρώτης τάξης ως προς u' αντί για την αρχική Δ.Ε. δεύτερης τάξης ως προς y.

Επίσης, σημειώνουμε ότι η μέθοδος υποβιβασμού τάξης μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για μη ομογενείς γραμμικές Δ.Ε. δεύτερης τάξης, όπως φαίνεται στο επόμενο

Παράδειγμα 4.6.2 Βρείτε τη γενική λύση της Δ.Ε.

$$xy'' + (1 - 2x)y' + (x - 1)y = xe^x, \;\; x > 0,$$

με δεδομένο ότι η $y_1 = e^x$ είναι μία λύση της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε.

Λύση. Θέτουμε

$$y = ue^x.$$

Παραγωγίζοντας, έχουμε

$$y' = u'e^x + ue^x \quad , \quad y'' = u''e^x + 2u'e^x + ue^x$$

και αντικαθιστώντας στη δοθείσα Δ.Ε., λαμβάνουμε

$$xu'' + u' = x,$$

η οποία παραμένει Δ.Ε. δευτέρας τάξης, όμως μπορεί να επιλυθεί θέτοντας $u' = v$, οπότε ανάγεται στη γραμμική Δ.Ε. πρώτης τάξης

$$xv' + v = x,$$

η λύση της οποίας είναι (βλ. Παράγραφο 2.3)

$$v = \frac{x}{2} + \frac{c_1}{x}.$$

Επομένως, με αόριστη ολοκλήρωση προκύπτει

$$u = \frac{x^2}{4} + c_1 \ln x + c_2,$$

και άρα η γενική λύση της δοθείσας μη ομογενούς Δ.Ε. είναι

$$y = \frac{x^2 e^x}{4} + c_1 e^x \ln x + c_2 e^x.$$

Σημειώνουμε ότι η $y_2 = e^x \ln x$ είναι μία δεύτερη λύση της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε., η οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητη με την $y_1 = e^x$.

△

4.7 Μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων

Θα περιγράψουμε μία γενική μέθοδο για τον προσδιορισμό της μερικής λύσης της μη ομογενούς γραμμικής Δ.Ε. δευτέρας τάξεως με (εν γένει) μεταβλητούς συντελεστές

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x), \tag{4.7.1}$$

όπου $a_0, a_1, f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή ως *μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων* ή *μέθοδος Lagrange* και χρησιμοποιεί τη γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε. της (4.7.1)

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0, \tag{4.7.2}$$

για να ανάγει το πρόβλημα υπολογισμού της λύσης της (4.7.1) στον υπολογισμό δύο συγκεκριμένων ολοκληρωμάτων.

Ο τρόπος εφαρμογής της μεθόδου μεταβολής των παραμέτρων παρουσιάζεται αρχικά στο ακόλουθο