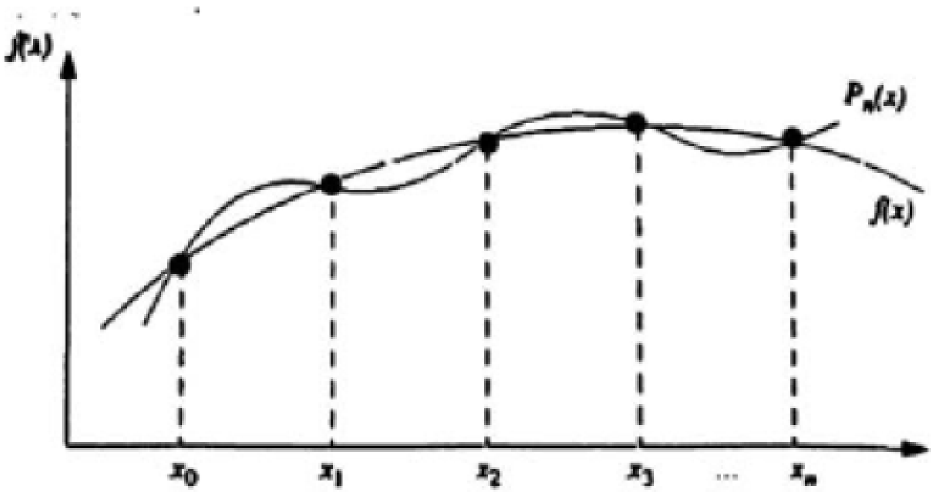
Αριθμητική Ανάλυση
Παρεμβολή

Αναστάσιος Τέφας
tefas@aiia.csd.auth.gr
2310-991932

Παρεμβολή

Εστω f πραγματική συνάρτηση, της οποίας είναι γνωστές μόνον οι τιμές $f(x_i)$ σε $n+1$ σημεία x_i, $i=0,...,n$ του πεδίου ορισμού της. Το πρόβλημα εύρεσης μιας συνάρτησης φ, (από ένα ορισμένο σύνολο συναρτήσεων Σ), έτσι ώστε η φ να προσδιορίζεται μόνον από τις τιμές $f(x_i)$ και να πληροί τις συνθήκες $\varphi(x_i)=f(x_i)$, $i=0,...,n$ καλείται ***παρεμβολή***. Αν το σύνολο Σ είναι αρκετά «πλούσιο», τότε η τιμή της συνάρτησης $\varphi(x)$ για $x \neq x_i$ μπορεί να θεωρηθεί ότι προσεγγίζει την τιμή $f(x)$.



Σχήμα 5: Πολυωνυμική παρεμβολή

Θεωρήματα παρεμβολής

Θεώρημα 5.1.1 (Weierstrass) Εστω $f \in C[a,b]$, όπου $C[a,b]$ είναι το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων στο κλειστό διάστημα *[α,b]*, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο $\pi(x)$ τέτοιο ώστε:

$$\max_{x \in [a,b]} \left| f(x) - \pi(x) \right| < \varepsilon .$$

Θεώρημα 5.1.2 (*Υπαρξης και μοναδικότητας του πολυωνύμου παρεμβολής*) Εστω *n+1* σημεία του επιπέδου (x_i, y_i), $i = 0,\ldots,n$, τότε υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο *p(x)* βαθμού το πολύ *n*, τέτοιο ώστε:

$$p(x_i) = y_i,\ i = 0,\ldots,n. \tag{5.1}$$

Σφάλμα προσέγγισης

Θεώρημα 5.1.3 (***Σφάλμα προσέγγισης***) Εστω $n = 1, \ldots,$ και $f \in C^{n+1}[a,b]$, όπου $C^{n+1}[a,b]$ είναι το σύνολο των συναρτήσεων που είναι $n+1$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμες στο κλειστό διάστημα $[a,b]$. Αν p_n είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$, τότε:

$$\| f - p_n \|_\infty \le \frac{\| f^{(n+1)} \|_\infty}{(n+1)!} \max_{x \in [a,b]} \prod_{i=0}^{n} \left| x - x_i \right|,$$

όπου: $\| f \|_\infty = \max_{x \in [a,b]} \left| f(x) \right|.$

Πολυώνυμο Lagrange

Εστω *n+1* σημεία του επιπέδου (x_i,y_i), $i = 0,\ldots,n$, τότε το πολυώνυμο Lagrange που διέρχεται από τα σημεία (x_i,y_i) έχει τη μορφή:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \; L_i(x)\,, \qquad (5.2)$$

όπου τα πολυώνυμα:

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)},\; i=0,\ldots,n$$

καλούνται ***συντελεστές Lagrange***.

Παράδειγμα 5.1 Υπολογίστε το πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange που διέρχεται από τα σημεία: *(-1,-3), (0,-2) (1,-1).*

Παρεμβολή Newton

Εστω *n+1* σημεία του επιπέδου (x_i,y_i), $i = 0,\ldots,n$, τότε το πολυώνυμο του Newton που διέρχεται από τα σημεία (x_i,y_i) έχει τη μορφή:

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + a_n(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1}), \qquad (5.3)$$

όπου οι συντελεστές $a_0, a_1, \ldots a_n$ υπολογίζονται με τη *μέθοδο των διαιρεμένων ή προσαρτημένων διαφορών* ως εξής:

Κατασκευάζουμε τον ακόλουθο πίνακα:

x	y	Διαιρεμένες διαφορές $1^{ης}$ τάξης	Διαιρεμένες διαφορές $2^{ης}$ τάξης	…	Διαιρεμένες διαφορές *n* τάξης
x_0	y_0	$\Delta_{11} = (y_1-y_0) / (x_1-x_0)$	$\Delta_{21} = (\Delta_{12}-\Delta_{11}) / (x_2-x_0)$	…	$\Delta_{n1} = (\Delta_{n-1,2}-\Delta_{n-1,1}) / (x_n-x_0)$
x_1	y_1	$\Delta_{12} = (y_2-y_1) / (x_2-x_1)$	$\Delta_{22} = (\Delta_{13}-\Delta_{12}) / (x_3-x_1)$	…	
⋮	⋮	⋮	⋮		
x_{n-1}	y_{n-1}	$\Delta_{1,n} = (y_n-y_{n-1}) / (x_n-x_{n-1})$	$\Delta_{2,n-1} = (\Delta_{1,n} - \Delta_{1,n-1}) / (x_n-x_{n-2})$		
x_n	y_n				

(1) οι δύο πρώτες στήλες είναι οι στήλες των δεδομένων *x* και *y* όπου τα *x* διατάσσονται από το μικρότερο στο μεγαλύτερο, δηλαδή:

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n .$$

(2) Ορίζουμε τις ***διαιρεμένες διαφορές 1^{ης} τάξης*** από τη σχέση:

$$\Delta_{1i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}},\ i = 1,\ldots n .$$

(3) Ορίζουμε τις ***διαιρεμένες διαφορές i-τάξης i = 1,…,n*** από τη σχέση:

$$\Delta_{ij} = \frac{\Delta_{i-1,j+1} - \Delta_{i-1,j}}{x_{j+i-1} - x_{j-1}},\ j = 1,\ldots n - i + 1 .$$

(4) Οι συντελεστές α_i, *i = 0,…,n* του πολυωνύμου του Newton υπολογίζονται ως εξής:

$$a_i = \begin{cases} y_0, & i = 0 \\ \Delta_{i1}, & i = 1,\ldots,n \end{cases} .$$

Παράδειγμα 5.2 Να υπολογισθεί το πολυώνυμο του Newton που παρεμβάλλει μία συνάρτηση *f(x)* στα σημεία:

x	*-1*	*-2*	*0*	*3*	*2*
y	*5*	*3*	*-2*	*0*	*4*

Σημείωση Για πολλές συναρτήσεις f, το μέγιστο σφάλμα $\| f - p_n \|_\infty$ κατά την προσέγγιση της f με ένα πολυώνυμο παρεμβολής p_n τείνει στο μηδέν. Αυτό όμως δε συμβαίνει πάντα. Από τον Runge δόθηκε το παράδειγμα της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2},$$

η οποία είναι απειροδιαφορίσιμη στο κλειστό διάστημα [-1,1] και για την οποία ισχύει $\| f - p_n \|_\infty \to \infty$, $n \to \infty$. Γενικότερα, ο Faber απέδειξε το 1914 ότι για *οποιαδήποτε επιλογή των σημείων παρεμβολής, υπάρχει συνεχής συνάρτηση για την οποία η παρεμβολή αποτυγχάνει*.

Παρεμβολή Hermitte

Εστω f μία πραγματική συνάρτηση και ας υποθέσουμε ότι ζητούμε από την παρεμβάλλουσα συνάρτηση $\varphi(x)$ της f, να έχει εκτός της ταύτισης με την f στα σημεία παρεμβολής $x_0, \ldots, x_n$ και τις ίδιες παραγώγους μέχρι κάποια τάξη με την f, όπου η τάξη μπορεί να διαφέρει από σημείο σε σημείο. Τότε μιλούμε για ***παρεμβολή τύπου Hermitte***.

Θεώρημα 5.3.1 (*Υπαρξης και μοναδικότητας του πολυωνύμου παρεμβολής*) Εστω $m_0, \ldots, m_n$ φυσικοί αριθμοί, $N = n + m_0 + \ldots + m_n$, p_N πολυώνυμο βαθμού N και $M = max\{m_0, \ldots, m_n\}$. Αν $f \in C^M[a,b]$ και $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \ldots, n$, $n+1$ σημεία του επιπέδου, τότε υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο $p_N(x)$ βαθμού το πολύ N, τέτοιο ώστε:

$$\begin{aligned} p_N^{(i)}(x_0) &= f^{(i)}(x_0),\ i = 0,\dots,m_0 \\ p_N^{(i)}(x_1) &= f^{(i)}(x_1),\ i = 0,\dots,m_1, \\ &\cdots \\ p_N^{(i)}(x_n) &= f^{(i)}(x_n),\ i = 0,\dots,m_n \end{aligned} \quad . \qquad (5.4)$$

Η πιο συνηθισμένη περίπτωση είναι αυτή κατά την οποία ζητούμε να υπολογίσουμε το πολυώνυμο Hermitte που ικανοποιεί τα δεδομένα:

$$p_N(x_i) = f(x_i),\ p'_N(x_i) = f'(x_i),\ i = 0,\dots,n. \qquad (5.5)$$

Θεώρημα 5.3.2 (*Σφάλμα προσέγγισης*) Εστω $n = 1, \dots,$ $f \in C^{2n+2}[a,b]$, και p_{2n+1} είναι το πολυώνυμο παρεμβολής Hermitte που ικανοποιεί την (5.5) στα σημεία $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$, τότε:

$$\| f - p_n \|_\infty \;\le\; \frac{\| f^{(2n+2)} \|_\infty}{(2n+2)!} \max_{x \in [a,b]} \prod_{i=0}^{n} \left| x - x_i \right|^2 .$$

Θεωρούμε τη σχέση (5.4), όπου χωρίς περιορισμό της γενικότητας έχουμε υποθέσει ότι $x_0<\ldots<x_n$. Ορίζουμε μία νέα ακολουθία σημείων ως εξής:

$$\left\{ \underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{m_0+1 \text{ φορές}}, \underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{m_1+1 \text{ φορές}}, \ldots, \underbrace{x_n, x_n, \ldots, x_n}_{m_n+1 \text{ φορές}} \right\}, \tag{5.6}$$

και για την ακολουθία (5.6) κατασκευάζουμε το πολυώνυμο Hermitte να είναι το πολυώνυμο Newton (5.3), όπου οι συντελεστές του υπολογίζονται όπως είδαμε στις σελ. 78-79 με μία μόνον επιπλέον συνθήκη:

(Σ) *όποτε βρίσκουμε στις διαιρεμένες διαφορές i-τάξης την ποσότητα 0/0 (μηδέν διά μηδέν) θα την αντικαθιστούμε με την ποσότητα:*

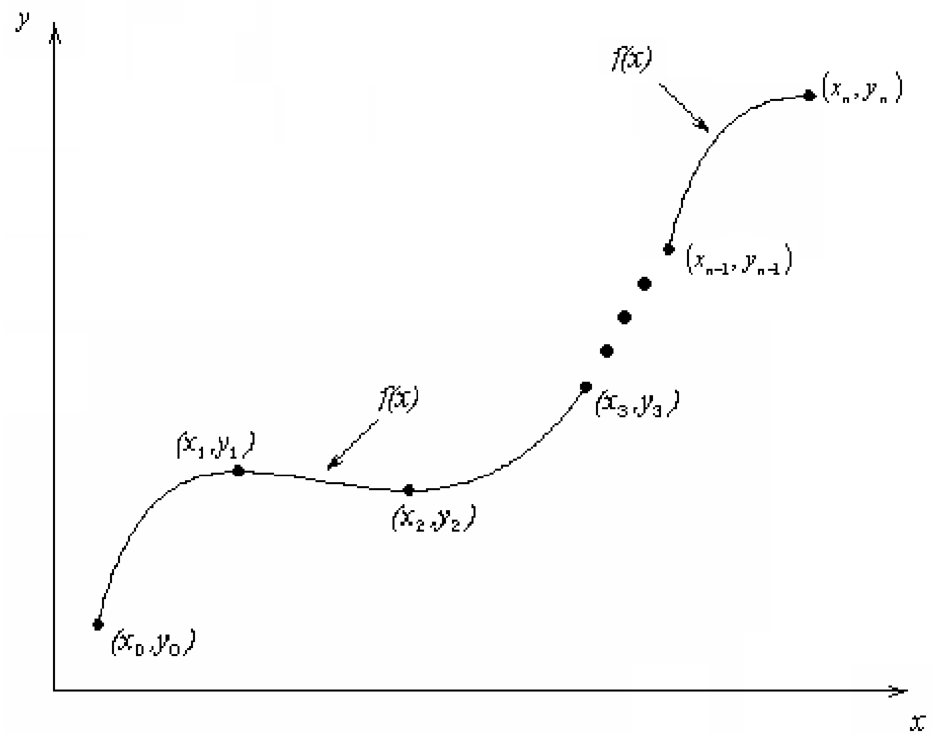
$$\Delta_{i,k} \to \frac{f^{(i)}(x_k)}{i!}.$$

Παράδειγμα 5.3 Να υπολογισθεί το πολυώνυμο του Hermitte που ικανοποιεί τα δεδομένα:

$$f(0) = 2,\ f'(0) = 4,\ f(2) = 4,\ f'(2) = 4,\ f''(2) = 4,\ f(4) = 6.$$

What is Interpolation ?

Given (x_0,y_0), (x_1,y_1), …… (x_n,y_n), find the value of ‘y’ at a value of ‘x’ that is not given.



Interpolants

Polynomials are the most common choice of interpolants because they are easy to:

- Evaluate
- Differentiate, and
- Integrate.

Why Splines ?

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$

Table : Six equidistantly spaced points in [-1, 1]

x	$y = \frac{1}{1+25x^2}$
-1.0	0.038461
-0.6	0.1
-0.2	0.5
0.2	0.5
0.6	0.1
1.0	0.038461

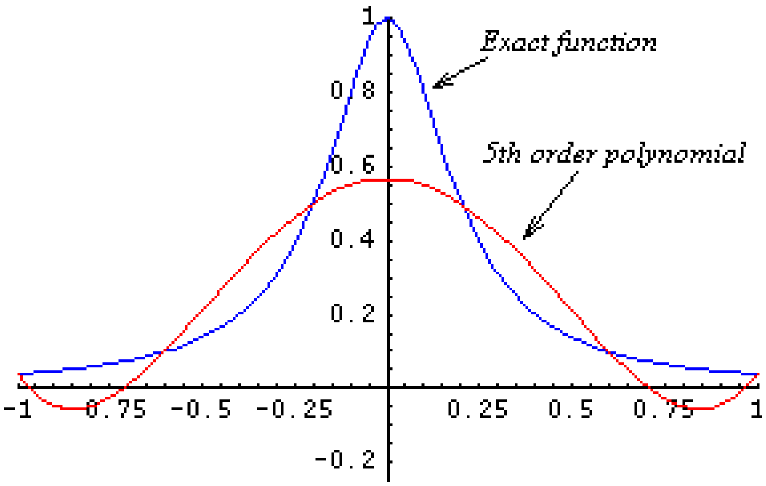


Figure : 5th order polynomial vs. exact function

Why Splines ?

http://numericalmethods.eng.usf.edu

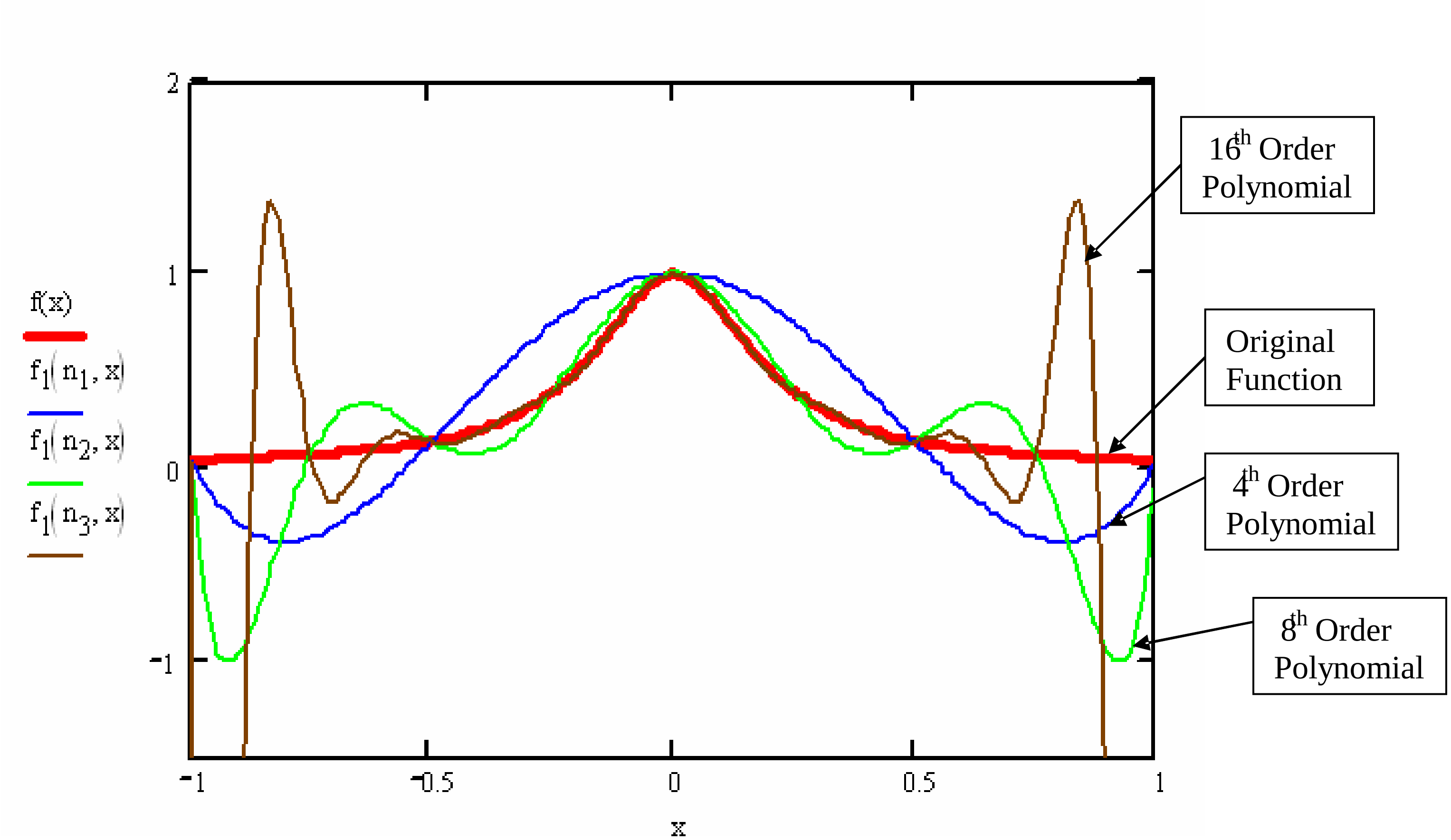


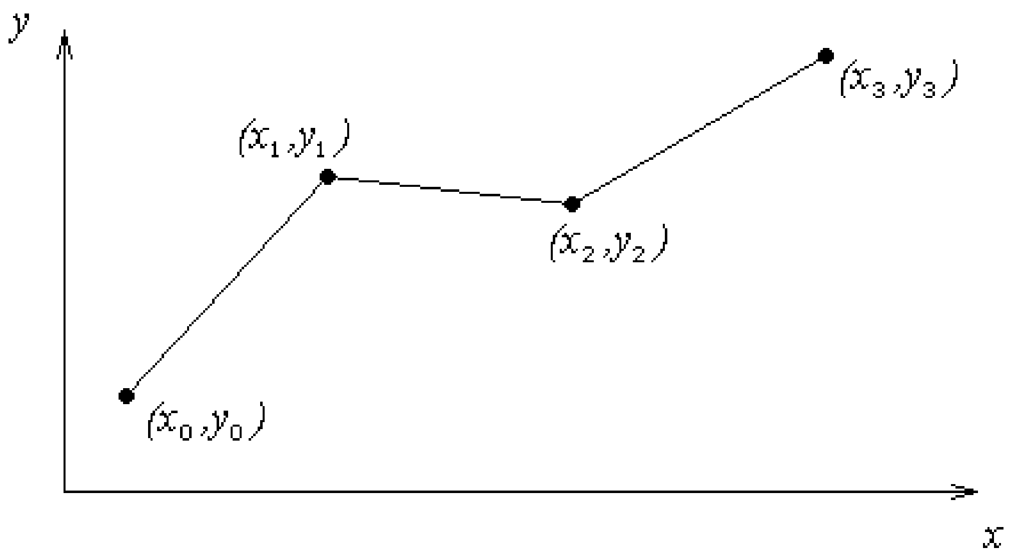
Figure : Higher order polynomial interpolation is a bad idea

Linear Interpolation

http://numericalmethods.eng.usf.edu

Given $(x_0, y_0),(x_1, y_1),......,(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n, y_n)$, fit linear splines to the data. This simply involves forming the consecutive data through straight lines. So if the above data is given in an ascending order, the linear splines are given by $(y_i = f(x_i))$

Figure : Linear splines



Linear Interpolation (contd)

http://numericalmethods.eng.usf.edu

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0), \qquad x_0 \le x \le x_1$$

$$= f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1), \qquad x_1 \le x \le x_2$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$= f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_{n-1}), \quad x_{n-1} \le x \le x_n$$

Note the terms of

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

in the above function are simply slopes between x_{i-1} and x_i.

Example

A robot arm with a rapid laser scanner is doing a quick quality check on holes drilled in a rectangular plate. The hole centers in the plate that describe the path the arm needs to take are given below.

If the laser is traversing from x = 2 to x = 4.25 in a linear path,

Find: the value of y at x = 4 using linear splines, the path of the robot if it follows linear splines, the length of that path.

x (m)	y (m)
2	7.2
4.25	7.1
5.25	6.0
7.81	5.0
9.2	3.5
10.6	5.0

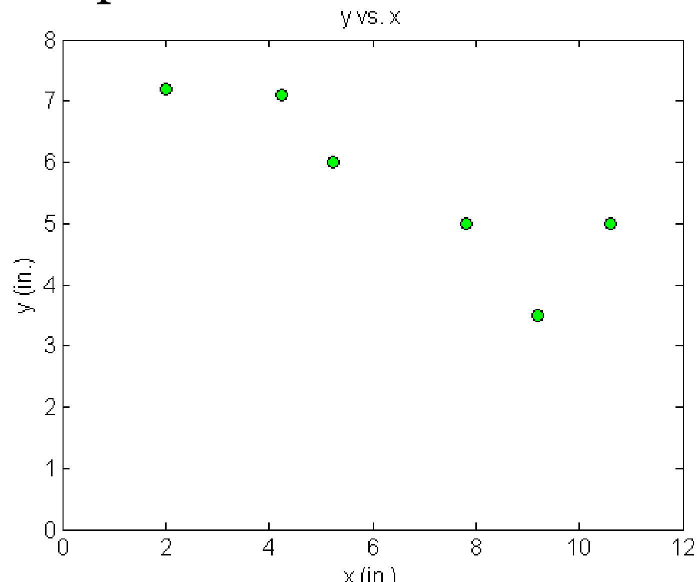


Figure 2 Location of holes on the rectangular plate.

Linear Interpolation

http://numericalmethods.eng.usf.edu

$$x_0 = 2.00, \qquad y(x_0) = 7.2$$

$$x_1 = 4.25, \qquad y(x_1) = 7.1$$

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y(x_1) - y(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

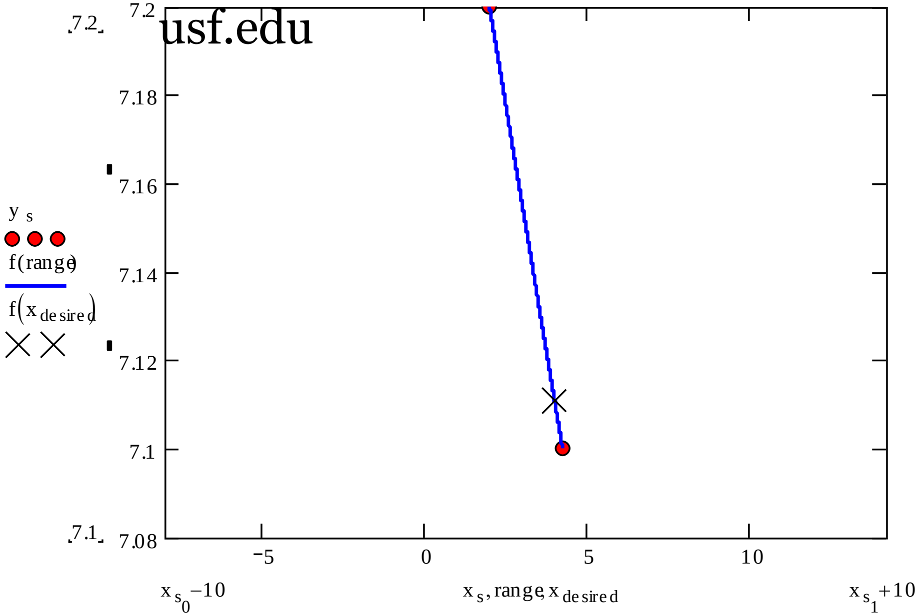
$$= 7.2 + \frac{7.1 - 7.2}{4.25 - 2.00}(x - 2.00)$$

$$y(x) = 7.2 - 0.044444(x - 2.00), \; 2.00 \le x \le 4.25$$

At $x = 4,$

$$y(4.00) = 7.2 - 0.044444(4.00 - 2.00)$$

$$= 7.1111 \text{ in.}$$



Linear Interpolation (contd)

http://numericalmethods.eng.usf.edu

Find the path of the robot if it follows linear splines.

The linear spline connecting x = 2.00 and x = 4.25.

$$y(x) = 7.2 - 0.044444(x - 2.00), \qquad 2.00 \le x \le 4.25$$

Similarly

$$y(x) = 7.1 - 1.1(x - 4.25), \qquad 4.25 \le x \le 5.25$$

$$y(x) = 6.0 - 0.39063(x - 5.25), \qquad 5.25 \le x \le 7.81$$

$$y(x) = 5.0 - 1.0791(x - 7.81), \qquad 7.81 \le x \le 9.20$$

$$y(x) = 3.5 + 1.0714(x - 9.20), \qquad 9.20 \le x \le 10.60$$

Linear Interpolation (contd)

http://numericalmethods.eng.usf.edu

Find the length of the path traversed by the robot following linear splines.

The length of the robot's path can be found by simply adding the length of the line segments together. The length of a straight line from one point (x_0, y_0) to another point (x_1, y_1) is given by $\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$.

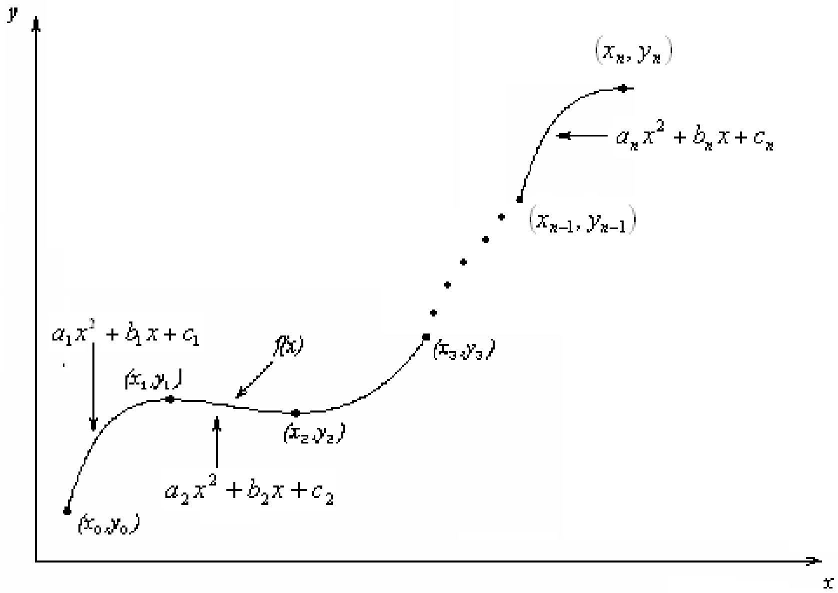
Hence, the length of the linear splines from x = 2.00 to x = 10.60 is

$$
\begin{aligned}
L &= \sqrt{(4.25-2.00)^2 + (7.1-7.2)^2} + \sqrt{(5.25-4.25)^2 + (6.0-7.1)^2} \\
&\quad + \sqrt{(7.81-5.25)^2 + (5.0-6.0)^2} + \sqrt{(9.20-7.81)^2 + (3.5-5.0)^2} \\
&\quad + \sqrt{(10.60-9.20)^2 + (5.0-3.5)^2} \\
&= 10.584 \text{ in.}
\end{aligned}
$$

Quadratic Interpolation

http://numericalmethods.eng.usf.edu

Given $(x_0, y_0),(x_1, y_1),......,(x_{n-1}, y_{n-1}),(x_n, y_n)$, fit quadratic splines through the data. The splines are given by



$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_1 x^2 + b_1 x + c_1, && x_0 \le x \le x_1 \\
&= a_2 x^2 + b_2 x + c_2, && x_1 \le x \le x_2 \\
&\;\;. \\
&\;\;. \\
&\;\;. \\
&= a_n x^2 + b_n x + c_n, && x_{n-1} \le x \le x_n
\end{aligned}
$$

Find a_i, b_i, c_i, $i = 1, 2, \ldots, \text{n}$

Quadratic Interpolation (contd)

http://numericalmethods.eng.usf.edu

Each quadratic spline goes through two consecutive data points

$$a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1 = f(x_0)$$

$$a_1 x_1^2 + b_1 x_1 + c_1 = f(x_1)$$

.

.

.

$$a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = f(x_{i-1})$$

$$a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i = f(x_i)$$

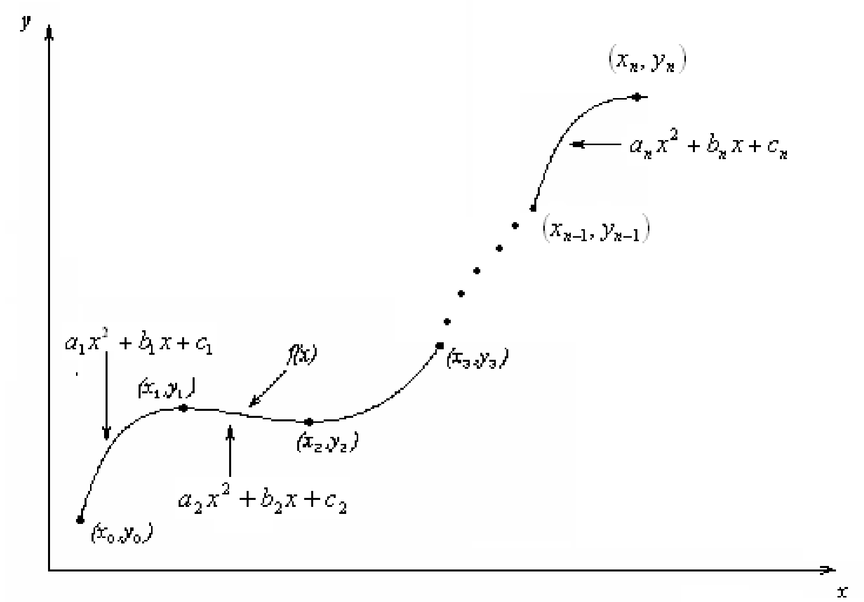
.

.

.

$$a_n x_{n-1}^2 + b_n x_{n-1} + c_n = f(x_{n-1})$$

$$a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n = f(x_n)$$



This condition gives 2n equations

Quadratic Splines (contd)

http://numericalmethods.eng.usf.edu

The first derivatives of two quadratic splines are continuous at the interior points.

For example, the derivative of the first spline

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 \quad \text{is} \quad 2a_1x + b_1$$

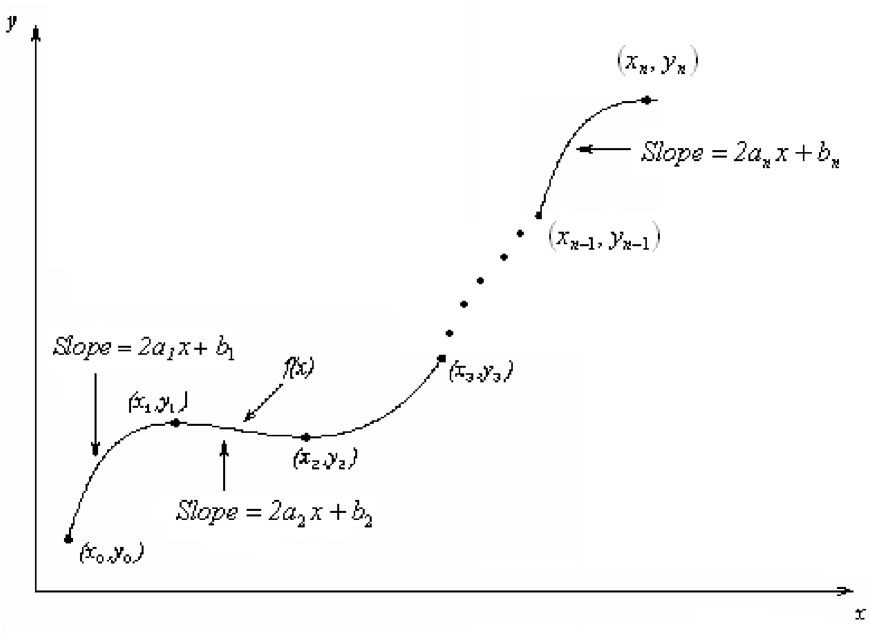
The derivative of the second spline

$$a_2x^2 + b_2x + c_2 \quad \text{is} \quad 2a_2x + b_2$$

and the two are equal at $x = x_1$ giving

$$2a_1x_1 + b_1 = 2a_2x_1 + b_2$$

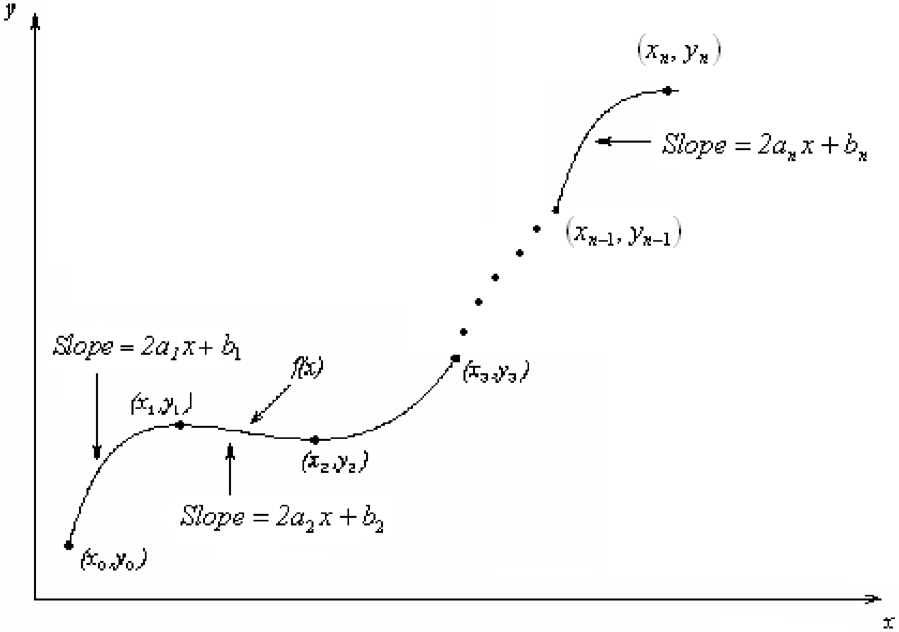
$$2a_1x_1 + b_1 - 2a_2x_1 - b_2 = 0$$



Quadratic Splines (contd)

http://numericalmethods.eng.usf.edu

Similarly at the other interior points,



$$2a_2x_2 + b_2 - 2a_3x_2 - b_3 = 0$$

.

.

.

$$2a_ix_i + b_i - 2a_{i+1}x_i - b_{i+1} = 0$$

.

.

.

$$2a_{n-1}x_{n-1} + b_{n-1} - 2a_nx_{n-1} - b_n = 0$$

We have (n-1) such equations. The total number of equations is $(2n) + (n-1) = (3n-1)$.

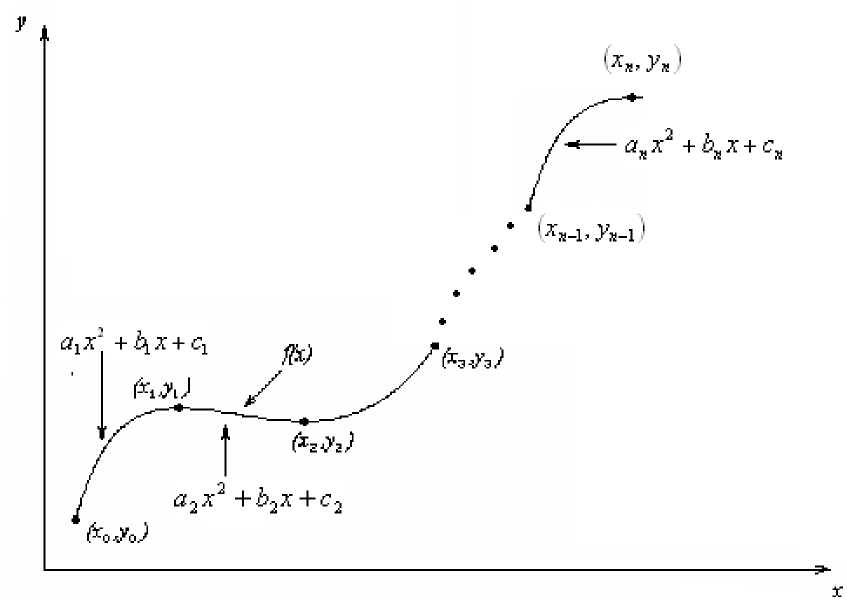
We can assume that the first spline is linear, that is $a_1 = 0$

Quadratic Splines (contd)

http://numericalmethods.eng.usf.edu

This gives us ‘3n’ equations and ‘3n’ unknowns. Once we find the ‘3n’ constants, we can find the function at any value of ‘x’ using the splines,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_1x^2 + b_1x + c_1, & x_0 \le x \le x_1 \\
&= a_2x^2 + b_2x + c_2, & x_1 \le x \le x_2 \\
&\ \ . \\
&\ \ . \\
&\ \ . \\
&= a_nx^2 + b_nx + c_n, & x_{n-1} \le x \le x_n
\end{aligned}
$$



Example

A robot arm with a rapid laser scanner is doing a quick quality check on holes drilled in a rectangular plate. The hole centers in the plate that describe the path the arm needs to take are given below.

If the laser is traversing from x = 2 to x = 4.25 in a linear path,

Find: the length of the path traversed by the robot using quadratic splines and compare the answer to the linear spline and a fifth order polynomial result.

x (m)	y (m)
2	7.2
4.25	7.1
5.25	6.0
7.81	5.0
9.2	3.5
10.6	5.0

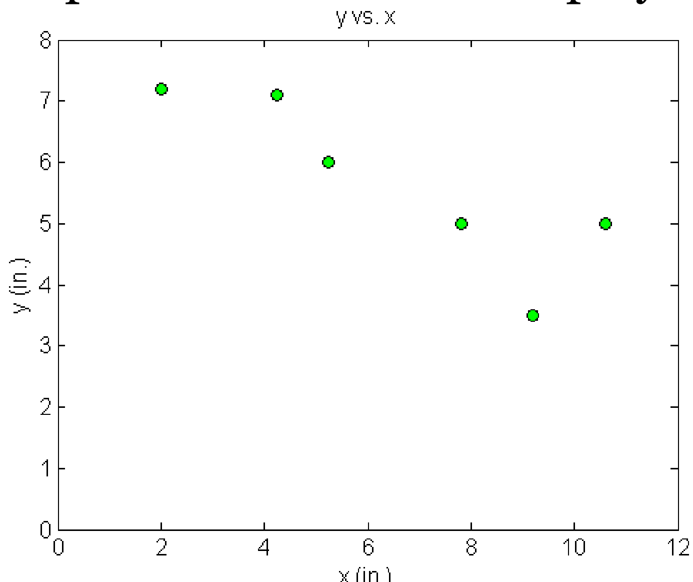


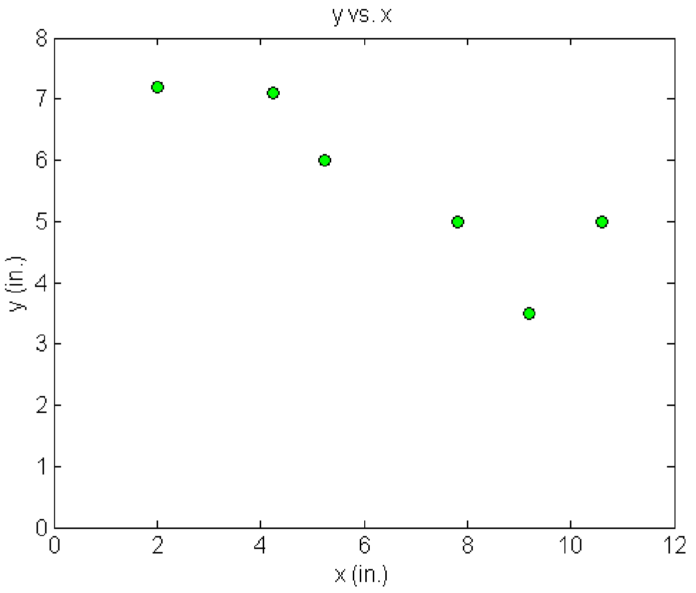
Figure 2 Location of holes on the rectangular plate.

Solution

Since there are six data points,

five quadratic splines pass through them.

$$\begin{aligned} y(x) &= a_1x^2 + b_1x + c_1, & 2.00 \le x \le 4.25 \\ &= a_2x^2 + b_2x + c_2, & 4.25 \le x \le 5.25 \\ &= a_3x^2 + b_3x + c_3, & 5.25 \le x \le 7.81 \\ &= a_4x^2 + b_4x + c_4, & 7.81 \le x \le 9.20 \\ &= a_5x^2 + b_5x + c_5, & 9.20 \le x \le 10.60 \end{aligned}$$



Solution (contd)

http://numericalmethods.eng.usf.edu

Setting up the equations

Each quadratic spline passes through two consecutive data points giving

$a_1x^2 + b_1x + c_1$ passes through x = 2.00 and x = 4.25,

$$a_1(2.00)^2 + b_1(2.00) + c_1 = 7.2 \qquad (1)$$

Similarly,

$$a_1(4.25)^2 + b_1(4.25) + c_1 = 7.1 \qquad (2)$$

$$a_2(4.25)^2 + b_2(4.25) + c_2 = 7.1 \qquad (3)$$

$$a_2(5.25)^2 + b_2(5.25) + c_2 = 6.0 \qquad (4)$$

$$a_3(5.25)^2 + b_3(5.25) + c_3 = 6.0 \qquad (5)$$

$$a_3(7.81)^2 + b_3(7.81) + c_3 = 5.0 \qquad (6)$$

$$a_4(7.81)^2 + b_4(7.81) + c_4 = 5.0 \qquad (7)$$

$$a_4(9.20)^2 + b_4(9.20) + c_4 = 3.5 \qquad (8)$$

$$a_5(9.20)^2 + b_5(9.20) + c_5 = 3.5 \qquad (9)$$

$$a_5(10.60)^2 + b_5(10.60) + c_5 = 5.0 \qquad (10)$$

Solution (contd)

http://numericalmethods.eng.usf.edu

Quadratic splines have continuous derivatives at the interior data points

At x = 4.25

$$2a_1(4.25)+b_1-2a_2(4.25)-b_2=0 \quad (11)$$

At x = 5.25

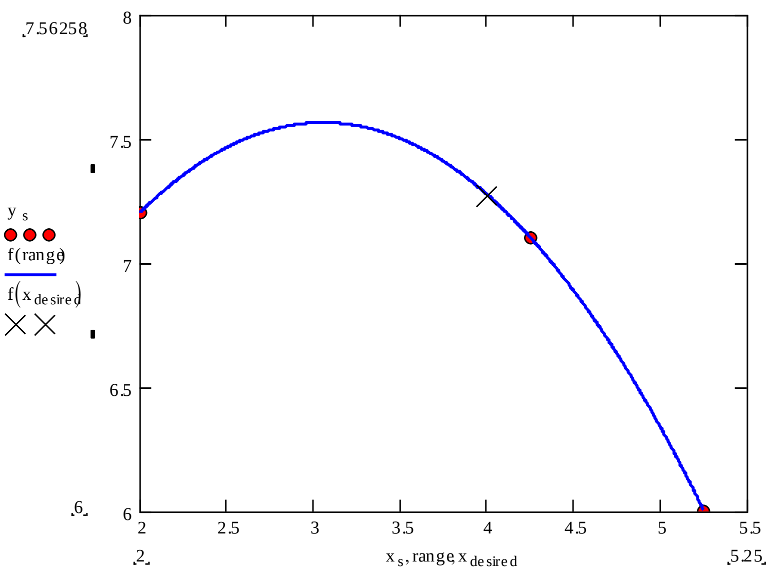
$$2a_2(5.25)+b_2-2a_3(5.25)-b_3=0 \quad (12)$$

At x = 7.81

$$2a_3(7.81)+b_3-2a_4(7.81)-b_4=0 \quad (13)$$

At x = 9.20

$$2a_4(9.20)+b_4-2a_5(9.20)-b_5=0 \quad (14)$$



Assuming the first spline $a_1x^2+b_1x+c_1$ is linear,

$$a_1=0 \quad (15)$$

Solution (contd)

http://numericalmethods.eng.usf.edu

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18.063 & 4.25 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18.063 & 4.25 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 27.563 & 5.25 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 27.563 & 5.25 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 60.996 & 7.81 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 60.996 & 7.81 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 84.64 & 9.2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 84.64 & 9.2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 112.36 & 10.6 & 1 \\ 8.5 & 1 & 0 & -8.5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10.5 & 1 & 0 & -10.5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15.62 & 1 & 0 & -15.62 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18.4 & 1 & 0 & -18.4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ a_4 \\ b_4 \\ c_4 \\ a_5 \\ b_5 \\ c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.2 \\ 7.1 \\ 7.1 \\ 6.0 \\ 6.0 \\ 5.0 \\ 5.0 \\ 3.5 \\ 3.5 \\ 5.0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solution (contd)

http://numericalmethods.eng.usf.edu

Solving the above 15 equations gives the 15 unknowns as

i	a_i	a_i	a_i
1	0	−0.044444	7.2889
2	−1.0556	8.9278	−11.777
3	0.68943	−9.3945	36.319
4	−1.7651	28.945	−113.40
5	3.2886	−64.042	314.34

Solution (contd)

http://numericalmethods.eng.usf.edu

Therefore, the splines are given by

$$
\begin{aligned}
y(x) &= -0.04444x + 7.2888, && 2.00 \le x \le 4.25 \\
&= -1.0556x^2 + 8.9278x - 11.777, && 4.25 \le x \le 5.25 \\
&= 0.68943x^2 - 9.3945x + 36.319, && 5.25 \le x \le 7.81 \\
&= -1.7651x^2 + 28.945x - 113.40, && 7.81 \le x \le 9.20 \\
&= 3.2886x^2 - 64.042x + 314.34, && 9.20 \le x \le 10.60
\end{aligned}
$$

Solution (contd)

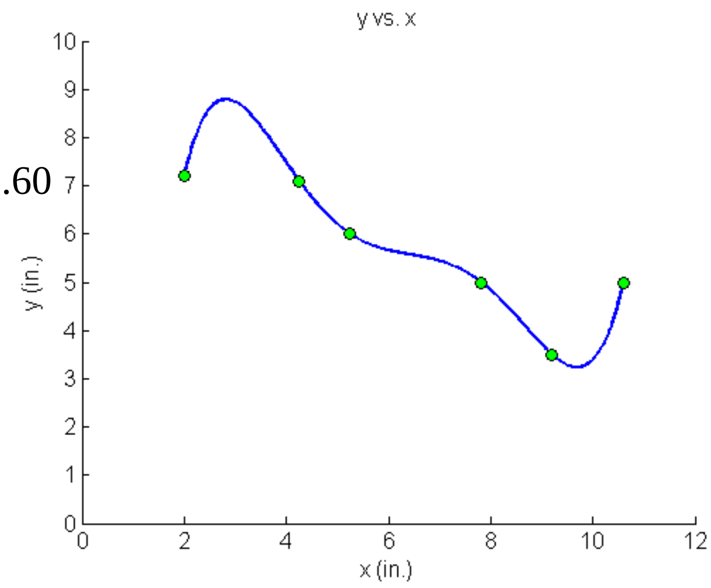
http://numericalmethods.eng.usf.edu

The length of a curve of a function $y = f(x)$ from 'a' to 'b' is given by

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

In this case, f(x) is defined by five separate functions a = 2.00 to b = 10.60

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(-0.044444x + 7.2889\right), & 2.00 \le x \le 4.25 \\
&= \frac{d}{dx}\left(-1.0556x^2 + 8.9278x - 11.777\right), & 4.25 \le x \le 5.25 \\
&= \frac{d}{dx}\left(0.68943x^2 - 9.3945x + 36.319\right), & 5.25 \le x \le 7.81 \\
&= \frac{d}{dx}\left(-1.7651x^2 + 28.945x - 113.40\right), & 7.81 \le x \le 9.20 \\
&= \frac{d}{dx}\left(3.2886x^2 - 64.042x + 314.34\right), & 9.20 \le x \le 10.60
\end{aligned}$$



Solution (contd)

http://numericalmethods.eng.usf.edu

$$L = \int_{2.00}^{4.25} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx + \int_{4.25}^{5.25} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \int_{5.25}^{7.81} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \int_{7.81}^{9.20} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \int_{9.20}^{10.60} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$= \int_{2.00}^{4.25} \sqrt{1+(-0.044444)^2}\,dx + \int_{4.25}^{5.25} \sqrt{1+(-2.1111x+8.9278)^2}\,dx + \int_{5.25}^{7.81} \sqrt{1+(1.3788x-9.3945)^2}\,dx$$

$$+ \int_{7.81}^{9.20} \sqrt{1+(-3.5302x+28.945)^2}\,dx + \int_{9.20}^{10.60} \sqrt{1+(6.5772x-64.042)^2}\,dx$$

$$= 2.2522 + 1.5500 + 3.6596 + 2.6065 + 3.8077$$

$$= 13.876$$

Comparison

http://numericalmethods.eng.usf.edu

Compare the answer from part (a) to linear spline result and fifth order polynomial result.

We can find the length of the fifth order polynomial result in a similar fashion to the quadratic splines without breaking the integrals into five intervals. The fifth order polynomial result through the six points is given by

$$y(x) = -30.898 + 41.344x - 15.855x^2 + 2.7862x^3 - 0.23091x^4 + 0.0072923x^5, \quad 2 \le x \le 10.6$$

Therefore,

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_{2.00}^{10.60} \sqrt{1 + \left(41.344 - 31.710x + 8.3586x^2 - 0.92364x^3 + 0.036461x^4\right)} dx$$

$$= 13.123$$

Comparison

http://numericalmethods.eng.usf.edu

The absolute relative approximate error obtained between the results from the linear and quadratic spline is

$$\left|\in_a\right| = \left|\frac{13.876 - 10.584}{13.876}\right| \times 100$$

$$= 0.23724\%$$

The absolute relative approximate error obtained between the results from the fifth order polynomial and quadratic spline is

$$\left|\in_a\right| = \left|\frac{13.876 - 13.123}{13.876}\right| \times 100$$

$$= 0.054239\%$$

Splines

Εστω $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ είναι ένας διαμερισμός του κλειστού διαστήματος *[α,b]*, τότε splines ως προς αυτό το διαμερισμό καλούνται γενικά εκείνες οι συναρτήσεις που σε κάθε υποδιάστημα $[x_i, x_{i+1}]$, έχουν μία ορισμένη μορφή, είναι π.χ. πολυώνυμα βαθμού *m*.

Ορισμός 5.4.1 Εστω $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ είναι ένας διαμερισμός του κλειστού διαστήματος *[α,b]*. Κάθε συνάρτηση $s \in C^{m-1}[a,b]$ τέτοια ώστε ο περιορισμός $s|_{[x_i, x_{i+1}]}$ $i = 1, \ldots, n$ να είναι πολυώνυμο βαθμού *m* καλείται πολυωνυμική *spline* βαθμού *m*.

Για παράδειγμα οι πολυωνυμικές *splines* βαθμού *1* είναι οι συνεχείς τεθλασμένες γραμμές.

Σημαντικό ρόλο στις εφαρμογές παίζουν οι κυβικές *splines*, δηλαδή οι συναρτήσεις που είναι *2 φορές παραγωγίσιμες στο κλειστό διάστημα [α,b] και είναι κυβικά πολυώνυμα σε κάθε υποδιάστημα ενός οποιουδήποτε διαμερισμού του [α,b].*

Εστω $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ οποιοδήποτε διαμερισμός του *[α,b]*, για τον προσδιορισμό μιας κυβικής *spline* απαιτείται η εύρεση συνολικά *4n* σταθερών, δηλαδή των συντελεστών του αντιστοίχου κυβικού πολυωνύμου

$$s^{(i)}(x) = a_0^{(i)} + a_1^{(i)} x + a_2^{(i)} x^2 + a_3^{(i)} x^3$$

σε κάθε υποδιάστημα $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0,\ldots,n-1$. Εχουμε λοιπόν $n+1$ σχέσεις από τις συνθήκες παρεμβολής

$$s^{(i)}(x_i) = f(x_i), \; i = 0, \ldots, n,$$

n-1 σχέσεις από τις συνθήκες συνέχειας στους εσωτερικούς κόμβους

$$s^{(i-1)}(x_i) = s^{(i)}(x_i),\ i = 1, \ldots, n,$$

και *2 (n-1)* σχέσεις από τις συνθήκες παραγωγισιμότητας στους εσωτερικούς κόμβους

$$\left(s^{(i-1)}\right)'(x_i) = \left(s^{(i)}\right)'(x_i),\ i = 1, \ldots, n,$$

$$\left(s^{(i-1)}\right)''(x_i) = \left(s^{(i)}\right)''(x_i),\ i = 1, \ldots, n,$$

συνολικά δηλαδή μπορούμε να προσδιορίσουμε $4n$-2 εξισώσεις. Οι υπόλοιπες δύο είναι συνήθως διαφόρων τύπων *συνοριακές εξισώσεις* που αφορούν τους συνοριακούς κόμβους α και b. Για παράδειγμα αν ισχύει

$$s''(x_0) = s''(x_n) = 0,$$

τότε λέμε ότι έχουμε *φυσικές κυβικές splines*. Ισχύει μάλιστα:

Θεώρημα 5.4.2 Εστω $f \in C^4[a,b]$ και έστω s η κυβική πολυωνυμική spline που παρεμβάλλει την f στα σημεία $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, τότε υπάρχουν σταθερές C_m, $m = 0,1,2,3$ τέτοιες ώστε:

$$\| f^{(m)} - s^{(m)} \|_\infty \le C_m \, h^{4-m} \, \| f^{(4)} \|_\infty,$$

όπου h είναι η μέγιστη τιμή του εύρους μεταξύ των υποδιαστημάτων $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,\ldots,n-1$.

Για να υπολογίσουμε τις κυβικές *splines* εργαζόμαστε ως εξής:

1. εφόσον η s είναι κυβική spline, η s'' είναι συνεχής συνάρτηση και μάλιστα θα είναι μία τεθλασμένη γραμμή, οπότε κάθε ευθύγραμμο τμήμα αυτής της γραμμής είναι η $\left(s^{(j)}\right)''(x)$, $j = 0,\dots,n-1$, η οποία με χρήση του πολυωνύμου Lagrange που διέρχεται από τα σημεία μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\left(s^{(j)}\right)''(x) = a_j \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} + a_{j+1} \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j},$$

όπου α_j, α_{j+1} άγνωστοι τους οποίους θέλουμε να προσδιορίσουμε. Με αυτή τη γραφή ισχύει ότι

$$\left(s^{(j)}\right)''\left(x_j\right) = a_j,\ \left(s^{(j)}\right)''\left(x_{j+1}\right) = a_{j+1},\ \left(s^{(j-1)}\right)''\left(x_j\right) = a_j = \left(s^{(j)}\right)''\left(x_j\right).$$

2. Ολοκληρώνοντας 2 φορές και χρησιμοποιώντας τις συνθήκες παρεμβολής προσδιορίζουμε τις άγνωστες σταθερές.

Παράδειγμα 4 Εστω $\{x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1\}$ ένας ομοιόμορφος διαμερισμός του διαστήματος $[-1,1]$. Προσδιορίστε τη φυσική κυβική spline που παρεμβάλλεται σε μία συνάρτηση f στα σημεία x_i , $i = 0,1,2$, έτσι ώστε $f(x_0) = 0,\ f(x_1) = 2,\ f(x_2) = 6$.