Κεφάλαιο 8

Μιγαδικοί αριθμοί

Στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ακόμη και πολύ απλές εξισώσεις, όπως π.χ. είναι η $x^2+1=0$, δεν έχουν πραγματικές ρίζες. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι ο $a \in \mathbb{R}$ είναι ρίζα της εξίσωσης αυτής. Τότε, θα ισχύει $a^2+1=0$, η οποία συνεπάγεται $a^2=-1<0$. Όμως, το $a^2 \geq 0$, αντίφαση. Η ατέλεια αυτή των πραγματικών αριθμών αντιμετωπίζεται με μία επέκταση του συνόλου $\mathbb{R}$ σε ένα νέο σύνολο, στο οποίο διατηρούνται όσο το δυνατόν περισσότερες ιδιότητες του $\mathbb{R}$ και συγχρόνως έχει λύση κάθε πολυωνυμική εξίσωση. Η επιθυμητή επέκταση επιτυγχάνεται με τη θεώρηση του συνόλου των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών, το οποίο επίσης ταυτίζεται γεωμετρικά με τα σημεία ενός επιπέδου. Τα στοιχεία του νέου συνόλου είναι οι λεγόμενοι μιγαδικοί αριθμοί, οι οποίοι χρησιμοποιούνται πολύ στη λύση προβλημάτων ταλαντώσεων δυναμικών και ηλεκτρικών συστημάτων καθώς επίσης και διαφορικών και ολοκληρωτικών εξισώσεων, οι οποίες προκύπτουν από μοντελοποιήσεις προβλημάτων διαφόρων κλάδων εφαρμοσμένων επιστημών. Εξάλλου, τα αποτελέσματα της θεωρίας μιγαδικών συναρτήσεων εφαρμόζονται στη λύση προβλημάτων μετάδοσης θερμότητας, μηχανικής των ρευστών, ελαστικότητας, υδροδυναμικής και κβαντικής μηχανικής.

Στο κεφάλαιο αυτό ορίζεται η έννοια του μιγαδικού αριθμού, περιγράφεται η γεωμετρική παράστασή του και εξετάζονται οι αλγεβρικές και γεωμετρικές ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών, η οποία χρησιμοποιείται εδώ κυρίως στην εύρεση των n-οστών ριζών μιγαδικών αριθμών και την επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων με μιγαδικούς συντελεστές.

8.1 Ορισμός και αλγεβρικές ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών

Στην παράγραφο αυτή ορίζεται η έννοια των μιγαδικών αριθμών και εξετάζονται οι αλγεβρικές και γεωμετρικές ιδιότητές τους, όπου δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην ανάλυση της έννοιας του μέτρου.

Ορισμός 8.1.1 Το καρτεσιανό γινόμενο

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

με τις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

ονομάζεται *το σύνολο (ή το σώμα) των μιγαδικών αριθμών* και συμβολίζεται με $\mathbb{C}$. Τα στοιχεία $z = (x, y)$ του $\mathbb{C}$ ονομάζονται *μιγαδικοί αριθμοί.*

□

Από τον ορισμό των μιγαδικών αριθμών ως διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών, έχουμε ότι δύο μιγαδικοί αριθμοί $z = (x, y)$ και $w = (u, v)$ είναι ίσοι τότε και μόνο τότε όταν $x = u$ και $y = v$.

Οι χαρακτηριστικές ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού μιγαδικών αριθμών, οι οποίες συνάγονται από τις αντίστοιχες ιδιότητες των πραγματικών αριθμών, καταγράφονται στην ακόλουθη

Πρόταση 8.1.1 Για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 και z_3 ισχύουν

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \qquad z_1 z_2 = z_2 z_1,$$
$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, \qquad z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3,$$
$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

□

Σημειώνουμε ότι το μηδενικό στοιχείο είναι το $(0,0)$, το μοναδιαίο το $(1,0)$, το αντίθετο του $z = (x, y)$ είναι το $-z = (-x, -y)$ και το αντίστροφο του $z = (x, y) \neq (0, 0)$ το $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$. Εξάλλου, η διαφορά $w - z$ των μιγαδικών αριθμών $z = (x, y)$ και $w = (u, v)$ είναι

$$w - z = w + (-z) = (u, v) + (-x, -y) = (u - x, v - y),$$

ενώ το πηλίκο $\frac{w}{z}$ των μιγαδικών αριθμών $z = (x, y) \neq (0, 0)$ και w είναι

$$\frac{w}{z} = wz^{-1} = \left(\frac{ux + vy}{x^2 + y^2}, \frac{vx - uy}{x^2 + y^2}\right).$$

Οι μιγαδικοί αριθμοί της μορφής $(x,0)$ συμπεριφέρονται ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{C}$ ακριβώς όπως και οι πραγματικοί αριθμοί, αφού ισχύουν

$$(x,0)+(y,0)=(x+y,0) \quad \text{και} \quad (x,0)(y,0)=(xy,0).$$

Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι πραγματικοί αριθμοί εμφυτεύονται στο $\mathbb{C}$ ταυτιζόμενοι με εκείνους τους μιγαδικούς αριθμούς με δεύτερη συντεταγμένη το μηδέν και έτσι ταυτίζουμε κάθε πραγματικό αριθμό x με τον μιγαδικό αριθμό $(x,0)$ και γράφουμε $x=(x,0)$.

Ο μιγαδικός αριθμός $i:=(0,1)$, για τον οποίο ισχύει

$$i^2=(0,1)(0,1)=-1,$$

αναφέρεται ως η *φανταστική μονάδα* του $\mathbb{C}$. Με τη βοήθεια της φανταστικής μονάδας, κάθε μιγαδικός αριθμός $z=(x,y)$ γράφεται

$$z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(0,1)(y,0)=x+iy.$$

Η έκφραση $z=x+iy$ του μιγαδικού αριθμού (x,y), η οποία απλουστεύει πολύ τους υπολογισμούς, αναφέρεται συνήθως και ως *καρτεσιανή μορφή* του μιγαδικού αριθμού z.

Έστω $z=x+iy$ ένας μιγαδικός αριθμός. Ο πραγματικός αριθμός x ονομάζεται το *πραγματικό μέρος* του z και συμβολίζεται με $\mathrm{Re}(z)$ και ο y ονομάζεται το *φανταστικό μέρος* του z και συμβολίζεται με $\mathrm{Im}(z)$, δηλαδή έχουμε $\mathrm{Re}(z)=x$ και $\mathrm{Im}(z)=y$.

Ως εφαρμογή, επεξεργαζόμαστε το ακόλουθο

Παράδειγμα 8.1.1 Αποδείξτε ότι, για κάθε $z=x+iy\in\mathbb{C}$, η εξίσωση $w^2=z$ έχει τις ρίζες

$$\begin{aligned} w &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}+i\frac{y}{|y|}\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}\right), \quad y\neq 0 \\ w &= \pm\sqrt{x}, \quad y=0,\ x\geq 0 \\ w &= \pm i\sqrt{-x}, \quad y=0,\ x\leq 0\,. \end{aligned} \tag{8.1.1}$$

Οι δύο μιγαδικοί αριθμοί w, οι οποίοι ορίζονται από την (8.1.1), αναφέρονται ως οι δύο τετραγωνικές ρίζες του z.

Λύση. Αναζητούμε ένα μιγαδικό αριθμό $w=u+iv$ έτσι ώστε να ισχύει

$$(u+iv)^2=x+iy,$$

από την οποία εξισώνοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη προκύπτουν

$$u^2-v^2=x \tag{1}$$

και

$$2uv = y. \tag{2}$$

Για $y \neq 0$, οπότε $u \neq 0$, λύνοντας την (2), ευρίσκουμε

$$v = \frac{y}{2u} \tag{3}$$

και αντικαθιστώντας την τιμή του v στην (1), λαμβάνουμε

$$u^2 - \left(\frac{y}{2u}\right)^2 = x,$$

η οποία επίσης γράφεται

$$4u^4 - 4xu^2 - y^2 = 0.$$

Η τελευταία είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς u^2 και έχει ως (θετική) ρίζα

$$u^2 = \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2},$$

από την οποία λαμβάνουμε

$$u = \pm\sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}}.$$

Από την (3) ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} v &= \pm\frac{y}{\frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}}} \\ &= \pm\frac{y}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}}\frac{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}}{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}} \\ &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{y}{|y|}\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}, \end{aligned}$$

και έτσι προκύπτει η (8.1.1).

△

Περαιτέρω, ενδιαφερόμαστε για την επίλυση της γενικής εξίσωσης δευτέρου βαθμού

$$aw^2 + bw + c = 0, \;\; a, b, c \in \mathbb{C}. \tag{8.1.2}$$

Αρχικά, παρατηρούμε ότι για $a \neq 0$, το πρώτο μέλος της εξίσωσης (8.1.2) γράφεται

$$\left(w + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

η οποία έχει τις ρίζες

$$w = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

όπου η $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ υπολογίζεται από τον τύπο (8.1.1), δηλαδή πιο συγκεκριμένα, αν $b^2 - 4ac = d + ie$, τότε

$$w = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2\sqrt{2}a}\left(\sqrt{\sqrt{d^2+e^2}+d} + i\frac{e}{|e|}\sqrt{\sqrt{d^2+e^2}-d}\right), \ e \neq 0. \qquad (8.1.3)$$

Παράδειγμα 8.1.2 Λύστε την εξίσωση

$$w^2 - 8(1-i)w + 63 - 16i = 0.$$

Λύση. Η εξίσωση είναι της γενικής μορφής (8.1.2) με $a = 1$, $b = -8(1-i)$ και $c = 63-16i$. Επομένως, ισχύει

$$b^2 - 4ac = -252 - 64i$$

και έτσι έχουμε $d = -252$ και $e = -64$. Άρα, από την (8.1.3), οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από

$$w = 4(1-i) \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{8} - i\sqrt{512}\right) = 4(1-i) \pm (1-8i),$$

δηλαδή

$$w_1 = 5 - 12i \quad \text{και} \quad w_2 = 3 + 4i.$$

$\triangle$

Στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ορίζεται μία έννοια *ολικής διάταξης*, η οποία εμπλουτίζει το σύνολο $\mathbb{R}$ με σημαντικές αλγεβρικές και γεωμετρικές ιδιότητες. Όμως, *στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών δεν είναι δυνατόν να οριστεί μία ολική (γραμμική) διάταξη* συμβιβαστή με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού μιγαδικών, δηλαδή μία σχέση $\geq$ στο $\mathbb{C}$ με τις ιδιότητες

(1) $z \geq z$

(2) $z \geq w$ και $w \geq z \Rightarrow z = w$

(3) $\forall z, w \in \mathbb{C}$ ισχύει $z \geq w$ ή $w \geq z$

(4) $z \geq w$ και $w \geq c \Rightarrow z \geq c$

(5) $z \geq w \Rightarrow z + c \geq w + c$

(6) $z \geq 0$ και $w \geq 0 \Rightarrow zw \geq 0$, όπου $z, w, c \in \mathbb{C}$.

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι ορίζεται μία σχέση $\geq$ με τις ιδιότητες (1)-(6), τότε παρατηρούμε αρχικά ότι ισχύει

$$(*) \qquad z^2 \geq 0, \ \ \forall z \in \mathbb{C},$$

διότι από την (3) έχουμε $z \geq 0$ ή $z \leq 0$, οπότε $-z \geq 0$, και επομένως από την $z^2 = (-z)^2$ και την (6) προκύπτει $z^2 \geq 0$. Όμως, για τη φανταστική μονάδα i ισχύει $i^2 = -1 < 0$, η οποία συνιστά αντίφαση της (*).

Εξάλλου, σημειώνουμε ιδιαιτέρως ότι η υπόθεση ότι ορίζεται στο $\mathbb{C}$ μία σχέση $\geq$ με τις ιδιότητες (1)-(6) συνεπάγεται ότι η πολύ απλή εξίσωσης $z^2+1=0$ δεν έχει λύση στο $\mathbb{C}$ που συνιστά επίσης αντίφαση στην ύπαρξη τετραγωνικής ρίζας (βλ. το προηγούμενο Παράδειγμα 8.1.1).

Έτσι, στα επόμενα ο συμβολισμός $z \geq w$, όπου εμφανίζεται, θα αναφέρεται σε z και w πραγματικούς αριθμούς.

Ο μιγαδικός αριθμός

$$\overline{z} = x - iy$$

ονομάζεται ο *συζυγής* του z.

Στην επόμενη πρόταση συνοψίζονται οι βασικές ιδιότητες του συζυγούς μιγαδικού αριθμού και οι συσχετίσεις του με τις αλγεβρικές πράξεις, οι οποίες είναι άμεσες συνέπειες του ορισμού του συζυγούς.

Πρόταση 8.1.2 Για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν

$$(1) \qquad \overline{\overline{z}} = z,$$

$$(2) \qquad z\overline{z} = x^2 + y^2,$$

$$(3) \qquad \mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}, \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i},$$

$$(4) \qquad z = \overline{z} \Leftrightarrow z = x\,, \qquad z = -\overline{z} \Leftrightarrow z = iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$(5) \qquad \overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w},$$

$$(6) \qquad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w},$$

$$(7) \qquad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}, \quad w \neq 0.$$

$\square$

Εξάλλου, ο πραγματικός αριθμός

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ονομάζεται το *μέτρο* (η απόλυτη τιμή) του z.

Στην ακόλουθη πρόταση καταγράφονται οι βασικές ιδιότητες του μέτρου μιγαδικού αριθμού

Πρόταση 8.1.3 Για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν

(1) $$|z| \geq 0 \quad \text{και} \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0,$$

(2) $$|zw| = |z||w|,$$

(3) $$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}, \quad w \neq 0,$$

(4) $$|z| = \sqrt{z\overline{z}}, \quad |z| = |\overline{z}|,$$

(5) $$|\mathrm{Re}z| \leq |z|\,, \quad |\mathrm{Im}z| \leq |z|,$$

(6) $$|z \pm w| \leq |z| + |w|,$$

(7) $$\Big||z| - |w|\Big| \leq |z - w|.$$

Απόδειξη. Ενδεικτικά αποδεικνύουμε τις ιδιότητες (2), (6) και (7).

(2) : $$|zw|^2 = (zw)\overline{(zw)} = (z\overline{w})(w\overline{z}) = |z|^2|w|^2\,.$$

(6) : $$|z + w|^2 = (z + w)\overline{(z + w)} = z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w}\,.$$

Όμως, από την (5) έχουμε:

$$z\overline{w} + w\overline{z} = z\overline{w} + \overline{(z\overline{w})} = 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) \leq 2\,|z\overline{w}| = 2|z||w|\,.$$

Έτσι, από τις δύο προηγούμενες, λαμβάνουμε

$$|z+w|^2 \leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2 .$$

(7) :

$$|z| = |(z-w)+w| \leq |z-w| + |w| \ \Rightarrow\ |z-w| \geq |z| - |w| ,$$

$$|w| = |(w-z)+z| \leq |z-w| + |z| \ \Rightarrow\ |z-w| \geq |w| - |z| .$$

□

Με τέλεια επαγωγή, από την ιδιότητα (6) της προηγούμενης πρότασης, έχουμε ότι για τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1, z_2, \ldots, z_n$, ισχύει η ανισότητα

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|.$$

Παράδειγμα 8.1.3 Βρείτε ένα άνω και ένα κάτω φράγμα για τον $|z-3|$ αν $|z-4i| \leq 1$.

Λύση. Με τη βοήθεια της ιδιότητας (6) της προηγούμενης πρότασης, έχουμε ότι

$$|z-3| = |z-4i+4i-3| \leq |z-4i| + |4i-3| \leq 1+5 = 6,$$

ενώ, από την ιδιότητα (7), ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} |z-3| = |z-4i+4i-3| &\geq \big||z-4i| - |4i-3|\big| \\ &= \big||z-4i| - 5\big| \geq 5 - |z-4i| \geq 5-1 = 4. \end{aligned}$$

△

Το πηλίκο δύο μιγαδικών αριθμών, εφόσον ορίζεται, υπολογίζεται ευκολότερα από τον τύπο

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{z\overline{w}} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2}\ ,\ \ w \neq 0.$$

Παράδειγμα 8.1.4 Βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μιγαδικού αριθμού

$$z = \frac{1+i}{1-3i}.$$

Λύση.

$$\frac{1+i}{1-3i} = \frac{(1+i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{-2+4i}{1^2+3^2} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i.$$

△

Παράδειγμα 8.1.5 Γράψτε το μιγαδικό αριθμό $\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}$ υπό τη μορφή $x+iy$ με $x, y \in \mathbb{R}$.

Λύση. Έχουμε

$$\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}+\frac{1+i}{(1-i)(1+i)}=\frac{1-i}{2}+\frac{1+i}{2}=1.$$

△

Όπως διαπιστώνεται εύκολα, για τις δυνάμεις της φανταστικής μονάδας i ισχύουν

$$i^{4n}=1, \quad i^{4n+1}=i, \quad i^{4n+2}=-1, \quad i^{4n+3}=-i, \tag{8.1.4}$$

από τις οποίες συμπεραίνουμε ότι $i^m=i^k$, όπου k είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του m με το 4.

Παράδειγμα 8.1.6 Δείξτε ότι $i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=0,\ n \in \mathbb{N}$.

Λύση. Χρησιμοποιώντας την $i^2=-1$, ευρίσκουμε

$$i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=i^n(1+i+i^2+i^3)=i^n(1+i-1-i)=0.$$

△

Πρόταση 8.1.4 Για $z, w \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$$

(κανόνας του παραλληλογράμμου).

Απόδειξη.

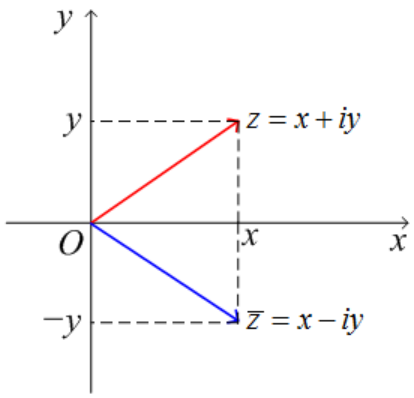
$$\begin{aligned}|z+w|^2+|z-w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)}+(z-w)\overline{(z-w)}\\ &= (z+w)(\overline{z}+\overline{w})+(z-w)(\overline{z}-\overline{w})\\ &= z\overline{z}+z\overline{w}+w\overline{z}+w\overline{w}+z\overline{z}-z\overline{w}-w\overline{z}+w\overline{w}\\ &= 2(|z|^2+|w|^2).\end{aligned}$$

□

8.2 Γεωμετρική παράσταση των μιγαδικών αριθμών

Ως γνωστόν, κάθε διατεταγμένο ζεύγος (x, y) πραγματικών αριθμών ταυτίζεται με το σημείο $P(x, y)$ ενός επιπέδου Oxy με συντεταγμένες (x, y), καθώς επίσης και με το διάνυσμα θέσεως $\overrightarrow{OP}$. Εξάλλου, κάθε μιγαδικός αριθμός z ορίζεται ως διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών. Κατά συνέπεια, κάθε μιγαδικός αριθμός z ταυτίζεται με ένα σημείο ενός επιπέδου Oxy. Με αυτή την έννοια, ταυτίζουμε στα επόμενα γεωμετρικά τον $\mathbb{C}$ με το επίπεδο Oxy, το οποίο για αυτό ονομάζεται και *μιγαδικό επίπεδο*. Ο άξονας των x λέγεται *πραγματικός άξονας* και ο άξονας των y λέγεται *φανταστικός άξονας*. Στο Σχήμα 8.1 δίνεται μία απεικόνιση στο μιγαδικό επίπεδο ενός μιγαδικού αριθμού z και του συζυγούς του $\overline{z}$.

Επίσης, ένας μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$ ταυτίζεται, εκτός από το σημείο $P(x, y)$, και με το διάνυσμα θέσεως $\overrightarrow{OP}$. Κατά την ταύτιση αυτή, το άθροισμα $z+w$ καθώς και η διαφορά $z-w$ των μιγαδικών αριθμών $z = x + iy$ και $w = u + iv$ με διανύσματα θέσης $\overrightarrow{OP}$ και $\overrightarrow{OQ}$ αντιστοιχούν στα διανύσματα $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ και $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$ (Σχήμα 8.2). Υπό την έννοια αυτή, η πρόσθεση και η αφαίρεση μιγαδικών αριθμών είναι ισοδύναμες με την πρόσθεση και την αφαίρεση των αντίστοιχων διανυσμάτων στο μιγαδικό επίπεδο.



Σχήμα 8.1: Απεικόνιση ενός μιγαδικού αριθμού z και του συζυγούς μιγαδικού $\overline{z}$.

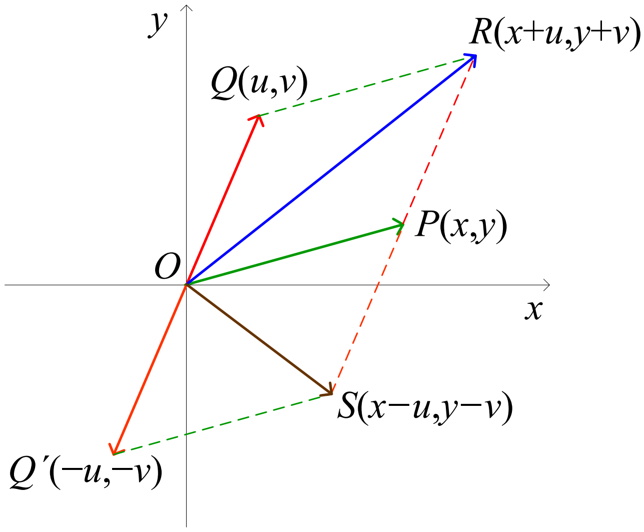
Σημειώνουμε επίσης ότι, μετά την ταύτιση αυτή, το μέτρο $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$ συμπίπτει με το μήκος του αντιστοίχου διανύσματος θέσης $\overrightarrow{OP}$, δηλαδή με την απόσταση των σημείων O και P.

Οι παρατηρήσεις αυτές οδηγούν στον ορισμό της απόστασης $d(z, w)$ δύο μιγαδικών αριθμών $z = x + iy$ και $w = u + iv$

$$d(z, w) = |z - w| = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}.$$

Ως εφαρμογή επεξεργαζόμαστε το ακόλουθο

Παράδειγμα 8.2.1 Έστω z_0 δοσμένος μιγαδικός αριθμός και $R > 0$. Τότε, το σύνολο



Σχήμα 8.2: Γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος και της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών z και w. Το σημείο R, καθώς επίσης και το διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{OR}$, αντιστοιχούν στο (ταυτίζονται με το) μιγαδικό αριθμό $z+w$, ενώ το σημείο S και το δίανυσμα θέσης $\overrightarrow{OS}$ αντιστοιχούν στο μιγαδικό αριθμό $z-w$.

των μιγαδικών αριθμών z με $|z-z_0| = R$ είναι ο κύκλος με κέντρο το z_0 και ακτίνα R.

Λύση. Αν $z = x+iy$ και $z_0 = x_0 + iy_0$ τότε από τον ορισμό της απόστασης έχουμε

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = |z-z_0|^2 = R^2,$$

η οποία, πράγματι, παριστά κύκλο με κέντρο το z_0 και ακτίνα R.

△

Παράδειγμα 8.2.2 Αποδείξτε ότι η εξίσωση

$$a|z|^2 + bz + \overline{bz} + c = 0, \quad a, c \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{C}$$

παριστά ευθεία αν $a = 0$ και $b \neq 0$ και κύκλο αν $a \neq 0$ και $|b|^2 > ac$.

Λύση. Έστω $b = b_1 + ib_2$ και $z = x+iy$. Τότε, έχουμε ότι

$$bz + \overline{bz} = 2\mathrm{Re}(bz) = 2\mathrm{Re}\big((b_1+ib_2)(x+iy)\big) = 2(b_1x - b_2y),$$

και η εξίσωση γράφεται

$$(*) \qquad a(x^2+y^2) + 2(b_1x - b_2y) + c = 0.$$

Για $a = 0$, η τελευταία ανάγεται στην

$$2b_1x - 2b_2y + c = 0,$$

η οποία, αν $b \neq 0$, παριστάνει ευθεία.

Περαιτέρω, από την (*) για $a \neq 0$, λαμβάνουμε

$$x^2 + y^2 + \frac{2b_1}{a}x - \frac{2b_2}{a}y + \frac{c}{a} = 0,$$

η οποία γράφεται

$$\left(x + \frac{b_1}{a}\right)^2 + \left(y - \frac{b_2}{a}\right)^2 = \frac{b_1^2 + b_2^2 - ac}{a^2}$$

και, αν $b_1^2 + b_2^2 = |b|^2 > ac$, παριστά κύκλο με κέντρο το $\left(-\frac{b_1}{a}, \frac{b_2}{a}\right)$ και ακτίνα $\frac{\sqrt{b_1^2+b_2^2-ac}}{|a|}$.

△

Παράδειγμα 8.2.3 Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών αριθμών $z = x + iy$, οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση

$$\frac{|z+1|}{|z-1|} = 2.$$

Λύση. Η εξίσωση μετατρέπεται διαδοχικά, όπως ακολουθεί

$$|(x+1) + iy| = 2|(x-1) + iy|$$

$$(x+1)^2 + y^2 = 4(x-1)^2 + 4y^2$$

$$3x^2 - 10x + 3y^2 + 3 = 0,$$

η οποία γράφεται

$$\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2,$$

και άρα παριστά κύκλο με κέντρο το σημείο $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ και ακτίνα $\frac{4}{3}$.

△