και αντικαθιστώντας στη δοθείσα Δ.Ε., λαμβάνουμε

$$xu'' + u' = x,$$

η οποία παραμένει Δ.Ε. δευτέρας τάξης, όμως μπορεί να επιλυθεί θέτοντας $u' = v$, οπότε ανάγεται στη γραμμική Δ.Ε. πρώτης τάξης

$$xv' + v = x,$$

η λύση της οποίας είναι (βλ. Παράγραφο 2.3)

$$v = \frac{x}{2} + \frac{c_1}{x}.$$

Επομένως, με αόριστη ολοκλήρωση προκύπτει

$$u = \frac{x^2}{4} + c_1 \ln x + c_2,$$

και άρα η γενική λύση της δοθείσας μη ομογενούς Δ.Ε. είναι

$$y = \frac{x^2 e^x}{4} + c_1 e^x \ln x + c_2 e^x.$$

Σημειώνουμε ότι η $y_2 = e^x \ln x$ είναι μία δεύτερη λύση της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε., η οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητη με την $y_1 = e^x$.

△

## 4.7 Μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων

Θα περιγράψουμε μία γενική μέθοδο για τον προσδιορισμό της μερικής λύσης της μη ομογενούς γραμμικής Δ.Ε. δευτέρας τάξεως με (εν γένει) μεταβλητούς συντελεστές

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x), \tag{4.7.1}$$

όπου $a_0, a_1, f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή ως *μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων* ή *μέθοδος Lagrange* και χρησιμοποιεί τη γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε. της (4.7.1)

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0, \tag{4.7.2}$$

για να ανάγει το πρόβλημα υπολογισμού της λύσης της (4.7.1) στον υπολογισμό δύο συγκεκριμένων ολοκληρωμάτων.

Ο τρόπος εφαρμογής της μεθόδου μεταβολής των παραμέτρων παρουσιάζεται αρχικά στο ακόλουθο

**Παράδειγμα 4.7.1** Βρείτε μία μερική λύση της Δ.Ε.

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}, \;\; 0 \leq x < \frac{\pi}{2}.$$

**Λύση.** Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε. έχει τις ρίζες $\lambda_1 = i$ και $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -i$. Επομένως, η γενική λύση της ομογενούς είναι

$$y_o = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Η βασική ιδέα της μεθόδου μεταβολής των παραμέτρων έγκειται στην αντικατάσταση των σταθερών $c_1$ και $c_2$ στην τελευταία έκφραση από συναρτήσεις $u_1(x)$ και $u_2(x)$ και ακολούθως στον προσδιορισμό των $u_1(x)$ και $u_2(x)$ ώστε η

$$y = u_1(x) \cos x + u_2(x) \sin x \tag{α}$$

να είναι μία μερική λύση της δοθείσας μη ομογενούς Δ.Ε.

Οι $u_1(x)$ και $u_2(x)$ θα προσδιοριστούν με αντικατάσταση της (α) στη μη ομογενή Δ.Ε. Επειδή, κατά αυτόν τον τρόπο, θα έχουμε δύο άγνωστες συναρτήσεις και μία εξίσωση που αυτές θα ικανοποιούν θα χρειαστούμε και μία δεύτερη εξίσωση. Όπως θα δούμε, τη δεύτερη αυτή εξίσωση την επιλέγουμε εμείς κατάλληλα ώστε να απλοποιούνται οι υπολογισμοί.

Αρχικά, παραγωγίζοντας την (α), έχουμε

$$y' = -u_1 \sin x + u_2 \cos x + u_1' \cos x + u_2' \sin x. \tag{β}$$

Για να απλοποιηθούν οι υπολογισμοί, απαιτούμε τώρα

$$u_1' \cos x + u_2' \sin x = 0, \tag{γ}$$

οπότε η (β) παίρνει τη μορφή

$$y' = -u_1 \sin x + u_2 \cos x,$$

και παραγωγίζοντας, λαμβάνουμε

$$y'' = -u_1 \cos x - u_2 \sin x - u_1' \sin x + u_2' \cos x. \tag{δ}$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία στη δοθείσα Δ.Ε., παίρνουμε

$$-u_1' \sin x + u_2' \cos x = \tfrac{1}{\cos x}. \tag{ε}$$

Έτσι, καταλήγουμε ότι πρέπει οι $u_1'$ και $u_2'$ να ικανοποιούν το σύστημα των (γ) και (ε)

$$\begin{aligned} u_1' \cos x + u_2' \sin x &= 0 \\ -u_1' \sin x + u_2' \cos x &= \frac{1}{\cos x}, \end{aligned}$$

οι οποίες μπορούν να θεωρηθούν ως αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων για τις $u_1'$ και $u_2'$.

Για να λύσουμε το σύστημα αυτό πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με $\sin x$, τη δεύτερη με $\cos x$ και προσθέτοντας κατά μέλη ευρίσκουμε

$$u_2' = 1,$$

η οποία έχει ως λύση

$$u_2 = x.$$

Αντικαθιστώντας $u_2' = 1$ στην πρώτη εξίσωση έχουμε

$$u_1' = -\frac{\sin x}{\cos x},$$

οπότε

$$u_1 = \ln(\cos x)$$

(ισχύει ότι $\cos x > 0$ για $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$).

Άρα, μία μερική λύση της μη ομογενούς Δ.Ε. είναι

$$y_\mu = \ln(\cos x)\cos x + x\sin x$$

και η γενική της λύση είναι

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x + \ln(\cos x)\cos x + x\sin x.$$

$\triangle$

Η γενική διαδικασία που ακολουθούμε στη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων για τη λύση της (4.7.1) περιγράφεται ως εξής. Έστω $y_1$ και $y_2$ δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενους (4.7.2), οπότε η γενική της λύση είναι

$$y_o = c_1y_1 + c_2y_2, \tag{4.7.3}$$

όπου $c_1$ και $c_2$ αυθαίρετες πραγματικές σταθερές. Η υπόθεση ότι γνωρίζουμε της γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε. (4.7.2) είναι ουσιώδης, αφού η αναλυτική επίλυση της (4.7.2) είναι γενικά εφικτή μόνο σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, όπως είναι οι Δ.Ε. σταθερών συντελεστών και η Δ.Ε. Euler (βλ. Παραγράφους 4.2 και 4.5).

Όπως φαίνεται και στο τελευταίο παράδειγμα, η βασική ιδέα είναι να αντικαταστήσουμε τις σταθερές $c_1$ και $c_2$ στην (4.7.3) από προσδιοριστέες συναρτήσεις $u_1(x)$ και $u_2(x)$, έτσι ώστε να αναζητήσουμε μία μερική λύση της μη ομογενούς Δ.Ε. (4.7.1) της μορφής

$$y_\mu = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2. \tag{4.7.4}$$

Παραγωγίζοντας την (4.7.4) και αναδιατάσσοντας τους όρους, λαμβάνουμε

$$y_\mu' = u_1y_1' + u_2y_2' + u_1'y_1 + u_2'y_2. \tag{4.7.5}$$

Θέτουμε το άθροισμα των όρων που περιέχουν τα $u_1'$ και $u_2'$ ίσο με μηδέν, δηλαδή

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0, \tag{4.7.6}$$

οπότε η (4.7.5) παίρνει τη μορφή

$$y_\mu' = u_1y_1' + u_2y_2'. \tag{4.7.7}$$

Παραγωγίζοντας εκ νέου την (4.7.7), ευρίσκουμε

$$y_\mu'' = u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2''. \tag{4.7.8}$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστούμε στην (4.7.1) τις εκφράσεις των $y$, $y'$ και $y''$ από τις (4.7.4), (4.7.7) και (4.7.8), και έχουμε (όλες οι εμφανιζόμενες είναι συναρτήσεις του $x$)

$$u_1[y_1'' + a_1y_1' + a_0y_1] + u_2[y_2'' + a_1y_2' + a_0y_2] + u_1'y_1' + u_2'y_2' = f. \tag{4.7.9}$$

Οι παραστάσεις στις αγκύλες είναι ίσες μη μηδέν διότι οι $y_1$ και $y_2$ είναι λύσεις της ομογενούς Δ.Ε. (4.7.2) και έτσι, οδηγούμαστε στη σχέση

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = f. \tag{4.7.10}$$

Θεωρούμε τώρα το γραμμικό αλγεβρικό σύστημα των (4.7.6) και (4.7.10) ως προς τις $u_1'$ και $u_2'$

$$\begin{aligned} y_1u_1' + y_2u_2' &= 0 \\ y_1'u_1' + y_2'u_2' &= f. \end{aligned} \tag{4.7.11}$$

Η ορίζουσα του συστήματος αυτού είναι $y_1y_2' - y_1'y_2$, δηλαδή η ορίζουσα Wronski $W$ των $y_1$ και $y_2$. Επειδή οι $y_1$ και $y_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (4.7.2), ισχύει ότι $W(x) \neq 0,\ x \in I$. Έτσι, το σύστημα (4.7.11) έχει μοναδική λύση, η οποία δίνεται από

$$u_1' = -\frac{y_2f}{W} \qquad , \qquad u_2' = \frac{y_1f}{W}. \tag{4.7.12}$$

Ολοκληρώνοντας τις τελευταίες ως προς $x$, ευρίσκουμε

$$u_1 = -\int \frac{y_2f}{W}\mathrm{d}x \qquad , \qquad u_2 = \int \frac{y_1f}{W}\mathrm{d}x \tag{4.7.13}$$

και αντικαθιστώντας την τελευταία στην (4.7.4), προκύπτει η αναζητούμενη μερική λύση της (4.7.1).

Τα αποτελέσματα της παραπάνω διαδικασίας περιγράφονται στο ακόλουθο

**Θεώρημα 4.7.1** Έστω η μη ομογενής γραμμική Δ.Ε. δευτέρας τάξεως με μεταβλητούς συντελεστές

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x),$$

όπου $a_0, a_1, f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις και έστω $y_1$ και $y_2$ δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενους Δ.Ε. Τότε, η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_\mu(x),$$

όπου η μερική λύση $y_\mu$ δίνεται από

$$y_\mu(x) = -y_1(x) \int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)} \mathrm{d}x + y_2(x) \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)} \mathrm{d}x \tag{4.7.14}$$

με $W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$ την ορίζουσα Wronski των $y_1$ και $y_2$.

□

**Παρατήρηση 4.7.1** Συνδυάζοντας τις (4.7.4) και (4.7.13), έχουμε ότι η μερική λύση γράφεται, επίσης, ως

$$y_\mu(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_2(x)y_1(t) - y_1(x)y_2(t)}{W(t)} f(t)\mathrm{d}t, \tag{4.7.15}$$

όπου $x_0 \in I$, ενώ ισχύει ότι $y_\mu(x_0) = y_\mu'(x_0) = 0$.

Η τελευταία έκφραση είναι χρήσιμη στην περίπτωση που θέλουμε να μελετήσουμε προβλήματα μεταβολών της λύσης $y_\mu$ ως προς τη συνάρτηση $f$ του δεξιού μέλους της (4.7.1).

Η (4.7.15) μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$y_\mu(x) = \int_{x_0}^{x} G(x,t)f(t)\mathrm{d}t, \tag{4.7.16}$$

όπου η

$$G(x,t) = \frac{y_2(x)y_1(t) - y_1(x)y_2(t)}{W(t)} \tag{4.7.17}$$

ονομάζεται *συνάρτηση Green* του προβλήματος και εξαρτάται μόνο από τις λύσεις $y_1$ και $y_2$ της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε. (4.7.2).

△

**Παράδειγμα 4.7.2** Βρείτε τη γενική λύση της Δ.Ε.

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}, \ \ x > 0.$$

**Λύση.** Η αντίστοιχη ομογενής Δ.Ε. είναι σταθερών συντελεστών αλλά το δεύτερο μέλος της μη ομογενούς δεν είναι ειδικής μορφής, οπότε εδώ δεν εφαρμόζεται η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών της Παραγράφου 4.3.

Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς έχει τη διπλή ρίζα $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, και, έτσι, η γενική λύση της ομογενούς είναι

$$y_o = c_1 e^x + c_2 x e^x.$$

Αναζητούμε μερική λύση της δοθείσας μη ομογενούς Δ.Ε. της μορφής

$$(\alpha) \qquad y = u_1(x)e^x + u_2(x)xe^x.$$

Παραγωγίζοντας την (α), έχουμε

$$y' = u_1 e^x + u_2(e^x + xe^x) + u_1' e^x + u_2' x e^x.$$

Θέτουμε

$$(\beta) \qquad u_1' e^x + u_2' x e^x = 0,$$

οπότε

$$y' = u_1 e^x + u_2(e^x + xe^x)$$

και παραγωγίζοντας λαμβάνουμε

$$y'' = u_1 e^x + u_2(2e^x + xe^x) + u_1' e^x + u_2'(e^x + xe^x).$$

Αντικαθιστώντας στη δοθείσα Δ.Ε., παίρνουμε

$$(\gamma) \qquad u_1' e^x + u_2'(e^x + xe^x) = \tfrac{e^x}{x^2}.$$

Έτσι, καταλήγουμε ότι πρέπει οι $u_1'$ και $u_2'$ να ικανοποιούν το σύστημα των (β) και (γ)

$$u_1' e^x + u_2' x e^x = 0$$
$$u_1' e^x + u_2'(e^x + xe^x) = \frac{e^x}{x^2}.$$

Αφαιρώντας τις δύο εξισώσεις κατά μέλη, ευρίσκουμε

$$u_2' = \frac{1}{x^2},$$

οπότε

$$u_2 = -\frac{1}{x},$$

και αντικαθιστώντας $u_2' = \frac{1}{x^2}$ στην πρώτη εξίσωση, έχουμε

$$u_1' = -\frac{1}{x},$$

οπότε

$$u_1 = -\ln x.$$

Άρα, μία μερική λύση της μη ομογενούς Δ.Ε. είναι

$$y_\mu = -(\ln x)e^x - e^x$$

και η γενική της λύση είναι

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x - (1 + \ln x)e^x,$$

η οποία γράφεται και ως

$$y = C_1 e^x + c_2 x e^x - (\ln x)e^x,$$

όπου $C_1 = c_1 - 1$.

$\triangle$

**Παράδειγμα 4.7.3** Βρείτε τη γενική λύση της Δ.Ε.

$$x^2 y'' + x y' - y = x^2 \ln x, \ \ x > 0.$$

**Λύση.** Η αντίστοιχη ομογενής είναι Δ.Ε. Euler και έτσι, εφαρμόζοντας τις τεχνικές της Παραγράφου 4.5, ευρίσκουμε ότι έχει τη γενική λύση

$$y_o = c_1 x + c_2 \frac{1}{x}.$$

Αναζητούμε μερική λύση της δοθείσας μη ομογενούς Δ.Ε. της μορφής

$$y = u_1(x)x + u_2(x)\frac{1}{x}$$

και ακολουθώντας τα γενικά βήματα της μεθόδου μεταβολής των παραμέτρων, καταλήγουμε ότι πρέπει οι $u_1'$ και $u_2'$ να ικανοποιούν το σύστημα

$$\begin{aligned} u_1' x + u_2' \frac{1}{x} &= 0 \\ u_1' - u_2' \frac{1}{x^2} &= \ln x. \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας τη δεύτερη εξίσωση με $x$ και προσθέτοντας κατά μέλη, λαμβάνουμε

$$2xu_1' = x \ln x,$$

και μία λύση για την $u_1$ είναι

$$u_1 = \frac{x}{2}(\ln x - 1).$$

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε

$$u_2' = -\frac{x^2}{2} \ln x,$$

οπότε μία λύση για την $u_2$ είναι

$$u_2 = -\frac{x^3}{18}(3 \ln x - 1).$$

Άρα, μία μερική λύση της μη ομογενούς Δ.Ε. είναι

$$y_\mu = \frac{x^2}{2}(\ln x - 1) - \frac{x^2}{18}(3 \ln x - 1) = \frac{x^2 \ln x}{3} - \frac{4x^2}{9}$$

και η γενική της λύση είναι

$$y = c_1 x + c_2 \frac{1}{x} + \frac{x^2 \ln x}{3} - \frac{4x^2}{9}.$$

$\triangle$

Το κύριο πλεονέκτημα της μεθόδου μεταβολής των παραμέτρων είναι ότι μπορεί γενικά να εφαρμοστεί για κάθε συνάρτηση δευτέρου μέλους $f$, χωρίς να απαιτεί αυτή να είναι ειδικής μορφής, όπως στη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. Από την άλλη πλευρά, η μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων προϋποθέτει τη γνώση δύο γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων $y_1$ και $y_2$ της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε. κάτι που μπορεί να μην είναι εύκολο όταν η τελευταία δεν έχει σταθερούς συντελεστές. Επιπρόσθετα, ο αναλυτικός υπολογισμός ολοκληρωμάτων της μορφής (4.7.14) μπορεί να είναι δύσκολος ανάλογα με τις συναρτήσεις $y_1$, $y_2$ και $f$.

## 4.8 Ασκήσεις

Λύστε τις Δ.Ε.

**Άσκηση 4.8.1**

$$y'' + 6y' + 13y = 0.$$