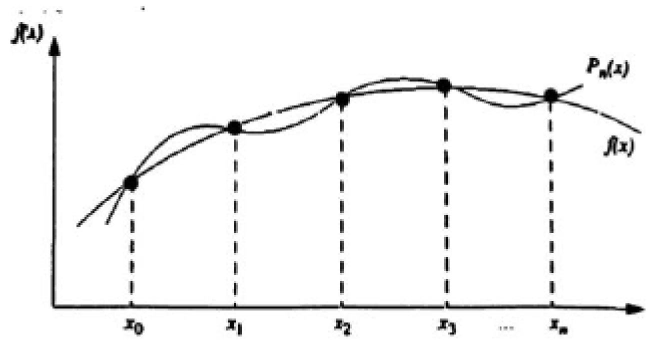
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ

§ 5.1 *Πολυωνυμική παρεμβολή*

Εστω *f* πραγματική συνάρτηση, της οποίας είναι γνωστές μόνον οι τιμές $f(x_i)$ σε $n+1$ σημεία x_i, $i=0,...,n$ του πεδίου ορισμού της. Το πρόβλημα εύρεσης μιας συνάρτησης φ, (από ένα ορισμένο σύνολο συναρτήσεων Σ), έτσι ώστε η φ να προσδιορίζεται μόνον από τις τιμές $f(x_i)$ και να πληροί τις συνθήκες $\varphi(x_i)=f(x_i)$, $i=0,...,n$ καλείται ***παρεμβολή***. Αν το σύνολο Σ είναι αρκετά «πλούσιο», τότε η τιμή της συνάρτησης $\varphi(x)$ για $x \neq x_i$ μπορεί να θεωρηθεί ότι προσεγγίζει την τιμή $f(x)$.



Σχήμα 5: Πολυωνυμική παρεμβολή

Στο Κεφάλαιο αυτό θα προσεγγίσουμε συναρτήσεις με παρεμβολή με πολυώνυμα, ή με τμηματικά πολυωνυμικές συναρτήσεις. Ο λόγος είναι ότι κατασκευάζονται πολύ εύκολα με πολ/σμούς και προσθαφαιρέσεις, παραγωγίζονται και ολοκληρώνονται πολύ εύκολα και έχουν καλές προσεγγιστικές ιδιότητες. Πράγματι:

Θεώρημα 5.1.1 (Weierstrass) Εστω $f \in C[a,b]$, όπου $C[a,b]$ είναι το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων στο κλειστό διάστημα *[α,b]*, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο $\pi(x)$ τέτοιο ώστε:

$$\max_{x\in[a,b]}\left| f(x)-\pi(x)\right| < \varepsilon .$$

Θεώρημα 5.1.2 (*Υπαρξης και μοναδικότητας του πολυωνύμου παρεμβολής*) Εστω $n+1$ σημεία του επιπέδου (x_i, y_i), $i=0,...,n$, τότε υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο $p(x)$ βαθμού το πολύ n, τέτοιο ώστε:

$$p(x_i)=y_i,\ i=0,...,n. \tag{5.1}$$

Απόδειξη: Εστω $p(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$ πολυώνυμο βαθμού το πολύ n με αγνώστους τους συντελεστές $a_0,a_1,...,a_n$, τότε από την (5.1) προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα $n+1$ εξισώσεων με $n+1$ αγνώστους. Το αντίστοιχο ομογενές σύστημα

$$p(x_i)=0,\ i=0,...,n,$$

έχει προφανώς ως μοναδική λύση την τετριμμένη μηδενική λύση, διότι το p ως πολυώνυμο το πολύ n βαθμού έχει το πολύ n ρίζες και όχι $n+1$ που υπονοεί το παραπάνω ομογενές σύστημα. Εφόσον το ομογενές σύστημα έχει μόνον την τετριμμένη λύση, το γραμμικό σύστημα (5.1) έχει μοναδική λύση. □

Εστω f είναι μια πραγματική συνάρτηση και p_n ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ n, τέτοιο ώστε $p_n(x_i)=f(x_i),\ i=0,...,n$, τότε το μοναδικό πολυώνυμο p_n καλείται πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $x_0,...,x_n$. Ισχύει δε:

Θεώρημα 5.1.3 (*Σφάλμα προσέγγισης)* Εστω $n = 1,...,$ και $f\in C^{n+1}[a,b]$, όπου $C^{n+1}[a,b]$ είναι το σύνολο των συναρτήσεων που είναι $n+1$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμες στο κλειστό διάστημα $[a,b]$. Αν p_n είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $x_0,...,x_n\in[a,b]$, τότε:

$$\| f-p_n\|_\infty \ \le\ \frac{\| f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!}\ \max_{x\in[a,b]}\prod_{i=0}^{n}|x-x_i|,$$

όπου: $\| f\|_\infty=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|$.

Απόδειξη: Εστω $f\in C^{n+1}[a,b]$, $x_0,...,x_n\in[a,b]$ και $x\neq x_i$, θέτουμε $\Phi(t)=\prod_{i=0}^{n}(t-x_i)$ και ορίζουμε μία βοηθητική συνάρτηση $\varphi_n(t)$ ως εξής:

$$\varphi_n(t)=f(t)-p_n(t)-\frac{f(x)-p_n(x)}{\Phi(x)}\ \Phi(t),\ t\in[a,b].$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι $\varphi_n(t)\in C^{n+1}[a,b]$ και

$$\varphi_n(x_i)=0,\ i=0,1,...,n,\ \text{και}\ \varphi_n(x)=0,$$

άρα η φ_n έχει στο διάστημα *[α,b]* τουλάχιστον *n+2* διαφορετικές ρίζες. Με χρήση του Θεωρήματος Rolle, προκύπτει ότι η φ_n' έχει στο ανοικτό διάστημα *(α,b)* τουλάχιστον *n+1* διαφορετικές ρίζες, η φ_n'' έχει στο ανοικτό διάστημα *(α,b)* τουλάχιστον *n* διαφορετικές ρίζες κλπ και τέλος η $\varphi_n^{(n+1)}$ έχει στο ανοικτό διάστημα *(α,b)* τουλάχιστον 1 ρίζα *ξ*. Επειδή

$$\varphi_n^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-\frac{f(x)-p_n(x)}{\Phi(x)}\left(n+1\right)!,$$

έχουμε:

$$0=\varphi_n^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-\frac{f(x)-p_n(x)}{\Phi(x)}\left(n+1\right)!$$

$$\Rightarrow f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{\left(n+1\right)!}\Phi(x). \quad \square$$

§ 5.2 *Κατασκευή πολυωνύμου παρεμβολής*

(α) Πολυώνυμο Lagrange

Εστω *n+1* σημεία του επιπέδου (x_i,y_i), *i = 0,…,n*, τότε το πολυώνυμο Lagrange που διέρχεται από τα σημεία (x_i,y_i) έχει τη μορφή:

$$p_n(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i\ L_i(x), \tag{5.2}$$

όπου τα πολυώνυμα:

$$L_i(x)=\frac{\left(x-x_0\right)...\left(x-x_{i-1}\right)\left(x-x_{i+1}\right)...\left(x-x_n\right)}{\left(x_i-x_0\right)...\left(x_i-x_{i-1}\right)\left(x_i-x_{i+1}\right)...\left(x_i-x_n\right)},\ i=0,...,n$$

καλούνται ***συντελεστές Lagrange***.

Παράδειγμα 5.1 Υπολογίστε το πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange που διέρχεται από τα σημεία: *(-1,-3), (0,-2) (1,-1).*

Λύση Αριθμούμε τα σημεία μας ξεκινώντας πάντοτε από την τιμή *i = 0* και έχουμε:

	x_0	x_1	x_2
x	-1	0	1
y	-3	-2	-1
	y_0	y_1	y_2

Από τον τύπο (5.2) έχουμε:

$$p_2(x)=\sum_{i=0}^{2} y_i\ L_i(x) = -3L_0(x)-2L_1(x)-L_2(x).$$

Υπολογίζουμε:

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}=\frac{x^2-x}{2},$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)}=\frac{x^2-1}{-1},$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)}=\frac{x^2+x}{2}.$$

Αντικαθιστούμε στον τύπο του πολυωνύμου *$p_2(x)$* και υπολογίζουμε:

$$p_2(x)=-3\frac{x^2-x}{2}-2\frac{x^2-1}{-1}-\frac{x^2+x}{2}=x-2. \quad \square$$

(β)-Πολυώνυμο Newton

Εστω *n+1* σημεία του επιπέδου *(x_i,y_i), i = 0,…,n,* τότε το πολυώνυμο του Newton που διέρχεται από τα σημεία *(x_i,y_i)* έχει τη μορφή:

$$p_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\ldots+a_n(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1}), \qquad (5.3)$$

όπου οι συντελεστές $a_0, a_1, \ldots a_n$ υπολογίζονται με *τη μέθοδο των διαιρεμένων ή προσαρτημένων διαφορών* ως εξής:

Κατασκευάζουμε τον ακόλουθο πίνακα:

x	y	Διαιρεμένες διαφορές $1^{ης}$ τάξης	Διαιρεμένες διαφορές $2^{ης}$ τάξης	…	Διαιρεμένες διαφορές *n* τάξης
x_0	y_0	$\Delta_{11} = (y_1-y_0) / (x_1-x_0)$	$\Delta_{21} = (\Delta_{12}-\Delta_{11}) / (x_2-x_0)$	…	$\Delta_{n1} = (\Delta_{n-1,2}-\Delta_{n-1,1}) / (x_n-x_0)$
x_1	y_1	$\Delta_{12} = (y_2-y_1) / (x_2-x_1)$	$\Delta_{22} = (\Delta_{13}-\Delta_{12}) / (x_3-x_1)$	…	
⋮	⋮	⋮	⋮		
x_{n-1}	y_{n-1}	$\Delta_{1,n}= (y_n-y_{n-1}) / (x_n-x_{n-1})$	$\Delta_{2,n-1} = (\Delta_{1,n} - \Delta_{1,n-1}) / (x_n-x_{n-2})$		
x_n	y_n				

ακολουθώντας τους εξής κανόνες:

(1) οι δύο πρώτες στήλες είναι οι στήλες των δεδομένων *x* και *y* όπου τα *x* διατάσσονται από το μικρότερο στο μεγαλύτερο, δηλαδή:

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n .$$

(2) Ορίζουμε τις ***διαιρεμένες διαφορές 1ης τάξης*** από τη σχέση:

$$\Delta_{1i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}},\ i = 1, \ldots n .$$

(3) Ορίζουμε τις ***διαιρεμένες διαφορές i-τάξης i = 1,…,n*** από τη σχέση:

$$\Delta_{ij} = \frac{\Delta_{i-1,j+1} - \Delta_{i-1,j}}{x_{j+i-1} - x_{j-1}},\ j = 1, \ldots n - i + 1.$$

(4) Οι συντελεστές a_i, $i = 0,\ldots,n$ του πολυωνύμου του Newton υπολογίζονται ως εξής:

$$a_i = \begin{cases} y_0, & i = 0 \\ \Delta_{i1}, & i = 1, \ldots, n \end{cases}.$$

Παράδειγμα 5.2 Να υπολογισθεί το πολυώνυμο του Newton που παρεμβάλλει μία συνάρτηση *f(x)* στα σημεία:

x	*-1*	*-2*	*0*	*3*	*2*
y	*5*	*3*	*-2*	*0*	*4*

Λύση Κατασκευάζουμε τον ακόλουθο πίνακα διαιρεμένων διαφορών:

x	y	$1^{ης}$ τάξης δ.δ.	$2^{ης}$ τάξης δ.δ	$3^{ης}$ τάξης δ.δ	$4^{ης}$ τάξης δ.δ
-2	3	(5-3)/(-1-(-2))=**2**	(-7-2)/(0-(-2))=**-9/2**	(10/3+9/2)/(2-(-2))=**47/24**	(-17/12-47/24)/5=**-81/120**
-1	5	(-2-5)/(0-(-1))=**-7**	(3-(-7))/(2-(-1))=**10/3**	(-7/3-10/3)/(3-(-1))=**-17/12**	
0	-2	(4-(-2))/(2-0)=**3**	(-4-3)/(3-0)=**-7/3**		
2	4	(0-4)/(3-2)=**-4**			

3	0				

Αρα το πολυώνυμο του Newton είναι το εξής:

$$p_4(x) = 3 + 2(x+2) - \frac{9}{2}(x+2)(x+1) + \frac{47}{24}(x+2)(x+1)x - \frac{81}{120}(x+2)(x+1)x(x-2)$$

και προκύπτει από τον τύπο (5.3) *για* $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, με τους συντελεστές $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_4$ να προκύπτουν από τη σχέση (5.3), σε συνδυασμό με τον πίνακα διαιρεμένων διαφορών (βλέπε αριθμούς με κόκκινη απόχρωση) που κατασκευάσαμε:

$$\alpha_0=3,\ \alpha_1=2,\ \alpha_2=-9/2,\ \alpha_3=47/24,\ \alpha_4=-81/120. \quad \square$$

Σημείωση Για πολλές συναρτήσεις *f*, το μέγιστο σφάλμα $\| f - p_n \|_\infty$ κατά την προσέγγιση της *f* με ένα πολυώνυμο παρεμβολής p_n τείνει στο μηδέν. Αυτό όμως δε συμβαίνει πάντα. Από τον Runge δόθηκε το παράδειγμα της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2},$$

η οποία είναι απειροδιαφορίσιμη στο κλειστό διάστημα [-1,1] και για την οποία ισχύει $\| f - p_n \|_\infty \to \infty$, $n \to \infty$. Γενικότερα, ο Faber απέδειξε το 1914 ότι για *οποιαδήποτε επιλογή των σημείων παρεμβολής, υπάρχει συνεχής συνάρτηση για την οποία η παρεμβολή αποτυγχάνει*.

§ 5.3 *Παρεμβολή Hermitte*

Εστω *f* μία πραγματική συνάρτηση και ας υποθέσουμε ότι ζητούμε από την παρεμβάλλουσα συνάρτηση $\varphi(x)$ της *f*, να έχει εκτός της ταύτισης με την *f* στα σημεία παρεμβολής $x_0, \ldots, x_n$ και τις ίδιες παραγώγους μέχρι κάποια τάξη με την *f*, όπου η τάξη μπορεί να διαφέρει από σημείο σε σημείο. Τότε μιλούμε για ***παρεμβολή τύπου Hermitte***.

Θεώρημα 5.3.1 (*Υπαρξης και μοναδικότητας του πολυωνύμου παρεμβολής*) Εστω $m_0, \ldots, m_n$ φυσικοί αριθμοί, $N = n + m_0 + \ldots + m_n$, p_N πολυώνυμο βαθμού *N* και $M = max\{m_0, \ldots, m_n\}$. Αν $f \in C^M[a,b]$ και $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \ldots, n$, *n+1* σημεία του επιπέδου, τότε υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο $p_N(x)$ βαθμού το πολύ *N*, τέτοιο ώστε:

$$\begin{array}{c} p_N^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0),\ i = 0,\ldots,m_0 \\ p_N^{(i)}(x_1) = f^{(i)}(x_1),\ i = 0,\ldots,m_1, \\ \cdots \\ p_N^{(i)}(x_n) = f^{(i)}(x_n),\ i = 0,\ldots,m_n \end{array} . \tag{5.4}$$

Η πιο συνηθισμένη περίπτωση είναι αυτή κατά την οποία ζητούμε να υπολογίσουμε το πολυώνυμο Hermitte που ικανοποιεί τα δεδομένα:

$$p_N(x_i) = f(x_i),\ p_N'(x_i) = f'(x_i),\ i = 0,\ldots,n. \tag{5.5}$$

Θεώρημα 5.3.2 (*Σφάλμα προσέγγισης*) Εστω *n = 1,…,* $f \in C^{2n+2}[a,b]$, και p_{2n+1} είναι το πολυώνυμο παρεμβολής Hermitte που ικανοποιεί την (5.5) στα σημεία $x_0,\ldots,x_n \in [a,b]$, τότε:

$$\| f - p_n \|_\infty \;\le\; \frac{\| f^{(2n+2)} \|_\infty}{(2n+2)!}\ \max_{x\in[a,b]} \prod_{i=0}^{n} \left| x - x_i \right|^2 .$$

Κατασκευή του πολυωνύμου Hermitte

Θεωρούμε τη σχέση (5.4), όπου χωρίς περιορισμό της γενικότητας έχουμε υποθέσει ότι $x_0<\ldots<x_n$. Ορίζουμε μία νέα ακολουθία σημείων ως εξής:

$$\left\{ \underbrace{x_0, x_0,\ldots,x_0}_{m_0+1\ \phi o\rho\grave{\varepsilon}\varsigma}, \underbrace{x_1, x_1,\ldots,x_1}_{m_1+1\ \phi o\rho\grave{\varepsilon}\varsigma},\ldots, \underbrace{x_n, x_n,\ldots,x_n}_{m_n+1\ \phi o\rho\grave{\varepsilon}\varsigma} \right\}, \tag{5.6}$$

και για την ακολουθία (5.6) κατασκευάζουμε το πολυώνυμο Hermitte να είναι το πολυώνυμο Newton (5.3), όπου οι συντελεστές του υπολογίζονται όπως είδαμε στις σελ. 78-79 με μία μόνον επιπλέον συνθήκη:

(Σ) *όποτε βρίσκουμε στις διαιρεμένες διαφορές i-τάξης την ποσότητα 0/0 (μηδέν διά μηδέν) θα την αντικαθιστούμε με την ποσότητα:*

$$\Delta_{i,k} \to \frac{f^{(i)}(x_k)}{i!}.$$

Παράδειγμα 5.3 Να υπολογισθεί το πολυώνυμο του Hermitte που ικανοποιεί τα δεδομένα:

$$f(0) = 2,\ f'(0) = 4,\ f(2) = 4,\ f'(2) = 4,\ f''(2) = 4,\ f(4) = 6.$$

Λύση Κατασκευάζουμε την ακολουθία (5.6) ως εξής: προφανώς έχουμε 3 σημεία τα $f(0) = 2$, $f(2) = 4$, $f(4) = 6$, τις τετμημένες των οποίων διατάσσουμε κατ' αύξουσα τάξη λόγω του κανόνα (1) της σελ. 78. Ετσι έχουμε $x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 4$. Στη συνέχεια, κάθε σημείο επαναλαμβάνεται τόσες φορές όσο είναι η μέγιστη τάξη της παραγώγου του, άρα το $x_0 = 0$ θα επαναληφθεί μία φορά, το $x_1 = 2$ θα επαναληφθεί 2 φορές, ενώ το $x_0 = 4$ δεν θα επαναληφθεί. Ετσι κατασκευάζουμε την ακολουθία (5.6):

$$\{0,0,2,2,2,4\}.$$

Το πολυώνυμο του Hermitte κατασκευάζεται όπως το πολυώνυμο Newton με την επιπλέον συνθήκη (Σ) (βλέπε σελ. 80). Κατασκευάζουμε πρώτα τον πίνακα διαιρεμένων διαφορών:

x	y	1ης τάξης δ. δ.	2ης τάξης δ. δ.	3ης τάξης δ. δ.	4ης τάξης δ. δ.
0	2	0/0 → $f'(0)$ = 4	(2-4)/(2-0)=-1	(1-(-1))/(2-0) = 1	(3/2-1)/(2-0)=1/4
0	2	(4-0)/(2-0) = 2	(4-2)/(2-0)=1	(4-1)/(2-0) = 3/2	(5/4-3/2)/(4-0)=-1/16
2	4	0/0 → $f'(2)$ = 4	0/0 → $f''(2)/2$ = 4	(1-(-3/2))/(4-2)=5/4	
2	4	0/0 → $f'(2)$ = 4	(1-4)/(4-2) = -3/2		
2	4	(6-4)/(4-2) = 1			
4	6				

5ης τάξης δ. δ.
(-1/16-1/4)/(4-0)=-5/64

Αρα το πολυώνυμο του Hermitte είναι το εξής:

$$p_5(x) = 2 + 4(x-0) - 1(x-0)(x-0) + 1(x-0)(x-0)(x-2)$$

$$+\frac{1}{4}(x-0)(x-0)(x-2)(x-2) - \frac{5}{64}(x-0)(x-0)(x-2)(x-2)(x-2)$$

και προκύπτει από τον τύπο (5.3) για $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$ $x_4 = 2$ με τους συντελεστές $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_4, \alpha_5$ να προκύπτουν από τη σχέση (5.3) σε συνδυασμό με τον πίνακα διαιρεμένων διαφορών (βλέπε αριθμούς με κόκκινη απόχρωση) που κατασκευάσαμε:

$$\alpha_0=2,\ \alpha_1=4,\ \alpha_2=-1,\ \alpha_3=1,\ \alpha_4=1/4,\ \alpha_5=-5/64. \quad \square$$

§ 5.4 *Splines*

Εστω $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ είναι ένας διαμερισμός του κλειστού διαστήματος *[α,b]*, τότε splines ως προς αυτό το διαμερισμό καλούνται γενικά εκείνες οι συναρτήσεις που σε κάθε υποδιάστημα $[x_i,x_{i+1}]$, έχουν μία ορισμένη μορφή, είναι π.χ. πολυώνυμα βαθμού *m*.

Ορισμός 5.4.1 Εστω $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ είναι ένας διαμερισμός του κλειστού διαστήματος *[α,b]*. Κάθε συνάρτηση $s \in C^{m-1}[a,b]$ τέτοια ώστε ο περιορισμός $s|_{[x_i, x_{i+1}]}$ $i = 1,...,n$ να είναι πολυώνυμο βαθμού *m* καλείται πολυωνυμική *spline* βαθμού *m.*

Για παράδειγμα οι πολυωνυμικές *splines* βαθμού *1* είναι οι συνεχείς τεθλασμένες γραμμές.

Σημαντικό ρόλο στις εφαρμογές παίζουν οι κυβικές *splines*, δηλαδή οι συναρτήσεις που είναι *2 φορές παραγωγίσιμες στο κλειστό διάστημα [α,b] και είναι κυβικά πολυώνυμα σε κάθε υποδιάστημα ενός οποιουδήποτε διαμερισμού του [α,b].*

Εστω $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ οποιοδήποτε διαμερισμός του *[α,b]*, για τον προσδιορισμό μιας κυβικής *spline* απαιτείται η εύρεση συνολικά *4n* σταθερών, δηλαδή των συντελεστών του αντιστοίχου κυβικού πολυωνύμου

$$s^{(i)}(x) = a_0^{(i)} + a_1^{(i)}x + a_2^{(i)}x^2 + a_3^{(i)}x^3$$

σε κάθε υποδιάστημα $[x_i,x_{i+1}]$, *i=0,…,n-1*. Εχουμε λοιπόν *n+1* σχέσεις από τις συνθήκες παρεμβολής

$$s^{(i)}(x_i) = f(x_i),\ i = 0,...,n,$$

n-1 σχέσεις από τις συνθήκες συνέχειας στους εσωτερικούς κόμβους

$$s^{(i-1)}(x_i) = s^{(i)}(x_i),\ i = 1,...,n,$$

και *2 (n-1)* σχέσεις από τις συνθήκες παραγωγισιμότητας στους εσωτερικούς κόμβους

$$\left(s^{(i-1)}\right)'(x_i) = \left(s^{(i)}\right)'(x_i),\ i = 1,...,n,$$

$$\left(s^{(i-1)}\right)''(x_i)=\left(s^{(i)}\right)''(x_i),\ i=1,...,n,$$

συνολικά δηλαδή μπορούμε να προσδιορίσουμε 4*n*-2 εξισώσεις. Οι υπόλοιπες δύο είναι συνήθως διαφόρων τύπων *συνοριακές εξισώσεις* που αφορούν τους συνοριακούς κόμβους *α* και *b*. Για παράδειγμα αν ισχύει

$$s''(x_0)=s''(x_n)=0,$$

τότε λέμε ότι έχουμε *φυσικές κυβικές splines*. Ισχύει μάλιστα:

Θεώρημα 5.4.2 Εστω $f\in C^4[a,b]$ και έστω s η κυβική πολυωνυμική spline που παρεμβάλλει την f στα σημεία $a=x_0<x_1<...<x_n=b$, τότε υπάρχουν σταθερές C_m, $m = 0,1,2,3$ τέτοιες ώστε:

$$\| f^{(m)}-s^{(m)}\|_\infty \ \le\ C_m\ h^{4-m}\ \| f^{(4)}\|_\infty,$$

όπου h είναι η μέγιστη τιμή του εύρους μεταξύ των υποδιαστημάτων $[x_i,x_{i+1}]$, $i = 0,\dots,n-1$.

Για να υπολογίσουμε τις κυβικές *splines* εργαζόμαστε ως εξής:

1. εφόσον η s είναι κυβική spline, η s'' είναι συνεχής συνάρτηση και μάλιστα θα είναι μία τεθλασμένη γραμμή, οπότε κάθε ευθύγραμμο τμήμα αυτής της γραμμής είναι η $\left(s^{(j)}\right)''(x),\ j=0,...,n-1$, η οποία με χρήση του πολυωνύμου Lagrange που διέρχεται από τα σημεία μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\left(s^{(j)}\right)''(x)=a_j\,\frac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}}+a_{j+1}\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j},$$

όπου a_j, a_{j+1} άγνωστοι τους οποίους θέλουμε να προσδιορίσουμε. Με αυτή τη γραφή ισχύει ότι

$$\left(s^{(j)}\right)''\left(x_j\right)=a_j,\ \left(s^{(j)}\right)''\left(x_{j+1}\right)=a_{j+1},\ \left(s^{(j-1)}\right)''\left(x_j\right)=a_j=\left(s^{(j)}\right)''\left(x_j\right).$$

2. Ολοκληρώνοντας 2 φορές και χρησιμοποιώντας τις συνθήκες παρεμβολής προσδιορίζουμε τις άγνωστες σταθερές.

Σημειώνουμε ότι στα περισσότερα μαθηματικά λογισμικά υπάρχουν ειδικές εντολές που υπολογίζουν άμεσα τις κυβικές splines.

Παράδειγμα 4 Εστω $\{x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1\}$ ένας ομοιόμορφος διαμερισμός του διαστήματος $[-1,1]$. Προσδιορίστε τη φυσική κυβική spline που παρεμβάλλεται σε μία συνάρτηση f στα σημεία x_i , $i = 0,1,2$, έτσι ώστε $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = 2$, $f(x_2) = 6$.

Λύση Εστω $s(x)$ η φυσική κυβική spline και $s^{(0)}(x), s^{(1)}(x)$ τα κυβικά πολυώνυμα στα υποδιαστήματα $[-1,0]$ και $[0,1]$ αντίστοιχα. Προφανώς κάθε συνάρτηση $\left(s^{(j)}\right)''(x)$ είναι ένα πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού, δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα, οπότε αν $a_{j,k}$, $j,k = 0,1$ είναι άγνωστες σταθερές, έχουμε:

$$\begin{cases} \left(s^{(0)}\right)''(x) = a_{0,0}x + a_{0,1} \\ \left(s^{(1)}\right)''(x) = a_{1,0}x + a_{1,1} \end{cases}.$$

Προφανώς $\left(s^{(0)}\right)''(-1) = 0,\ \left(s^{(1)}\right)''(1) = 0,\ \left(s^{(0)}\right)''(0) = \left(s^{(1)}\right)''(0)$, οπότε βρίσκουμε ότι:

$$a_{0,0} = a_{0,1}, \quad a_{1,1} = -a_{1,0}, \quad a_{0,1} = a_{1,1},$$

δηλαδή:

$$\begin{cases} \left(s^{(0)}\right)''(x) = a_{0,0}x + a_{0,0} \\ \left(s^{(1)}\right)''(x) = -a_{0,0}x + a_{0,0} \end{cases}$$

άρα η συνάρτηση $s''(x)$ είναι συνεχής (όπως απαιτείται). Ολοκληρώνοντας παίρνουμε:

$$\begin{cases} \left(s^{(0)}\right)'(x) = a_{0,0}\dfrac{x^2}{2} + a_{0,0}x + c_1 \\ \left(s^{(1)}\right)'(x) = -a_{0,0}\dfrac{x^2}{2} + a_{0,0}x + c_2 \end{cases}.$$

Επειδή πρέπει $\left(s^{(0)}\right)'(0)=\left(s^{(1)}\right)'(0)$ παίρνουμε εύκολα ότι $c_1=c_2$ οπότε:

$$\begin{cases} \left(s^{(0)}\right)'(x)=a_{0,0}\dfrac{x^2}{2}+a_{0,0}x+c_1 \\ \left(s^{(1)}\right)'(x)=-a_{0,0}\dfrac{x^2}{2}+a_{0,0}x+c_1 \end{cases}.$$

άρα η συνάρτηση $s'(x)$ είναι συνεχής (όπως απαιτείται). Ολοκληρώνοντας παίρνουμε:

$$\begin{cases} s^{(0)}(x)=a_{0,0}\dfrac{x^3}{6}+a_{0,0}\dfrac{x^2}{2}+c_1x+d_1 \\ s^{(1)}(x)=-a_{0,0}\dfrac{x^3}{6}+a_{0,0}\dfrac{x^2}{2}+c_1x+d_2 \end{cases}. \qquad (5.11)$$

Επειδή πρέπει $s^{(0)}(0)=s^{(1)}(0)=2$ παίρνουμε εύκολα ότι $d_1=d_2=2$, οπότε:

$$\begin{cases} s^{(0)}(x)=a_{0,0}\dfrac{x^3}{6}+a_{0,0}\dfrac{x^2}{2}+c_1x+2 \\ s^{(1)}(x)=-a_{0,0}\dfrac{x^3}{6}+a_{0,0}\dfrac{x^2}{2}+c_1x+2 \end{cases},$$

άρα η συνάρτηση $s(x)$ είναι συνεχής (όπως απαιτείται)..

Τέλος επειδή $s^{(0)}(-1)=0,\ \ s^{(1)}(1)=6$, λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} s^{(0)}(-1)=a_{0,0}\dfrac{(-1)^3}{6}+a_{0,0}\dfrac{(-1)^2}{2}+c_1(-1)+2 \\ s^{(1)}(1)=-a_{0,0}\dfrac{1^3}{6}+a_{0,0}\dfrac{1^2}{2}+c_1 1+2 \end{cases}$$

ως προς $a_{0,0}, c_1$. Εχουμε:

$$\begin{cases} 0 = -a_{0,0}\dfrac{1}{6} + a_{0,0}\dfrac{1}{2} - c_1 + 2 \\ 6 = -a_{0,0}\dfrac{1}{6} + a_{0,0}\dfrac{1}{2} + c_1 + 2 \end{cases},$$

απ' όπου προκύπτει εύκολα ότι:

$$a_{0,0} = 3, \quad c_1 = 3,$$

και τελικά από την (5.11) παίρνουμε:

$$s(x) = \begin{cases} s^{(0)}(x) = \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 + 3x + 2, & x \in [-1,0) \\ s^{(1)}(x) = -\dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 + 3x + 2, & x \in [0,1] \end{cases}. \qquad \square$$

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να προσδιορισθεί το πολυώνυμο Lagrange που διέρχεται από τα δεδομένα: *(i) (-2,-9), (-1,-2), (0,-1), (1,0)*
(ii) (-1,20), (0, 10), (2, -4)
(iii) (0,-3), (5,7).

Απάντ. *(i)* $y = x^3-1$, *(ii)* $y = x^2-9x+10$ *(iii)* $y = 2x-3$.

2. Να προσδιορισθεί το πολυώνυμο Newton που διέρχεται από τα δεδομένα: *(i) (-1,-3), (0,1), (2,15), (1,3)*
(ii) (-1,19), (1, 5), (0, 9).

Απάντ. *(i)* $y = 2x^3- x^2+x+1$, *(ii)* $y = x^2-9x+10$.

3. Να προσδιορισθεί το πολυώνυμο Hermitte που ικανοποιεί τα δεδομένα:
(i) $f(0)=0, f'(0)=2, f''(0)=4, f(1)=6, f(2)=8, f(4)=16$.
(ii) $f(1)=3, f'(1)=4, f(2)=6, f'(2)=4, f''(2)=2, f'''(2)=6$.

Απάντ. *(i)* $y = 41/48\, x^5 - 81/16\, x^4 + 149/24\, x^3 + 2x^2+2x$,
(ii) $y = 3x^5-26x^4 + 89x^3-149x^2+124x-38$.

4. Εστω $\{x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2\}$ ένας ομοιόμορφος διαμερισμός του διαστήματος $[-2,2]$. Προσδιορίστε τη φυσική κυβική spline που παρεμβάλλεται σε μία συνάρτηση f στα σημεία x_i , $i = 0,1,2,$ έτσι ώστε $f(x_0) = 2, f(x_1) = 4, f(x_2) = 0, f(x_3) = -2, f(x_4) = -6.$

5 Εστω $f(x) = x^3-1$. Να βρεθεί ένα πολυώνυμο παρεμβολής που παρεμβάλλει την f στα σημεία $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 1$. Να υπολογίσετε το σφάλμα της παρεμβολής.

6. Εστω $f(x) = e^x$. Θεωρούμε έναν πίνακα τιμών της $f(x)$ στα σημεία $x_i = ih, i = 0,\ldots,N-1,$ όπου $N = 1/h$. Να προσδιορίσετε το βήμα h, έτσι ώστε η προσέγγιση της $f(x)$ με ένα πολυώνυμο παρεμβολής 2^{ου} βαθμού να δίνει ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων.