Αριθμητική Ανάλυση
Επίλυση γραμμικών συστημάτων

Αναστάσιος Τέφας
tefas@aiia.csd.auth.gr
2310-991932

Σύστημα γραμμικών εξισώσεων

Εστω $n = 2,3,\ldots,$ με τον όρο γραμμικά συστήματα $n \times n$, εννοούμε συστήματα n εξισώσεων με n αγνώστους της μορφής:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}, \qquad (3.1)$$

όπου x_i, $i = 1,\ldots,n$, είναι οι *άγνωστοι όροι*, $\alpha_{i,j}$, $i,j = 1,\ldots,n$ είναι οι *συντελεστές* των αγνώστων όρων και b_i, $i = 1,\ldots,n$ είναι οι *σταθεροί* όροι.

Το σύστημα (3.1) μπορεί να γραφεί με τη μορφή πινάκων ως εξής:

$$A\,x \;=\; B\,,$$

όπου

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

είναι ο ***πίνακας των συντελεστών των αγνώστων***,

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

είναι ο ***πίνακας στήλη των αγνώστων*** και

$$b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Συνθήκες μοναδικής λύσης

Είναι γνωστό από τη γραμμική άλγεβρα, ότι ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε το σύστημα (3.1) να έχει μοναδική λύση είναι οι ακόλουθες:

- Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.
- Η ορίζουσα του πίνακα A είναι διάφορη του μηδενός.
- Οι γραμμές ή οι στήλες του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
- Το αντίστοιχο ομογενές σύστημα $A\,x = 0$ έχει ως μοναδική λύση την μηδενική.

Αν ένα σύστημα έχει μοναδική λύση, τότε για τον προσδιορισμό αυτής υπενθυμίζουμε τον κανόνα του *Cramer*:

$$x_i = \frac{Det\left(A_i\right)}{Det\left(A\right)},\ i = 1, \ldots, n,$$

όπου A_i είναι ο πίνακας που προκύπτει, αν αντικαταστήσουμε την *i*-στήλη του πίνακα *A* με τη στήλη των σταθερών όρων. Ενας άλλος τρόπος είναι:

$$x = A^{-1} B,$$

όπου A^{-1} είναι ο αντίστροφος του πίνακα *A*. Σημειώνουμε όμως ότι και οι δύο παραπάνω τρόποι <u>είναι υπολογιστικά ασύμφοροι</u>. Για την επίλυση με τη μέθοδο Cramer απαιτούνται $(n+1)!$ $+n$ πολλαπλασιασμοί, ενώ για την επίλυση με την εύρεση του αντιστρόφου πίνακα A^{-1}, αναγόμαστε στην επίλυση ενός συστήματος με n^2 αγνώστους, ή ισοδύναμα στην επίλυση *n* γραμμικών συστημάτων με τον ίδιο πίνακα *A* και έναν πολλαπλασιασμό επί διάνυσμα. Είναι σαφές ότι για μεγάλα *n = 100*, *1000* κ.λ.π., το υπολογιστικό κόστος γίνεται απαγορευτικό.

Μέθοδος Gauss

Βήμα 1^ο^ : ορίζουμε τον ***επαυξημένο πίνακα*** των συντελεστών και σταθερών όρων, διάστασης $n \times (n+1)$:

$$A_{\varepsilon\pi} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & | & b_n \end{pmatrix}.$$

Μέθοδος Gauss

Βήμα 2ο: Ξεκινώντας πάντοτε με *οδηγό στοιχείο το 1ο στοιχείο της κυρίας διαγωνίου*, δηλαδή το α_{11}, εκτελούμε μία πράξη μεταξύ της 1ης γραμμής και κάθε μίας από τις επόμενες γραμμές, *έτσι ώστε όλα τα στοιχεία κάτω από το οδηγό στοιχείο να μηδενίζονται*. Μετά το πέρας του βήματος αυτού, ο νέος επαυξημένος πίνακας θα έχει τη μορφή:

$$A_{\varepsilon\pi}(1)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & | & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & | & b_n^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Ο παραπάνω πίνακας, προκύπτει από την πράξη *(i = 2,…,n)*:

$$(i \text{ γραμμή του } A_{\varepsilon\pi}(1)) = -\frac{a_{i1}}{a_{11}} \; (1^{\eta} \text{ γραμμή του } A_{\varepsilon\pi}) + (i \text{ γραμμή του } A_{\varepsilon\pi}).$$

Μέθοδος Gauss

Βήμα 3^o: Συνεχίζουμε τη διαδικασία, ξεκινώντας τώρα με *οδηγό στοιχείο το 2^o στοιχείο της κυρίας διαγωνίου του πίνακα* $A_{\varepsilon\pi}(1)$, δηλαδή το $a_{22}^{(2)}$, και εκτελούμε μία πράξη μεταξύ της 2$^{\eta\varsigma}$ γραμμής και κάθε μίας από τις επόμενες γραμμές, *έτσι ώστε όλα τα στοιχεία κάτω από το οδηγό στοιχείο να μηδενίζονται*. Μετά το πέρας του βήματος αυτού ο νέος επαυξημένος πίνακας θα έχει τη μορφή:

$$A_{\varepsilon\pi}(2)=\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} & b_n^{(3)} \end{array}\right).$$

Μέθοδος Gauss

Ο παραπάνω πίνακας, προκύπτει από την πράξη *(i = 3,…,n)*:

$$(i\ \gamma\rho\alpha\mu\mu\acute{\eta}\ \tau o\upsilon\ A_{\varepsilon\pi}(2)) = -\frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}\ (2^{\eta}\ \gamma\rho\alpha\mu\mu\acute{\eta}\ \tau o\upsilon\ A_{\varepsilon\pi}(1)) + (i\ \gamma\rho\alpha\mu\mu\acute{\eta}\ \tau o\upsilon\ A_{\varepsilon\pi}(1)).$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο μετά από *n* βήματα καταλήγουμε σε έναν επαυξημένο πίνακα με τριγωνική μορφή:

$$A_{\varepsilon\pi}(n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & | & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & | & b_3^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} & | & b_n^{(n)} \end{pmatrix},$$

Μέθοδος Gauss

η οποία επιτρέπει να υπολογισθούν οι λύσεις με τη διαδικασία της προς τα πίσω αντικατάστασης. Δηλαδή, από την εξίσωση:

$$a_{nn}^{(n)}\, x_n \;=\; b_n^{(n)},$$

υπολογίζουμε το x_n κ.λ.π.. Αν συμβεί $a_{nn}^{n} \;=\; 0$ και $b_n^{(n)} = 0$, τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, ενώ αν $a_{nn}^{n} \;=\; 0$ και $b_n^{(n)} \neq 0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

Πολυπλοκότητα μεθόδου Gauss

Στο 2ο βήμα της μεθόδου Gauss για τον υπολογισμό των στοιχείων $a_{ij}^{(2)},\ i,j=2,\ldots,n$ απαιτούνται *(n-1)+(n-1)*^{2} πράξεις. Εύκολα βλέπουμε ότι στα *(n-1)* βήματα της μεθόδου απαιτούνται:

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)^2+(n-i)=\frac{n^3-n}{3}$$

πράξεις. Επιπλέον χρειάζονται

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

πράξεις για τον υπολογισμό των $b_i^{(i)},\ i=2,\ldots,n$ και σημειώνουμε ότι κατά τη διαδικασία της προς τα πίσω οπισθοδρόμησης χρειάζονται

Πολυπλοκότητα μεθόδου Gauss

$$1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

πράξεις, δηλαδή συνολικά $\frac{n^3+3n^2-n}{3}$ πράξεις, κόστος δηλαδή πολύ μικρό σε σχέση με το κόστος των $n!(n-1)$ πράξεων που απαιτούνται στον κανόνα του *Cramer*. Οσον αφορά τη μνήμη, αρκεί να αποθηκεύσουμε τα στοιχεία του πίνακα A σε n^2 θέσεις μνήμης και τα στοιχεία του πίνακα b σε n θέσεις μνήμης. Επιπλέον μνήμη δεν χρειάζεται, διότι οι πολλαπλασιαστές $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ $i=2,\ldots,n$ (βλέπε βήμα 2) θα καταλάβουν τη θέση των στοιχείων $a_{1j}, j=2,\ldots,n$ που θα γίνουν μηδενικά κλπ.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1 Να επιλυθεί με τη μέθοδο Gauss το σύστημα:

$$\begin{aligned} 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}.$$

Λύση Ορίζουμε τον επαυξημένο πίνακα:

$$A_{\varepsilon\pi} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 4 & | & 7 \\ 4 & 3 & 4 & | & 8 \\ 1 & 1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}.$$

1^o βήμα:

$$A_{\varepsilon\pi}(1)=\begin{pmatrix} \boxed{9} & 3 & 4 & | & 7 \\ 0 & 5/3 & 20/9 & | & 44/9 \\ 0 & 2/3 & 5/9 & | & 20/9 \end{pmatrix},$$

όπου η 1^η γραμμή του πίνακα $A_{\varepsilon\pi}(1)$ παραμένει αναλλοίωτη,

(2^η γραμμή του $A_{\varepsilon\pi}(1)$) = $-\dfrac{4}{9}$ (1^η γραμμή του $A_{\varepsilon\pi}$) + (2^η γραμμή του $A_{\varepsilon\pi}$),

(3^η γραμμή του $A_{\varepsilon\pi}(1)$) = $-\dfrac{1}{9}$ (1^η γραμμή του $A_{\varepsilon\pi}$) + (3^η γραμμή του $A_{\varepsilon\pi}$) .

2^{o} βήμα:

$$A_{\varepsilon\pi}(2) = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 4 & | & 7 \\ 0 & \boxed{5/3} & 20/9 & | & 44/9 \\ 0 & 0 & -1/3 & | & 12/45 \end{pmatrix},$$

όπου οι 2 πρώτες γραμμές του πίνακα $A_{\varepsilon\pi}(2)$ παραμένουν αναλλοίωτες,

(3^{η} γραμμή του $A_{\varepsilon\pi}(2)$*)* $= -\dfrac{2}{5}$ *(2^{η} γραμμή του* $A_{\varepsilon\pi}(1)$*)* + *(3^{η} γραμμή του* $A_{\varepsilon\pi}(1)$*)* .

Στη συνέχεια με τη διαδικασία της προς τα πίσω οπισθοδρόμησης, υπολογίζουμε:

$$-1/3\,x_3 = 12/45 \Rightarrow x_3 = -4/5$$

$$5/3\,x_2 + 20/9\,x_3 = 44/9 \Rightarrow x_2 = 4$$

$$9\,x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_3 = 7 \Rightarrow x_1 = -1/5. \quad \square$$

Αλγόριθμος Gauss με οδήγηση

- Στην παραπάνω διαδικασία, μπορεί να προκύψει πρόβλημα:
  - είτε όταν το οδηγό στοιχείο σε κάποιο βήμα είναι το μηδέν, οπότε δεν είναι δυνατόν να διαγραφούν τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από αυτό,
  - είτε όταν το οδηγό στοιχείο σε κάποιο βήμα έχει πολύ μικρή τιμή σε σχέση με τους άλλους αριθμούς του επαυξημένου πίνακα, οπότε δημιουργούνται σφάλματα.
- Για το λόγο αυτό, πριν ξεκινήσουμε να εφαρμόζουμε τη μέθοδο του Gauss, θα πρέπει να ελέγχουμε αν υπάρχουν οι παραπάνω δυσλειτουργίες.
- Το πρόβλημα επιλύεται με αντιμετάθεση της γραμμής, της οποίας το οδηγό στοιχείο είναι πολύ μικρό ή μηδέν, με μία άλλη γραμμή που δεν δημιουργεί τέτοια προβλήματα.

Αλγόριθμος Gauss με οδήγηση

- Θα ήταν ιδανικό, όλα τα στοιχεία κάτω από το οδηγό στοιχείο, να έχουν τιμές, μικρότερες κατ' απόλυτο τιμή από αυτήν του οδηγού στοιχείου.
- Για το λόγο αυτό ελέγχουμε την 1η στήλη του επαυξημένου πίνακα, ώστε να βρούμε το μεγαλύτερο κατ' απόλυτο τιμή στοιχείο και αντιμεταθέτουμε την 1η γραμμή με τη γραμμή που περιέχει το συγκεκριμένο στοιχείο.
- Στη συνέχεια μεταφερόμαστε στη 2η στήλη και ελέγχουμε όλα τα στοιχεία κάτω του οδηγού στοιχείου, ώστε να εντοπίσουμε το μεγαλύτερο κατ' απόλυτο τιμή.
- Τότε αντιμεταθέτουμε όλη τη 2η γραμμή, με τη γραμμή που περιέχει το συγκεκριμένο στοιχείο και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο για να ελέγξουμε το 3ο, 4ο,…, νιοστό οδηγό στοιχείο.
- Το επιπλέον υπολογιστικό κόστος σε πράξεις είναι της τάξης n^2 και συνεπώς μικρό σε σχέση με το συνολικό κόστος της τριγωνοποίησης.

Gauss με οδήγηση

Παράδειγμα 2 Να επιλυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 &= 1 \\ -5x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= -3 \\ -x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= 2 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned} .$$

Λύση Επειδή $\max\{|a_{i,1}|: i = 1,\ldots,4\} = 5$, αντιμεταθέτουμε την $1^η$ γραμμή με την $2^η$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} -5x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= -3 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 &= 1 \\ -x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= 2 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned} .$$

$$
\begin{aligned}
-5x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= -3 \\
3x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 &= 1 \\
-x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= 2 \\
-2x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 0
\end{aligned}
.
$$

Επειδή $\max\{|a_{i,2}|:\ i = 2,...,4\} = 6$, αντιμεταθέτουμε την 3^{η} γραμμή με την 2^{η} και έχουμε:

$$
\begin{aligned}
-5x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= -3 \\
-x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= 2 \\
3x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 &= 1 \\
-2x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 0
\end{aligned}
.
$$

Επειδή $\max\{|a_{i,3}|:\ i = 3,...,4\} = 4$, το σύστημα παραμένει αναλλοίωτο. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο, στη συνέχεια λύνουμε το σύστημα με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss όπως παραπάνω και βρίσκουμε: $x_1 = 21/10$, $x_2 = 152/15$, $x_3 = 187/30$, $x_4 = 19/2$. □

Υπολογισμός ορίζουσας

Εφαρμογή 1 (υπολογισμός ορίζουσας) Να υπολογισθεί η ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Λύση Είναι γνωστό ότι η ορίζουσα ενός τριγωνικού πίνακα ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου. Μετασχηματίζοντας τον πίνακα A σε άνω τριγωνικό με τη μέθοδο Gauss (βλέπε παράδειγμα 1) προκύπτει ότι

$$Det(A) = Det\begin{pmatrix} \boxed{9} & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{5/3} & 20/9 \\ 0 & 0 & \boxed{-1/3} \end{pmatrix} = 9\ \frac{5}{3}\ \left(-\frac{1}{3}\right) = -5. \quad \square$$

Μεθοδος Gauss-Jordan

Βήμα 1^o : ορίζουμε τον ***επαυξημένο πίνακα*** των συντελεστών και σταθερών όρων, διάστασης $n\times(n+1)$:

$$A_{\varepsilon\pi}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & | & b_n \end{pmatrix}.$$

Βήμα 2^o: Ακολουθούμε τη διαδικασία της μεθόδου Gauss, οπότε μετά το πέρας του βήματος αυτού ο νέος επαυξημένος πίνακας θα έχει τη μορφή:

$$A_{\varepsilon\pi}(1)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & | & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & | & b_n^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Μεθοδος Gauss-Jordan

Βήμα 3ο: Συνεχίζουμε τη διαδικασία ξεκινώντας τώρα με *οδηγό στοιχείο το 2^o στοιχείο της κυρίας διαγωνίου του πίνακα* $A_{\varepsilon\pi}(1)$, δηλαδή το $a_{22}^{(2)}$, και εκτελούμε μία πράξη μεταξύ της $2^{ης}$ γραμμής και κάθε μίας από τις ***υπόλοιπες γραμμές, έτσι ώστε όλα τα στοιχεία εκτός από το οδηγό στοιχείο να μηδενίζονται***. Μετά το πέρας του βήματος αυτού ο νέος επαυξημένος πίνακας θα έχει τη μορφή:

$$A_{\varepsilon\pi}(2)=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} & | & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & | & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & | & b_3^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} & | & b_n^{(3)} \end{pmatrix}.$$

Μεθοδος Gauss-Jordan

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο μετά από n βήματα, καταλήγουμε σε έναν επαυξημένο «***διαγώνιο***» πίνακα της μορφής:

$$A_{\varepsilon\pi}(n)=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & | & b_1^{(n)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 & | & b_2^{(n)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & 0 & | & b_3^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} & | & b_n^{(n)} \end{pmatrix},$$

ο οποίος επιτρέπει να υπολογισθούν οι λύσεις απευθείας από τις σχέσεις:

$$a_{ii}^{(i)}\, x_i \;=\; b_i^{(n)}.$$

Παραδείγματα

Παράδειγμα 3 Να επιλυθεί με τη μέθοδο Gauss-Jordan το σύστημα:

$$\begin{aligned} 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 8\,. \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Λύση Ορίζουμε τον επαυξημένο πίνακα:

$$A_{\varepsilon\pi} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 4 & | & 7 \\ 4 & 3 & 4 & | & 8 \\ 1 & 1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}.$$

1^{o} βήμα:

$$A_{\varepsilon\pi}(1)=\begin{pmatrix} \boxed{9} & 3 & 4 & | & 7 \\ 0 & 5/3 & 20/9 & | & 44/9 \\ 0 & 2/3 & 5/9 & | & 20/9 \end{pmatrix},$$

(βλέπε παράδειγμα 1).

2^{o} βήμα:

$$A_{\varepsilon\pi}(2)=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & | & -9/5 \\ 0 & \boxed{5/3} & 20/9 & | & 44/9 \\ 0 & 0 & -1/3 & | & 12/45 \end{pmatrix},$$

όπου η 2^{η} γραμμή του πίνακα $A_{\varepsilon\pi}(2)$ παραμένει αναλλοίωτη και

$$(1^{\eta} \text{ γραμμή του } A_{\varepsilon\pi}(2)) = -\frac{9}{5}\ (2^{\eta} \text{ γραμμή του } A_{\varepsilon\pi}(1)) + (1^{\eta} \text{ γραμμή του } A_{\varepsilon\pi}(1))$$

$$(3^{\eta} \text{ γραμμή του } A_{\varepsilon\pi}(2)) = -\frac{2}{5}\ (2^{\eta} \text{ γραμμή του } A_{\varepsilon\pi}(1)) + (3^{\eta} \text{ γραμμή του } A_{\varepsilon\pi}(1)).$$

3ο βήμα:

$$A_{\varepsilon\pi}(2)=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & | & -9/5 \\ 0 & 5/3 & 0 & | & 60/9 \\ 0 & 0 & -1/3 & | & 12/45 \end{pmatrix},$$

όπου η $3^{η}$ γραμμή του πίνακα $A_{\varepsilon\pi}(2)$ παραμένει αναλλοίωτη και

($2^{η}$ γραμμή του $A_{\varepsilon\pi}(2)$*)* $= \dfrac{20}{3}$ *($3^{η}$ γραμμή του* $A_{\varepsilon\pi}(1)$*) + ($2^{η}$ γραμμή του* $A_{\varepsilon\pi}(1)$*)* .

Στη συνέχεια υπολογίζουμε απευθείας:

$$-1/3\ x_3 = 12/45 \Rightarrow x_3 = -4/5$$

$$5/3\ x_2 = 60/9 \Rightarrow x_2 = 4$$

$$9\ x_1 = -9/5 \Rightarrow x_1 = -1/5. \quad \square$$

Υπολογισμός αντίστροφου πίνακα

Εφαρμογή 2 (υπολογισμός αντίστροφου πίνακα) Να υπολογισθεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Λύση Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα

$$A_{\varepsilon\pi} = \begin{pmatrix} A & | & I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

όπου I_3 είναι ο μοναδιαίος πίνακας 3×3. Με τη μέθοδο Gauss-Jordan μετασχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα μετά από 3 βήματα στη μορφή

Υπολογισμός αντίστροφου πίνακα

$$A_{\varepsilon\pi}(3) = \left(D_3 \quad | \quad B\right) = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & 0 & 0 & | & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & 0 & | & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & | & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

όπου D_3 είναι ένας διαγώνιος πίνακας διάστασης 3×3 . Τότε αν $A^{-1} = (c_{ij})_{i,j=1,\dots 3}$, έχουμε:

$$c_{ij} = \frac{b_{ij}}{a_{ii}^{(i)}} .$$

Υπολογισμός αντίστροφου πίνακα

Πράγματι έχουμε:

$$A_{\varepsilon\pi}(1)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/3 & 20/9 & -4/9 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 5/9 & -1/9 & 0 & 1 \end{array}\right), \qquad \textbf{(1}^{\textbf{o}}\textbf{ βήμα)}$$

$$A_{\varepsilon\pi}(2)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & 0 & 9/5 & -9/5 & 0 \\ 0 & 5/3 & 20/9 & -4/9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1/15 & -2/5 & 1 \end{array}\right), \qquad (2^{\text{o}}\textbf{ βήμα})$$

Υπολογισμός αντίστροφου πίνακα

$$A_{\varepsilon\pi}(3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & 0 & 9/5 & -9/5 & 0 \\ 0 & 5/3 & 0 & 0 & -5/3 & 20/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1/15 & -2/5 & 1 \end{array}\right) \quad (3^{o}\ \textbf{βήμα}).$$

Διαιρούμε όλα τα στοιχεία της *i*- γραμμής του πίνακα εκ δεξιών της διακεκκομένης γραμμής με το μη μηδενικό στοιχείο της *i*- γραμμής του διαγώνιου πίνακα και παίρνουμε:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1/5 & 6/5 & -3 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Δείκτης κατάστασης πίνακα

Μία κατηγορία συστημάτων που παρουσιάζουν ενδιαφέρον είναι τα λεγόμενα ασταθή ή κακώς ορισμένα. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 3.999x_2 &= 4.001 \end{aligned},$$

το οποίο έχει μοναδική λύση $x_1 = 4$, $x_2 = -1$. Το ελάχιστα διαφορετικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 4.001x_2 &= 4.001 \end{aligned}$$

έχει την τελείως διαφορετική μοναδική λύση $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Τέτοια

Ορισμός 3.2.1 Εστω X ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το σύνολο $\boldsymbol{R}$ ή $\boldsymbol{C}$ των πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών αντίστοιχα. Εστω $K = \boldsymbol{R}$ ή $\boldsymbol{C}$. Μία απεικόνιση:

$$\|.\| : X \to \boldsymbol{R}^+, x \to \|x\|$$

καλείται *νόρμα*, αν ισχύουν:

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ για κάθε $\lambda \in K$,
- Για κάθε $x, y \in X$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Από τα παραπάνω, φαίνεται ότι η νόρμα παίζει το ρόλο της απόλυτης τιμής σε διανυσματικούς χώρους.

Παραδείγματα: Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο $\boldsymbol{R}^n = \{x: x = (x_1, \ldots, x_n)\}$, τότε οι ακόλουθες είναι νόρμες του $\boldsymbol{R}^n$:

1. $\|x\|_\infty = \max\{|x_i|,\ i = 1, \ldots, N\}$ *(νόρμα μεγίστου).*
2. $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ *(l_1 νόρμα).*
3. $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$ *(l_2 νόρμα ή ευκλείδια νόρμα).*

Εστω $\boldsymbol{R}^{n,n}$ είναι ο διανυσματικός χώρος των πραγματικών πινάκων διάστασης $n \times n$, τότε μία απεικόνιση $\|.\| : \boldsymbol{R}^{n,n} \to \boldsymbol{R}^+$ που πληροί τα αξιώματα του ορισμού 3.2.1 και επιπλέον $\|A\,B\| \le \|A\|\,\|B\|$ για κάθε $A, B \in \boldsymbol{R}^{n,n}$, καλείται *νόρμα πινάκων.*

Ορισμός 3.2.2 Εστω $\|.\|$ μία νόρμα στο χώρο $\boldsymbol{R}^n$, η απεικόνιση:

$$\|.\| \,:\, \boldsymbol{R}^{n,n} \to \boldsymbol{R}^+, \|A\| = \boldsymbol{sup}_{x \in \boldsymbol{R}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

καλείται *φυσική νόρμα πινάκων*.

1. Θεωρούμε στο χώρο $\boldsymbol{R}^n$ τη νόρμα μεγίστου $\|x\|_\infty$, τότε η παραγόμενη από την $\|x\|_\infty$ φυσική νόρμα στον $\boldsymbol{R}^{n,n}$ είναι η εξής:

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | .$$

2. Θεωρούμε στο χώρο $\boldsymbol{R}^n$ την l_1-νόρμα $\|x\|_1$, τότε η παραγόμενη από την $\|x\|_1$ φυσική νόρμα στον $\boldsymbol{R}^{n,n}$ είναι η εξής:

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} | a_{ij} | .$$

3. Θεωρούμε στο χώρο $\boldsymbol{R}^n$ την l_2-νόρμα $\|x\|_2$ και έστω *ρ(A)* είναι η *φασματική ακτίνα του πίνακα A*, που ορίζεται ως το μέγιστο των απολύτων τιμών των ιδιοτιμών του πίνακα A, τότε η παραγόμενη από την $\|x\|_2$ φυσική νόρμα στον $\boldsymbol{R}^{n,n}$ είναι η εξής:

$$\|A\|_2 = \left(\rho\left(A^T A\right)\right)^{1/2},$$

όπου A^T είναι ο ανάστροφος του πίνακα A.

Επιστρέφουμε τώρα στο πρόβλημα της κατάστασης των γραμμικών συστημάτων, δηλαδή στη μελέτη της ευαισθησίας των λύσεων του συστήματος

$$A\,x \;=\; b$$

σε διαταραχές των δεδομένων $A \in \boldsymbol{R}^{n,n}$ και $b \in \boldsymbol{R}^{n}$. Ας αφήσουμε προς στιγμήν τον πίνακα A σταθερό και ας μεταβάλλουμε το διάνυσμα στήλη b, τότε αν $x + \Delta x$ είναι η λύση του διαταραγμένου συστήματος, έχουμε:

$$A\,\left(x + \Delta x\right) \;=\; b + \Delta b \Rightarrow A\,\Delta x \;=\; \Delta b \Rightarrow \Delta x = A^{-1}\,\Delta b\,,$$

άρα:

$$\left\|\Delta x\right\| = \left\|A^{-1}\,\Delta b\right\| \;\leq\; \left\|A^{-1}\right\|\,\left\|\Delta b\right\|$$

και εφόσον

$$\|b\| = \|A\,x\| \le \|A\|\,\|x\| \Rightarrow \frac{1}{\|x\|} \le \frac{\|A\|}{\|b\|},$$

από το συνδυασμό των παραπάνω ανισοτήτων προκύπτει ότι:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \|A\|\,\|A^{-1}\|\,\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \Rightarrow \rho_{\Delta x} \le \|A\|\,\|A^{-1}\|\,\rho_{\Delta b}$$

όπου $\rho_{\Delta x}$, $\rho_{\Delta b}$ τα αντίστοιχα σχετικά σφάλματα. Η ποσότητα

$$\kappa(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|$$

είναι ένας συντελεστής ευαισθησίας που προσδιορίζει τη μέγιστη δυνατή μεταβολή του σχετικού σφάλματος των αποτελεσμάτων σε σχέση με το σχετικό σφάλμα δεδομένων και καλείται ***<u>δείκτης κατάστασης πίνακα Α</u>***, <u>είναι δε πάντα μεγαλύτερος της μονάδας</u>. Αν $\kappa(A) >> 1$, τότε λέμε ότι το πρόβλημα είναι σε κακή κατάσταση. Προφανώς ο δείκτης κατάστασης ορίζεται μόνον για αντιστρέψιμους πίνακες. Αν ο πίνακας A τείνει να γίνει μη αντιστρέψιμος, τότε ο δείκτης κατάστασης αυτού τείνει στο άπειρο. Ο δείκτης κατάστασης $\kappa(A)$ καθορίζει επίσης και το πώς διαταραχές του πίνακα A επηρεάζουν τη λύση.

Θεώρημα 3.2.1

(i) αν $(A+\Delta A)\,(x+\Delta x) = b$ και αν $\left\|A^{-1}\right\|\,\left\|\Delta A\right\|<1$, τότε ο πίνακας $A+\Delta A$ είναι αντιστρέψιμος και ισχύει:

$$\rho_{\Delta x} \leq \frac{\kappa(A)}{1-\left\|A^{-1}\right\|\,\left\|\Delta A\right\|}\,\rho_{\Delta A}\,.$$

(ii) αν $(A+\Delta A)\,(x+\Delta x) = b+\Delta b$ και αν $\left\|A^{-1}\right\|\,\left\|\Delta A\right\|<1$, τότε ο πίνακας $A+\Delta A$ είναι αντιστρέψιμος και ισχύει:

$$\rho_{\Delta x} \leq \frac{\kappa(A)}{1-\left\|A^{-1}\right\|\,\left\|\Delta A\right\|}\,\left(\rho_{\Delta A}+\rho_{\Delta b}\right).$$

Μέθοδος Jacobi

Θεωρούμε το σύστημα (3.1) και λύνουμε την i-εξίσωση ως προς τον άγνωστο x_i, οπότε:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right),\ i = 1, \ldots, n\,.$$

Για τυχαία δεδομένη αρχική τιμή $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$, η αναδρομική ακολουθία για τον υπολογισμό της λύσης του συστήματος είναι η ακόλουθη:

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(m)}\right),\ i, = 1, \ldots, n,\ m = 1, \ldots\,. \qquad (3.2)$$

Μέθοδος Gauss-Seidel

Θεωρούμε το σύστημα (3.1) και λύνουμε την i-εξίσωση ως προς τον άγνωστο x_i, οπότε:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right),\ i = 1,\ldots,n\,.$$

Για τυχαία δεδομένη αρχική τιμή $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$, η αναδρομική ακολουθία για τον υπολογισμό της λύσης του συστήματος είναι η ακόλουθη:

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(m)}\right),\ i, = 1,\ldots,n,\ m = 1,\ldots\,. \qquad (3.3)$$

Η διαφορά από τη μέθοδο Jacobi είναι, ότι για τον υπολογισμό της συνιστώσας $x_i^{(m+1)}$ χρησιμοποιούμε τις ήδη υπολογισθείσες τιμές $x_1^{(m+1)}, x_2^{(m+1)}, \ldots, x_{i-1}^{(m+1)}$ της ίδιας γενιάς.

Θεώρημα σύγκλισης

Θεώρημα 3.3.1 Εστω ότι ο πίνακας A των συντελεστών των αγνώστων ενός γραμμικού συστήματος έχει *κυριαρχική διαγώνιο*, δηλαδή:

$$|a_{ii}| \ \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \ i, j = 1, \ldots, n \, ,$$

τότε οι μέθοδοι Jacobi και Gauss-Seidel συγκλίνουν.

Παράδειγμα 4 Να επιλυθεί με τη μέθοδο Jacobi το σύστημα:

$$\begin{aligned} 8x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \\ x_1 + 8x_2 + x_3 &= 10, \\ x_1 + x_2 + 8x_3 &= 10 \end{aligned}$$

με ακρίβεια 2 δεκαδικών ψηφίων.

Λύση Παρατηρούμε ότι ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων έχει κυριαρχική διαγώνιο. Πράγματι:

$$8 = |a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| = 2,$$

άρα η μέθοδος Jacobi συγκλίνει για κάθε αρχική τιμή της λύσης. Θεωρούμε αυθαίρετα ότι $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (0,0,0)$, τότε υπολογίζουμε μία νέα προσέγγιση της λύσης $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})$ από την σχέση (3.2) για $m = 0$:

$$x_1^{(1)} = \frac{10}{8} - \frac{1}{8}x_2^{(0)} - \frac{1}{8}x_3^{(0)} = 1.25$$

$$x_2^{(1)} = \frac{10}{8} - \frac{1}{8}x_1^{(0)} - \frac{1}{8}x_2^{(0)} = 1.25\,,$$

$$x_3^{(1)} = \frac{10}{8} - \frac{1}{8}x_1^{(0)} - \frac{1}{8}x_2^{(0)} = 1.25$$

άρα: $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}) = (1.25, 1.25, 1.25)$. Συνεχίζουμε για $m = 1$ και παίρνουμε:

$$x_1^{(2)} = \frac{10}{8} - \frac{1}{8}x_2^{(1)} - \frac{1}{8}x_3^{(1)} = 0.9375$$

$$x_2^{(2)} = \frac{10}{8} - \frac{1}{8}x_1^{(1)} - \frac{1}{8}x_2^{(1)} = 0.9375\,,$$

$$x_3^{(2)} = \frac{10}{8} - \frac{1}{8}x_1^{(1)} - \frac{1}{8}x_2^{(1)} = 0.9375$$

άρα: $x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}) = (0.9375, 0.9375, 0.9375)$. Συνεχίζουμε για $m = 2$ και παίρνουμε

$$x_1^{(3)} = \frac{10}{8} - \frac{1}{8}x_2^{(2)} - \frac{1}{8}x_3^{(2)} = 1.015625$$

$$x_2^{(3)} = \frac{10}{8} - \frac{1}{8}x_1^{(2)} - \frac{1}{8}x_2^{(2)} = 1.015625,$$

$$x_3^{(3)} = \frac{10}{8} - \frac{1}{8}x_1^{(2)} - \frac{1}{8}x_2^{(2)} = 1.015625$$

άρα: $x^{(3)} = (x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}) = (1.015625, 1.015625, 1.015625)$. Συνεχίζοντας υπολογίζουμε ότι στην 4η επανάληψη έχουμε ότι

$$x^{(4)} = (x_1^{(4)}, x_2^{(4)}, x_3^{(4)}) = (0.99609375, 0.99609375, 0.99609375),$$

ενώ στην 5η επανάληψη έχουμε ότι

$$x^{(5)} = (x_1^{(5)}, x_2^{(5)}, x_3^{(5)}) = (1.0009766, 1.0009766, 1.0009766).$$

Σταματάμε στην 5η επανάληψη διότι

$$\| x^{(5)} - x^{(4)} \|_\infty = | 1.0009766 - 0.99609375 | \leq 0.005. \quad \square$$

Παράδειγμα 5 Να επιλυθεί με τη μέθοδο Gauss-Seidel το σύστημα:

$$
\begin{aligned}
8x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \\
x_1 + 8x_2 + x_3 &= 10\,, \\
x_1 + x_2 + 8x_3 &= 10
\end{aligned}
$$

με ακρίβεια 2 δεκαδικών ψηφίων μεταξύ διαδοχικών λύσεων.

Λύση Παρατηρούμε ότι ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων έχει κυριαρχική διαγώνιο. Πράγματι:

$$8 \;=\; |a_{ii}| \;\geq\; \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \;=\; 2\,,$$

άρα η μέθοδος Gauss-Seidel συγκλίνει για κάθε αρχική τιμή της λύσης. Θεωρούμε αυθαίρετα ότι $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (0,0,0)$, τότε υπολογίζουμε μία νέα προσέγγιση της λύσης $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})$ από την σχέση (3.3) για $m = 0$:

$$x_1^{(1)} = \frac{10}{8} - \frac{1}{8}x_2^{(0)} - \frac{1}{8}x_3^{(0)} = 1.25$$

$$x_2^{(1)} = \frac{10}{8} - \frac{1}{8}x_1^{(1)} - \frac{1}{8}x_2^{(0)} = 1.09375 \ ,$$

$$x_3^{(1)} = \frac{10}{8} - \frac{1}{8}x_1^{(1)} - \frac{1}{8}x_2^{(1)} = 0.957031$$

άρα: $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}) = (1.25, 1.09375, 0.957031)$. Συνεχίζουμε για m = *1* και παίρνουμε:

$$x_1^{(2)} = \frac{10}{8} - \frac{1}{8}x_2^{(1)} - \frac{1}{8}x_3^{(1)} = 0.993652$$

$$x_2^{(2)} = \frac{10}{8} - \frac{1}{8}x_1^{(2)} - \frac{1}{8}x_2^{(1)} = 1.0061646 \ ,$$

$$x_3^{(2)} = \frac{10}{8} - \frac{1}{8}x_1^{(2)} - \frac{1}{8}x_2^{(2)} = 1.0000229$$

άρα: $x^{(2)}=(x_1^{(2)},x_2^{(2)},x_3^{(2)})=(0.993652, 1.0061646, 1.0000229)$. Συνεχίζουμε για $m = 2$ και παίρνουμε

$$x_1^{(3)}=\frac{10}{8}-\frac{1}{8}x_2^{(2)}-\frac{1}{8}x_3^{(2)}=0.9992266$$

$$x_2^{(3)}=\frac{10}{8}-\frac{1}{8}x_1^{(3)}-\frac{1}{8}x_2^{(2)}=1.0000938\ ,$$

$$x_3^{(3)}=\frac{10}{8}-\frac{1}{8}x_1^{(3)}-\frac{1}{8}x_2^{(3)}=1.0000849$$

άρα: $x^{(3)}=(x_1^{(3)},x_2^{(3)},x_3^{(3)})=(0.9992266, 1.0000938, 1.0000849)$. Συνεχίζοντ ας, υπολογίζουμε ότι στην 4^{η} επανάληψη έχουμε ότι

$$x^{(4)}=(x_1^{(4)},x_2^{(4)},x_3^{(4)})=(0.999978, 0.99999218, 1.0000037),$$

όπου και σταματάμε διότι:

$$\| x^{(4)}-x^{(3)}\|_{\infty}\leq 0.005\ . \quad \square$$