# Κατευθυνόμενη Παράγωγος

Οι μερικές παράγωγοι μιας συνάρτησης $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ σε ένα σημείο $(x_0, y_0) \in X$, όπου $X$ ανοικτό σύνολο, ορίζονται ως εξής

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + h(1,0)) - f(x_0, y_0)}{h},$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + h(0,1)) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{1}$$

και εκφράζουν το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης $f(x, y)$ στην περιοχή του σημείου $(x_0, y_0)$ κατά τις κατευθύνσεις των αξόνων $x$ και $y$.

Για τον προσδιορισμό των μεταβολών της συνάρτησης $f$ κατά την κατεύθυνση ενός αυθαίρετου διανύσματος $\mathbf{u}$, από τους ορισμούς των μερικών παραγώγων, οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό.

**Ορισμός. (Κατευθυνόμενη Παράγωγος)**

Έστω μία πραγματική συνάρτηση $f : X \subseteq \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ δύο μεταβλητών με πεδίο ορισμού το ανοικτό υποσύνολο $X$ του $\mathrm{R}^2$, $(x_0,y_0) \in X$ και $\mathbf{u} = (u_1,u_2) \in \mathrm{R}^2$ με $||\mathbf{u}|| = 1$. Τότε, η κατευθυνόμενη παράγωγος της $f$ στο σημείο $(x_0,y_0)$ ως προς την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ ορίζεται από το όριο

$$f_{\mathbf{u}}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + h(u_1, u_2)) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{2}$$

και εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της $f$ στο σημείο $(x_0,y_0)$ ως προς την κατεύθυνση $\mathbf{u}$, δηλαδή κατά μήκος της ευθείας του $X$ που περνάει από το $(x_0,y_0)$ και είναι παράλληλη στην $\mathbf{u}$.

**Παρατήρηση.** Η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\mathbf{u}}$ ανάγεται με τις επιλογές $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 = (1,0)$ και $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2 = (0,1)$ στις μερικές παραγώγους $f_x$ και $f_y$, δηλαδή ισχύει

$$f_{\mathbf{e}_1}(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0) \text{ και } f_{\mathbf{e}_2}(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0).$$

**Παράδειγμα.** Βρείτε την κατευθυνόμενη παράγωγο της συνάρτησης

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

στο σημείο $\mathbf{p} = (0,0)$ ως προς την κατεύθυνση $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$. $\|\vec{u}\| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$

**Λύση.** Από τον τύπο (2), ευρίσκουμε

$$f_{\mathbf{u}}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left((0,0) + h\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\right) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(\frac{h}{\sqrt{2}}, \frac{h}{\sqrt{2}}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\sin\left(\frac{h^2}{2}\right)}{\frac{h}{\sqrt{2}}}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin\left(\frac{h^2}{2}\right)}{\frac{h^2}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{h \to 0} \frac{\sin\left(\frac{h^2}{2}\right)}{\frac{h^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



Ο Ορισμός της κατευθυνόμενης παραγώγου επεκτείνεται και για συναρτήσεις $f: X \subseteq \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ $n$ μεταβλητών.

Στη συνέχεια, αναφέρουμε τον ορισμό του σημαντικού διανύσματος της κλίσης πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών.

**Ορισμός. (Κλίση πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών)**

Έστω $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση $n$ μεταβλητών με πεδίο ορισμού ένα *ανοικτό* υποσύνολο $X$ του $\mathbb{R}^n$. Όταν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της $f$: $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n}$ στο $\mathbf{x} \in X$, τότε ορίζουμε ως κλίση το διάνυσμα

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

το οποίο αναφέρεται επίσης και ως ανάδελτα (gradient).

Για συναρτήσεις $C^1$, ο υπολογισμός της κατευθυνόμενης παραγώγου επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της κλίσης από την εφαρμογή του ακόλουθου θεωρήματος.

**Θεώρημα.** Έστω μία πραγματική συνάρτηση $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $n$ μεταβλητών, η οποία είναι $C^1$ στο $\mathbf{p} \in X$. Τότε, υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\mathbf{u}}(\mathbf{p})$ στο σημείο $\mathbf{p}$ ως προς την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ και ισχύει

$$f_{\mathbf{u}}(\mathbf{p}) = \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}. \tag{4}$$

**Παράδειγμα.** Βρείτε την κατευθυνόμενη παράγωγο της συνάρτησης

$$f(x,y,z) = x^2y^2 + z(x + y)$$

στο σημείο $\mathbf{p} = (1, -1, 2)$ ως προς την κατεύθυνση $\mathbf{u} = \frac{1}{5}(0, 3, 4)$.

$f_x(x,y,z) = 2xy^2 + z$

$f_y(x,y,z) = 2yx^2 + z$

$f_z(x,y,z) = x + y$

**Λύση.** Από τον τύπο (4), ευρίσκουμε

$$f_{\mathbf{u}}(\mathbf{p}) = \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{u} = \nabla f(1, -1, 2) \cdot \frac{1}{5}(0, 3, 4) = (4, 0, 0) \cdot \frac{1}{5}(0, 3, 4) = 0.$$

4

$\nabla f(x,y,z) = (2xy^2 + z, 2yx^2 + z, x + y)$

**Θεώρημα**. Έστω μία πραγματική συνάρτηση $f: X \subseteq \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ $n$ μεταβλητών, η οποία είναι $C^1$ στο $\mathbf{p} \in X$ με $\nabla f(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$ και $\mathbf{u}$ κατεύθυνση του $\mathrm{R}^n$ (δηλαδή $||\mathbf{u}|| = 1$). Τότε, η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\mathbf{u}}(\mathbf{p})$ λαμβάνει (ως συνάρτηση του $\mathbf{u}$) μέγιστη τιμή ίση με $||\nabla f(\mathbf{p})||$ όταν $\nabla f(\mathbf{p})$ και $\mathbf{u}$ είναι παράλληλα και ομόρροπα και ελάχιστη τιμή ίση με $-||\nabla f(\mathbf{p})||$ όταν $\nabla f(\mathbf{p})$ και $\mathbf{u}$ είναι παράλληλα και αντίρροπα. Δηλαδή, η κατεύθυνση του $\nabla f(\mathbf{p})$ είναι εκείνη του μέγιστου ρυθμού αύξησης της $f$ στο $\mathbf{p}$ και η κατεύθυνση του $-\nabla f(\mathbf{p})$ είναι εκείνη του μέγιστου ρυθμού μείωσης της $f$ στο $\mathbf{p}$.

68

**Απόδειξη**. Από τον γεωμετρικό ορισμό του εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων, χρησιμοποιώντας τον τύπο (4), λαμβάνουμε

$$f_{\mathbf{u}}(\mathbf{p}) = ||\nabla f(\mathbf{p})||\,||\mathbf{u}||\cos\theta = ||\nabla f(\mathbf{p})||\cos\theta,$$

όπου $\theta \in [0,\pi]$ η γωνία των $\nabla f(\mathbf{p})$ και $\mathbf{u}$, από την οποία προκύπτουν

$$\max(f_{\mathbf{u}}(\mathbf{p})) = ||\nabla f(\mathbf{p})|| \text{ όταν } \theta = 0, \min(f_{\mathbf{u}}(\mathbf{p})) =$$

$$-||\nabla f(\mathbf{p})|| \text{ όταν } \theta = \pi.$$

**Παράδειγμα**. Η θερμοκρασία των σημείων $(x,y,z)$ του χώρου $\mathrm{R}^3$ δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(x,y,z) = x^2 - y - 2z.$$

Ένα πτηνό βρίσκεται στο σημείο $\mathbf{p} = (1,2,1)$. Βρείτε την **κατεύθυνση** που πρέπει να πετάξει ώστε να ζεσταθεί περισσότερο και ταχύτερα καθώς και το **μέγιστο ρυθμό αύξησης** της θερμοκρασίας.

**Λύση**. Οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της συνάρτησης $f$

$$f_x = 2x, \qquad f_y = -1, \qquad f_z = -2$$

είναι συνεχείς συναρτήσεις και άρα η $f$ είναι $C^1$ συνάρτηση στο $R^3$.

Εξάλλου, ισχύει

$$\nabla f(\mathbf{p}) = \nabla f(1,2,1) = (2,-1,-2)$$

με $||\nabla f(1,2,1)|| = 3$.

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα , η ζητούμενη κατεύθυνση είναι εκείνη του $\nabla f(1,2,1)$, δηλαδή

$$u = \frac{\nabla f(1,2,1)}{||\nabla f(1,2,1)||} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right),$$

όπου διαιρέσαμε με τη $||\nabla f(1,2,1)||$ ώστε το $\mathbf{u}$ να είναι μοναδιαίο διάνυσμα. Ο ζητούμενος τοπικός μέγιστος ρυθμός αύξησης της θερμοκρασίας είναι

$$||\nabla f(1,2,1)|| = 3.$$