□

Παράδειγμα 4.1.3 Λύστε το Π.Α.Τ.

$$y'' - y = x^2,\ \ y(0) = 3,\ \ y'(0) = 3.$$

Λύση. Επαληθεύουμε αρχικά ότι οι συναρτήσεις $y_1(x) = e^x$ και $y_2(x) = e^{-x}$ είναι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε. και στη συνέχεια υπολογίζουμε την ορίζουσα Wronksi $W = -2 \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, και έτσι συμπεραίνουμε ότι οι y_1 και y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Εξάλλου, διαπιστώνουμε εύκολα ότι η συνάρτηση $y_\mu(x) = -2 - x^2$ είναι μία μερική λύση της δοθείσας μη ομογενούς Δ.Ε. Άρα, από την (4.1.10), η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 2 - x^2.$$

Οι σταθερές c_1 και c_2 ικανοποιούν το σύστημα

$$\begin{aligned} y(0) = c_1 + c_2 - 2 = 3 \\ y'(0) = c_1 - c_2 = 3, \end{aligned}$$

το οποίο προκύπτει από τις αρχικές συνθήκες και το οποίο έχει τη λύση $c_1 = 4$ και $c_2 = 1$. Έτσι, η λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$y(x) = 4e^x + e^{-x} - 2 - x^2.$$

△

4.2 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

Ο προσδιορισμός σε εκπεφρασμένη μορφή των λύσεων των γραμμικών Δ.Ε. δεύτερης τάξης με συντελεστές συναρτήσεις δεν είναι πάντα δυνατός σε αντίθεση με τις γραμμικές Δ.Ε. πρώτης τάξης των οποίων οι λύσεις εκφράζονται ως ολοκληρώματα των συναρτήσεων των συντελεστών (βλ. Παρ. 2.3). Όμως, όταν οι συντελεστές των y, y', y'' μιας ομογενούς Δ.Ε. δεύτερης τάξης είναι σταθεροί τότε η γενική λύση της Δ.Ε. προσδιορίζεται με την ακόλουθη διαδικασία, η οποία βασίζεται στον αλγεβρικό υπολογισμό των ριζών ενός συγκεκριμένου πολυωνύμου.

Μια Δ.Ε. της μορφής

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{4.2.1}$$

όπου $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, λέγεται *ομογενής γραμμική Δ.Ε. δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές*.

Μία (προφανής) λύση της (4.2.1) είναι η $y = 0$. Επειδή η παράγωγος οποιασδήποτε τάξης της συνάρτησης $e^{\lambda x}$, όπου λ σταθερά, είναι ένα πολλαπλάσιο της $e^{\lambda x}$, αναμένουμε ότι η $e^{\lambda x}$ θα είναι λύση της (4.2.1) για συγκεκριμένη τιμή της σταθεράς λ. Έτσι, αναζητούμε λύσεις της μορφής $y(x) = e^{\lambda x}$ και αντικαθιστώντας στην (4.2.1), λαμβάνουμε

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + \alpha_1 \lambda e^{\lambda x} + \alpha_0 e^{\lambda x} = 0$$

ή

$$e^{\lambda x}[\lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0] = 0.$$

Οπότε, για να έχουμε λύση της μορφής $y(x) = e^{\lambda x}$, πρέπει το λ να είναι ρίζα στο $\mathbb{C}$ της αλγεβρικής εξίσωσης

$$\lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0, \tag{4.2.2}$$

η οποία λέγεται *χαρακτηριστική εξίσωση* της ομογενούς γραμμικής Δ.Ε. (4.2.1). Οι ρίζες της (4.2.2) καλούνται *χαρακτηριστικές ρίζες*, ενώ το πολυώνυμο δευτέρου βαθμού

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 \tag{4.2.3}$$

αναφέρεται ως το *χαρακτηριστικό πολυώνυμο* της (4.2.1).

Η γενική λύση της (4.2.1) ευρίσκεται με τη βοήθεια των χαρακτηριστικών ριζών των οποίων ο προσδιορισμός επιτυγχάνεται διακρίνοντας τις ακόλουθες τρεις γενικές περιπτώσεις.

Ι. Οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι πραγματικές και διακεκριμένες

Οι ρίζες λ_1, λ_2 της (4.2.2) είναι πραγματικές και διακεκριμένες τότε και μόνο τότε όταν

$$a_1^2 - 4a_0 > 0, \tag{4.2.4}$$

οπότε

$$\lambda_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} \quad \text{και} \quad \lambda_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}. \tag{4.2.5}$$

Επομένως, οι $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ και $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ είναι λύσεις της (4.2.1). Η ορίζουσα Wronski των y_1 και y_2

$$W(x) = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} \tag{4.2.6}$$

είναι διάφορη του μηδενός αφού $\lambda_1 \neq \lambda_2$, και άρα οι y_1 και y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1.4, η γενική λύση της (4.2.1) είναι

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \tag{4.2.7}$$

όπου c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Παράδειγμα 4.2.1 Λύστε τη Δ.Ε.

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

και οι ρίζες της

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = 1, 2.$$

Συνεπώς, η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

△

II. Η χαρακτηριστική ρίζα είναι διπλή

Σε αυτή την περίπτωση

$$a_1^2 - 4a_0 = 0, \tag{4.2.8}$$

οπότε η διπλή ρίζα $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda^*$ της (4.2.2) είναι

$$\lambda^* = -\frac{a_1}{2}. \tag{4.2.9}$$

Η $y_1 = e^{\lambda^* x}$ είναι λύση της (4.2.1). Για να βρούμε μία δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση, λαμβάνουμε υπόψη ότι για τη συνάρτηση $y_2 = xe^{\lambda^* x}$ (η οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητη από την y_1) ισχύει ότι

$$y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2 = e^{\lambda^* x}[p'(\lambda^*) + p(\lambda^*)x]. \tag{4.2.10}$$

Αφού η λ^* είναι ρίζα πολλαπλότητας 2 της (4.2.2), αυτό σημαίνει ότι $p(\lambda^*) = p'(\lambda^*) = 0$, και άρα η (4.2.10) συνεπάγεται ότι η y_2 είναι λύση της (4.2.1).

Έτσι, η γενική λύση της (4.2.1) είναι

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda^* x}. \tag{4.2.11}$$

Παράδειγμα 4.2.2 Λύστε τη Δ.Ε.

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0,$$

η οποία έχει τη διπλή ρίζα

$$\lambda^* = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1,$$

και άρα η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y = (c_1 + c_2 x)e^x.$$

$\triangle$

III. Οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι συζυγείς μιγαδικές

Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί σε

$$a_1^2 - 4a_0 < 0, \tag{4.2.12}$$

οπότε οι συζυγείς μιγαδικές ρίζες της (4.2.2) συμβολίζονται με

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \text{και} \quad \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - i\beta.$$

Σύμφωνα με την περίπτωση I ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), οι λύσεις της (4.2.1) είναι $e^{(\alpha+i\beta)x}$ και $e^{(\alpha-i\beta)x}$ και η γενική της λύση είναι

$$y = d_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + d_2 e^{(\alpha-i\beta)x}. \tag{4.2.13}$$

Εφαρμόζοντας το γνωστό τύπο του Euler, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} e^{\alpha x}e^{i\beta x} &= e^{\alpha x}[\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)] = e^{\alpha x}\cos(\beta x) + ie^{\alpha x}\sin(\beta x), \\ e^{\alpha x}e^{-i\beta x} &= e^{\alpha x}[\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)] = e^{\alpha x}\cos(\beta x) - ie^{\alpha x}\sin(\beta x), \end{aligned}$$

και άρα η γενική λύση της (4.2.1) είναι

$$y = c_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x). \tag{4.2.14}$$

Παράδειγμα 4.2.3 Λύστε τη Δ.Ε.

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

έχει τις συζυγείς μιγαδικές ρίζες

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i,$$

και άρα η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y = e^x(c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x)).$$

$\triangle$

Παράδειγμα 4.2.4 Λύστε τη Δ.Ε.

$$y'' + ky = 0, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση

$$\lambda^2 + k = 0$$

έχει τις ρίζες

$$\lambda_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{-4k}}{2} = \pm\sqrt{-k}\,.$$

Διακρίνουμε τρείς περιπτώσεις

(i) $k > 0$, τότε έχουμε μιγαδικές ρίζες

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{k}\,i,$$

και η γενική λύση της Δ.Ε. δίνεται από

$$y = c_1\cos(\sqrt{k}x) + c_2\sin(\sqrt{k}x).$$

(ii) $k < 0$, τότε έχουμε δύο διακεκριμένες πραγματικές ρίζες

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{|k|},$$

και η γενική λύση είναι

$$y = c_1 e^{\sqrt{|k|}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{|k|}\,x}.$$

(iii) $k = 0$, τότε προκύπτει η διπλή ρίζα $\lambda_1 = 0$ και έτσι

$$y = c_1 x + c_2.$$

△

Παράδειγμα 4.2.5 Λύστε τη Δ.Ε.

$$k^2y'' - 4k^2y' + (4k^2+1)y = 0, \quad k \neq 0.$$

Λύση. Διαιρώντας με το $k^2 \neq 0$, η Δ.Ε. παίρνει τη μορφή

$$y'' - 4y' + \left(4 + \frac{1}{k^2}\right)y = 0,$$

η οποία έχει χαρακτηριστική εξίσωση

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 + \frac{1}{k^2} = 0$$

με συζυγείς μιγαδικές ρίζες

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \frac{i}{|k|}\,.$$

Άρα, η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y = e^{2x}\left[c_1 \cos\left(\frac{x}{|k|}\right) + c_2 \sin\left(\frac{x}{|k|}\right)\right].$$

△

Παράδειγμα 4.2.6 Λύστε το Π.Α.Τ.

$$y'' - 4y' + 13y = 0, \;\; y(0) = 0, \;\; y'(0) = 3.$$

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση της Δ.Ε. είναι

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0,$$

που έχει τις συζυγείς μιγαδικές ρίζες

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i,$$

οπότε η γενική λύση της Δ.Ε. δίνεται από

$$y = e^{2x}\left(c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)\right).$$

Επειδή $y(0) = 0$, λαμβάνουμε ότι $c_1 = 0$, και έτσι

$$y = c_2 e^{2x} \sin(3x).$$

Παραγωγίζοντας, έχουμε

$$y' = 2e^{2x} c_2 \sin(3x) + 3c_2 e^{2x} \cos(3x).$$

Επειδή $y'(0) = 3$ προκύπτει ότι $c_2 = 1$, και άρα η λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$y = e^{2x} \sin(3x).$$

△

4.3 Μη ομογενείς διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

Η μη ομογενής γραμμική Δ.Ε. δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές έχει τη γενική μορφή
$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f, \tag{4.3.1}$$
όπου $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Η (4.2.1) καλείται η αντίστοιχη ομογενής Δ.Ε. της (4.3.1).

Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1.6, η γενική λύση $y(x)$ της μη ομογενούς Δ.Ε. (4.3.1) είναι το άθροισμα μιας οποιασδήποτε μερικής της λύσης $y_\mu(x)$ και της γενικής λύσης $y_o(x)$ της αντίστοιχης ομογενούς της (4.3.1). Η ομογενής Δ.Ε. λύνεται με βάση τις τεχνικές της Παραγράφου 4.2. Επομένως, για να βρούμε τη γενική λύση της (4.3.1), πρέπει να βρούμε μία μερική της λύση $y_\mu(x)$.

Αν η συνάρτηση δευτέρου μέλους $f(x)$ είναι *ειδικής μορφής* τότε η $y_\mu(x)$ μπορεί να ευρεθεί με τη *μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών*, η οποία θα αναπτυχθεί στην παρούσα παράγραφο. Ως δεύτερο μέλος ειδικής μορφής εννοούμε ότι η $f(x)$ μπορεί να είναι μία πολυωνυμική, μία εκθετική ή μία τριγωνομετρική συνάρτηση ή και γινόμενο των προηγουμένων.

Στη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών αναζητούμε μία μερική λύση ειδικής μορφής, η οποία περιέχει κάποιους συντελεστές προς προσδιορισμό και οι οποίοι υπολογίζονται με αντικατάσταση στην (4.3.1). Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις ως προς τη συνάρτηση δευτέρου μέλους $f(x)$.

I. Πολυωνυμική συνάρτηση

$$f(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

Επειδή η παράγωγος ενός πολυωνύμου είναι πάλι ένα πολυώνυμο, αναζητούμε μερική λύση της (4.3.1) της μορφής
$$y_\mu(x) = B_m x^m + B_{m-1} x^{m-1} + \ldots + B_1 x + B_0, \tag{4.3.2}$$
όπου οι πραγματικές σταθερές B_i $(i = 1, \ldots, m)$ που υπεισέρχονται στην αναζητούμενη μορφή της λύσης προσδιορίζονται με αντικατάσταση της $y_\mu(x)$ στην (4.3.1) και εξίσωση των ομοιοβαθμίων δυνάμεων του x και στα δύο μέλη της εξίσωσης που προκύπτει.

Όταν $a_0 = 0$, τότε η παραπάνω διαδικασία αντικατάστασης στην (4.3.1) αφήνει μεγιστοβάθμιο όρο x^{m-1} στο αριστερό μέλος ενώ στο δεξιό μέλος ο μεγιστοβάθμιος όρος είναι x^m. Στην περίπτωση αυτή αναζητούμε λύση της μορφής
$$y_\mu(x) = x(B_m x^m + B_{m-1} x^{m-1} + \ldots + B_1 x + B_0). \tag{4.3.3}$$

Παράδειγμα 4.3.1 Λύστε τη Δ.Ε.

$$y'' - y' - 2y = -2x^2 - 2x + 1.$$

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς είναι

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

με ρίζες

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = -1, 2,$$

και έτσι η γενική λύση της ομογενούς είναι

$$y_o = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}.$$

Επειδή έχουμε $f(x) = -2x^2 - 2x + 1$, αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu = B_2 x^2 + B_1 x + B_0$$

και αντικαθιστώντας αυτή στη Δ.Ε., λαμβάνουμε

$$2B_2 - (2B_2 x + B_1) - 2(B_2 x^2 + B_1 x + B_0) = -2x^2 - 2x + 1$$

ή

$$-2B_2 x^2 - (2B_2 + 2B_1)x + 2B_2 - B_1 - 2B_0 = -2x^2 - 2x + 1.$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοιοβαθμίων όρων, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} -2B_2 & = -2 \\ -2B_2 - 2B_1 & = -2 \\ 2B_2 - B_1 - 2B_0 & = 1 \end{cases},$$

το οποίο έχει τη λύση

$$B_2 = 1, \quad B_1 = 0, \quad B_0 = \frac{1}{2}.$$

Άρα, μια μερική λύση είναι

$$y_\mu = x^2 + \frac{1}{2},$$

και έτσι η γενική λύση της Δ.Ε. δίνεται από

$$y = y_o + y_\mu = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + x^2 + \frac{1}{2}.$$

$\triangle$

ΙΙ. Εκθετική συνάρτηση

$$f(x) = be^{dx}$$

Επειδή παραγωγίζοντας την εκθετική συνάρτηση προκύπτει ένα πολλαπλάσιό της, αναζητούμε μερική λύση της (4.3.1) της μορφής

$$y_\mu(x) = Be^{dx}, \tag{4.3.4}$$

όπου B σταθερά προς προσδιορισμό.

Με αντικατάσταση στην (4.3.1) λαμβάνουμε

$$B(d^2 + a_1 d + a_0)e^{dx} = be^{dx}, \tag{4.3.5}$$

από όπου μπορούμε να προσδιορίσουμε το B, αν $d^2 + a_1 d + a_0 \neq 0$.

Όταν $d^2 + a_1 d + a_0 = 0$, δηλαδή το d είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ της χαρακτηριστικής εξίσωσης (4.2.2) της αντίστοιχης ομογενούς, τότε η $y_\mu(x) = Be^{dx}$ δεν μπορεί να είναι λύση της (4.3.1) διότι το αριστερό μέλος της (4.3.5) μηδενίζεται ενώ το δεξιό είναι διάφορο του μηδενός. Σε αυτή την περίπτωση, αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu(x) = Bxe^{dx}, \tag{4.3.6}$$

οπότε με αντικατάσταση στην (4.3.1), λαμβάνουμε

$$Bp(d)xe^{dx} + Bp'(d)e^{dx} = be^{dx},$$

από όπου, επειδή $p(d) = 0$, υπολογίζεται το B ως

$$B = \frac{b}{p'(d)} = \frac{b}{2d + a_1}, \tag{4.3.7}$$

υπό την προϋπόθεση ότι $p'(d) \neq 0$, δηλαδή το d δεν είναι διπλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $p(\lambda)$.

Αν συμβαίνει αυτο, δηλαδή αν $p(d) = p'(d) = 0$, τότε αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu(x) = Bx^2e^{dx}, \tag{4.3.8}$$

η οποία με αντικατάσταση στην (4.3.1), δίνει

$$Bp(d)x^2e^{dx} + 2Bp'(d)xe^{dx} + 2Be^{dx} = be^{dx},$$

και λόγω των $p(d) = p'(d) = 0$, τελικά προκύπτει

$$B = \frac{b}{2}. \tag{4.3.9}$$

Τα παραπάνω συνοψίζονται ως εξής. Αν το d δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης (4.2.2) της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε., τότε αναζητούμε μερική λύση της μορφής (4.3.4). Αν το d είναι ρίζα πολλαπλότητας μ της (4.2.2) (δηλαδή $\mu = 1$ ή $\mu = 2$ σημαίνει ότι το d είναι απλή ή διπλή ρίζα), τότε αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu(x) = Bx^\mu e^{dx}. \tag{4.3.10}$$

Παράδειγμα 4.3.2 Λύστε τη Δ.Ε.

$$y'' + 3y' - 4y = 3e^{2x}.$$

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς είναι

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$$

με ρίζες

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = -4, 1,$$

και άρα η γενική λύση της ομογενούς προκύπτει

$$y_o = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{x}.$$

Επειδή το 2 δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης, αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu = Be^{2x},$$

και αντικαθιστώντας αυτή στη Δ.Ε. λαμβάνουμε

$$4Be^{2x} + 3(2Be^{2x}) - 4Be^{2x} = 3e^{2x},$$

από όπου προσδιορίζουμε

$$B = \frac{1}{2}.$$

Άρα, μια μερική λύση είναι

$$y_\mu = \frac{1}{2}e^{2x}$$

και η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y = y_o + y_\mu = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{x} + \frac{1}{2}e^{2x}.$$

△

III. Γινόμενο πολυωνυμικής με εκθετική συνάρτηση

$$f(x) = (b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0)e^{dx}$$

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα των περιπτώσεων I και II, έχουμε τα ακόλουθα

α) αν το d δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης (4.2.2) της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε., τότε αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu(x) = (B_m x^m + B_{m-1}x^{m-1} + \ldots + B_1 x + B_0)e^{dx}.$$

β) αν το d είναι ρίζα με πολλαπλότητα μ της (4.2.2) (όπου $\mu = 1$ ή 2), τότε αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu(x) = (B_m x^m + B_{m-1}x^{m-1} + \ldots + B_1 x + B_0)x^\mu e^{dx}.$$

Παράδειγμα 4.3.3 Λύστε τη Δ.Ε.

$$y'' - 2y' - 3y = (x+1)e^{3x}.$$

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς είναι

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

με ρίζες

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = -1, 3.$$

Η γενική λύση της ομογενούς είναι

$$y_o(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}.$$

Αφού το 3 είναι απλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu(x) = (B_1 x + B_0)xe^{3x}.$$

Παραγωγίζοντας, έχουμε

$$y'_\mu(x) = 3(B_1 x^2 + B_0 x)e^{3x} + (2B_1 x + B_0)e^{3x} = (3B_1 x^2 + 3B_0 x + 2B_1 x + B_0)e^{3x}$$

και

$$\begin{aligned} y''_\mu(x) &= 9(B_1 x^2 + B_0 x)e^{3x} + 3(2B_1 x + B_0)e^{3x} + 3(2B_1 x + B_0)e^{3x} + 6B_1 e^{3x} \\ &= [9B_1 x^2 + (9B_0 + 12B_1)x + 6B_0 + 2B_1]e^{3x}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στη Δ.Ε., λαμβάνουμε

$$[9B_1x^2 + (9B_0 + 12B_1)x + 6B_0 + 2B_1]e^{3x} - 2(3B_1x^2 + 3B_0x + 2B_1x + B_0)e^{3x}$$
$$- 3x(B_1x + B_0)e^{3x} = (x + 1)e^{3x}$$

ή

$$(8B_1x + 4B_0 + 2B_1)e^{3x} = (x + 1)e^{3x},$$

οπότε τελικά εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοιοβαθμίων όρων, ευρίσκουμε

$$B_1 = \frac{1}{8}, \quad B_0 = \frac{3}{16}.$$

Άρα, μια μερική λύση είναι

$$y_\mu(x) = x\left(\frac{1}{8}x + \frac{3}{16}\right)e^{3x} = \frac{1}{16}(2x^2 + 3x)e^{3x},$$

και η ζητούμενη γενική λύση είναι

$$y(x) = y_o(x) + y_\mu(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{3x} + \frac{1}{16}(2x^2 + 3x)e^{3x}.$$

△

IV. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$f(x) = b_1\cos(dx) + b_2\sin(dx)$$

Οι παράγωγοι των $\cos(dx)$ και $\sin(dx)$ είναι πολλαπλάσια των $\cos(dx)$ και $\sin(dx)$ με κατάλληλες σταθερές. Για αυτό είναι λογικό να αναζητήσουμε μερική λύση που είναι γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων αυτών, δηλαδή

$$y_\mu(x) = B_1\cos(dx) + B_2\sin(dx)$$

με συντελεστές B_1 και B_2, οι οποίοι θα προσδιοριστούν με αντικατάσταση στην (4.3.1) και εξίσωση των αντίστοιχων συντελεστών των συναρτήσεων $\cos(dx)$ και $\sin(dx)$ στα δύο μέλη της προκύπτουσας εξίσωσης.

Είναι, όμως, δυνατόν μία τουλάχιστον από τις $\cos(dx)$ και $\sin(dx)$ να είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε. (4.2.1) οπότε τότε το αριστερό μέλος της (4.3.1) θα γίνει μηδέν και δεν θα υπάρχει επιλογή των B_1 και B_2 που να ικανοποιεί την εξίσωση.

Έτσι, καταλήγουμε στο διαχωρισμό των δύο περιπτώσεων α) αν το $d\,i$ δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης (4.2.2) της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε. (4.2.1), τότε αναζητούμε μερική λύση της (4.3.1) της μορφής

$$y_\mu(x) = B_1 \cos(dx) + B_2 \sin(dx). \tag{4.3.11}$$

β) αν το $d\,i$ είναι ρίζα της (4.2.2), τότε αναζητούμε μερική λύση της (4.3.1) της μορφής

$$y_\mu(x) = x\left(B_1 \cos(dx) + B_2 \sin(dx)\right). \tag{4.3.12}$$

Παράδειγμα 4.3.4 Λύστε τη Δ.Ε.

$$y'' - 4y' + 4y = 5\sin(2x).$$

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς είναι

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

με ρίζες

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2 \text{ (διπλή)},$$

και έτσι η γενική λύση της ομογενούς είναι

$$y_o = (c_1 x + c_2)e^{2x}.$$

Επειδή το $2i$ δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης, αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu = B_1 \sin(2x) + B_2 \cos(2x).$$

Παραγωγίζοντας, έχουμε

$$y'_\mu = 2B_1 \cos(2x) - 2B_2 \sin(2x)$$

και

$$y''_\mu = -4B_1 \sin(2x) - 4B_2 \cos(2x).$$

Αντικαθιστώντας στη Δ.Ε., λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} &-4B_1 \sin(2x) - 4B_2 \cos(2x) - 4(2B_1 \cos(2x) - 2B_2 \sin(2x)) \\ &+4(B_1 \sin(2x) + B_2 \cos(2x)) = 5\sin(2x) \end{aligned}$$

ή

$$8B_2 \sin(2x) - 8B_1 \cos(2x) = 5\sin(2x)$$

και εξισώνοντας τους συντελεστές προκύπτει

$$B_1 = 0 \quad \text{και} \quad B_2 = \frac{5}{8}.$$

Άρα, μια μερική λύση είναι

$$y_\mu = \frac{5}{8}\cos(2x)$$

και η γενική λύση της Δ.Ε. δίνεται από

$$y = y_o + y_\mu = (c_1 x + c_2)e^{2x} + \frac{5}{8}\cos(2x).$$

△

Παράδειγμα 4.3.5 Λύστε τη Δ.Ε.

$$y'' + 9y = \sin(3x) + \cos(3x).$$

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς είναι

$$\lambda^2 + 9 = 0$$

με ρίζες

$$\lambda = \frac{\pm\sqrt{-36}}{2} = \pm 3i$$

και άρα η γενική λύση της ομογενούς προκύπτει

$$y_o = c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x).$$

Αφού το $3i$ είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης, αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu = x(B_1\sin(3x) + B_2\cos(3x)).$$

Παραγωγίζοντας, έχουμε

$$y'_\mu = x(3B_1\cos(3x) - 3B_2\sin(3x)) + B_1\sin(3x) + B_2\cos(3x)$$

και

$$\begin{aligned} y''_\mu &= 3B_1\cos(3x) - 3B_2\sin(3x) + x(-9B_1\sin(3x) - 9B_2\cos(3x)) \\ &+ 3B_1\cos(3x) - 3B_2\sin(3x) \\ &= 6B_1\cos(3x) - 9B_2 x\cos(3x) - 6B_2\sin(3x) - 9B_1 x\sin(3x). \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στη Δ.Ε., λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} &6B_1\cos(3x) - 9B_2 x\cos(3x) - 6B_2\sin(3x) - 9B_1 x\sin(3x) \\ &\qquad + 9x(B_1\sin(3x) + B_2\cos(3x)) = \sin(3x) + \cos(3x) \end{aligned}$$

ή

$$6B_1\cos(3x) - 6B_2\sin(3x) = \sin(3x) + \cos(3x).$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές, ευρίσκουμε

$$B_1 = \frac{1}{6} \quad \text{και} \quad B_2 = -\frac{1}{6}.$$

Έτσι, μια μερική λύση είναι

$$y_\mu = x\left(\frac{1}{6}\sin(3x) - \frac{1}{6}\cos(3x)\right),$$

και η γενική λύση της Δ.Ε. δίνεται από

$$y = y_o + y_\mu = c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x) + x\left(\frac{1}{6}\sin(3x) - \frac{1}{6}\cos(3x)\right).$$

△

V. Γινόμενο πολυωνυμικής με εκθετική και με τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$f(x) = (b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0)(\beta_1\cos(\delta x) + \beta_2\sin(\delta x))e^{dx}$$

Σε αυτή την περίπτωση συνδυάζουμε τα αποτελέσματα των περιπτώσεων III και IV.

VI. Αθροίσματα συναρτήσεων των περιπτώσεων I-V

Έστω ότι έχουμε να λύσουμε τη μη ομογενή Δ.Ε.

$$y'' + a_1y' + a_0y = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x), \tag{4.3.13}$$

της οποίας το δεύτερο μέλος γράφεται ως (πεπερασμένο) άθροισμα συναρτήσεων των περιπτώσεων I-V.

Τότε, βρίσκουμε τις μερικές λύσεις $y_{\mu_1}, y_{\mu_2}, \ldots, y_{\mu_k}$ των k επιμέρους εξισώσεων, αντιστοίχως

$$\begin{aligned} y'' + a_1y' + a_0y &= f_1(x), \\ y'' + a_1y' + a_0y &= f_2(x), \\ &\vdots \\ y'' + a_1y' + a_0y &= f_k(x). \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

και λόγω της γραμμικότητας της Δ.Ε. (4.3.13), συνάγεται ότι το άθροισμα

$$y_\mu = y_{\mu_1} + y_{\mu_2} + \ldots + y_{\mu_k} \tag{4.3.15}$$

αποτελεί μία μερική της λύση.

Η παραπάνω διαδικασία εκφράζει την *αρχή της υπέρθεσης* για μη ομογενείς γραμμικές Δ.Ε.

Παράδειγμα 4.3.6 Λύστε τη Δ.Ε.

$$y'' - y = x^2 + 1 + 2e^x + \cos(2x).$$

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς είναι

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

με ρίζες

$$\lambda = \pm 1,$$

και έτσι η γενική λύση της ομογενούς είναι

$$y_o = c_1 e^{-x} + c_2 e^x.$$

Επειδή $f(x) = x^2 + 1 + 2e^x + \cos(2x)$, βρίσκουμε τις μερικές λύσεις των Δ.Ε.

$$\begin{aligned} y'' - y &= x^2 + 1, \\ y'' - y &= 2e^x, \\ y'' - y &= \cos(2x). \end{aligned}$$

Για την πρώτη αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_{\mu_1} = ax^2 + bx + c,$$

οπότε παραγωγίζοντας έχουμε

$$y'_{\mu_1}(x) = 2ax + b$$

και

$$y''_{\mu_1}(x) = 2a,$$

και αντικαθιστώντας στη Δ.Ε., λαμβάνουμε

$$-ax^2 - bx - c + 2a = x^2 + 1.$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοιοβαθμίων όρων, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} -a & = 1 \\ -b & = 0 \\ 2a - c & = 1 \end{cases},$$

το οποίο έχει ως λύση

$$\begin{cases} a & = -1 \\ b & = 0 \\ c & = -3 \end{cases},$$

και άρα μια μερική λύση είναι

$$y_{\mu_1} = -x^2 - 3.$$

Για τη δεύτερη Δ.Ε., επειδή το 1 αποτελεί λύση της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε., αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_{\mu_2} = axe^x.$$

Παραγωγίζοντας, έχουμε

$$y'_{\mu_2} = ae^x + axe^x$$

και

$$y''_{\mu_2} = ae^x + ae^x + axe^x = 2ae^x + axe^x.$$

Αντικαθιστώντας στη Δ.Ε., λαμβάνουμε

$$2ae^x - axe^x + axe^x = 2e^x,$$

από την οποία προκύπτει

$$a = 1,$$

και άρα μια μερική λύση είναι

$$y_{\mu_2} = xe^x.$$

Για την τρίτη Δ.Ε., αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_{\mu_3} = a\sin(2x) + b\cos(2x).$$

Παραγωγίζοντας, έχουμε

$$y'_{\mu_3} = 2a\cos(2x) - 2b\sin(2x)$$

και

$$y''_{\mu_3} = -4a\sin(2x) - 4b\cos(2x),$$

οπότε αντικαθιστώντας στη Δ.Ε., λαμβάνουμε

$$-4a\sin(2x) - 4b\cos(2x) - a\sin(2x) - b\cos(2x) = \cos(2x)$$

ή

$$-5a\sin(2x) - 5b\cos(2x) = \cos(2x).$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές, προκύπτει

$$a = 0 \quad \text{και} \quad b = -\frac{1}{5},$$

και έτσι

$$y_{\mu_3} = -\frac{1}{5}\cos(2x).$$

Σύμφωνα με την αρχή της υπέρθεσης, η γενική λύση της δοθείσας Δ.Ε. δίνεται από το άθροισμα των τριών μερικών λύσεων και της λύσης της ομογενούς, δηλαδή

$$\begin{aligned} y &= y_o + y_{\mu_1} + y_{\mu_2} + y_{\mu_3} \\ &= c_1 e^{-x} + c_2 e^x - x^2 - 3 + x e^x - \frac{1}{5}\cos(2x). \end{aligned}$$

$\triangle$

Παρατήρηση 4.3.1 Η απλούστερη μη ομογενής γραμμική Δ.Ε. δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι

$$y'' = f(x),$$

η οποία αντιστοιχεί στην (4.3.1) για $a_1 = a_0 = 0$. Για να τη λύσουμε, κάνουμε δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις, όπως φαίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα.

$\triangle$

Παράδειγμα 4.3.7 Λύστε τη Δ.Ε.

$$y'' = x^2 - x + \sin x.$$

Λύση. Κάνουμε δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις και έχουμε

$$\int y''\,dy = \int (x^2 - x + \sin x)\,\mathrm{d}x + c_1.$$

ή

$$y' = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \cos x + c_1$$

ή

$$\int y'\,dy = \int \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \cos x + c_1\right)\mathrm{d}x,$$

οπότε τελικά

$$y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} - \sin x + c_1 x + c_2.$$

$\triangle$