

# Αριθμητική Ανάλυση

Αναστάσιος Τέφας

[tefas@aiia.csd.auth.gr](mailto:tefas@aiia.csd.auth.gr)

2310-991932

# Σχόλια Φοιτητών 2012-13

- Πολύ ενδιαφέρον μάθημα!! Το αντικείμενο μας έφερε σε επαφή με σημαντικούς αλγορίθμους και έννοιες, μάθαμε έστω σε κάποιο βαθμό να χρησιμοποιούμε εργαλεία όπως το Matlab και το Latex, που εμένα προσωπικά μου άρεσαν πάρα πολύ. Τα θέματα της πρόοδου ήταν βατά, αν και πολλά για το χρόνο που είχαμε, ελπίζω και τα θέματα της εξεταστικής να είναι ανάλογα. Καλό θα ήταν, εφόσον αφιερώνουμε τόσο χρόνο στις εργασίες, αυτές να είναι απαλλακτικές, αλλά ακόμα και έτσι το μάθημα είναι μια χαρά. Δεν έχασα μάθημα γιατί πραγματικά ήταν για μένα το πιο ενδιαφέρον του εξαμήνου μαζί με τις δομές, αν και ο προγραμματισμός σε Matlab θεωρώ πως είναι η καλύτερη λύση για τις εργασίες σε σχέση με τις άλλες γλώσσες προγραμματισμού. Ήθελε μεγάλη προσπάθεια αλλά άξιζε τον κόπο και περιμένω να έρθουν μαθήματα παρόμοιου περιεχομένου στη συνέχεια των σπουδών μου.
- Πολύ δύσκολο μάθημα, πολλές και απαιτητικές οι εργασίες, πιο εύκολα πιάνεις το τζόκερ παρά το περνάς!

# Σχόλια Φοιτητών 2013-14

- Απαιτητικό μάθημα από άποψη μελέτης και εργασιών. **Η πρακτική εφαρμογή του θεωρητικού τμήματος της ύλης που παρουσιάζεται στην ύλη παρουσιάζει τρομερό ενδιαφέρον** (γραφικά, μάθηση, κτλ.) Η τριβή με MATLAB® και LATEX είναι εξαιρετικά χρήσιμες.
- Ωραίο και ενδιαφέρον μάθημα. **Δεν θα έλεγα πως ήταν δύσκολο**, παρ'όλα όσα ακούσαμε από σχόλια φοιτητών άλλων ετών. Η πρόοδος είχε θέματα βατά. Οι εργασίες ήταν αρκετά απαιτητικές (η 2η τουλάχιστον) και συνέπεσαν με άλλες προθεσμίες του εξαμήνου. Ιδιαίτερα στην περίοδο των διακοπών, που είχαμε να παραδώσουμε 2 εργασίες. Γενικά ωστόσο, ενδιαφέρον το αντικείμενο του μαθήματος και με πολλές εφαρμογές.
- Οι εργασίες είναι αρκετά δύσκολες και απαιτητικές για μάθημα 3ο εξαμήνου. **Παρόλα αυτά, τα θέματα προόδου/εξεταστικής είναι πιο εύκολα και βατά.**
- Το μάθημα είναι ιδιαίτερα απαιτητικό. Τα τρία σετ ασκήσεων ήταν αρκετά δύσκολα, απαιτούσαν πολλή δουλειά και παράλληλη μελέτη πολλών πηγών και θεωρώ ότι **οι προθεσμίες ήταν πάρα πολύ κοντά η μία στην άλλη**. Παρ'όλα αυτά, **κάνοντας τις εργασίες κατανόησα σε βάθος τη θεωρία και νομίζω πως θα διευκολυνθώ πολύ στη μελέτη μου για την εξεταστική**. Επίσης, εργασίες που φανέρωναν την πρακτική εφαρμογή του μαθήματος, όπως αυτή με το page rank ή με την πρόβλεψη θερμοκρασίας, ήταν πιο ενδιαφέρουσες από τις υπόλοιπες και τράβηξαν την προσοχή μου. Θα προτιμούσα περισσότερες σαν κι αυτές, παρά μία "ξηρή" εφαρμογή ενός οποιουδήποτε αλγορίθμου.
- Πόλυ ωραίο μάθημα αν και είναι αρκετά δύσκολο. Ιδιαίτερα χρήσιμο για την πληροφορική. **Μεγάλος φόρτος εργασίας. Λίγα ects.** Επίσης στις εξετάσεις τα νούμερα είναι χάλια και είσαι επι 2 ώρες με ένα κομπουτεράκι, μπορούνε να μπουνε normal νούμερα και να φανεί αν φοιτητής ξέρει την κάθε μέθοδο.

# Σχόλια Φοιτητών 2014-15

- Πολύ απαιτητικό αλλά παράλληλα ενδιαφέρον μάθημα. Άμεσα εξαρτημένο από τον καθηγητή τον οποίο το διδάσκει, καθώς μπορεί να προσεγγιστεί από πολλές σκοπιές. Πιστεύω ότι θα έπρεπε να έχει μικρότερο φόρτο εργασίας.
- Είναι ενδιαφέρον, αρκετά απαιτητικό και η ύλη σχετικά μεγάλη. Ο τρόπος αξιολόγησης είναι αρκετά δίκαιος. Παρ'όλ'αυτά, μας ζητείται να κάνουμε εργασίες σε προγράμματα που δεν έχουμε διδαχτεί, ούτε σ'αυτό ούτε σε προηγούμενα μαθήματα.
- Η ανάθεση εργασιών εν μέσω περιόδου εξεταστικής δυσκολεύει αφάνταστα το πρόγραμμα των φοιτητών, φέρνοντας τους στη δύσκολη θέση να επιλέγουν μεταξύ εξετάσεων και μαθήματος. Οι εργασίες οφείλουν να έχουν ολοκληρωθεί μέσα στο εξάμηνο, ή τουλάχιστον να έχουν ανακοινωθεί νωρίτερα.
- Το μάθημα είναι το αγαπημένο μου, πέρυσι το είχα πάρει με κακό μάτι, αλλά φέτος ασχολούμαι και πηγαίνω στις διαλέξεις(έλειπα 2 φορές λόγω υποχρεώσεων). Μου φαίνεται πολύ ενδιαφέρον και σημαντικό, καθώς και η ενασχόληση με το μάτλαμπ και το λατέχ(με κίνητρο ενασχόλησης μπόνους +1 μονάδα), είναι πολύ καλά. Το μάτλαμπ φοβερό αν και μου φάνηκε κι αυτό λίγο ζόρικο. Θα ήθελα να υπάρχει εργαστήριο μάτλαμπ(2 ώρες/εβδομάδα), ώστε το μάθημα να γίνει κορυφαίο. Όσο για την πρόοδο, τα θέματα ήτανε βατά για κάποιον που διάβασε σοβαρά, αν εξαιρέσουμε τους συνεχείς υπολογισμούς με το κομπιουτεράκι. Οι εργασίες ζόρικές(ειδικά η 2η).
- Είναι ένα πολύ χρήσιμο και ενδιαφέρον μάθημα και το περιεχόμενο είναι απαραίτητο για την πληροφορική. Απαιτεί, όμως, πολύ περισσότερη προσπάθεια συγκριτικά με τα υπόλοιπα μαθήματα που έχουν τα ίδια ECTS. Αν και οι εργασίες ήταν απαιτητικές, λύνονταν ευχάριστα. Θα ήταν καλύτερο να είχαν μοιραστεί καλύτερα κατά τη διάρκεια του εξαμήνου για να μην έχουμε περισσότερο χρόνο. Παρά τη δυσκολία όμως είναι μάλλον το πιο ενδιαφέρον μάθημα του εξαμήνου.
- Αρκετά ενδιαφέρον μάθημα. Νομίζω ότι πρέπει να λύνονται περισσότερες ασκήσεις.

# Ερωτήσεις Αξιολόγησης 2012-13

- 5,5 ECTS x 25-30 ώρες = 137,5 - 165 ώρες το εξάμηνο
- Σε 15 εβδομάδες = 9-11 ώρες την εβδομάδα

Μάθημα	nΕρωτηματολόγια	Ποσοστά Απαντήσεων							Μάθημα		Πρόγραμμα Σπουδών		Κατάταξη
		ΑΔεν αφορά το μάθημα	οΠολύ αρνητικά	25Αρ νητικά	50Ο υδέτερα	75Θε τικά	100 Πολύ θετικά	ΔΔε γνωρίζω	Μ.Ο. Μέσος Όρος	Τ.Α. Τυπική Απόκλιση	Μ.Ο. Μέσος Όρος	Τ.Α. Τυπική Απόκλιση	ΕΕκατοστ ημόριο
9. Πώς κρίνετε το επίπεδο δυσκολίας του μαθήματος για το εξάμηνό του;	24	0,0	0,0	0,0	8,3	33,3	58,3	0,0	87,5	16,1	63,4	24,2	100,0
10. Πώς κρίνετε τον αριθμό Πιστωτικών Μονάδων (ECTS) του μαθήματος σε σχέση με το φόρτο εργασίας του; (1 ECTS = 25-30 ώρες εργασίας)	24	4,2	41,7	33,3	12,5	0,0	0,0	8,3	16,7	17,8	47,0	22,8	2,7
36. Αφιερώνω εβδομαδιαία για μελέτη του συγκεκριμένου μαθήματος	24	8,3	20,8	20,8	29,2	8,3	4,2	8,3	36,3	27,9	22,0	23,9	89,2

# Στατιστικά έτους 2013-14

- Ιανουάριος: Πέρασαν 60 στους 75 που προσήλθαν στις εξετάσεις (80%)
- 26 Φοιτητές βαθμολογήθηκαν με άριστα (9-10)
- Ιούνιος: Πέρασαν 7 στους 15

# Τι είναι η Αριθμητική Ανάλυση;

- **Επιστήμη**

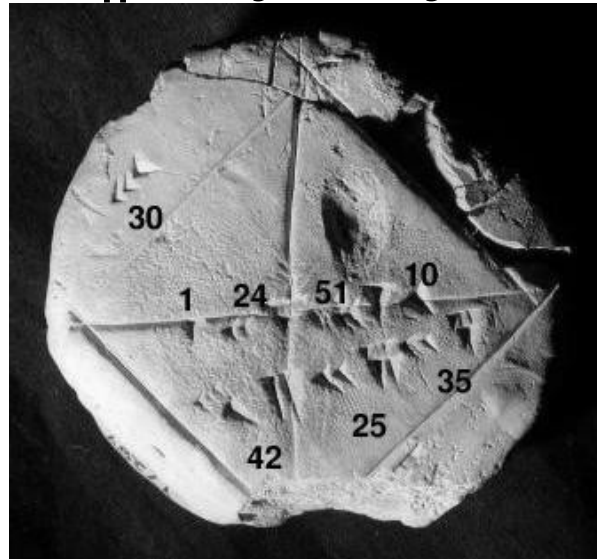
- Ασχολείται με μεθόδους **επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων με χρήση αριθμητικών πράξεων** (πλέον με τη χρήση  $H/Y$ ), καθώς και την **ανάλυση των σφαλμάτων στην προσέγγιση της λύσης**

- **Τέχνη**

- Επιλογή της κατάλληλης μεθόδου για το συγκεκριμένο πρόβλημα
- Απαιτεί ανάπτυξη δεξιοτήτων και διαίσθησης

# 1600-1800 π.Χ.

- Βαβυλώνιοι - Αριθμητική προσέγγιση τετραγωνικής ρίζας του 2
- Πρακτική σημασία!
  - Εφαρμογές σε κτήρια, ξυλινες κατασκευές, κτλ





# Παράδειγμα: Επίλυση Γραμμικού Συστήματος Εξισώσεων (1)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

$$\mathbf{x} = ?$$

# Παράδειγμα: Επίλυση Γραμμικού Συστήματος Εξισώσεων (2)

- Μέθοδοι:
  - Τύπος του Cramer (☹)
  - $x = A^{-1}b$  (☹<sup>2</sup>)
  - Άμεσες μέθοδοι: Gauss (☺)
    - Απλή
    - Με μερική οδήγηση
    - Με ολική οδήγηση
  - Επαναληπτικές μέθοδοι
    - Jacobi
    - Gauss-Seidel
  - κ.ά.

# Παράδειγμα: Επίλυση Γραμμικού Συστήματος Εξισώσεων (3)

- Κριτήρια επιλογής μεθόδου:
  - Γενικά:
    - Πολυπλοκότητα (υπολογιστική, μνήμης, υλοποίησης)
    - Ταχύτητα σύγκλισης (για επαναληπτικές μεθόδους)
    - Ακρίβεια
    - Ανθεκτικότητα σε αριθμητικά σφάλματα (αναπαράστασης δεδομένων και πράξεων)
  - Εξαρτώμενα από το συγκεκριμένο πρόβλημα:
    - Κατάσταση του πίνακα του συστήματος
    - Πλήθος μηδενικών στοιχείων του πίνακα
    - Διαστάσεις του προβλήματος
    - Τυχόν συμμετρίες στον πίνακα, κ.ά.

# Παράδειγμα: Επίλυση Γραμμικού Συστήματος Εξισώσεων (4)

- Π.χ. Επίλυση του συστήματος

$$\begin{bmatrix} 0.729 & 0.81 & 0.9 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1.331 & 1.21 & 1.1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6867 \\ 0.8338 \\ 1 \end{bmatrix}$$

με 4 σημαντικά ψηφία

- Ακριβής λύση (με 4 ψηφία):  $\mathbf{x} = [0.2245 \quad 0.2814 \quad 0.3279]^T$
- Απλή μέθοδος Gauss:  $\hat{\mathbf{x}}_1 = [0.2251 \quad 0.2790 \quad 0.3295]^T$
- Μέθοδος Gauss με μερική οδήγηση:

$$\hat{\mathbf{x}}_2 = [0.2246 \quad 0.2812 \quad 0.3280]^T$$

# Εφαρμογές Αριθμητικής Ανάλυσης

- Σε όλα τα πεδία της Πληροφορικής
  - Graphics, image, video, sound, ...
  - **Ανάλυση συμπεριφοράς χρηστών, Κοινωνικά Δίκτυα, αναζήτηση στο Internet, ...**
  - **Machine Learning, Data Analysis/Mining, ...**
- Σε όλες τις Φυσικές Επιστήμες και όχι μόνο
  - Φυσική, Βιολογία, Χημεία...
  - Προσομοιώσεις crash tests, σχεδιασμός τροχιάς διαστημοπλοίων, πρόβλεψη καιρού, τιμές αεροπορικών εισιτηρίων, medical imaging, ...



- 1994: Altavista, Yahoo, Lycos, ...
- **Πρόβλημα:** Αρκούσε κάποιος να τοποθετήσει πολλές φορές το ίδιο keyword σε μία σελίδα για να εμφανιστεί πρώτη
- **PageRank:** Αξιολόγηση “σημαντικότητας” κάθε σελίδας στο web αναλύοντας τις συνδέσεις της με άλλες σελίδες
  - Μοντελοποίηση Web ως γράφο
  - Επίλυση ενός προβλήματος **ιδιοανάλυσης**
  - Η σειρά των αποτελεσμάτων εξαρτάται τόσο από τη σχετικότητα όσο και από την αξιοπιστία της κάθε σελίδας
- Alphabet revenue in 2015: **74.98 billion \$**

# Χρειάζεται να γνωρίζω Αριθμητική Ανάλυση?

Cluster was a constellation of four European Space Agency spacecraft which were launched on the maiden flight of the Ariane 5 rocket, Flight 501, and subsequently lost when that rocket failed to achieve orbit. The launch, which took place on Tuesday, 4 June 1996, ended in failure due to an error in the software design caused by assertions having been turned off, which in turn caused inadequate protection from integer overflow. This resulted in the rocket veering off its flight path **37 seconds after launch**, beginning to **disintegrate under high aerodynamic forces**, and finally **self-destructing by its automated flight termination system**.

The greater horizontal acceleration **caused a data conversion from a 64-bit floating point number to a 16-bit signed integer value to overflow and cause a hardware exception**. Efficiency considerations had omitted range checks for this particular variable, though conversions of other variables in the code were protected. **The exception halted the reference platforms, resulting in the destruction of the flight.**

The failure resulted in a loss of more than **US\$370 million**.

# Στόχοι μαθήματος

- Κατανόηση **μαθηματικών μοντέλων** πάνω στα οποία βασίζεται η **ανάπτυξη αριθμητικών μεθόδων** και **αλγορίθμων** με στόχο την **προσεγγιστική επίλυση** πολύπλοκων υπολογιστικών προβλημάτων επιστημονικών εφαρμογών.
- Απόκτηση ευχέρειας πάνω σε μαθηματικές μεθόδους/τεχνικές **αντιμετώπισης πολύπλοκων υπολογιστικών προβλημάτων**.
- Ικανότητα **μελέτης σφαλμάτων**.



# Τι θα μάθετε

- Αλγορίθμους Αριθμητικής Ανάλυσης.
- Προγραμματισμό σε Matlab/Octave/Python.
- Χρήση LaTeX για συγγραφή τεχνικών κειμένων.
- Ολοκλήρωση εργασίας που απαιτεί ανάλυση, πειράματα, τεχνική έκθεση.

# Περιεχόμενα μαθήματος

- Αριθμητική κινητής υποδιαστολής και σφάλματα στρογγύλευσης.
- Αριθμητική επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων.
- Αριθμητική επίλυση γραμμικών συστημάτων.
- Πολυωνυμική παρεμβολή.
- Splines.
- Βέλτιστες προσεγγίσεις σε ευκλείδειους χώρους-ελάχιστα τετράγωνα.
- Αριθμητική εύρεση ιδιοδιανυσμάτων/ιδιοτιμών
- Αριθμητική παραγωγή και ολοκλήρωση.
- Αριθμητική επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων.
- Εφαρμογές των ανωτέρω με χρήση μαθηματικού λογισμικού (Matlab).

# Συγγράμματα

- Γ.Δ. Ακριβής και Β.Α. Δούγαλης. Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2006.
- G.E. Forsythe, M.A. Malcolm and C.B. Moler. Αριθμητικές Μέθοδοι και Προγράμματα για Μαθηματικούς Υπολογισμούς. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2006.
- Σημειώσεις του κ. Ατρέα (Επίκουρος καθηγητής στο Γενικό Τμήμα Α.Π.Θ.).
- Numerical Analysis 2<sup>nd</sup> ed. Timothy Sauer. Addison Wesley, 2012.
- Numerical Recipes in C, <http://www.nrbook.com>

# Αξιολόγηση μαθήματος

- **Γραπτή εξέταση** σε όλη την ύλη με έμφαση στα θέματα που έχουν γίνει μετά την πρόοδο που έχει διδαχθεί (βιβλίο, σημειώσεις μαθήματος, ασκήσεις). Το βάρος της εξέτασης είναι 50%-60% επί του τελικού βαθμού.
- **Υποχρεωτική ενδιάμεση πρόοδος** στην ύλη που θα έχει διδαχθεί μέχρι το συγκεκριμένο σημείο. Το βάρος της προόδου είναι 20%-30% επί του τελικού βαθμού.
- **Προγραμματιστικές/Θεωρητικές εργασίες** κατανόησης της ύλης. Το συνολικό βάρος των εργασιών είναι 30%-40% επί του τελικού βαθμού. Πολιτική μείωσης βαθμολογίας 10% για κάθε ημέρα αργοπορίας έως 5 ημέρες. Ισχύουν και για την εξέταση του Σεπτεμβρίου.

# Διαχειριστικά

- Διδάσκων: Α. Τέφας, επίκουρος καθηγητής, Ψηφιακά Μέσα
- Διαλέξεις
  - Δευτέρα, 11:00-13:00, Δ21
  - Παρασκευή, 12:00-14:00, Α21
- Γραφείο Διδάσκοντα: 3.16, 3<sup>ος</sup> όροφος, Γυάλινο
- Επικοινωνία: [tefas@aiia.csd.auth.gr](mailto:tefas@aiia.csd.auth.gr)
- Ιστοσελίδα: <http://pileas.csd.auth.gr>

# Συμβολή στην ανάπτυξη του υλικού

- Κώστας Τσίχλας, Επ. Καθηγητής, τμ. Πληροφορικής
- Νίκος Ατρέας, Επ. Καθηγητής, Πολυτεχνείο ΑΠΘ
- Λευτέρης Αγγελής, Αν. Καθηγητής τμ. Πληροφορικής

# Προαπαιτήσεις

- Επιθυμητές γνώσεις για ευκολότερη παρακολούθηση:
  - Γραμμική Άλγεβρα
  - Διαφόριση, ολοκλήρωση
  - Προγραμματισμός σε C, C++, Matlab, Octave
  - Χρήση LaTeX

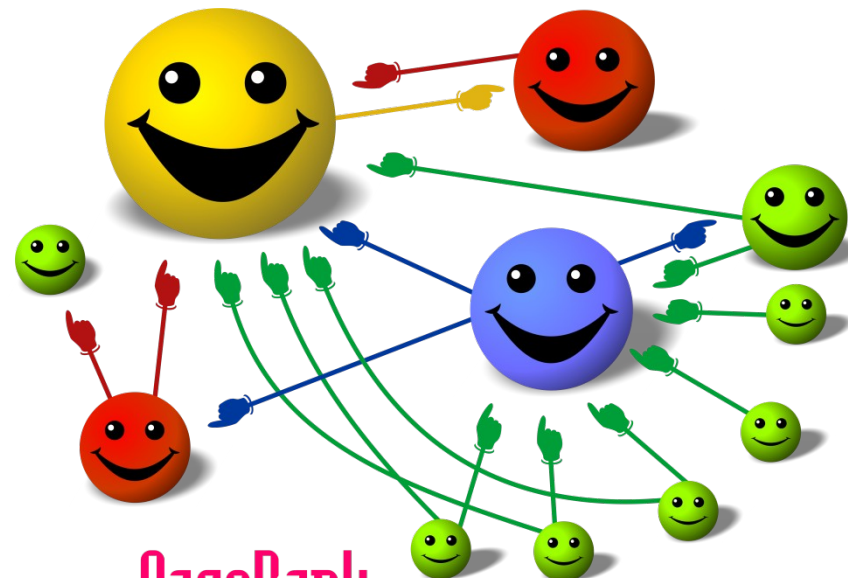
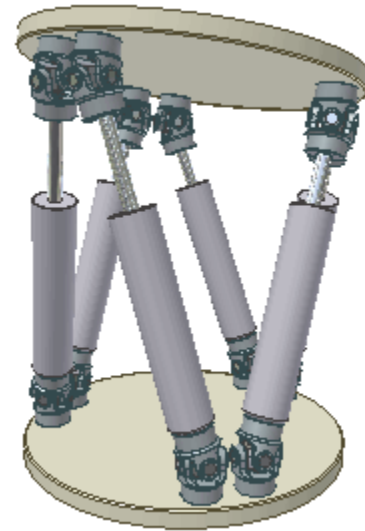
# Βοηθοί μαθήματος

- Θα ανακοινωθούν



# Highlights εργασιών

- Πρόγραμμα για πρόβλεψη του βαθμού πτυχίου.
- Πρόγραμμα για πρόβλεψη θερμοκρασίας.
- Πρόγραμμα για πρόβλεψη τιμής μετοχής.
- Προγραμματισμός των εξισώσεων που διέπουν την πλατφόρμα του Stewart.
- Προγραμματισμός του PageRank για αναζήτηση ιστοσελίδων.



PageRank

# Παραδείγματα σε MATLAB