Αριθμητική Ανάλυση
Προσεγγιστική Ολοκλήρωση

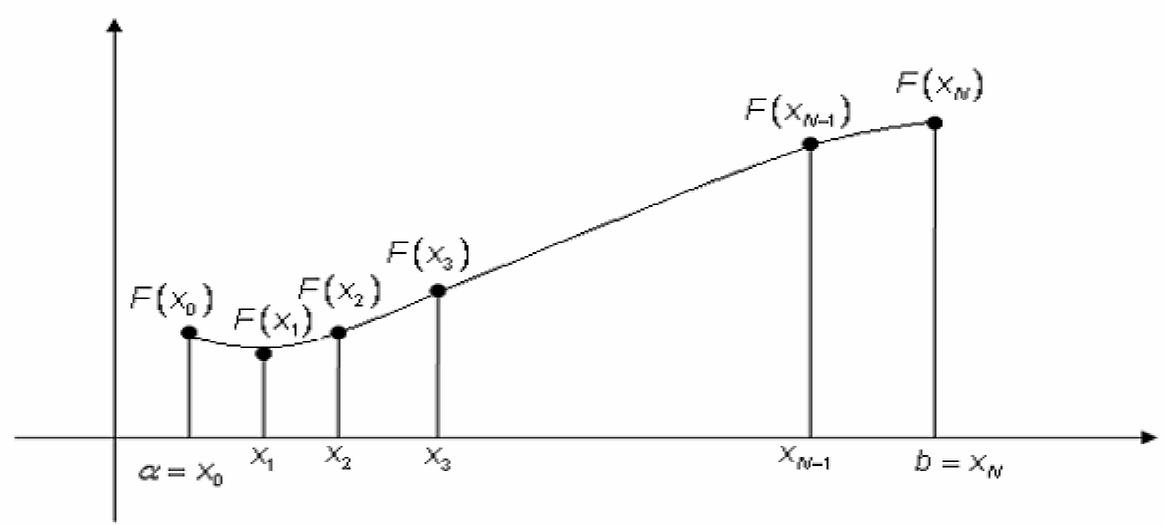
Αναστάσιος Τέφας
tefas@aiia.csd.auth.gr
2310-991932

Μέθοδος τραπεζίου

- Έστω $\{x_0 = \alpha, x_1, ..., x_N = b\}$ $x_0 < x_1 < .... < x_N$ είναι ένας ομοιόμορφος διαμερισμός του $[\alpha, b]$, δηλαδή χωρίζουμε το $[\alpha, b]$ σε N ισομήκη υποδιαστήματα.

- Τότε: $x_i = x_0 + \kappa \dfrac{b-\alpha}{N}, \quad \kappa = 0, ..., N.$

- Υπολογίζουμε τις τιμές $f(x_i), \quad i = 0, ..., N.$



- Σχηματίζουμε τα διαδοχικά ευθύγραμμα με άκρα τα $f(x_0),...,f(x_N)$ οπότε σχηματίζεται μία τεθλασμένη γραμμή.

- Υπολογίζουμε τα εμβαδά των N-τραπεζίων που σχηματίζονται και έχουμε:

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)dx \cong E_{\tau\rho\alpha\pi\text{-}1} + ... + E_{\tau\rho\alpha\pi\text{-}N}$$

$$= \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}(x_1 - x_0) + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}(x_2 - x_1) + ... + \frac{f(x_{N-1})+f(x_N)}{2}(x_N - x_{N-1})$$

$$= \frac{b-\alpha}{2N}(f(x_0)+f(x_1)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_2)+f(x_3)...+f(x_{N-1})+f(x_{N-1})+f(x_N))$$

$$= \frac{b-\alpha}{2N}(f(x_0)+f(x_N)+2(f(x_1)+...+f(x_{N-1})))$$

$$= \frac{b-\alpha}{2N}\left(f(x_0)+f(x_N)+2\sum_{k=1}^{N-1} f(x_k)\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\alpha}^{b} f(x)dx. \qquad (1)$$

Σφάλμα προσεγγισης

Είναι γνωστό ότι αν προσεγγίσουμε μία συνεχή συνάρτηση $f(x)$ σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,b]$ με μία τεθλασμένη γραμμή, δηλαδή με ένα πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού $p_1(x)$, τότε το σφάλμα είναι:

$$f(x)-p_1(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-\alpha)(x-b)=-\frac{f''(\xi)}{2}(x-\alpha)(b-x),\ \xi\in(\alpha,b)$$

υπό την προϋπόθεση ότι η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Επομένως:

$$\int_\alpha^b f(x)-p_1(x)dx=-\frac{f''(\xi)}{2}\int_\alpha^b(x-\alpha)(b-x)dx$$

$$=-\frac{f''(\xi)}{2}\frac{(b-\alpha)^3}{6}=-\frac{f''(\xi)}{12}(b-\alpha)^3,$$

άρα εάν *e* είναι το σφάλμα στην περίπτωση της μεθόδου τραπεζίου, έχουμε:

$$e = \int_{\alpha}^{b} f(x)dx - \left(\frac{b-\alpha}{2N} \left(f(x_0) + f(x_N) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) \right) \right)$$

άρα:

$$e = -\frac{f''(\xi_1)}{12}(x_1 - x_0)^3 - \frac{f''(\xi_2)}{12}(x_2 - x_1)^3 - \ldots - \frac{f''(\xi_N)}{12}(x_N - x_o)^3,\ \xi_i \in (x_i, x_{i+1})$$

$$= -\frac{(b-\alpha)^3}{12N^3}(f''(\xi_1) + \ldots + f''(\xi_N)).$$

Αν λοιπόν $M = \max\limits_{x \in [\alpha,b]} \{ | f''(x) | : x \in [\alpha, b] \}$, τότε:

$$| e | \leq \frac{(b-\alpha)^3}{12N^3}(M + \ldots + M) = \frac{(b-\alpha)^3}{12N^3} MN = \frac{(b-\alpha)^3}{12N^2} \cdot M. \qquad (2)$$

Παράδειγμα

Παράδειγμα 1 Υπολογίστε την προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^1 e^{-x^2} dx$, χρησιμοποιώντας $N = 8$ ισομήκεις υποδιαιρέσεις του κλειστού διαστήματος $[0,1]$ με τη μέθοδο τραπεζίου και υπολογίστε το σφάλμα.

Μέθοδος Simpson

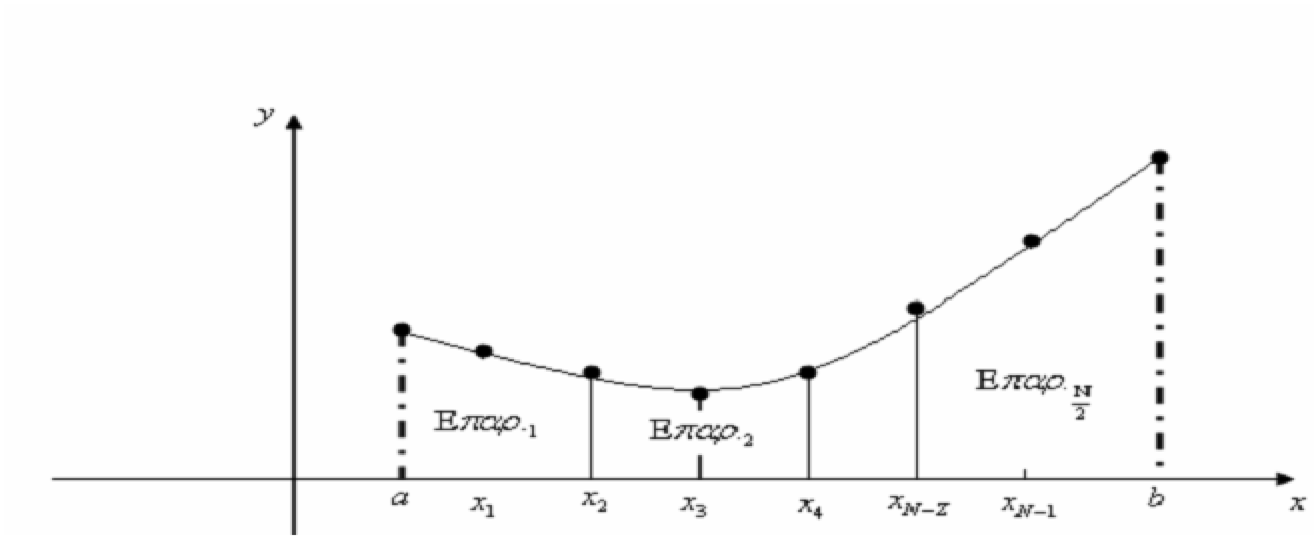
Με τη μέθοδο αυτή προσεγγίζουμε την τιμή του $\int_{\alpha}^{b} f(x)dx$ μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα $[\alpha,b]$ με χρήση εμβαδών παραβολών, οι οποίες προκύπτουν από την προσέγγιση της συνάρτησής μας σε στοιχειώδη υποδιαστήματα του $[\alpha,b]$ από πολυώνυμα $2^{ου}$ βαθμού, δηλ. από παραβολές. Όπως θα δούμε παρακάτω το σφάλμα (για τον ίδιο αριθμό υποδιαιρέσεων του $[\alpha,b]$) είναι καλύτερο σε σχέση με τη μέθοδο τραπεζίου. Υπάρχουν διάφορες παραλλαγές της μεθόδου αυτής. Για την καλύτερη κατανόηση της μεθόδου αναφέρουμε τη βασική της εκδοχή.

- Έστω $\{x_0 = \alpha, x_1, \ldots, x_N = b\}$ $x_0 < x_1 < \ldots. < x_N$ είναι ένας ομοιόμορφος διαμερισμός του $[\alpha,b]$, δηλαδή χωρίζουμε το $[\alpha,b]$ σε N ισομήκη υποδιαστήματα.

- Τότε: $x_i = x_0 + \kappa \frac{b-\alpha}{N}, \qquad \kappa = 0,\dots,N.$

- Υπολογίζουμε τις τιμές $f(x_i), \quad i = 0,\dots.,N.$

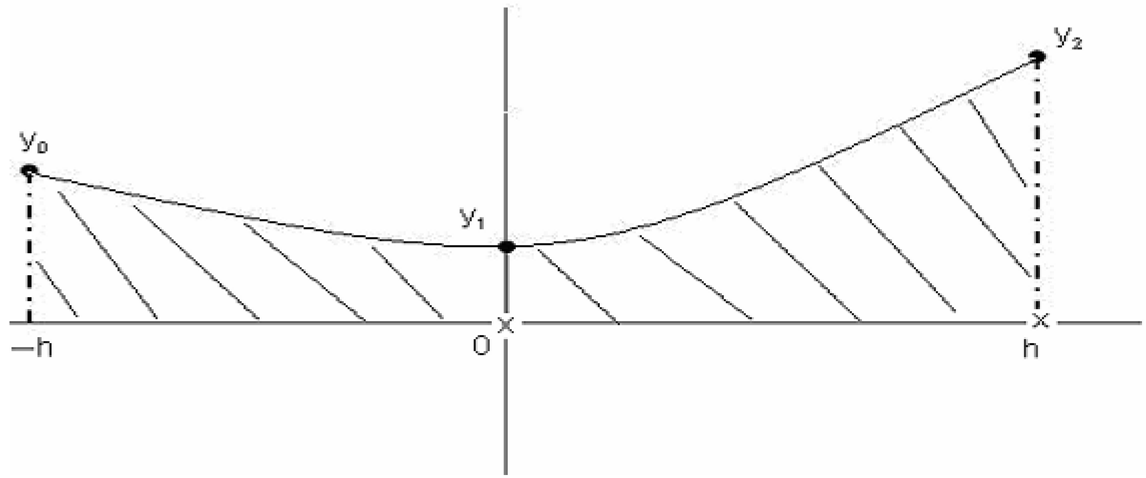
- Σχηματίζουμε τις διαδοχικές παραβολές που διέρχονται από τα σημεία $f(x_i), f(x_{i+1}), f(x_{i+2}),\ i = 0,\dots,N/2$ οπότε πρέπει **N = ζυγός**.



- Υπολογίζουμε τα εμβαδά των N/2-παραβολών που σχηματίζονται και έχουμε:

$$\int_\alpha^b f(x)dx \cong E_{\pi\alpha\rho\alpha\beta._1} + \dots + E_{\pi\alpha\rho\alpha\beta._{\frac{N}{2}}}.$$

Θεώρημα Εστω παραβολή $y(x) = \alpha x^2 + bx + c$ όπως στο κάτωθι σχήμα:



Σχήμα 3

τότε:

$$E_{\pi\alpha\rho\alpha\beta.} = \int_{-h}^{h} (\alpha x^2 + bx + c)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Τελικά:

$$E_{\pi\alpha\rho\alpha\beta} = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2). \quad \square$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε:

$$\int_\alpha^b f(x)dx \cong E_{\pi\alpha\rho\alpha\beta\cdot 1} + \ldots + E_{\pi\alpha\rho\alpha\beta\cdot\frac{N}{2}}$$

$$= \frac{b-\alpha}{3N}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\big) + \frac{b-\alpha}{3N}\big(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\big)$$

$$+ \ldots + \frac{b-\alpha}{3N}\big(f(x_{N-2}) + 4f(x_{N-1}) + f(x_N)\big)$$

$$= \frac{b-\alpha}{3N}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4) + \ldots$$

$$\ldots + f(x_{N-2}) + 4f(x_{N-1}) + f(x_N))$$

$$\int_\alpha^b f(x)dx \cong \frac{b-\alpha}{3N}\left(f(x_0) + f(x_N) + 2\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} f(x_{2i-1})\right).$$

Σφάλμα προσέγγισης

Εργαζόμενοι όπως παραπάνω, δηλαδή λαμβάνονται υπόψη ότι ο τύπος Simpson ολοκληρώνει ακριβώς και πολυώνυμα 3^{ου} βαθμού έχουμε:

$$f(x) - p_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}(x-\alpha)\left(x - \frac{\alpha+b}{2}\right)^2 (b-x) \text{ κ.λπ.}$$

οπότε υπολογίζουμε:

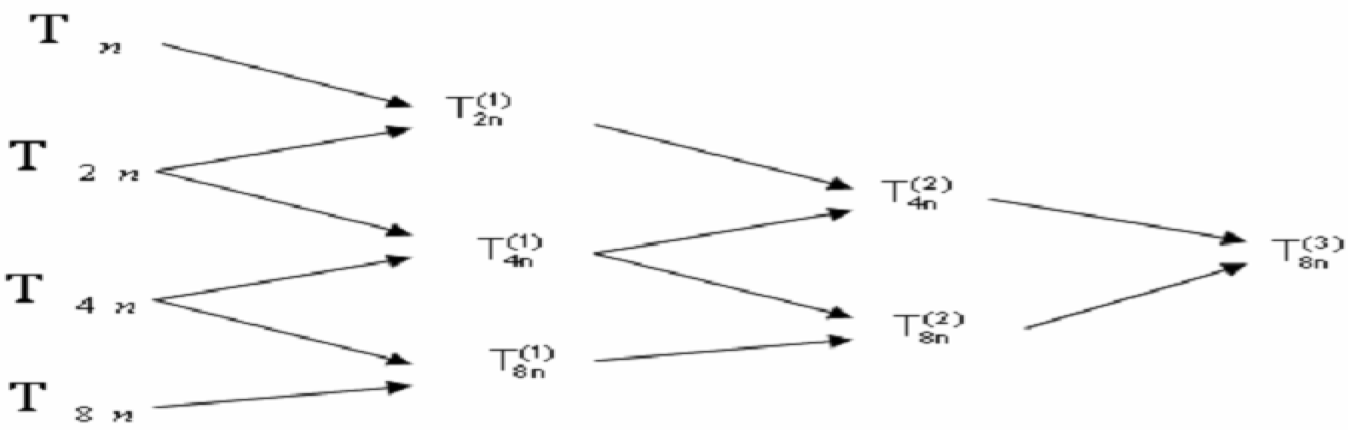
$$|e| \leq \frac{(b-\alpha)^5}{180N^4}M, \text{ όπου } M = \max\left\{|f^{(4)}(x)| : x \in [\alpha, b]\right\}. \qquad (4)$$

Παράδειγμα

<u>**Παράδειγμα**</u> **1** Υπολογίστε την προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^1 e^{-x^2} dx$, χρησιμοποιώντας $N = 8$ ισομήκεις υποδιαιρέσεις του κλειστού διαστήματος $[0,1]$ με τη μέθοδο Simpson και υπολογίστε το σφάλμα.

Ολοκλήρωση Romberg

Χρησιμοποιεί μία τεχνική διαδοχικών διχοτομήσεων του διαστήματος ολοκλήρωσης με στόχο τη μείωση του σφάλματος αποκοπής. Αν T_n είναι η προσέγγιση του ολοκληρώματος που προκύπτει από τον κανόνα τραπεζίου με n-υποδιαστήματα υπολογίζουμε τις T_{2n}, T_{4n}, T_{8n} κ.λπ. Συνδυάζοντας τις προσεγγίσεις αυτές μπορούμε να πάρουμε ακόμα καλύτερες προσεγγίσεις με τον ακόλουθο τρόπο:



όπου εάν το συνολικό πλήθος των υποδιαστημάτων του [α,b] είναι $N = 2^{\mu} n$, τότε:

$$T_{2i}^{(j)} = T_{2i}^{(j-1)} + \frac{T_{2i}^{(j-1)} - T_{i}^{(j-1)}}{4^{j} - 1}, \; i, j = 1, 2, \ldots \mu . \qquad (5)$$

Παράδειγμα: Υπολογίστε με τη μέθοδο Romberg το $\int_0^{0.8} \frac{\eta\mu x}{x} dx$ χρησιμοποιώντας 8 υποδιαιρέσεις του [0,0.8] όπως παρακάτω:

0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
1	0.9983	0.9933	0.9851	0.9735	0.9589	0.9411	0.9203	0.8967