ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

ΟΡΙΣΜΟΣ (Αλγεβρικη Εκφραση)

Ως εξωτερικο γινομενο των 3-διαστατων διανυσματων $\vec{x}=(x_1, x_2, x_3)$ και $\vec{y}=(y_1, y_2, y_3)$ του $\mathbb{R}^3$ οριζεται το διανυσμα

$$\vec{x}\times\vec{y} := (x_2 y_3 - x_3 y_2,\ x_3 y_1 - x_1 y_3,\ x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

$$= (x_2 y_3 - x_3 y_2)\vec{i} + (x_3 y_1 - x_1 y_3)\vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{k}$$

του $\mathbb{R}^3$

Το εξωτερικο γινομενο οριζεται μονο για διανυσματα $\vec{x}, \vec{y}$ του $\mathbb{R}^3$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

$\vec{x}\times\vec{y}$ ορθογωνιο προς τα διανυσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$.

Αποδειξη

$$\vec{x}\cdot(\vec{x}\times\vec{y}) = x_1(x_2 y_3 - x_3 y_2) + x_2(x_3 y_1 - x_1 y_3) + x_3(x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0$$

Ομοιως $(\vec{x}\times\vec{y})\cdot\vec{y} = 0$

Εναλλακτικη διατυπωση

$$\vec{x}\times\vec{y} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

Θεωρουμε τη συμβολικη οριζουσα

μνημονικός κανόνας

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

Υπολογιζεται μονο αναπτυγμα ως προς τα στοιχεια i, j, k της πρωτης γραμμης.

και γράφουμε $\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ (ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ)

$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν

1) $\vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}$

2) $\vec{x} \times \vec{y} = -(\vec{y} \times \vec{x})$

3) $(\lambda \vec{x}) \times \vec{y} = \lambda(\vec{x} \times \vec{y}) = \vec{x} \times (\lambda \vec{y})$

4) $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}$

5) $(\vec{x} + \vec{y}) \times \vec{z} = \vec{x} \times \vec{z} + \vec{y} \times \vec{z}$

6) $\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$

7) $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z}$

Απόδειξη

Ενδεικτικά την 6)

$$\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) = (x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k}) \left(\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \vec{k} \right)$$

$$= \dots$$

$$= \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k} \right) (z_1 \vec{i} + z_2 \vec{j} + z_3 \vec{k})$$

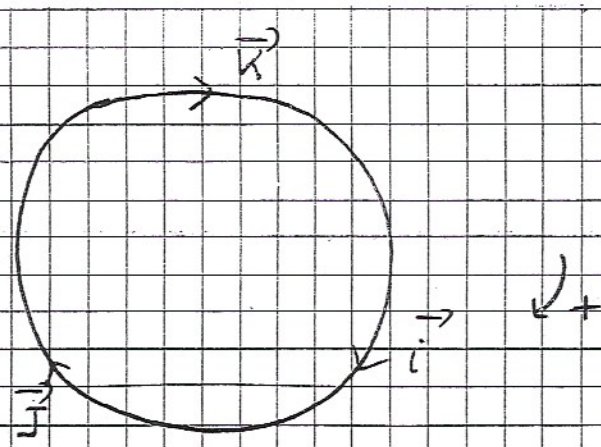
$$= (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$



Μνημονικός Κανόνας

Φορά των βελών ⇒ επόμενο διάνυσμα

Αντίθετη φορά ⇒ μείον επόμενο.

Παρατηρήσεις

$\vec{i} \times \vec{j} \neq \vec{j} \times \vec{i}$ $\quad \times$ όχι αντιμεταθετικό

$\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{j}) = \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$

$(\vec{i} \times \vec{i}) \times \vec{j} = \vec{0} \times \vec{j} = \vec{0}$ Δεν ισχύει προσεταιριστική

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

ΠΡΟΤΑΣΗ (ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ LAGRANGE)

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$

$$\|\vec{x} \times \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2$$

Απόδειξη (άμεση) με $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$

ΘΕΩΡΗΜΑ (ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ)

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ $\quad \theta = \sphericalangle \vec{x}, \vec{y}$ $\quad (0 \le \theta \le \pi)$. Τότε ισχύει

$$\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \, ημθ$$

Απόδειξη

Lagrange ⇒ $\|\vec{x} \times \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 συν^2\theta$

$= \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 ημ^2\theta$

Επειδή $ημθ \ge 0$ $\quad (0 \le \theta \le \pi)$ ⇒ $ημθ = |ημθ|$

και $\quad \|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \, ημθ$

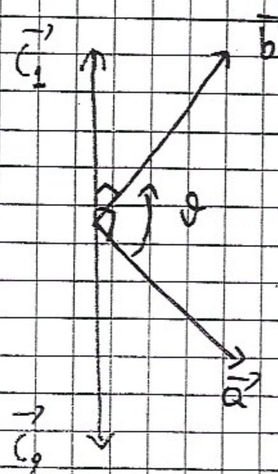
ΠΟΡΙΣΜΑ $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^3$ $\quad \vec{x},\vec{y}\neq 0$ (Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων)

παράλληλα $\Leftrightarrow$ $\vec{x}\times\vec{y}=\vec{0}$

$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ $\qquad \|\vec{c}\|=\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\,\eta\mu\theta$

$\vec{c}$ κάθετο προς το επίπεδο των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

$\exists$ $\vec{c}_1,\vec{c}_2$ με $\vec{c}_2=-\vec{c}_1$ και $\|\vec{c}_1\|=\|\vec{c}_2\|=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\,\eta\mu\theta$



$\vec{c}_1=\vec{a}\times\vec{b}$

Προσδιορισμός της φοράς με τον κανόνα του δεξιού χεριού.

$\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3$

$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ δεξιόστροφο σύστημα όταν η κατεύθυνση του $\vec{w}$ προσδιορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Δηλαδή $(\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b})$ δεξιόστροφο σύστημα

$(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ $\quad \|$

διότι $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$

Αλγεβρική Περιγραφή $\equiv$ Γεωμετρική Περιγραφή

Άσκηση $\vec{a}=(1,1,1)$, $\vec{b}=(1,0,-1)$

$\vec{c}=(2,1,-1)$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}(-1)-\vec{j}(-2)+\vec{k}(-1)=(-1,2,-1)$$

$\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = -1+2+1 = 2$