Κεφάλαιο 2

Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύσσονται στοιχειώδεις μέθοδοι για τον αναλυτικό προσδιορισμό των λύσεων απλών συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης της γενικής μορφής

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad x \in I, \tag{2.0.1}$$

και αναφέρονται ορισμένες βασικές εφαρμογές των εξισώσεων αυτών. Οι αναπτυσσόμενες μέθοδοι αφορούν την επίλυση διαφορικών εξισώσεων χωριζομένων μεταβλητών, ομογενών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, ακριβών διαφορικών εξισώσεων καθώς επίσης και διαφορικών εξισώσεων Bernoulli και Ricatti.

2.1 Διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών

Μία Δ.Ε. πρώτης τάξης της μορφής

$$y' = g(x)h(y), \tag{2.1.1}$$

ονομάζεται *διαχωρίσιμη Δ.Ε. ή Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών*. Ο διαχωρισμός των μεταβλητών x και y στα μέλη της εξίσωσης καθιστά δυνατή την αόριστη ολοκλήρωση κάθε μέλους της εξίσωσης χωριστά.

Η (2.1.1) αποτελεί μία ειδική κατηγορία της (2.0.1) για $f(x, y) = g(x)h(y)$, δηλαδή όπου το δεξιό μέλος εκφράζεται ως γινόμενο μιας συνάρτησης του x επί μίας του y.

Για να λύσουμε τη Δ.Ε. (2.1.1) ακολουθούμε την εξής διαδικασία.

(i) Πρώτα λύνουμε την εξίσωση $h(y) = 0$. Μία ρίζα ρ της $h(y) = 0$ οδηγεί στη λύση $y(x) = \rho$ της Δ.Ε. (2.1.1). Οι σταθερές λύσεις της (2.1.1) που αντιστοιχούν στις ρίζες της $h(y) = 0$ αναφέρονται ως *ιδιάζουσες λύσεις* της Δ.Ε.

(ii) Για $h(y) \neq 0$, διαιρούμε και τα δύο μέλη με την $h(y)$ και οδηγούμαστε στην

$$\frac{y'(x)}{h(y)} = g(x), \quad h(y) \neq 0. \tag{2.1.2}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $y = y(x)$, οπότε $\mathrm{d}y = y'(x)\mathrm{d}x$, ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας ως προς x, έχουμε

$$\int \frac{y'(x)}{h(y(x))}\mathrm{d}x = \int g(x)\mathrm{d}x, \tag{2.1.3}$$

δηλαδή

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int g(x)\mathrm{d}x. \tag{2.1.4}$$

Αν $H(y)$ είναι μία παράγουσα της $\frac{1}{h(y)}$ και $G(x)$ μία παράγουσα της $g(x)$ τότε το γενικό ολοκλήρωμα της (2.1.1) είναι

$$H(y) = G(x) + c, \tag{2.1.5}$$

όπου c αυθαίρετη σταθερά. Έτσι, το αρχικό πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση των αόριστων ολοκληρωμάτων των συναρτήσεων $\frac{1}{h}$ και g.

Η διαδικασία επίλυσης της (2.1.1), που περιγράφτηκε παραπάνω, αναφέρεται ως *χωρισμός μεταβλητών*.

Όταν πρόκειται για Π.Α.Τ. της μορφής

$$y'(x) = g(x)h(y)\,, \quad y(x_0) = y_0\,, \tag{2.1.6}$$

η αρχική συνθήκη $y(x_0) = y_0$ χρησιμοποιείται για την κατάλληλη επιλογή της σταθεράς c.

Ιδιαιτέρως, σημειώνουμε ότι οι σταθερές συναρτήσεις $y(x) = \rho$, που αντιστοιχούν στις ρίζες ρ της $h(y) = 0$, δεν μπορούν να αποτελούν λύσεις του Π.Α.Τ. αν $y_0 \neq \rho$.

Παράδειγμα 2.1.1 Λύστε το Π.Α.Τ.

$$y' - e^{x-y} = 0, \quad y(0) = 1.$$

Λύση.

Ακολουθώντας τη διαδικασία χωρισμού των μεταβλητών, έχουμε

$$e^y \mathrm{d}y = e^x \mathrm{d}x,$$

και ολοκληρώνοντας

$$\int e^y \mathrm{d}y = \int e^x \mathrm{d}x + c,$$

προκύπτει

$$e^y = e^x + c.$$

Με εφαρμογή της αρχικής συνθήκης υπολογίζουμε ότι $c = e - 1$, και άρα

$$e^y = e^x + e - 1\,,$$

από όπου μπορούμε και να λύσουμε εκπεφρασμένα ως προς y

$$y(x) = \ln(e^x + e - 1).$$

$\triangle$

Σημειώνουμε ότι η λύση του τελευταίου παραδείγματος ορίζεται για κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής x, διότι $e^x + e - 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Αυτό όμως δεν είναι πάντα έτσι, όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα, και άρα πρέπει να γίνεται έλεγχος για το μεγαλύτερο διάστημα της x που ορίζεται η λύση y.

Παράδειγμα 2.1.2 Λύστε το Π.Α.Τ.

$$e^x e^y y' - e^{-y} = 0, \quad y(0) = 0.$$

Λύση.

Ακολουθώντας τη διαδικασία χωρισμού των μεταβλητών, λαμβάνουμε

$$e^x e^y dy \;=\; e^{-y} dx,$$

ισοδύναμα

$$e^{2y} dy \;=\; e^{-x} dx,$$

και ολοκληρώνοντας

$$\int e^{2y} dy \;=\; \int e^{-x} dx + c,$$

προκύπτει

$$\frac{1}{2} e^{2y} \;=\; -e^{-x} + c\,.$$

Θέτοντας $c_1 = 2c$, έχουμε

$$e^{2y} = -2e^{-x} + c_1.$$

Εφαρμόζοντας την αρχική συνθήκη $y(0) = 0$, βρίσκουμε $c_1 = 3$, και έτσι τελικά η λύση του Π.Α.Τ. προκύπτει να είναι

$$e^{2y} = 3 - 2e^{-x},$$

η οποία σε εκπεφρασμένη μορφή γράφεται ως

$$y(x) = \frac{1}{2}\ln(3 - 2e^{-x}).$$

Η τελευταία λύση ορίζεται για $3 - 2e^{-x} > 0 \Rightarrow x > \ln(2/3)$. Υπενθυμίζουμε ότι η λύση ενός Π.Α.Τ. πρέπει πάντα να ορίζεται σε ένα διάστημα που περιέχει το αρχικό σημείο x_0. Εδώ, πράγματι είναι έτσι διότι $0 \in \left(\ln\left(\frac{2}{3}\right), +\infty\right)$.

$\triangle$

Στα προηγούμενα παραδείγματα βρήκαμε τις γενικές λύσεις των Δ.Ε., δηλαδή τις συναρτήσεις $y(x)$ σε εκπεφρασμένη μορφή που τις επαληθεύουν. Αυτό, όμως δεν είναι πάντα εφικτό, όπως δείχνεται στο ακόλουθο παράδειγμα στο οποίο μπορούμε να βρούμε μόνο το γενικό ολοκλήρωμα.

Παράδειγμα 2.1.3 Λύστε το Π.Α.Τ.

$$(1 + x^4)y\,y' - x^3(y^2 + 1) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Λύση.

Έχουμε διαδοχικά ότι

$$(1 + x^4)y\,dy - x^3(y^2 + 1)dx = 0,$$

ισοδύναμα

$$\frac{y}{y^2 + 1}dy = \frac{x^3}{1 + x^4}dx,$$

από όπου με αόριστη ολοκλήρωση

$$\int \frac{y}{y^2 + 1}dy = \int \frac{x^3}{1 + x^4}dx + c_1,$$

έχουμε

$$\frac{1}{2}\ln \mid y^2 + 1 \mid = \frac{1}{4}\ln \mid 1 + x^4 \mid + c.$$

Γράφοντας τη σταθερά c στη μορφή $\frac{1}{4}\ln c_1,\ c_1 > 0$, έχουμε

$$(y^2 + 1)^2 = c_1(x^4 + 1),$$

που είναι το γενικό ολοκλήρωμα της Δ.Ε.

Για να βρούμε τη μερική λύση, η οποία ικανοποιεί τη δοσμένη αρχική συνθήκη $y(1) = 1$, θέτουμε $x = 1$ και $y = 1$ στη γενική λύση και λαμβάνουμε $c_1 = 2$. Έτσι, η ζητούμενη λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$(y^2 + 1)^2 = 2(x^4 + 1),$$

η οποία μπορεί να απλοποιηθεί στη μορφή

$$y^2 = -1 + \sqrt{2(x^4 + 1)}\,.$$

△

Τέλος, στο ακόλουθο παράδειγμα διασαφηνίζεται ότι πρέπει να γίνεται κατάλληλος έλεγχος στις ρίζες της συνάρτησης $h(y)$, οι οποίες (σύμφωνα με το βήμα (i) της γενικής μεθοδολογίας) πάντα αποτελούν λύσεις της Δ.Ε.

Παράδειγμα 2.1.4 Λύστε τη Δ.Ε.

$$(x^2 - 1)y\,y' + 2x(y + y^2) = 0, \quad x > 1.$$

Λύση.

Εφαρμόζουμε τη διαδικασία χωρισμού μεταβλητών

$$(x^2 - 1)y\,dy = -2x(y + y^2)dx,$$

και για $y + y^2 \neq 0$, δηλαδή $y \neq 0$ και $y \neq -1$, έχουμε

$$\frac{1}{y+1}\,dy = -\frac{2x}{x^2 - 1}dx,$$

οπότε με αόριστη ολοκλήρωση

$$\int \frac{1}{y+1}\,dy = -\int \frac{2x}{x^2 - 1}dx + c,$$

λαμβάνουμε

$$\ln|y + 1| = -\ln|x^2 - 1| + c.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $x > 1$ και θέτοντας $c_1 = e^c$, προκύπτει

$$|y + 1|(x^2 - 1) = c_1,$$

από την οποία παίρνουμε τη γενική λύση της Δ.Ε.

$$y(x) = -1 + \frac{c_2}{x^2 - 1}, \quad c_2 \neq 0.$$

Πρέπει να εξετάσουμε ξεχωριστά τις $y = 0$ και $y = -1$ που είναι και οι δύο λύσεις της Δ.Ε. και τις οποίες είχαμε εξαιρέσει νωρίτερα στη διαδικασία χωρισμού μεταβλητών. Η $y = -1$ μπορεί να προκύψει από τη γενική λύση για $c_2 = 0$. Όμως, η $y = 0$ δεν λαμβάνεται από τη γενική λύση για καμία τιμή της σταθεράς c_2.

Άρα, τελικά, όλες οι λύσεις της Δ.Ε. δίνονται από

$$y(x) = -1 + \frac{c_2}{x^2 - 1}, \;\; c_2 \in \mathbb{R}, \;\; \text{και} \;\; y(x) = 0.$$

△

2.2 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις

Μια Δ.Ε. της μορφής

$$y'(x) = F\left(\frac{y}{x}\right), \;\; x \neq 0, \tag{2.2.1}$$

δηλαδή της οποίας η συνάρτηση δευτέρου μέλους εξαρτάται μόνο από το πηλίκο $\frac{y}{x}$ και όχι από τις μεταβλητές x και y ξεχωριστά, ονομάζεται *ομογενής*. Η ορολογία ομογενής, η οποία χρησιμοποιείται εδώ, είναι διαφορετική εκείνης της ομογενούς γραμμικής Δ.Ε. (1.1.3).

Για να λύσουμε την (2.2.1) κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής

$$y(x) = xu(x), \tag{2.2.2}$$

οπότε

$$y'(x) = u(x) + xu'(x),$$

και έτσι η (2.2.1) γράφεται

$$xu' + u = F(u),$$

ή ισοδύναμα

$$u' = \frac{F(u) - u}{x}. \tag{2.2.3}$$

Η (2.2.3) είναι Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών και λύνεται, σύμφωνα με τα αναφερόμενα στην προηγούμενη παράγραφο. Έτσι, λαμβάνουμε

$$\int \frac{du}{F(u) - u} = \int \frac{dx}{x}, \tag{2.2.4}$$

οπότε

$$G(u) = \ln|x| + c, \tag{2.2.5}$$

οπου $G(u)$ είναι μία παράγουσα της $\frac{1}{F(u)-u}$.

Εισάγοντας στην (2.2.5) το μετασχηματισμό (2.2.2), λαμβάνουμε το γενικό ολοκλήρωμα

$$G\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + c, \tag{2.2.6}$$

της αρχικής Δ.Ε. (2.2.1).

Παράδειγμα 2.2.1 Λύστε τη Δ.Ε.

$$y' = e^{2\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}, \;\; x \neq 0.$$

Λύση. Η Δ.Ε. είναι της μορφής (2.2.1) με

$$f(x, y) = e^{2\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} \equiv F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Για τη λύση της κάνουμε την αντικατάσταση (2.2.2) και ευρίσκουμε

$$xu' + u = e^{2u} + u,$$

οπότε

$$xu' = e^{2u}.$$

Η τελευταία είναι Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών, η οποία επίσης γράφεται

$$e^{-2u}u' = \frac{1}{x},$$

και μετά από αόριστη ολοκλήρωση ευρίσκουμε

$$-\frac{1}{2}e^{-2u} = \ln|x| + c\,.$$

Από την τελευταία θέτοντας $u = \frac{y}{x}$ και $c = \ln c_1$, λαμβάνουμε το γενικό ολοκλήρωμα

$$-\frac{1}{2}e^{-2\frac{y}{x}} = \ln|c_1 x|\,,$$

από το οποίο προκύπτει η γενική λύση της Δ.Ε.

$$y(x) = -\frac{x}{2}\ln(-2\ln|c_1 x|)\,.$$

△

Με την ίδια διαδικασία επιλύονται και Δ.Ε. της μορφής

$$y'(x) = \frac{p(x,y)}{q(x,y)}, \ \ x \neq 0, \tag{2.2.7}$$

όπου οι συναρτήσεις $p(x,y)$ και $q(x,y)$ είναι ομογενείς ως προς x και y του ίδιου βαθμού ομογένειας m, δηλαδή ισχύουν

$$p(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m p(x,y) \ \text{ και } \ q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m q(x,y), \tag{2.2.8}$$

οπότε

$$p(x,y) = x^m p\left(1, \frac{y}{x}\right) \ \text{ και } \ q(x,y) = x^m q\left(1, \frac{y}{x}\right), \tag{2.2.9}$$

και έτσι η (2.2.7) γράφεται

$$y'(x) = \frac{p\left(1, \frac{y}{x}\right)}{q\left(1, \frac{y}{x}\right)} = \frac{P\left(\frac{y}{x}\right)}{Q\left(\frac{y}{x}\right)}. \tag{2.2.10}$$

Για τη λύση της (2.2.10) ακολουθούμε τη διαδικασία επίλυσης της (2.2.1).

Παράδειγμα 2.2.2 Λύστε τη Δ.Ε.

$$y'(x) = -\frac{x^2 + y^2}{3xy}, \ \ x \neq 0.$$

Λύση. Η Δ.Ε. είναι της μορφής (2.2.7), όπου

$$p(x,y) = x^2 + y^2 = x^2 \left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)$$

και

$$q(x,y) = -3xy = -x^2 \left(3\frac{y}{x}\right),$$

είναι ομογενείς συναρτήσεις βαθμού 2.

Έτσι, θέτουμε

$$P\left(\frac{y}{x}\right) = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2,$$

και

$$Q\left(\frac{y}{x}\right) = -3\frac{y}{x},$$

και οδηγούμαστε στη Δ.Ε.

$$y'(x) = -\frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{3\frac{y}{x}}.$$

Εφαρμόζοντας στην τελευταία την αντικατάσταση (2.2.2), λαμβάνουμε

$$u'x + u = -\frac{1 + u^2}{3u},$$

η οποία ισοδύναμα γράφεται

$$\frac{3u}{4u^2+1}u' = -\frac{1}{x},$$

και η οποία είναι Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών.

Έτσι, με αόριστη ολοκλήρωση ευρίσκουμε

$$\frac{3}{8}\ln(4u^2+1) = -\ln|x| + c,$$

από την οποία έχουμε

$$\ln[(4u^2+1)^3 x^8] = 8c\,.$$

Από την τελευταία για $u = \frac{y}{x}$ και $8c = \ln c_1$, λαμβάνουμε το γενικό ολοκλήρωμα της Δ.Ε.

$$x^2(4y^2+x^2)^3 = c_1\,.$$

$\triangle$

2.3 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

Μια Δ.Ε. της μορφής

$$y' = -p(x)y + q(x), \tag{2.3.1}$$

όπου οι συναρτήσεις $p, q : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς σε ένα διάστημα I, λέγεται *γραμμική Δ.Ε. πρώτης τάξης*.

Η γενική λύση της Δ.Ε. (2.3.1) ευρίσκεται με εφαρμογή της λεγόμενης *μεθόδου ολοκληρωτικού παράγοντα*, η οποία περιγράφεται ως εξής.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (2.3.1) με μία άγνωστη (αρχικά) παραγωγίσιμη συνάρτηση $\mu : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\mu(x) \neq 0$, $\forall x \in I$, η οποία αναφέρεται ως *ολοκληρωτικός παράγοντας*, και λαμβάνουμε

$$\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x). \tag{2.3.2}$$

Αναζητούμε συνάρτηση μ για την οποία το αριστερό μέλος της τελευταίας Δ.Ε. να είναι η παράγωγος της συνάρτησης $\mu(x)y$. Αυτό συμβαίνει τότε και μόνο τότε όταν η μ ικανοποιεί τη Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών

$$\mu'(x) = \mu(x)p(x), \tag{2.3.3}$$

η οποία έχει τη λύση

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\mathrm{d}x}. \tag{2.3.4}$$

Συνδυάζοντας τις (2.3.2) και (2.3.3), αναγόμαστε στην

$$[\mu(x)y]' = \mu(x)q(x), \tag{2.3.5}$$

από την οποία με αόριστη ολοκλήρωση λαμβάνουμε

$$\mu(x)y = \int \mu(x)q(x)\mathrm{d}x + c, \tag{2.3.6}$$

οπότε με τη βοήθεια και της (2.3.4), ευρίσκουμε τελικά τη γενική λύση

$$y = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c\right] \tag{2.3.7}$$

της Δ.Ε. (2.3.1).

Όταν πρόκειται για Π.Α.Τ. της μορφής

$$y' = -p(x)y + q(x)\,, \quad y(x_0) = y_0\,, \tag{2.3.8}$$

τότε προσδιορίζουμε τη λύση του, υπολογίζοντας από την (2.3.7) την τιμή της σταθερά c με τη βοήθεια της αρχικής συνθήκης $y(x_0) = y_0$.

Εναλλακτικά, για τον προσδιορισμό της γενικής λύσης της Δ.Ε. (2.3.1), μπορούμε να εφαρμόσουμε και τη *μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων*, η οποία περιγράφεται ως εξής.

Θεωρούμε αρχικά την αντίστοιχη ομογενή Δ.Ε.

$$y' + p(x)y = 0 \tag{2.3.9}$$

της (2.3.1). Με τη μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών ευρίσκουμε τη γενική λύση

$$y = c\,e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \tag{2.3.10}$$

της Δ.Ε. (2.3.9).

Για την επίλυση της Δ.Ε. (2.3.1), αναζητούμε λύση της μορφής (2.3.10), υποθέτοντας ότι η αυθαίρετη σταθερά c είναι συνάρτηση του x, δηλαδή $c = c(x)$, οπότε έχουμε

$$y = c(x)\,e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}. \tag{2.3.11}$$

Αντικαθιστώντας την (2.3.11) στην (2.3.1), οδηγούμαστε στη Δ.Ε.

$$c'(x) = q(x)\,e^{\int p(x)\mathrm{d}x}, \tag{2.3.12}$$

από την οποία με αόριστη ολοκλήρωση λαμβάνουμε

$$c(x) = \int q(x)\,e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + d, \tag{2.3.13}$$

οπου d αυθαίρετη σταθερά.

Εισάγοντας την (2.3.13) στην (2.3.11), επανευρίσκουμε (για $d = c$) τη γενική λύση (2.3.7) της Δ.Ε. (2.3.1).

Παρατήρηση 2.3.1 Από την (2.3.7) προκύπτει ότι η γενική λύση της (2.3.1) εκφράζεται ως άθροισμα της γενικής λύσης

$$c\, e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$$

της ομογενούς Δ.Ε. (2.3.9) και μίας ειδικής λύσης

$$e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \int q(x) e^{\int p(x)\mathrm{d}x} \mathrm{d}x$$

της μη ομογενούς Δ.Ε. (2.3.7). Όπως θα εξηγήσουμε παρακάτω (βλ. Κεφάλαιο 4, Παράγραφος 4.1), η ιδιότητα αυτή είναι χαρακτηριστική των λύσεων γραμμικών Δ.Ε. ανώτερης τάξης.

△

Σημείωση 2.3.1 Η μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων εφαρμόζεται επίσης στα επόμενα και για την επίλυση Δ.Ε. δεύτερης τάξης (βλ. Κεφάλαιο 4, Παράγραφος 4.7).

△

Παράδειγμα 2.3.1 Λύστε τη Δ.Ε.

$$y' - \frac{y}{x} = x^{\alpha}, \;\; x > 0.$$

Λύση. Από την (2.3.4), ευρίσκουμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα

$$\mu(x) = e^{\int (-\frac{1}{x})\mathrm{d}x} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x},$$

και έτσι η Δ.Ε. ανάγεται στην

$$\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = x^{\alpha-1},$$

η οποία επίσης γράφεται

$$\left(\frac{1}{x}y\right)' = x^{\alpha-1}.$$

Στη συνέχεια με αόριστη ολοκλήρωση λαμβάνουμε

$$\frac{1}{x}y = \int x^{\alpha-1}\mathrm{d}x + c,$$

από την οποία ευρίσκουμε τη γενική λύση

$$y = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha} + cx, & \alpha \neq 0 \\ x\ln x + cx, & \alpha = 0 \end{cases}.$$

△

Παράδειγμα 2.3.2 Λύστε τη Δ.Ε.

$$y' + \frac{y}{x} = e^{3x}, \;\; x > 0.$$

Λύση. Εφαρμόζοντας τον (2.3.7), ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}
y &= e^{-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int e^{3x} e^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c\right] \\
&= e^{-\ln|x|}\left[\int e^{3x} e^{\ln|x|}\mathrm{d}x + c\right] \\
&= e^{\ln\frac{1}{x}}\left[\int e^{3x}\, x\mathrm{d}x + c\right] \\
&= \frac{1}{x}\left[\frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + c\right] \\
&= \frac{1}{x}\left[\frac{e^{3x}}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right) + c\right].
\end{aligned}$$

△

Παράδειγμα 2.3.3 Λύστε τη Δ.Ε.

$$y' + \frac{2}{\tan x} y = \frac{1}{\sin x}, \;\; 0 < x < \pi.$$

Λύση. Η γενική λύση της Δ.Ε. ευρίσκεται από τη (2.3.7)

$$\begin{aligned}
y &= e^{-\int \frac{2}{\tan x}\mathrm{d}x}\left[\int \frac{1}{\sin x} e^{\int \frac{2}{\tan x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c\right] \\
&= e^{-2\ln|\sin x|}\left[\int \frac{1}{\sin x} e^{2\ln|\sin x|}\mathrm{d}x + c\right] \\
&= \frac{1}{\sin^2 x}\left[\int \sin x\,\mathrm{d}x + c\right] \\
&= \frac{1}{\sin^2 x}(c - \cos x).
\end{aligned}$$

△

Παράδειγμα 2.3.4 Λύστε τη Δ.Ε.

$$y' + 3x^2 y = 3x^2 e^{-x^3}.$$

Λύση. Εφαρμόζοντας την (2.3.7), ευρίσκουμε τη γενική λύση

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int 3x^2 \mathrm{d}x}\left[\int 3x^2 e^{-x^3} e^{\int 3x^2 \mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + c\right] \\ &= e^{-x^3}\left[\int 3x^2 e^{-x^3} e^{x^3}\,\mathrm{d}x + c\right] \\ &= e^{-x^3}\left[\int 3x^2\,\mathrm{d}x + c\right] \\ &= e^{-x^3}(x^3 + c). \end{aligned}$$

△

2.4 Ακριβείς διαφορικές εξισώσεις

Στην παράγραφο αυτή ασχολούμαστε με την επίλυση Δ.Ε. πρώτης τάξης της μορφής

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0, \tag{2.4.1}$$

όπου P και Q είναι συνεχείς συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό υποσύνολο D του $\mathbb{R}^2$.

Ως μία εισαγωγή στη διαδικασία επίλυσης των Δ.Ε. αυτών επεξεργαζόμαστε αρχικά τη Δ.Ε.

$$(4x^3y + 3x^2y^2) + (x^4 + 2x^3y)y' = 0.$$

Η εξίσωση αυτή δεν είναι γραμμική ούτε χωριζομένων μεταβλητών. Όμως, εύκολα βλέπουμε ότι ισχύουν

$$4x^3y + 3x^2y^2 = \frac{\partial}{\partial x}(x^4y + x^3y^2)$$

και

$$x^4 + 2x^3y = \frac{\partial}{\partial y}(x^4y + x^3y^2).$$

Έτσι, η Δ.Ε. γράφεται

$$\Phi_x(x,y) + \Phi_y(x,y)y' = 0, \tag{α}$$

όπου

$$\Phi(x,y) = x^4y + x^3y^2.$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα αλυσίδας για τη συνάρτηση $\Phi(x,y)$ με $y = y(x)$, παρατηρούμε ότι η (α) επίσης γράφεται

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi(x, y(x)) = 0,$$