Λαμβάνοντας τώρα το μετασχηματισμό Laplace και χρησιμοποιώντας την Πρόταση 7.3.5, ευρίσκουμε

$$G(s) = \frac{1}{s} - \frac{2e^{-\tau s}}{s} + \frac{e^{-2\tau s}}{s} = \frac{(1-e^{-\tau s})^2}{s}.$$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 7.3.7, και επειδή το τετραγωνικό κύμα είναι 2τ-περιοδική συνάρτηση, τελικά έχουμε

$$F(s) = \frac{(1-e^{-\tau s})^2}{s(1-e^{-2\tau s})} = \frac{1-e^{-\tau s}}{s(1+e^{-\tau s})}, \quad s > 0.$$

△

7.4 Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Στην παράγραφο αυτή συζητούμε την αντιστρεψιμότητα του μετασχηματισμού Laplace. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace χρησιμοποιείται στην εύρεση λύσεων Π.Α.Τ., όπως περιγράφεται αναλυτικά στην επόμενη παράγραφο.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace ορίζεται ως εξής.

Ορισμός 7.4.1 Έστω μία πραγματική συνάρτηση $F = F(s) : (\alpha, +\infty) \to \mathbb{R}$. Αν υπάρχει μία συνάρτηση $f = f(t) : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, τότε η f ονομάζεται *αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace* της F και συμβολίζεται με $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, οπότε έχουμε

$$\mathcal{L}\{\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}\} = F(s)$$

και

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f(t)\}\} = f(t).$$

□

Μία αυστηρή απόδειξη της ύπαρξης του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace προϋποθέτει προχωρημένα αποτελέσματα της θεωρίας μιγαδικής ολοκλήρωσης, τα οποία θεωρούνται εκτός του σκοπού του βιβλίου.

Το ακόλουθο σχετικό θεώρημα δίνει πληροφορίες για την ύπαρξη του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace.

Θεώρημα 7.4.1 Έστω $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ τοπικά τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις, οι οποίες είναι εκθετικής τάξης, οπότε υπάρχουν οι μετασχηματισμοί Laplace $F(s)$ και $G(s)$ αυτών (Θεώρημα 7.3.1). Αν ισχύει $F(s) = G(s)$ για κάθε $s > c$ (για κάποιο c) τότε $f(t) = g(t)$ σε κάθε υποδιάστημα του $[0, +\infty)$, όπου οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς.

□

Όπως συνάγεται από το θεώρημα αυτό, δύο τοπικά τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις εκθετικής τάξης στο διάστημα $[0, +\infty)$ με τον ίδιο μετασχηματισμό Laplace είναι δυνατόν να διαφέρουν μόνο στα σημεία ασυνέχειας. Έτσι, στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές του μετασχηματισμού Laplace στις Δ.Ε., λόγω της συνέχειας των λύσεών τους, οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί θεωρούνται μοναδικοί.

Σε συγκεκριμένες περιπτώσεις συνεχών συναρτήσεων, των οποίων οι μετασχηματισμοί Laplace καταχωρούνται σε πίνακες, λόγω της μοναδικότητας του αντιστρόφου μετασχηματισμού, από τους πίνακες αυτούς προκύπτουν και οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί.

Συνεχίζουμε τώρα με την καταγραφή των βασικών χρηστικών ιδιοτήτων του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace.

Πρόταση 7.4.1 (Ιδιότητες του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace)

Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Laplace αποδεικνύονται οι ακόλουθες ιδιότητες του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace

1. $\mathcal{L}^{-1}\{a\,F(s) \pm b\,G(s)\} = a\,\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \pm b\,\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$.
2. $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t)$.
3. $\mathcal{L}^{-1}\{F(as)\} = \frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right)$.

□

Ο απευθείας υπολογισμός του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace απαιτεί σε ορισμένες περιπτώσεις προχωρημένες γνώσεις θεωρίας μιγαδικής ολοκλήρωσης (βλ. [1]). Στην πράξη, συνήθως, προσπαθούμε να φέρουμε τη συνάρτηση $F(s)$, της οποίας θέλουμε να βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, σε κάποια κατάλληλη μορφή αθροίσματος στοιχειωδών συναρτήσεων (κυρίως με χρήση της *ανάλυσης σε απλά κλάσματα*, η οποία περιγράφεται στη συνέχεια μέσω παραδειγμάτων), των οποίων γνωρίζουμε τους μετασχηματισμούς Laplace. Κατά αυτή τη διαδικασία είναι, συνήθως, πολύ χρήσιμοι οι πίνακες μετασχηματισμού Laplace στοιχειωδών συναρτήσεων.

Παράδειγμα 7.4.1 Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$F(s) = \frac{s-1}{s^2+4}.$$

Λύση.

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα 1 της Πρότασης 7.4.1 και τα γνωστά αποτελέσματα για το μετασχηματισμό Laplace των συναρτήσεων $\cos(at)$ και $\sin(at)$ (βλ. Παράδειγμα 7.3.5), ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2+4}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} \\ &= \cos(2t) - \frac{1}{2}\sin(2t).\end{aligned}$$

△

Παράδειγμα 7.4.2 Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$F(s) = \frac{1}{s^2-3s+2}.$$

Λύση. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο ανάλυσης σε απλά κλάσματα. Αρχικά, έχουμε ότι

$$\frac{1}{s^2-3s+2} = \frac{1}{(s-1)(s-2)},$$

οπότε αναζητούμε A και B τέτοια ώστε

$$\frac{1}{(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2}$$

και άρα

$$1 = A(s-2) + B(s-1).$$

Για $s=1$ έχουμε $1=-A \Rightarrow A=-1$, ενώ για $s=2$ έχουμε $B=1$, και έτσι προκύπτει

$$F(s) = -\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2}.$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 7.3.4, τελικά ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-3s+2}\right\} &= -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} \\ &= -e^t + e^{2t}.\end{aligned}$$

△

Παρατήρηση 7.4.1 Στο προηγούμενο παράδειγμα, για να υπολογίσουμε τις τιμές των συντελεστών A και B, αντικαταστήσαμε στην έκφραση

$$(*) \qquad 1 = A(s-2) + B(s-1)$$

τις τιμές $s = 1$ και $s = 2$, οι οποίες ήταν ρίζες των παρανομαστών στην αμέσως προηγούμενη έκφραση

$$(**) \qquad \frac{1}{(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2}.$$

Αυτό είναι, πράγματι, επιτρεπτό διότι αν δύο πολυώνυμα βαθμού n είναι ίσα για περισσότερες από n αντικαταστάσεις της μεταβλητής, τότε είναι ίσα για κάθε τιμή της μεταβλητής. Η (*) ισχύει για όλες τις τιμές της s, εκτός πιθανά από τις $s = 1$ και $s = 2$ για τις οποίες οι παρανομαστές της (**) μηδενίζονται. Επομένως, η (*) ισχύει *για κάθε* τιμή της s συμπεριλαμβανομένων και των $s = 1$ και $s = 2$.

△

Παράδειγμα 7.4.3 Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$F(s) = \frac{1}{s^2 - 6s + 9}.$$

Λύση. Επειδή

$$\frac{1}{s^2 - 6s + 9} = \frac{1}{(s-3)^2},$$

χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 7.3.8, ευρίσκουμε

$$L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\} = te^{3t}.$$

△

Παράδειγμα 7.4.4 Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$F(s) = \frac{s}{(s+1)^3}.$$

Λύση. Η δοσμένη συνάρτηση γράφεται ως εξής

$$\frac{s}{(s+1)^3} = \frac{s+1-1}{(s+1)^3} = \frac{s+1}{(s+1)^3} - \frac{1}{(s+1)^3} = \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^3}$$

και άρα, από το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 7.3.8, λαμβάνουμε

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^3}\right\} = te^{-t} - \frac{1}{2}t^2e^{-t}.$$

△

Παράδειγμα 7.4.5 Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2-2s+5}.$$

Λύση. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{s+2}{s^2-2s+5} &= \frac{s+2}{(s-1)^2+4} \\ &= \frac{s-1}{(s-1)^2+2^2} + \frac{3}{(s-1)^2+2^2} \\ &= \frac{s-1}{(s-1)^2+2^2} + \frac{3}{2}\,\frac{2}{(s-1)^2+2^2}, \end{aligned}$$

και άρα, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 7.3.2, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} L^{-1}\{F(s)\} &= L^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}\right\} + \frac{3}{2}L^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2+2^2}\right\} \\ &= e^t\cos(2t) + \frac{3}{2}e^t\sin(2t)\,. \end{aligned}$$

△

Παράδειγμα 7.4.6 Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$F(s) = \frac{2s-1}{s(s-1)(s-2)}.$$

Λύση. Η συνάρτηση $F(s)$ αναλύεται σε απλά κλάσματα ως εξής

$$\frac{2s-1}{s(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2},$$

οπότε

$$2s-1 = A(s-1)(s-2) + Bs(s-2) + Cs(s-1).$$

Για $s=0$, λαμβάνουμε $-1 = 2A \Rightarrow A = -1/2$. Για $s=1$, έχουμε $1 = -B \Rightarrow B = -1$. Για $s=2$, έχουμε $3 = 2C \Rightarrow C = 3/2$.

Επομένως, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} \\ &= -\frac{1}{2} - e^t + \frac{3}{2}e^{2t}. \end{aligned}$$

△

Παράδειγμα 7.4.7 Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}.$$

Λύση. Βρίσκουμε A, B και C τέτοια ώστε

$$\frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2},$$

οπότε

$$1 = A(s+1)^2 + Bs(s+1) + Cs.$$

Για $s = 0$, έχουμε $A = 1$. Για $s = -1$, έχουμε $1 = -C \Rightarrow C = -1$ και για $s = 1$, λαμβάνουμε $B = -1$.

Άρα, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} \\ &= 1 - e^{-t} - te^{-t}.\end{aligned}$$

△

7.5 Λύση προβλημάτων αρχικών τιμών με εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace

Μια από τις σημαντικότερες εφαρμογές του μετασχηματισμού Laplace είναι η χρησιμοποίησή του για την επίλυση Π.Α.Τ για Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές. Η διαδικασία επίλυσης συνοψίζεται ως εξής

1. λαμβάνουμε αρχικά το μετασχηματισμό Laplace και των δύο μελών της Δ.Ε. (οπότε το πρόβλημα ανάγεται σε μία *αλγεβρική* εξίσωση ως προς $\mathrm{Y}(s) \equiv \mathcal{L}\{y(t)\}$),

2. επιλύουμε την αλγεβρική εξίσωση ως προς $\mathrm{Y}(s)$,

3. λαμβάνουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό και υπολογίζουμε την άγνωστη συνάρτηση ως $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathrm{Y}(s)\}$.

Τονίζουμε ότι το πρώτο βήμα της παραπάνω διαδικασίας είναι κάτι περισσότερο από μία απλή μετατροπή της Δ.Ε. σε αλγεβρική εξίσωση διότι οι αρχικές συνθήκες του Π.Α.Τ. ενσωματώνονται στη μετασχηματισμένη αλγεβρική εξίσωση και έτσι δεν εμφανίζονται αυθαίρετες σταθερές στη λύση.

Ακολουθούν ενδεικτικά παραδείγματα για την εφαρμογή της διαδικασίας επίλυσης σε συγκεκριμένα Π.Α.Τ.

Παράδειγμα 7.5.1 Λύστε το Π.Α.Τ.

$$2y'(t) - y(t) = e^{2t},\ y(0) = 1.$$

Λύση. Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Laplace στη Δ.Ε., λαμβάνουμε

$$2\mathcal{L}\{y'(t)\} - \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{e^{2t}\},$$

οπότε από τον τύπο (7.3.5) και το Παράδειγμα 7.3.4, ευρίσκουμε

$$2s\mathrm{Y}(s) - 2y(0) - \mathrm{Y}(s) = \frac{1}{s-2},$$

και μετά και την ενσωμάτωση και της αρχικής συνθήκης

$$(2s-1)\mathrm{Y}(s) = 2 + \frac{1}{s-2}$$

ή

$$\mathrm{Y}(s) = \frac{2s-3}{(2s-1)(s-2)}.$$

Η $\mathrm{Y}(s)$ αναλύεται σε απλά κλάσματα ως εξής

$$\frac{2s-3}{(2s-1)(s-2)} = \frac{A}{2s-1} + \frac{B}{s-2},$$

οπότε

$$2s-3 = A(s-2) + B(2s-1)\,.$$

Για $s = \frac{1}{2}$, έχουμε $-2 = -\frac{3}{2}A \Rightarrow A = \frac{4}{3}$ και για $s = 2$, έχουμε $1 = 3B \Rightarrow B = \frac{1}{3}$.

Επομένως, τελικά προκύπτει

$$\begin{aligned} y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-3}{(2s-1)(s-2)}\right\} &= \frac{4}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s-1}\right\} + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} \\ &= \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-\frac{1}{2}}\right\} + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} \\ &= \frac{2}{3}e^{\frac{1}{2}t} + \frac{1}{3}e^{2t}. \end{aligned}$$

$\triangle$

Παράδειγμα 7.5.2 Λύστε το Π.Α.Τ.

$$y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = e^t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$$

Λύση. Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Laplace στη Δ.Ε., ευρίσκουμε

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} - 5\mathcal{L}\{y'(t)\} + 6\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{e^t\},$$

από όπου με τη βοήθεια των τύπων (7.3.5) και (7.3.6) και του Παραδείγματος 7.3.4, λαμβάνουμε

$$s^2\mathrm{Y}(s) - sy(0) - y'(0) - 5(s\mathrm{Y}(s) - y(0)) + 6\mathrm{Y}(s) = \frac{1}{s-1}$$

και μετά από την ενσωμάτωση των αρχικών συνθηκών

$$(s^2 - 5s + 6)\mathrm{Y}(s) = s + 1 - 5 + \frac{1}{s-1}$$

ή

$$\mathrm{Y}(s) = \frac{s^2 - 5s + 5}{(s-1)(s-2)(s-3)}.$$

Στη συνέχεια, αναλύουμε την $\mathrm{Y}(s)$ σε απλά κλάσματα ως εξής

$$\frac{s^2 - 5s + 5}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-3},$$

οπότε

$$s^2 - 5s + 5 = A(s-2)(s-3) + B(s-1)(s-3) + C(s-1)(s-2).$$

Για $s = 1$, έχουμε $1 = A(-1)(-2) \Rightarrow A = \frac{1}{2}$. Για $s = 2$, έχουμε $-1 = -B \Rightarrow B = 1$. Για $s = 3$, έχουμε $-1 = 2C \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$.

Έτσι, τελικά λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2 - 5s + 5}{(s-1)(s-2)(s-3)}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} \\ &= \frac{1}{2}e^t + e^{2t} - \frac{1}{2}e^{3t}. \end{aligned}$$

$\triangle$

Παράδειγμα 7.5.3 Ένα σώμα μάζας m κρέμεται από (ιδανικό) ελατήριο, του οποίου το άνω άκρο είναι πακτωμένο. Το ελατήριο υποτίθεται ότι έχει μηδενική μάζα και η δύναμη επαναφοράς του είναι ανάλογη της επιμήκυνσης. Το σώμα μετακινείται κατακορύφως προς τα κάτω κατά μία αρχική απόσταση y_0 και αφήνεται ελεύθερο με αρχική ταχύτητα v_0.

1. Περιγράψτε την απομάκρυνση $y(t)$ του σώματος από τη θέση ισορροπίας του με ένα Π.Α.Τ. υπό την υπόθεση ότι στην κίνηση υπάρχει δύναμη τριβής λόγω του αέρα, η οποία είναι ανάλογη της στιγμιαίας ταχύτητας $v(t)$.

2. Λύστε το Π.Α.Τ. με χρήση του μετασχηματισμού Laplace.

Λύση. Έστω ότι η αρχή O είναι το σημείο ισορροπίας και $y > 0$ ($y < 0$) δηλώνει μετατόπιση του σώματος προς τα κάτω (άνω). Οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο σώμα είναι η δύναμη επαναφοράς F του ελατηρίου, η οποία από το νόμο Hooke δίνεται από

$$F(t) = -ky(t),$$

όπου $k > 0$ η σταθερά του ελατηρίου, και η αντίσταση τριβής T λόγω του αέρα, η οποία δίνεται από

$$T(t) = -bv(t) = -by'(t).$$

Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, το άθροισμα των δυνάμεων αυτών είναι ίσο με το γινόμενο της μάζας του επί την επιτάχυνση $a(t)$, επομένως ισχύει

$$F(t) + T(t) = ma(t),$$

δηλαδή η απομάκρυνση $y(t)$ πληρεί τη Δ.Ε.

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0,$$

η οποία είναι γνωστή ως *θεμελιώδης εξίσωση του αποσβεννύμενου αρμονικού ταλαντωτή* (*fundamental equation of the damped harmonic oscillator*).

Άρα, το Π.Α.Τ. το οποίο περιγράφει την κίνηση του σώματος είναι

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0, \;\; y(0) = y_0, \;\; y'(0) = v_0. \tag{7.5.1}$$

Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace στη Δ.Ε., και έχουμε

$$m\mathcal{L}\{y''(t)\} + b\mathcal{L}\{y'(t)\} + k\mathcal{L}\{y(t)\} = 0,$$

από όπου με τη βοήθεια των τύπων (7.3.5) και (7.3.6), λαμβάνουμε

$$m\left(s^2\mathrm{Y}(s) - sy(0) - y'(0)\right) + b\left(s\mathrm{Y}(s) - y(0)\right) + k\mathrm{Y}(s) = 0$$

και μετά από την ενσωμάτωση των αρχικών συνθηκών

$$ms^2\mathrm{Y}(s) - msy_0 - mv_0 + bs\mathrm{Y}(s) - by_0 + k\mathrm{Y}(s) = 0$$

ή

$$\mathrm{Y}(s) = \frac{sy_0 + \frac{b}{m}y_0 + v_0}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}},$$

η οποία γράφεται ως

$$\mathrm{Y}(s) = \frac{sy_0 + \alpha}{(s+\beta)^2 + \tilde{\gamma}},$$

όπου $\alpha = \frac{b}{m}y_0 + v_0$, $\beta = \frac{b}{2m}$ και $\tilde{\gamma} = \frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}$.

Ο τρόπος αντιστροφής της $\mathrm{Y}(s)$ και τα χαρακτηριστικά της συνάρτησης απομάκρυνσης $y(t)$, η οποία περιγράφει την κίνηση του σώματος, εξαρτώνται από το πρόσημο του συντελεστή $\tilde{\gamma}$, για το οποίο διακρίνουμε τις εξής τρεις περιπτώσεις.

1. $\tilde{\gamma} = \gamma^2 > 0$

Η $\mathrm{Y}(s)$ έχει, τότε, τη μορφή

$$\mathrm{Y}(s) = \frac{sy_0 + \alpha}{(s+\beta)^2 + \gamma^2},$$

η οποία γράφεται ως εξής

$$\mathrm{Y}(s) = \frac{y_0(s+\beta) + \alpha - \beta y_0}{(s+\beta)^2 + \gamma^2}$$

ή ισοδύναμα

$$\mathrm{Y}(s) = y_0\frac{s+\beta}{(s+\beta)^2 + \gamma^2} + \frac{\alpha - \beta y_0}{(s+\beta)^2 + \gamma^2}.$$

Λαμβάνουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και με τη βοήθεια της Πρότασης 7.3.2 και των αποτελεσμάτων του Παραδείγματος (7.3.5), ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+\beta}{(s+\beta)^2+\gamma^2}\right\} + \frac{\alpha-\beta y_0}{\gamma}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\gamma}{(s+\beta)^2+\gamma^2}\right\} \\ &= y_0\,e^{-\beta t}\cos(\gamma t) + \frac{\alpha-\beta y_0}{\gamma}e^{-\beta t}\sin(\gamma t) \\ &= e^{-\beta t}\frac{y_0\gamma\cos(\gamma t) + (\alpha-\beta y_0)\sin(\gamma t)}{\gamma}. \end{aligned}$$

Επομένως, η λύση ταλαντώνεται διότι περιέχει ημιτονικούς και συνημιτονικούς όρους. Το πλάτος, όμως, των ταλαντώσεων φθίνει συνεχώς λόγω του παράγοντα $e^{-\beta t} = e^{-\frac{b}{2m}t}$. Το σύστημα, σε αυτή την περίπτωση, καλείται *υποαποσβεννύμενο* (*underdamped*).

2. $\tilde{\gamma} = -\gamma^2 < 0$

Η $\mathrm{Y}(s)$ έχει, τότε, τη μορφή

$$\mathrm{Y}(s) = \frac{sy_0 + \alpha}{(s+\beta)^2 - \gamma^2},$$

και, ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία με την περίπτωση 1, λαμβάνουμε

$$y(t) = e^{-\beta t}\frac{y_0\gamma\cosh(\gamma t) + (\alpha - \beta y_0)\sinh(\gamma t)}{\gamma}.$$

Τώρα, η λύση δεν ταλαντώνεται διότι περιέχει μόνο εκθετικούς όρους. Το σύστημα σε αυτή την περίπτωση καλείται *υπεραποσβεννύμενο* (*overdamped*). Από φυσικής πλευράς, αυτό σημαίνει ότι η δύναμη τριβής είναι μεγάλη συγκρινόμενη με τη δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου και έτσι η μάζα μετακινείται αργά προς τη θέση ισορροπίας της.

3. $\tilde{\gamma} = 0$

Η $\mathrm{Y}(s)$ έχει τη μορφή

$$\mathrm{Y}(s) = \frac{sy_0 + \alpha}{(s+\beta)^2},$$

η οποία γράφεται ως εξής

$$\mathrm{Y}(s) = \frac{y_0}{s+\beta} + \frac{\alpha - \beta y_0}{(s+\beta)^2}.$$

Λαμβάνουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και με τη βοήθεια των αποτελεσμάτων των Παραδειγμάτων (7.3.5) και (7.3.8), ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{y_0}{s+\beta}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\alpha - \beta y_0}{(s+\beta)^2}\right\} \\ &= y_0\, e^{-\beta t} + (\alpha - \beta y_0)te^{-\beta t} \\ &= e^{-\beta t}\left[y_0 + (\alpha - \beta y_0)t\right]. \end{aligned}$$

Η λύση και εδώ δεν ταλαντώνεται και το σύστημα τώρα καλείται *κρίσιμα αποσβεννύμενο* (*critically damped*). Το σώμα έρχεται στη θέση ισορροπίας του στον ελάχιστο χρόνο και δεν περνάει πάνω από τη θέση αυτή.

$\triangle$

Παρατήρηση 7.5.1 Όπως σε κάθε ταλαντούμενο σύστημα, οι ταλαντώσεις δεν μπορούν να διατηρηθούν για πάντα λόγω της βαθμιαία αποσβεννύμενης μηχανικής ενέργειας του συστήματος, εκτός αν το σύστημα τροφοδοτηθεί με ενέργεια εξωτερικά. Για παράδειγμα, αν εφαρμοστεί μία εξωτερική δύναμη $f(t)$, τότε το Π.Α.Τ. (7.5.2) παίρνει τη μορφή

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t), \;\; y(0) = y_0, \;\; y'(0) = v_0, \tag{7.5.2}$$

και οι λύσεις του καλούνται *εξαναγκασμένες ταλαντώσεις* (*forced oscillations*).

$\triangle$

Παρατήρηση 7.5.2 Το ηλεκτρικό ανάλογο του μηχανικού συστήματος του Παραδείγματος 7.5.3 είναι το RLC-κύκλωμα, το οποίο παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 1.2, και μοντελοποιείται από το ακόλουθο Π.Α.Τ. με άγνωστη τη συνάρτηση φορτίου $q(t)$ στους οπλισμούς του πυκνωτή

$$L\,q''(t) + R\,q'(t) + \frac{1}{C}\,q(t) = v(t), \;\; q(0) = q_0, \;\; q'(0) = i_0. \tag{7.5.3}$$

Παρατηρούμε ότι η Δ.Ε. του Π.Α.Τ. (7.5.3) ανάγεται σε Δ.Ε. της μορφής (7.5.2) για $L = m$, $R = b$ και $C = \frac{1}{k}$, και έτσι η μελέτη του ηλεκτρικού κυκλώματος είναι ανάλογη με εκείνη του μηχανικού συστήματος.

$\triangle$

Παράδειγμα 7.5.4 Ένα πηνίο με αυτεπαγωγή L και ένας πυκνωτής χωρητικότητας C συνδέονται σε σειρά με μία πηγή τάσης

$$v(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \tau \\ v_0, & t \ge \tau \end{cases}. \tag{7.5.4}$$

Βρείτε τη συνάρτηση φορτίου $q(t)$ αν $q(0) = 0$ και $i(0) = 0$.

Λύση. Η τάση v γράφεται με τη βοήθεια της βηματικής συνάρτησης

$$v(t) = v_0\,u(t - \tau).$$

Έτσι, με βάση τα αναφερόμενα για τη μοντελοποίηση του προβλήματος στην Παράγραφο 1.2 και λαμβάνοντας υπόψη ότι εδώ η αντίσταση των στοιχείων του κυκλώματος είναι ίση με μηδέν, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση φορτίου $q(t)$ είναι λύση του Π.Α.Τ.

$$L\,q''(t) + \frac{1}{C}\,q(t) = v_0\,u(t - \tau), \;\; q(0) = 0, \;\; q'(0) = 0. \tag{7.5.5}$$

Λαμβάνουμε το μετασχηματισμό Laplace της Δ.Ε. και με τη βοήθεια των τύπων (7.3.6) και (7.3.3) και χρησιμοποιώντας και τις αρχικές συνθήκες, έχουμε

$$Ls^2Q(s) + \frac{1}{C}Q(s) = v_0\frac{e^{-\tau s}}{s},$$

από την οποία προκύπτει

$$Q(s) = \frac{v_0}{L}\frac{e^{-\tau s}}{s\left(s^2 + \frac{1}{LC}\right)},$$

και μετά από ανάλυση της τελευταίας σε απλά κλάσματα παίρνουμε

$$Q(s) = v_0C\left(\frac{e^{-\tau s}}{s} - \frac{se^{-\tau s}}{s^2 + \frac{1}{LC}}\right).$$

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και χρησιμοποιώντας τον τύπο (7.3.3) και το αποτέλεσμα του Παραδείγματος (7.3.5), ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} q(t) &= v_0Cu(t-\tau)\left[1 - \cos\left(\frac{t-\tau}{\sqrt{LC}}\right)\right] \\ &= \left\{\begin{array}{cc} 0, & 0 \le t < \tau \\ v_0C\left[1 - \cos\left(\frac{t-\tau}{\sqrt{LC}}\right)\right], & t \ge \tau \end{array}\right. . \end{aligned}$$

△

Παρατήρηση 7.5.3 Από το τελευταίο παράδειγμα φαίνεται καθαρά η πραγματική δύναμη του μετασχηματισμού Laplace: το ότι η συνάρτηση δευτέρου μέλους $v(t)$ δεν είναι συνεχής θα ήταν πρόβλημα για την επίλυση του Π.Α.Τ. με τις μεθόδους που έχουν αναλυθεί στα προηγούμενα κεφάλαια. Με τη γραφή όμως των συναρτήσεων μέσω της βηματικής συνάρτησης και τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace είναι εφικτή η επίλυση Π.Α.Τ. αυτής της μορφής.

△

Παράδειγμα 7.5.5 Βρείτε τη λύση του συστήματος των Δ.Ε. πρώτης τάξης

$$\begin{aligned} y'(t) + x(t) = t \\ x'(t) - y(t) = 1 \end{aligned},$$

η οποία ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $x(0) = 1$ και $y(0) = 1$.

Λύση.

Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace στις Δ.Ε. και λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'(t)\} + \mathcal{L}\{x(t)\} &= \mathcal{L}\{t\} \\ \mathcal{L}\{x'(t)\} - \mathcal{L}\{y(t)\} &= \mathcal{L}\{1\} \end{aligned} ,$$

από όπου χρησιμοποιώντας τον τύπο (7.3.5) και τα αποτελέσματα των Παραδειγμάτων 7.2.1 και 7.2.2, έχουμε

$$\begin{aligned} s\mathrm{Y}(s) - y(0) + \mathrm{X}(s) &= \tfrac{1}{s^2} \\ s\mathrm{X}(s) - x(0) - \mathrm{Y}(s) &= \tfrac{1}{s} \end{aligned}$$

και με ενσωμάτωση των αρχικών συνθηκών

$$\begin{aligned} s\mathrm{Y}(s) + \mathrm{X}(s) &= \tfrac{1}{s^2} + 1 \\ s\mathrm{X}(s) - \mathrm{Y}(s) &= \tfrac{1}{s} + 1 \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} \mathrm{X}(s) &= \tfrac{1}{s^2} + \tfrac{s+1}{s^2+1} \\ \mathrm{Y}(s) &= \tfrac{s-1}{s^2+1} \end{aligned} .$$

Εφαρμόζουμε τώρα τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\tfrac{1}{s^2}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\tfrac{s+1}{s^2+1}\} \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\tfrac{s-1}{s^2+1}\} \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\tfrac{1}{s^2}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\tfrac{s}{s^2+1}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\tfrac{1}{s^2+1}\} \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\tfrac{s}{s^2+1}\} - \mathcal{L}^{-1}\{\tfrac{1}{s^2+1}\} \end{aligned} ,$$

από την οποία, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των Παραδειγμάτων (7.2.2) και (7.3.5), τελικά προκύπτει

$$\begin{aligned} x(t) &= t + \cos t + \sin t \\ y(t) &= \cos t - \sin t \end{aligned} .$$

△

Παράδειγμα 7.5.6 Βρείτε τη λύση του συστήματος των Δ.Ε. δεύτερης τάξης

$$\begin{aligned} y''(t) - 4y(t) + x(t) &= e^{-t} \\ x''(t) - x(t) + y(t) &= e^{2t} \end{aligned},$$

η οποία ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $x'(0) = -1$ και $y'(0) = 2$.

Λύση.

Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace στις Δ.Ε. και έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''(t)\} - 4\mathcal{L}\{y(t)\} + \mathcal{L}\{x(t)\} &= \mathcal{L}\{e^{-t}\} \\ \mathcal{L}\{x''(t)\} - \mathcal{L}\{x(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} &= \mathcal{L}\{e^{2t}\} \end{aligned},$$

από όπου, χρησιμοποιώντας τον τύπο (7.3.6) και το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 7.3.4, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} s^2\mathrm{Y}(s) - sy(0) - y'(0) - 4\mathrm{Y}(s) + \mathrm{X}(s) &= \tfrac{1}{s+1} \\ s^2\mathrm{X}(s) - sx(0) - x'(0) - \mathrm{X}(s) + \mathrm{Y}(s) &= \tfrac{1}{s-2} \end{aligned}$$

και με ενσωμάτωση των αρχικών συνθηκών

$$\begin{aligned} (s^2 - 4)\mathrm{Y}(s) + \mathrm{X}(s) &= \tfrac{1}{s+1} + s + 2 \\ (s^2 - 1)\mathrm{X}(s) + \mathrm{Y}(s) &= \tfrac{1}{s-2} + s - 1 \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} [(s^2 - 1)(s^2 - 4) - 1]\mathrm{Y}(s) &= \tfrac{(s^2-1)(s^2-4)-1}{s-2} \\ (s^2 - 1)\mathrm{X}(s) &= \tfrac{1}{s-2} + s - 1 - \mathrm{Y}(s) \end{aligned},$$

οπότε

$$\begin{aligned} \mathrm{Y}(s) &= \tfrac{1}{s-2} \\ \mathrm{X}(s) &= \tfrac{1}{s+1} \end{aligned}.$$

Εφαρμόζουμε τώρα τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\tfrac{1}{s-2}\} \\ x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\tfrac{1}{s+1}\} \end{aligned},$$

από την οποία, με τη βοήθεια του αποτελέσματος του Παραδείγματος (7.3.4), τελικά προκύπτει

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{2t} \\ x(t) &= e^{-t} \end{aligned}.$$

△

7.6 Συνέλιξη και εφαρμογές

Ορισμός 7.6.1 Έστω δύο συναρτήσεις f, $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Ονομάζουμε συνέλιξη $f * g$ των συναρτήσεων f και g τη συνάρτηση που ορίζεται από

$$(f * g)(t) \equiv \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau.$$

□

Προφανώς, ισχύει ότι

$$(g * f)(t) \equiv \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = (f * g)(t)\,.$$

Για το μετασχηματισμό Laplace της συνέλιξης δύο συναρτήσεων ισχύει το ακόλουθο βασικό

Θεώρημα 7.6.1 Έστω συναρτήσεις $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με μετασχηματισμούς Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s),\ s > \alpha_1$ και $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s),\ s > \alpha_2$, αντιστοίχως. Τότε, υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της $f * g$ και ισχύει

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)\, G(s), \quad s > \max\{\alpha_1, \alpha_2\}.$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό (7.2.2) του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε

$$F(s)\, G(s) = F(s) \int_0^{+\infty} g(\tau) e^{-s\tau} \mathrm{d}\tau = \int_0^{+\infty} g(\tau) F(s) e^{-s\tau} \mathrm{d}\tau,$$

από την οποία χρησιμοποιώντας την (7.3.3), λαμβάνουμε

$$F(s)\, G(s) = \int_0^{+\infty} g(\tau) \left[\int_0^{+\infty} u(t-\tau) f(t-\tau) e^{-st} \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}\tau.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f και g είναι τοπικά τμηματικά συνεχείς και εκθετικής τάξης, μπορούμε στην τελευταία να εναλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης, οπότε προκύπτει

$$F(s)\, G(s) = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} u(t-\tau) f(t-\tau) g(\tau) \mathrm{d}\tau \right] e^{-st} \mathrm{d}t,$$

και επειδή η συνάρτηση $u(t-\tau) = u(-(\tau - t))$ είναι μηδέν για $\tau > t$, τελικά ευρίσκουμε

$$F(s)\, G(s) = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{t} f(t-\tau) g(\tau) \mathrm{d}\tau \right] e^{-st} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (f * g)(t) e^{-st} \mathrm{d}t.$$

□

Άμεσες συνέπειες του τελευταίου θεωρήματος είναι οι εξής

Πόρισμα 7.6.1

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\,G(s)\} = (f * g)(t), \quad t \geq 0.$$

□

Πόρισμα 7.6.2

$$\mathcal{L}\{(f * 1)(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{s}F(s).$$

□

Παράδειγμα 7.6.1 Βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2+4)}.$$

Λύση. Θεωρούμε την παρακάτω γραφή της δοθείσας συνάρτησης σε μορφή γινομένου

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2+4)} = F(s)G(s) = \frac{1}{s^2+4}\,\frac{1}{s},$$

για την οποία έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{2}\sin(2t) \\ g(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1. \end{aligned}$$

Επομένως, από το Πόρισμα 7.6.1, λαμβάνουμε

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = (f * g)(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \sin(2\tau)\,d\tau = \frac{1}{4}(1-\cos(2t))\,.$$

△

Παράδειγμα 7.6.2 Βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$H(s) = \frac{1}{(s^2+a^2)^2}, \;\; a \neq 0.$$

Λύση. Η συνάρτηση $H(s)$ γράφεται σε μορφή γινομένου

$$H(s) = F(s)G(s) = \frac{1}{s^2+a^2}\,\frac{1}{s^2+a^2},$$

για την οποία έχουμε ότι $f(t) = g(t)$ με

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{1}{a}\sin(at).$$

Έτσι, από το Πόρισμα 7.6.1, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = (f*f)(t) \\ &= \frac{1}{a^2}\int_0^t \sin(a\tau)\,\sin(a(t-\tau))\,d\tau \\ &= \frac{1}{2a^3}\left[\sin(at) - at\cos(at)\right]. \end{aligned}$$

△

Παράδειγμα 7.6.3 Βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$H(s) = \frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)},\quad a \neq \pm b,\ \ b \neq 0.$$

Λύση. Θεωρούμε την παρακάτω γραφή της δοθείσας συνάρτησης σε μορφή γινομένου

$$H(s) = \frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)} = F(s)G(s) = \frac{1}{s^2+b^2}\,\frac{s}{s^2+a^2},$$

για την οποία έχουμε

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+b^2}\right\} = \frac{1}{b}\sin(bt) \\ g(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos(at). \end{aligned}$$

Έτσι, από το Πόρισμα 7.6.1, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = (f*g)(t) = \frac{1}{b}\int_0^t \sin(b\tau)\,\cos(a(t-\tau))\,d\tau \\ &= \frac{1}{2b}\int_0^t \left[\sin(at+(b-a)\tau)\ +\ \sin((b+a)\tau - at)\right]\,d\tau \\ &= \frac{\cos(at)-\cos(bt)}{b^2-a^2}. \end{aligned}$$

△

Η χρήση του μετασχηματισμού Laplace της συνέλιξης συναρτήσεων βρίσκει σημαντικές εφαρμογές στην επίλυση *ολοκληρωτικών εξισώσεων συνελικτικού τύπου*, οι οποίες είναι εξισώσεις της μορφής

$$y(t) = f(t) + \int_0^t k(t-\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{7.6.1}$$

όπου y είναι η άγνωστη συνάρτηση και f, k είναι γνωστές συναρτήσεις. Τέτοιες ολοκληρωτικές εξισώσεις μετασχηματίζονται σε αλγεβρικές χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 7.6.1, όπως φαίνεται στο ακόλουθο

Παράδειγμα 7.6.4 Λύστε την ολοκληρωτική εξίσωση

$$y(t) = 4t - 3\int_0^t \sin(t-\tau)y(\tau)\,d\tau.$$

Λύση. Η ολοκληρωτική εξίσωση γράφεται ισοδύναμα, με βάση τον ορισμό της συνέλιξης συναρτήσεων, ως εξής

$$y(t) = 4t - 3\,\left(y(t) * \sin(t)\right).$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 7.6.1, ευρίσκουμε

$$\mathrm{Y}(s) = \frac{4}{s^2} - 3\mathrm{Y}(s)\frac{1}{s^2+1},$$

οπότε

$$\mathrm{Y}(s) = \frac{4(s^2+1)}{s^2(s^2+4)} = \frac{1}{s^2} + \frac{3}{s^2+4},$$

και έτσι, τελικά, με εφαρμογή του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace, λαμβάνουμε

$$y(t) = t + \frac{3}{2}\sin(2t).$$

△

Επίσης, *ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις*, οι οποίες περιλαμβάνουν παραγώγους και ολοκληρώματα της άγνωστης συνάρτησης, μπορούν να λυθούν με εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace της συνέλιξης και της παραγώγισης συναρτήσεων, όπως φαίνεται στα επόμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα 7.6.5 Λύστε την ολοκληροδιαφορική εξίσωση

$$L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau + \frac{Q_0}{C} = E_0 e^{-at},$$

η οποία προκύπτει όταν τάση $E_0 e^{-at}$ εφαρμοστεί στα άκρα ενός πυκνωτή C και ενός πηνίου L που είναι συνδεδεμένα σε σειρά, έχοντας υποθέσει ότι τη χρονική στιγμή $t=0$ δεν υπάρχει ρεύμα ενώ ο πυκνωτής είναι φορτισμένος με φορτίο Q_0. Η λύση $i(t)$ της εξίσωσης δίνει την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα.

Λύση. Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Laplace και χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 7.6.2, ευρίσκουμε

$$Ls\mathrm{I}(s) - Li(0) + \frac{1}{Cs}\mathrm{I}(s) + \frac{Q_0}{Cs} = \frac{E_0}{s+a},$$

από όπου ενσωματώνοντας την αρχική συνθήκη $i(0)=0$ και λύνοντας ως προς $\mathrm{I}(s)$, προκύπτει

$$\mathrm{I}(s) = \frac{E_0}{L}\frac{s}{(s+a)\left(s^2+\frac{1}{LC}\right)} - \frac{Q_0}{LC}\frac{1}{s^2+\frac{1}{LC}}$$

ή

$$\mathrm{I}(s) = \frac{E_0}{L(a^2+\frac{1}{LC})}\left[-\frac{a}{s+a} + \frac{as}{s^2+\frac{1}{LC}} + \frac{1}{LC}\frac{1}{s^2+\frac{1}{LC}}\right] - \frac{Q_0}{LC}\frac{1}{s^2+\frac{1}{LC}}.$$

Τελικά, με εφαρμογή του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} i(t) = {} & \frac{E_0}{L(a^2+\frac{1}{LC})}\left[-ae^{-at} + a\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + \frac{1}{\sqrt{LC}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)\right] \\ & - \frac{Q_0}{\sqrt{LC}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right). \end{aligned}$$

△

Παράδειγμα 7.6.6 Λύστε την ολοκληροδιαφορική εξίσωση

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau = e(t),$$

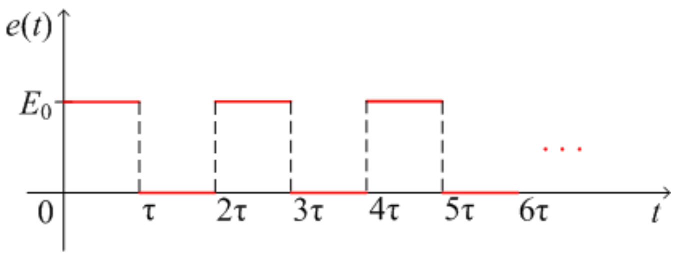
όπου $e(t)$ το τετραγωνικό κύμα που φαίνεται στο Σχήμα 7.9.

Λύση. Το τετραγωνικό κύμα γράφεται ως

$$e(t) = E_0\left[u(t) - u(t-\tau) + u(t-2\tau) - \ldots\right].$$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Laplace, χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 7.6.2, καθώς και την Πρόταση 7.3.5, λαμβάνουμε

$$R\mathrm{I}(s) + \frac{1}{Cs}\mathrm{I}(s) = E_0\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-\tau s}}{s} + \frac{e^{-2\tau s}}{s} - \ldots\right),$$



Σχήμα 7.9: Γραφική παράσταση του τετραγωνικού κύματος $e(t)$ του Παραδείγματος 7.6.6.

από όπου λύνοντας ως προς $\mathrm{I}(s)$, προκύπτει

$$\mathrm{I}(s) = \frac{E_0/R}{s + \frac{1}{RC}} \left(1 - e^{-\tau s} + e^{-2\tau s} - \ldots\right),$$

οπότε, με εφαρμογή του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace, ευρίσκουμε

$$i(t) = \frac{E_0}{R}\left[e^{-\frac{t}{RC}} - u(t-\tau)e^{-\frac{t-\tau}{RC}} + u(t-2\tau)e^{-\frac{t-2\tau}{RC}} - \ldots\right].$$

△

7.7 Πίνακες μετασχηματισμών Laplace

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
$t^nf(t)$	$(-1)^nF^{(n)}(s)$
$(f*g)(t)$	$F(s)G(s)$
$\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
$u(t-\tau)f(t-\tau)$	$e^{-\tau s}F(s)$
$f(t+T) = f(t)$	$\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)\mathrm{d}t$

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}, \qquad s > 0$
t	$\frac{1}{s^2}, \qquad s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \qquad s > a$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \qquad s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \qquad s > 0$
$e^{bt}\sin(at)$	$\frac{a}{(s-b)^2+a^2}, \qquad s > \|b\|$
$e^{bt}\cos(at)$	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}, \qquad s > \|b\|$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \qquad s > a$
$t\sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}, \qquad s > 0$
$t\cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}, \qquad s > 0$
$u(t-\tau)$	$\frac{e^{-s\tau}}{s}, \qquad s > 0$