Κεφάλαιο 1

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις: Εισαγωγικές Έννοιες, Ορισμοί και Μοντελοποιήσεις Προβλημάτων

Οι διαφορικές εξισώσεις χρησιμοποιούνται για τη μοντελοποίηση και τη μελέτη εξελικτικών φαινομένων όπου συσχετίζουν τους ρυθμούς μεταβολής διαφόρων μεγεθών.

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφονται εισαγωγικές έννοιες και ορισμοί. Ειδικότερα ορίζονται οι έννοιες συνήθης διαφορική εξίσωση, τάξη, γενική λύση, μερική λύση και γενικό ολοκλήρωμα. Επίσης, καταγράφονται μοντελοποιήσεις προβλημάτων του πραγματικού κόσμου ως προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Μεταξύ των μοντελοποιήσεων συγκαταλέγονται αντιπροσωπευτικές μοντελοποιήσεις προβλημάτων στη Μηχανική, στα ηλεκτρικά κυκλώματα, στη δυναμική πληθυσμών, στην Οικονομία, στη Βιολογία και στην Πληροφορική.

1.1 Βασικές εισαγωγικές έννοιες

Μια εξίσωση που περιέχει μια άγνωστη συνάρτηση και παραγώγους της μέχρι μία ορισμένη τάξη ονομάζεται *διαφορική εξίσωση*. Ειδικότερα, όταν η άγνωστη συνάρτηση είναι μιας μεταβλητής τότε η εξίσωση ονομάζεται *συνήθης διαφορική εξίσωση* (Σ.Δ.Ε.) ενώ όταν η άγνωστη συνάρτηση είναι πολλών μεταβλητών τότε η εξίσωση ονομάζεται *μερική διαφορική εξίσωση* (Μ.Δ.Ε.).

Όπως φαίνεται και από τον τίτλο, το αντικείμενο του κεφαλαίου αναφέρεται σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και ως εκ τούτου αντί Σ.Δ.Ε. θα χρησιμοποιούμε τη συντομογραφική αναφορά Δ.Ε.

Ως *τάξη* μιας Δ.Ε. εννοούμε την τάξη της ανώτερης παραγώγου της άγνωστης συνάρτησης που εμφανίζεται στη Δ.Ε.

Η *γενική μορφή* Δ.Ε. τάξης n είναι

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0\,, \tag{1.1.1}$$

όπου $y = y(x)$, $x \in I \subseteq \mathbb{R}$ και $F : D \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση $n+2$ μεταβλητών.

Όταν η (1.1.1) επιλύεται ως προς τη μεταβλητή $y^{(n)}$, δηλαδή έχουμε

$$y^{(n)} = G\big(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\big)\,, \tag{1.1.2}$$

τότε η (1.1.2) αναφέρεται ως *κανονική μορφή* της (1.1.1).

Όταν η συνάρτηση F είναι γραμμική ως προς $y, y', \ldots, y^{(n)}$, τότε η Δ.Ε. (1.1.1) ονομάζεται *γραμμική*. Έτσι, η γενική μορφή γραμμικής Δ.Ε. ταξής n είναι η εξής

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0(x)y(x) = f(x), \quad x \in I \subseteq \mathbb{R}\,. \tag{1.1.3}$$

Οι συναρτήσεις $a_i(x)$ $(i = 0, \ldots, n)$ αναφέρονται ως οι *συντελεστές* της γραμμικής Δ.Ε.

Πιο συγκεκριμένα, όταν η συνάρτηση f είναι μη μηδενική τότε η (1.1.3) αναφέρεται ως *μη ομογενής* Δ.Ε., ενώ όταν η f είναι η μηδενική συνάρτηση (δηλαδή $f(x) = 0$, για κάθε $x \in I$), τότε η (1.1.3) αναφέρεται ως *ομογενής* Δ.Ε.

Στην ειδική περίπτωση όπου οι συντελεστές a_i της (1.1.3) είναι σταθερές συναρτήσεις (δηλαδή $a_i(x) \equiv a_i \in \mathbb{R}$, $x \in I\,, i = 0, \ldots, n$), τότε η (1.1.3) ονομάζεται *γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές*.

Επί παραδείγματι, η εξίσωση $y' = x$ είναι πρώτης τάξης, μη ομογενής, γραμμική με σταθερούς συντελεστές Δ.Ε., ενώ η εξίσωση $(y'')^4 + 3y(y')^5 + y^3y' = 3x$ είναι δεύτερης τάξης μη γραμμική Δ.Ε.

Μία συνάρτηση $y = y(x) : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με πεδίο ορισμού ένα διάστημα I, η οποία είναι n-φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο I (δηλαδή $y \in C^n(I)$) και για την οποία ισχύουν

$$(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \in D, \forall x \in I$$
$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0,\ \forall x \in I$$

(δηλαδή επαληθεύει την (1.1.1) για κάθε $x \in I$) ονομάζεται *κλασική λύση* της Δ.Ε. (1.1.1).

Εξάλλου, η οικογένεια των συναρτήσεων

$$y = y(x) = \varphi(x, c_1, \ldots, c_n) : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \tag{1.1.4}$$

όπου $c_1, \ldots, c_n$ αυθαίρετες πραγματικές σταθερές, και κάθε συνάρτηση της οικογένειας επαληθεύει την (1.1.1), για κάθε $x \in I$, ονομάζεται *γενική λύση* της Δ.Ε. (1.1.1).

Επί παραδείγματι, η Δ.Ε.

$$y'' - y' - 2y = 0$$

έχει ως γενική λύση

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

διότι η $y(x)$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των $y(x), y'(x)$ και $y''(x)$ στη Δ.Ε. διαπιστώνουμε ότι αυτή πληρείται για κάθε $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Κάθε συνάρτηση της οικογένειας της γενικής λύσης, δηλαδή κάθε συνάρτηση που προκύπτει από τη γενική λύση για συγκεκριμένη επιλογή των σταθερών $c_1, \ldots, c_n$, αναφέρεται ως *μερική ή ειδική λύση* της Δ.Ε. (1.1.1).

Γενικό ολοκλήρωμα της Δ.Ε. (1.1.1) λέγεται μια εξίσωση της μορφής

$$G(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0, \tag{1.1.5}$$

η οποία περιέχει (υπό πεπλεγμένη μορφή) τη λύση y της (1.1.1) και $c_1, \ldots, c_n$ είναι αυθαίρετες σταθερές. Στην ειδική περίπτωση που η εξίσωση (1.1.5) επιλύεται ως προς τη λύση y τότε το γενικό ολοκλήρωμα ανάγεται στη γενική λύση (1.1.4).

Η Δ.Ε.

$$(1 + xe^{xy})y' + 1 + ye^{xy} = 0,\ x \in \mathbb{R},$$

έχει γενικό ολοκλήρωμα

$$G(x, y, c_1) \equiv x + y + e^{xy} + c_1 = 0,$$

όπως διαπιστώνεται με παραγώγιση της G ως προς x και αντικατάσταση στη Δ.Ε.

Οι συναρτήσεις της γενικής λύσης (1.1.4) και του γενικού ολοκληρώματος (1.1.5) εμπεριέχουν n αυθαίρετες πραγματικές σταθερές. Έτσι, για τον προσδιορισμό των σταθερών απαιτούνται επιπλέον συνθήκες, οι οποίες αναφέρονται ως αρχικές ή συνοριακές συνθήκες. Αυτό μας οδηγεί στη θεώρηση των προβλημάτων αρχικών και συνοριακών τιμών.

Πιο συγκεκριμένα, στο πεδίο των Δ.Ε., ένα πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.) συνίσταται από μία Δ.Ε. συνδυασμένη με δεσμεύσεις της λύσεως, οι οποίες εκφράζονται από δοσμένες τιμές της άγνωστης συνάρτησης ή/και παραγώγων της σε μία επιλεγμένη τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής. Λύση του Π.Α.Τ. είναι μία συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τη Δ.Ε. και τις δοθείσες δεσμεύσεις. Οι δεσμεύσεις αναφέρονται ως αρχικές τιμές ή αρχικές συνθήκες. Στις Επιστήμες και την Τεχνολογία, η μοντελοποίηση ενός συστήματος συχνά οδηγεί στη διατύπωση και επίλυση ενός Π.Α.Τ. Σε αυτό το πλαίσιο, η Δ.Ε. είναι μία εξίσωση εξέλιξης ενός φαινομένου η οποία προσδιορίζει πως υπό δοθείσες αρχικές συνθήκες το σύστημα εξελίσσεται με το χρόνο.

Έτσι, η γενική Δ.Ε. (1.1.1) συνδυασμένη με τις n *αρχικές συνθήκες*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \tag{1.1.6}$$

σε ένα σημείο $x_0 \in I$, όπου $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ δοσμένοι αριθμοί, αποτελούν ένα *πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)*.

Από τη γενική λύση ή το γενικό ολοκλήρωμα, με εφαρμογή των (1.1.6) προκύπτει η μερική λύση της (1.1.1), η οποία πληρεί και τις αρχικές συνθήκες.

Επί παραδείγματι, αναφερόμενοι στο Π.Α.Τ.

$$y' - 2y = -4x, \ x \in \mathbb{R}, \quad y(0) = 2,$$

ευρίσκουμε (χρησιμοποιώντας τεχνικές που θα διατυπώσουμε παρακάτω) ότι η γενική λύση της Δ.Ε. είναι η συνάρτηση

$$y(x) = 1 + 2x + c\,e^{2x}, \ x \in \mathbb{R}, \ c \in \mathbb{R}.$$

Εφαρμόζοντας την αρχική συνθήκη $y(0) = 2$ στην τελευταία, ευρίσκουμε $c = 1$. Έτσι, η συνάρτηση

$$y(x) = 1 + 2x + e^{2x}, \ x \in \mathbb{R},$$

είναι η λύση του δοσμένου Π.Α.Τ.

Ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών (Π.Σ.Τ.) συνίσταται από μία Δ.Ε. με δεσμεύσεις της λύσεως οι οποίες εκφράζονται από δοσμένες τιμές της άγνωστης συνάρτησης ή/και παραγώγων της σε δύο τουλάχιστον επιλεγμένες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής. Εναλλακτικά, μπορούμε να μην απαιτήσουμε επιλεγμένες τιμές στα δύο σημεία αλλά ότι οι τιμές της λύσεως στα σημεία αυτά συσχετίζονται κατά κάποιο τρόπο. Οι δεσμεύσεις αναφέρονται ως συνοριακές τιμές ή συνοριακές συνθήκες.

Ο όρος *επίλυση* Δ.Ε. είναι συνώνυμος με τις μεθοδολογίες ευρέσεως της λύσης της Δ.Ε. Εξάλλου, *επιλυσιμότητα* σημαίνει την έρευνα *ύπαρξης μοναδικής* λύσης. Αποτελέσματα επιλυσιμότητας θα καταγράφονται στις διάφορες μορφές Δ.Ε.

1.2 Μοντελοποιήσεις προβλημάτων

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται διάφορες αντιπροσωπευτικές μοντελοποιήσεις προβλημάτων του πραγματικού κόσμου ως προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

Δεύτερος νόμος του Νεύτωνα

Ένα σώμα μάζας m κινείται υπό την επίδραση διανυσματικής δύναμης $\mathbf{F}$, η οποία είναι συνάρτηση του χρόνου t, του διανύσματος θέσης $\mathbf{r}(t)$ και της ταχύτητας $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$, δηλαδή $\mathbf{F} = \mathbf{F}\left(t, \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)$. Η κίνηση του σώματος διέπεται απο το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα: η συνολική δύναμη που ασκείται στο σώμα ισούται με το γινόμενο της μάζας επί την επιτάχυνσή του, δηλαδή

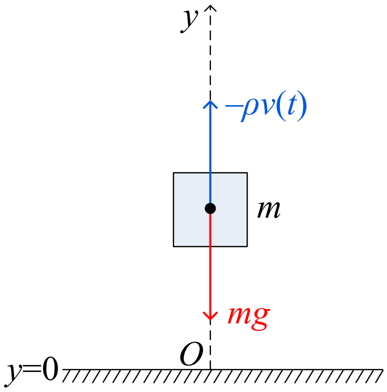
$$\mathbf{F}\left(t, \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \tag{1.2.1}$$

όπου $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ είναι η επιτάχυνση του σώματος. Η (1.2.1) αποτελεί ένα σύστημα τριών (εν γένει) μη γραμμικών Δ.Ε. δεύτερης τάξης.

Ως ειδική περίπτωση περιγράφουμε τη μονοδιάστατη (κατακόρυφη) ελεύθερη πτώση σώματος μάζας m υπό την επίδραση της βαρύτητας και της αντίστασης του αέρα, όπου η κίνηση λαμβάνει χώρα κατά μήκος του (κατακόρυφου) Oy άξονα με τη θετική φορά προς τα άνω, δηλαδή η επιφάνεια της γης βρίσκεται στο $y = 0$ (Σχήμα 1.1). Στην προκειμένη περίπτωση, στο σώμα ασκούνται η δύναμη της βαρύτητας $-mg\hat{\mathbf{y}}$, όπου g είναι η (σταθερή) επιτάχυνση της βαρύτητας, και η αντίσταση του αέρα $-\rho v(t)\hat{\mathbf{y}}$, όπου ρ θετική σταθερά και $v(t)$ το προσημασμένο μέτρο της ταχύτητας, η οποία είναι αντίρροπη του διανύσματος της ταχύτητας. Εδώ, εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα (1.2.1) οδηγεί στο ακόλουθο Π.Α.Τ.

$$\left.\begin{aligned} y''(t) + \tfrac{\rho}{m}y'(t) &= -g \\ y(t_0) &= y_0 \\ y'(t_0) &= v_0 \end{aligned}\right\}, \tag{1.2.2}$$

το οποίο μοντελοποιεί την κίνηση και περιγράφει τη μεταβολή της θέσης $y(t)$ του σώματος για $t \geq t_0$. Στο Π.Α.Τ. αυτό η Δ.Ε. είναι γραμμική, μη ομογενής δεύτερης τάξης, ενώ οι αρχικές τιμές y_0 και v_0 είναι η αρχική θέση και η αρχική ταχύτητα του σώματος στο χρόνο t_0. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $v(t) = y'(t)$, το προηγούμενο Π.Α.Τ. εκφράζεται ως



Σχήμα 1.1: Οπτικοποίηση μονοδιάστατης (κατακόρυφης) ελεύθερης πτώσης σώματος.

$$\left.\begin{aligned} v'(t) + \tfrac{\rho}{m}v(t) &= -g \\ v(t_0) &= v_0 \end{aligned}\right\}, \tag{1.2.3}$$

στο οποίο η άγνωστη συνάρτηση είναι η ταχύτητα $v(t)$ του σώματος και όπου η Δ.Ε. είναι πρώτης τάξης. Για να βρούμε τη θέση $y(t)$, επιλύουμε το τελευταίο Π.Α.Τ., ολοκληρώνουμε τη λύση $v(t)$ αυτού και χρησιμοποιούμε την αρχική συνθήκη $y(t_0) = y_0$ για τον προσδιορισμό της σταθεράς ολοκλήρωσης.

Ραδιενεργός διάσπαση

Ένα από τα απλούστερα και αντιπροσωπευτικότερα παραδείγματα μοντελοποίησης με Δ.Ε. είναι η ραδιενεργός διάσπαση, η οποία βασίζεται στην αρχή: ο στιγμιαίος ρυθμός αποσύνθεσης ως προς το χρόνο μιας ραδιενεργού ουσίας είναι ανάλογος της ποσότητας της ουσίας κατά τη θεωρούμενη χρονική στιγμή. Αν $N(t)$ είναι η ποσότητα της ραδιενεργού ουσίας στο χρόνο t και αν η συνάρτηση $N(t)$ είναι παραγωγίσιμη, τότε η προηγούμενη αρχή εκφράζεται ως $N'(t) = -kN(t)$, όπου k είναι θετική σταθερά, η οποία αναφέρεται ως σταθερά αποσύνθεσης, και έτσι η ραδιενεργός διάσπαση μοντελοποιείται από το ακόλουθο Π.Α.Τ.

$$\left.\begin{aligned} N'(t) &= -kN(t) \\ N(t_0) &= N_0 \end{aligned}\right\}, \tag{1.2.4}$$

όπου N_0 είναι η ποσότητα της ουσίας στο χρόνο t_0.

Η Δ.Ε. του παραπάνω Π.Α.Τ. είναι γραμμική, ομογενής, πρώτης τάξης και επιλύεται εύκολα με τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών η οποία παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 2. Η λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$N(t) = N_0 e^{-k(t-t_0)}.$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο προσδιορισμός της διάρκειας ημιζωής του υλικού, δηλαδή του χρόνου T που απαιτείται για να μειωθεί στο μισό η ποσότητα της ουσίας, ο οποίος προσδιορίζεται από την εξίσωση $N(t+T) = \frac{1}{2}N(t)$ που έχει ως λύση

$$T = \frac{\ln 2}{k},$$

ανεξάρτητη του χρόνου t και της αρχικής ποσότητας N_0 αλλά εξαρτώμενη από τον τύπο του υλικού.

Ανατοκισμός

Ένα χρηματικό κεφάλαιο κατατίθεται σε μία τράπεζα, η οποία προσφέρει ετήσιο επιτόκιο k. Η αξία $I(t)$ της επένδυσης σε χρόνο t εξαρτάται από το επιτόκιο αλλά και από τη συχνότητα ανατοκισμού. Αν ο ανατοκισμός γίνεται συνεχώς τότε ο ρυθμός μεταβολής $I'(t)$ της αξίας της επένδυσης ως προς το χρόνο ισούται με το επιτόκιο επί την τρέχουσα αξία της επένδυσης. Έτσι, η διαδικασία περιγράφεται από το Π.Α.Τ.

$$\left.\begin{aligned} I'(t) &= kI(t) \\ I(0) &= I_0 \end{aligned}\right\}, \tag{1.2.5}$$

όπου I_0 η αρχική αξία του κεφαλαίου στο χρόνο $t = 0$.

Σύμφωνα με τα αναφερόμενα στο πρόβλημα ραδιενεργούς διάσπασης, η λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$I(t) = I_0 e^{kt},$$

δηλαδή ένας λογαριασμός με συνεχή ανατοκισμό αυξάνεται εκθετικά.

Τα αποτελέσματα του συνεχούς ανατοκισμού είναι χρήσιμο να συγκριθούν με εκείνα του ανατοκισμού, ο οποίος γίνεται σε προκαθορισμένα πεπερασμένα χρονικά διαστήματα. Επί παραδείγματι, αν το ποσό ανατοκίζεται μία φορά το χρόνο τότε στο τέλος του πρώτου χρόνου θα είναι $I(t) = I_0(1+k)$ ενώ μετά από t χρόνια $I(t) = I_0(1+k)^t$. Αν ο ανατοκισμός γίνεται δύο φορές το χρόνο τότε στο τέλος των πρώτων έξι μηνών το ποσό θα είναι $I(t) = I_0(1+\frac{k}{2})$, στο τέλος του χρόνου $I(t) = I_0(1+\frac{k}{2})^2$ και μετά από t χρόνια $I(t) = I_0(1+\frac{k}{2})^{2t}$. Έτσι, αν το αρχικό ποσό ανατοκίζεται m φορές το χρόνο τότε μετά από t χρόνια θα είναι

$$I(t) = I_0\left(1+\frac{k}{m}\right)^{mt}.$$

Αξίνει να σημειώσουμε ότι ισχύει η ακόλουθη ασυμπτωτική κατάσταση

$$I_0\left(1+\frac{k}{m}\right)^{mt} \simeq I_0 e^{kt}, \quad m \to \infty,$$

ως προς το συνεχή ανατοκισμό (όπως προκύπτει χρησιμοποιώντας τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης ως όριο ακολουθίας).

Περαιτέρω, μπορούμε να εμπλουτίσουμε το μοντέλο, θεωρώντας, πέραν της συσσώρευσης τόκων με συνεχή ανατοκισμό, ότι πραγματοποιούνται και καταθέσεις ή αναλήψεις με σταθερό ρυθμό s. Στις περιπτώσεις αυτές, το Π.Α.Τ. (1.2.5) παίρνει τη μορφή

$$\left.\begin{aligned} I'(t) &= kI(t) + s \\ I(0) &= I_0 \end{aligned}\right\}, \tag{1.2.6}$$

όπου η σταθερά s είναι θετική για καταθέσεις και αρνητική για αναλήψεις.

Το Π.Α.Τ. (1.2.6) έχει ως λύση τη συνάρτηση

$$I(t) = I_0 e^{kt} + \frac{s}{k}(e^{kt} - 1),$$

όπου ο πρώτος όρος οφείλεται στο συνεχή ανατοκισμό και ο δεύτερος στις αναλήψεις ή καταθέσεις. Γενικότεροι εμπλουτισμοί του μοντέλου επιτυγχάνονται στις περιπτώσεις όπου τα k και s είναι συναρτήσεις του t.

Δυναμική πληθυσμών

Η δυναμική πληθυσμών είναι ένας κλάδος της Βιολογίας, ο οποίος μελετάει τις αλλαγές βραχείας και μακράς διάρκειας του μεγέθους ενός πληθυσμού συναρτήσει των βιολογικών και περιβαλλοντικών διαδικασιών που επηρεάζουν τις αλλαγές αυτές. Ως πληθυσμός ορίζεται ένα σύνολο ατόμων του ιδίου είδους που καταλαμβάνουν μία γεωγραφική περιοχή σε συγκεκριμένο χρόνο. Με την πάροδο του χρόνου, το μέγεθος ενός πληθυσμού μεταβάλλεται συναρτήσει των ρυθμών γεννήσεων, θανάτων, και μεταναστεύσεων καθώς επίσης και των περιβαλλοντικών συνθηκών και των αλληλεπιδράσεων με άλλα είδη.

Η έρευνα της δυναμικής πληθυσμών αποτέλεσε παραδοσιακά κυρίαρχο κλάδο της Μαθηματικής Βιολογίας, ενώ, πρόσφατα, εφαρμόζεται στη μοντελοποίηση φαινομένων στην

Επιδημιολογία, στην Οικονομία αλλά και σε περιοχές, φαινομενικά διαφορετικές, όπως η μετάδοση πληροφορίας στα κοινωνικά δίκτυα στην Επιστήμη των Υπολογιστών.

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε το μοντέλο εκθετικής αύξησης (μοντέλο Malthus) και το λογιστικό μοντέλο (μοντέλο Verhulst) της δυναμικής πληθυσμών. Στη μελέτη τους υπεισέρχονται Δ.Ε. πρώτης τάξης.

(α) *Μοντέλο εκθετικής αύξησης*

Περιγράφει ανεξέλεγκτη ανάπτυξη, η οποία είναι γενικά ασυνήθιστο να παρατηρηθεί στη φύση τουλάχιστον για μεγάλα χρονικά διαστήματα. Η διατύπωση του μοντέλου βασίζεται στη βιολογική αρχή: ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού ανά άτομο είναι σταθερός και η αύξηση δεν περιορίζεται από έλλειψη πόρων ή άλλους παράγοντες.

Έστω $P(t)$ ο αριθμός των ατόμων σε ένα πληθυσμό στο χρόνο t. Για τη μελέτη υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $P(t)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη. Η παράγωγος $P'(t)$ παριστά το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής του πληθυσμού ως προς το χρόνο. Στο απλό μοντέλο, το οποίο αναλύουμε, υποθέτουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού σε χρόνο t είναι ανάλογος του πληθυσμού στο χρόνο αυτό, δηλαδή, το μοντέλο περιγράφεται από το Π.Α.Τ.

$$\left.\begin{aligned} P'(t) &= rP(t) \\ P(0) &= P_0 \end{aligned}\right\}, \tag{1.2.7}$$

όπου P_0 ο αρχικός πληθυσμός κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ και r ο εγγενής συντελεστής μεταβολής του πληθυσμού (συντελεστής αύξησης αν $r > 0$ και μείωσης αν $r < 0$). Το Π.Α.Τ. έχει τη λύση

$$P(t) = P_0 e^{rt}, \tag{1.2.8}$$

όπως προκύπτει με τη διαδικασία που αναφέρεται στο πρόβλημα ραδιενεργούς διάσπασης, για την οποία ισχύουν

- $P(t) = P_0$ αν $r = 0$,
- $P(t)$ αύξουσα αν $r > 0$,
- $P(t)$ φθίνουσα αν $r < 0$.

Στην περίπτωση όπου $r > 0$ ο πληθυσμός αυξάνει εκθετικά ως προς το χρόνο και ο χρόνος διπλασιασμού $T = \frac{\ln 2}{r}$ αυτού υπολογίζεται όπως και στο πρόβλημα ραδιενεργού διάσπασης.

Η λύση (1.2.8) του μοντέλου εκθετικής αύξησης είναι ακριβής για πολλούς πληθυσμούς αλλά μόνο για περιορισμένες χρονικές περιόδους που ο πληθυσμός παρουσιάζει αύξηση χωρίς περιορισμούς. Για μεγάλη χρονική περίοδο, όμως, περιορισμοί στον χώρο και στην τροφή του πληθυσμού αναμένεται να μειώσουν το ρυθμό αύξησης και έτσι να εμποδίσουν τη συνεχιζόμενη εκθετική αύξηση.

(β) *Λογιστικό μοντέλο*

Οι προηγούμενοι περιοριστικοί παράγοντες επιβάλλουν την πρόσθεση ενός δευτέρου όρου στο δεύτερο μέλος της Δ.Ε. του μοντέλου εκθετικής αύξησης, ο οποίος έχει μικρή επίδραση όταν ο πληθυσμός είναι μικρός και οδηγεί στη μείωση του ρυθμού αύξησης όταν ο πληθυσμός γίνει κατάλληλα μεγάλος. Το απλούστερο μοντέλο που ικανοποιεί αυτές τις προϋποθέσεις είναι το λογιστικό μοντέλο, το οποίο περιγράφεται από το Π.Α.Τ.

$$\left.\begin{array}{c} P'(t) = r\left(1 - \frac{P(t)}{C}\right)P(t) \\ P(0) = P_0 \end{array}\right\}, \tag{1.2.9}$$

όπου C η περιβαλλοντική χωρητικότητα του συστήματος, η οποία εκφράζει το μέγεθος του πληθυσμού που μπορεί να αναπτυχθεί στο συγκεκριμένο σύστημα.

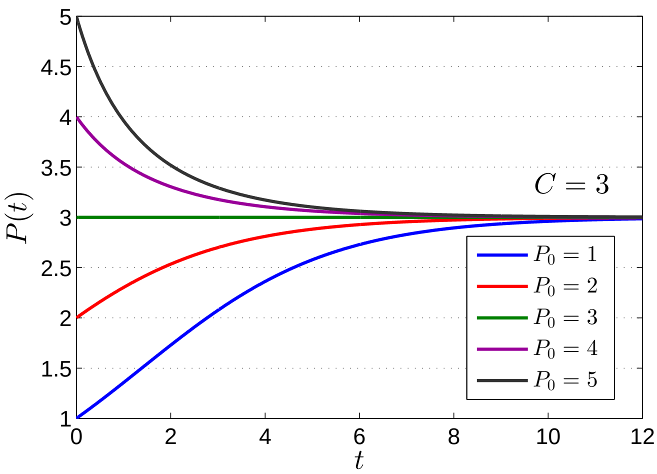
Στο λογιστικό αυτό μοντέλο ισχύει $P'(t) \simeq rP(t)$, αν $P(t) << C$, δηλαδή ο ρυθμός αύξησης $P'(t)$ είναι ασυμπτωτικά ανάλογος του πληθυσμού $P(t)$ όταν ο πληθυσμός είναι πολύ μικρότερος του C. Όμως, αν $P(t) > C$ τότε $P'(t) < 0$, δηλαδή αν ο πληθυσμός είναι δυσανάλογα μεγάλος για τα περιβαλλοντικά δεδομένα, τότε ο ρυθμός μεταβολής του είναι αρνητικός και ο πληθυσμός ελαττώνεται.

Μπορούμε να μελετήσουμε ποιοτικά τη μεταβολή του πληθυσμού που διέπεται από το λογιστικό μοντέλο αν εξετάσουμε τη συνάρτηση $f(P) = r\left(1 - \frac{P}{C}\right)P$ του δεξιού μέλους της Δ.Ε. Η $f(P)$ μηδενίζεται στα σημεία $P = 0$ και $P = C$, τα οποία ονομάζονται σημεία ισορροπίας. Αν η αρχική συνθήκη είναι $P_0 = 0$ ή $P_0 = C$ τότε η λύση του Π.Α.Τ. είναι η σταθερή συνάρτηση $P(t) = P_0$. Από την (1.2.9) έχουμε $f(P) > 0$ για $0 < P < C$ και $f(P) < 0$ για $P > C$, οπότε ο πληθυσμός αυξάνεται και πλησιάζει το σημείο ισορροπίας $P = C$ αν $0 < P_0 < C$ ενώ μειώνεται και πλησιάζει το $P = C$ αν $P_0 > C$. Έτσι, το σημείο ισορροπίας $P = C$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και ο πληθυσμός πλησιάζει την τιμή C στο όριο για $t \to \infty$, ανεξάρτητα από τον αρχικό πληθυσμό $P_0 > 0$. Για αυτό το λόγο, η χωρητικότητα C ονομάζεται και οριακός πληθυσμός του μοντέλου. Αντίθετα, το σημείο ισορροπίας $P = 0$ είναι ασταθές διότι οι λύσεις αποκλίνουν από το σημείο αυτό.

Τα παραπάνω ποιοτικά χαρακτηριστικά των λύσεων προκύπτουν από τη μελέτη της συνάρτησης $f(P)$. Ωστόσο, αν χρειαζόμαστε μια λεπτομερή περιγραφή της πληθυσμιακής μεταβολής, τότε λύνουμε την πρώτης τάξης μη γραμμική Δ.Ε. του Π.Α.Τ. με χωρισμό μεταβλητών (που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 2) και λαμβάνουμε τη λύση του Π.Α.Τ.

$$P(t) = \frac{P_0 C}{P_0 + (C - P_0)e^{-rt}}. \tag{1.2.10}$$

Πράγματι, επαληθεύεται ότι αν $P_0 = 0$ τότε $P(t) = 0$ για κάθε $t > 0$. Αν $P_0 > 0$ τότε $\lim_{t\to\infty} P(t) = C$, δηλαδή για κάθε αρχική συνθήκη $P_0 > 0$ η λύση $P(t)$ πλησιάζει ασυμπτωτικά τη λύση ισορροπίας $P(t) = C$, η οποία είναι η μέγιστη τιμή του πληθυσμού που το περιβάλλον μπορεί να διατηρήσει για μεγάλους χρόνους (Σχήμα 1.2).



Σχήμα 1.2: Γράφημα της συνάρτησης $P(t)$ του τύπου (1.2.10) συναρτήσει του t για $C = 3$ και $r = \frac{1}{2}$.

Κοινωνικά δίκτυα

Η διαδικασία μετάδοσης (διάχυσης) της πληροφορίας στα κοινωνικά δίκτυα μπορεί να περιγραφεί (σε μία πρώτη προσέγγιση) από το Π.Α.Τ. του λογιστικού μοντέλου

$$\left.\begin{array}{c} I'(t) = r\left(1 - \frac{I(t)}{C}\right) I(t) \\ I(0) = I_0 \end{array}\right\}, \tag{1.2.11}$$

όπου η άγνωστη συνάρτηση $I(t)$ είναι η πυκνότητα των επηρεαζόμενων χρηστών του δικτύου σε χρόνο t, r ο εσωτερικός ρυθμός ανάπτυξης του δικτύου και C η χωρητικότητα του δικτύου.

Από τη Δ.Ε. του (1.2.11) προκύπτει ότι ο ρυθμός αναπαραγωγής $I'(t)$ της πυκνότητας χρηστών $I(t)$ εκφράζεται ως διαφορά δύο όρων, όπου ο πρώτος είναι ανάλογος με την πυκνότητα $I(t)$ και ο δεύτερος μη γραμμικός όρος εξαρτάται από τους διαθέσιμους πόρους και τη δομή του δικτύου.

Σύμφωνα με τα αναφερόμενα γενικά χαρακτηριστικά της λύσης του λογιστικού μοντέλου, η πυκνότητα χρηστών για $0 < I_0 < C$ αυξάνεται και πλησιάζει ασυμπτωτικά το σημείο ισορροπίας $I = C$, ενώ για $I_0 > C$ μειώνεται και πλησιάζει πάλι ασυμπτωτικά το $I = C$.

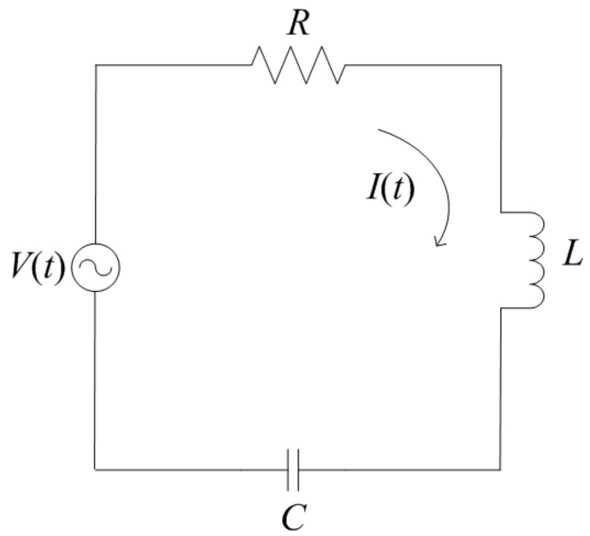
Πιο ρεαλιστικές μοντελοποιήσεις του προβλήματος μετάδοσης πληροφορίας σε κοινωνικά δίκτυα προϋποθέτουν τη χρήση μερικών διαφορικών εξισώσεων. Η έρευνα της περιοχής αυτής έχει αρχίσει να αναπτύσσεται πολύ πρόσφατα.

Ηλεκτρικά κυκλώματα

Οι Δ.Ε. αποτελούν παραδοσιακό μαθηματικό εργαλείο μοντελοποίησης της ροής ρεύματος ή της συγκέντρωσης φορτίου σε κλασικά ηλεκτρικά κυκλώματα. Ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα αναφέρεται εδώ. Θεωρούμε ενα ηλεκτρικό κύκλωμα που τροφοδοτείται από μία χρονικά μεταβαλλόμενη πηγή τάσης $V(t)$ και περιλαμβάνει συνδεδεμένα σε σειρά μία σταθερή ωμική αντίσταση R, ένα πηνίο αυτεπαγωγής L και έναν πυκνωτή χωρητικότητας C (Σχήμα 1.3). Σύμφωνα με το νόμο του Kirchhoff, το συνολικό άθροισμα τάσεων στα διάφορα στοιχεία του κυκλώματος είναι ίσο με τη χρονικά μεταβαλλόμενη τάση της πηγής τροφοδοσίας. Έτσι, η εφαρμογή του νόμου στο μοναδικό βρόχο του κυκλώματος οδηγεί στη Δ.Ε.

$$R\,I(t) + L\,I'(t) + \frac{1}{C}\,Q(t) = V(t), \tag{1.2.12}$$

όπου $I(t)$ το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα, $Q(t)$ το φορτίο στους οπλισμούς του πυκνωτή, ενώ $R\,I(t)$, $L\,I'(t)$ και $\frac{1}{C}\,Q(t)$ οι διαφορές δυναμικού στα άκρα της αντίστασης, του πηνίου και του πυκνωτή αντιστοίχως. Η εξίσωση (1.2.12) συνδυαζόμενη με την $I(t) = Q'(t)$ οδηγεί



Σχήμα 1.3: RLC ηλεκτρικό κύκλωμα τροφοδοτούμενο από πηγή τάσης $V(t)$.

στο ακόλουθο Π.Α.Τ. με άγνωστη τη συνάρτηση φορτίου

$$\left.\begin{aligned} L\,Q''(t) + R\,Q'(t) + \tfrac{1}{C}\,Q(t) &= V(t) \\ Q(0) &= Q_0 \\ Q'(0) &= I_0 \end{aligned}\right\}, \tag{1.2.13}$$

όπου Q_0 το αρχικό φορτίο και I_0 το αρχικό ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα σε χρόνο $t = 0$.

Τέλος, το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα προσδιορίζεται ως λύση του Π.Α.Τ.

$$\left.\begin{array}{r} L\,I''(t) + R\,I'(t) + \frac{1}{C}\,I(t) = V'(t) \\ I(0) = I_0 \\ I'(0) = I_1 \end{array}\right\}, \tag{1.2.14}$$

υπό την προϋπόθεση ότι η $V(t)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και όπου I_1 η αρχική τιμή της $I'(t)$ για $t = 0$.

1.3 Ασκήσεις

Άσκηση 1.3.1 Βρείτε τις Δ.Ε., οι οποίες έχουν ως γενικές λύσεις τις συναρτήσεις

(i)
$$y(x) = c_1 x + c_2 x^2$$

(ii)
$$y(x) = c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx)$$

(iii)
$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

Άσκηση 1.3.2 Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

είναι η γενική λύση της Δ.Ε.

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

σε κάθε διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$. Βρείτε τη μερική λύση όταν $y(0) = 1$ και $y'(0) = 1$.

Άσκηση 1.3.3 Επαληθεύστε ότι κάθε μία από τις συναρτήσεις

$$y_1(x) = 1 \quad \text{και} \quad y_2(x) = \ln x$$

είναι λύσεις της μη γραμμικής Δ.Ε.

$$y'' + (y')^2 = 0,$$

αλλά η $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ είναι λύση της μόνον όταν $c_2 = 0$ ή $c_2 = 1$.

Άσκηση 1.3.4 Επαληθεύστε ότι η συνάρτηση

$$y(x) = \frac{1}{1 - ce^x},$$

όπου c αυθαίρετη πραγματική σταθερά, είναι η γενική λύση της μη γραμμικής Δ.Ε.

$$y' = y^2 - y.$$