ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

Έστω C^1 πραγματική συνάρτηση $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Επίδραση στην τιμή της $f(\vec{x})$ από ένα σφάλμα $\Delta\vec{x} = (\Delta x, \Delta y)$ στη μέτρηση του $\vec{x} = (x, y)$

(*) Η προσεγγιστική τιμή $f(\vec{x})$ διαφέρει από την ακριβή τιμή $f(\vec{x} + \Delta\vec{x})$ κατά $\Delta f(\vec{x}) \equiv f(\vec{x} + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x})$.

$\Delta f(\vec{x})$ σφάλμα στον υπολογισμό του $f(\vec{x})$.

$$\Delta f(\vec{x}) = f(\vec{x} + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}) \simeq \cancel{Df(\vec{x})\,\Delta\vec{x}} = \boxed{\nabla f(\vec{x}) \cdot \Delta\vec{x}}$$

γραμμική προσέγγιση

που γράφεται

$$\boxed{f(\vec{x} + \Delta\vec{x}) = f(\vec{x}) + \Delta f(\vec{x}) \simeq f(\vec{x}) + \nabla f(\vec{x}) \cdot \Delta\vec{x}}$$

$|\Delta f(\vec{x})|$ απόλυτο σφάλμα

$\dfrac{\Delta f(\vec{x})}{f(\vec{x})}$ σχετικό σφάλμα

$100\,\dfrac{\Delta f(\vec{x})}{f(\vec{x})}$ εκατοστιαίο σχετικό σφάλμα

$|\Delta f(\vec{x})| \leq \underline{b}$ εκτίμηση του σφάλματος

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Προσεγγιστική τιμή $\sqrt{0{,}99^3 + 2{,}02^3}$

Λύση

$f(x,y) = \sqrt{x^3 + y^3}$, $x > 0$, $y > 0$ f είναι C^1 συνάρτηση ~~διαφορίσιμη~~

$f_x = \dfrac{3}{2}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+y^3}}$ $x, y > 0$, $f_y = \dfrac{3}{2}\dfrac{y^2}{\sqrt{x^3+y^3}}$ συνεχείς $x, y > 0$

Επιλέγουμε $x = 1$, $\Delta x = -0{,}01$, $y = 2$, $\Delta y = 0{,}02$

$\vec{x} = (x, y) = (1, 2)$ $\vec{x} + \Delta\vec{x} = (x + \Delta x, y + \Delta y) = (0.99, 2.02)$

$$\sqrt{0{,}99^3 + 2{,}02^3} = f(1 - 0{,}01,\ 2 + 0{,}02) \simeq$$

$$f(1,2) + \nabla f(1,2) \cdot (-0{,}01,\ 0{,}02) =$$

$$3 + \Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{f_x},\ \underbrace{2}_{f_y}\Big) \cdot (-0{,}01,\ 0{,}02) = 3{,}035$$

(*) Έτσι αν αντί της ακριβούς (ορθής) τιμής $\vec{x} + \Delta\vec{x}$ χρησιμοποιήσουμε την προσεγγιστική (μετρούμενη) τιμή $\vec{x}$, τότε

Άσκηση

Η ολική αντίσταση R δύο αντιστάσεων R_1, R_2 σε παράλληλη σύνδεση δίνεται από $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Υποθέτουμε ότι οι τιμές των αντιστάσεων μετρώνται $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 15\ \Omega$ με αντίστοιχα σφάλματα $0{,}02\ \Omega$ και $0{,}01\ \Omega$. Υπολογίστε μία προσεγγιστική τιμή της ολικής αντίστασης.

Λύση

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \Rightarrow$$

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x,y) = \dfrac{x\,y}{x+y}$ $\quad x \to R_1$, $\; y \to R_2$ $\quad x, y > 0$

$$f_x = \frac{y^2}{(x+y)^2} \qquad f_y = \frac{x^2}{(x+y)^2}$$

$f(\vec{x} + \Delta\vec{x}) \simeq f(\vec{x}) + \nabla f(\vec{x}) \cdot \Delta\vec{x}$ ακριβής τιμή

$$f(\vec{x}) = f(10, 15) = \frac{10 \cdot 15}{10+15} = 6\ \Omega$$

όπου

$$\nabla f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{y^2}{(x+y)^2}, \frac{x^2}{(x+y)^2}\right)\Bigg|_{\substack{x=10\\ y=15}}$$

$$= \left(\frac{225}{625}, \frac{100}{625}\right) = (0{,}36,\ 0{,}16)$$

$$\Delta\vec{x} = (\Delta x, \Delta y) = (0{,}02,\ 0{,}01)$$

Οπότε

$$f(\vec{x} + \Delta\vec{x}) \simeq 6 + (0{,}36,\ 0{,}16) \cdot (0{,}02,\ 0{,}01)$$

$$= 6 + (0{,}0072 + 0{,}0016)$$

$$= 6 + 0{,}0088$$

$$= 6{,}0088\ \Omega$$

ακριβής τιμή $R = 6{,}0088\ \Omega$

Άσκηση

Βρείτε τη γραμμική προσέγγιση της συνάρτησης $f(x,y) = \ln(2x^2+3y-4)$ στην περιοχή του σημείου $\vec{a} = (1,1)$ και υπολογίστε μια προσεγγιστική τιμή της $f(0{,}99,\ 1{,}02)$

$\Delta x = -0.01 \quad \Delta y = 0{,}02$

$x = 1, \quad y = 1$

Λύση

Η συνάρτηση $f(x,y) = \ln(2x^2+3y-4)$ είναι διαφορίσιμη στο πεδίο ορισμού της $(2x^2+3y-4>0)$

C^1

$$f_x(x,y) = \frac{4x}{2x^2+3y-4}$$

συνεχείς συναρτήσεις

$$f_y(x,y) = \frac{3}{2x^2+3y-4}$$

Από τον τύπο (8.67) η ζητούμενη προσέγγιση είναι

$f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

$$
\begin{aligned}
L_{\vec{a}}(x,y) &= f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1) \\
&= 0 + 4(x-1) + 3(y-1) \\
&= 4x + 3y - 7
\end{aligned}
$$

Οπότε $\ln(2x^2+3y-4) \simeq 4x+3y-7$ στην περιοχή του σημείου $\vec{a} = (1,1)$

Μια προσεγγιστική τιμή της $f(0{,}99,\ 1{,}02)$ είναι η $L_{\vec{a}}(0{,}99,\ 1{,}02)$

$$
\begin{aligned}
L_a(0{,}99,\ 1{,}02) &= 4 \cdot 0{,}99 + 3 \cdot 1{,}02 - 7 \\
&= 3{,}96 + 3{,}06 - 7 \\
&= 0{,}02
\end{aligned}
$$