Έστω $w = \arccos 2$, τότε $\cos w = 2$, και έτσι

$$\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = 2,$$

οπότε προκύπτει η εξίσωση δευτέρου βαθμού

$$(e^{iw})^2 - 4e^{iw} + 1 = 0,$$

η οποία έχει τις λύσεις

$$e^{iw} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Λαμβάνοντας λογαρίθμους και στα δύο μέλη της τελευταίας, έχουμε

$$w = -i \log\left(2 \pm \sqrt{3}\right).$$

Επειδή $\mathrm{Arg}(2+\sqrt{3}) = \mathrm{Arg}(2-\sqrt{3}) = 0$, με τη βοήθεια της τελευταίας και της (10.2.9), ευρίσκουμε

$$w = -i \ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Το $\pm$ εκφράζει τους δύο κλάδους της τετραγωνικής ρίζας στην πρώτη των (10.2.16), ενώ το k εκφράζει την τάξη του κλάδου του μιγαδικού λογαρίθμου.

Εναλλακτικά, από την πρώτη των (10.2.16), για $z = 2$, λαμβάνουμε

$$\arccos 2 = -i \log\left(2 + i(-3)^{\frac{1}{2}}\right),$$

οπότε επανευρίσκουμε το αποτέλεσμα του πρώτου τρόπου, αφού $(-3)^{\frac{1}{2}} = \pm i\sqrt{3}$.

$\triangle$

10.3 Ειδικά υποσύνολα του μιγαδικού επιπέδου

Στην παράγραφο αυτή διακρίνουμε ορισμένα ειδικά, σημαντικά και χρηστικά υποσύνολα του $\mathbb{C}$, τα οποία προσδιορίζονται από αλγεβρικές και μετρικές ιδιότητες του $\mathbb{C}$. Τα σύνολα αυτά χρησιμοποιούνται ως πεδία ορισμού μιγαδικών συναρτήσεων και συμβάλλουν καθοριστικά στη μελέτη της έννοιας του ορίου, της συνέχειας και της ολομορφίας των μιγαδικών συναρτήσεων.

Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$ και $\epsilon > 0$. Το σύνολο

$$D_\epsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon\}$$

ονομάζεται *ανοικτός δίσκος* με κέντρο το z_0 και ακτίνα ϵ, ενώ το σύνολο

$$\overline{D}_\epsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le \epsilon\}$$

ονομάζεται *κλείστος δίσκος* με κέντρο το z_0 και ακτίνα ϵ.

Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$. Ένα σημείο $z_0 \in A$ ονομάζεται *εσωτερικό σημείο* του A αν υπάρχει ένας ανοικτός δίσκος $D_\epsilon(z_0)$, ο οποίος περιέχεται στο A.

Ορισμός 10.3.1 Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{C}$ ονομάζεται *ανοικτό* όταν κάθε σημείο του είναι εσωτερικό, δηλαδή όταν για κάθε $z \in A$ υπάρχει ένα $\epsilon_z > 0$ με $D_{\epsilon_z}(z) \subseteq A$.

□

Παραδείγματα ανοικτών συνόλων.

Τα σύνολα που ορίζονται από τις ανισότητες

(1) $|z - z_0| < \epsilon$ (ανοικτός δίσκος)

(2) $2 < |z| < 3$ (δακτύλιος)

(3) $|z - i| > 4$ (εξωτερικό κύκλου)

(4) $\mathrm{Im}(z) < 0$ (κάτω ημιεπίπεδο)

(5) $-2 < \mathrm{Re}(z) < 2$ (λωρίδα)

είναι ανοικτά σύνολα.

△

Ένα $A \subseteq \mathbb{C}$ ονομάζεται *πολυγωνικά συνεκτικό* αν κάθε δύο σημεία του συνδέονται με μία πολυγωνική γραμμή (δηλαδή ένωση διαδοχικών ευθυγράμμων τμημάτων), η οποία ανήκει στο A.

Παραδείγματα.

(α) Τα ανοικτά σύνολα των παραπάνω περιπτώσεων (1)-(5) είναι και πολυγωνικά συνεκτικά.

(β) Το ανοικτό σύνολο $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \neq 1\}$ δεν είναι πολυγωνικά συνεκτικό.

△

Ένα μη κενό, ανοικτό και πολυγωνικά συνεκτικό $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ονομάζεται *πεδίο* ή *τόπος*.

Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$. Ένα σημείο $z_0 \in \mathbb{C}$ ονομάζεται *συνοριακό σημείο* του A αν κάθε ανοικτός δίσκος με κέντρο το z_0 περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του A και τουλάχιστον ένα σημείο που δεν ανήκει στο A. Το σύνολο ∂A των συνοριακών σημείων του A ονομάζεται *σύνορο* του A.

Παραδείγματα.

(1) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon\}, \quad \partial A = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \epsilon\}$

(2) $A = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < 3\}, \quad \partial A = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2 \;\text{ και }\; |z| = 3\}$

(3) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| > 4\}, \quad \partial A = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 4\}$

(4) $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) < 0\}, \quad \partial A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 0\}$

(5) $A = \{z \in \mathbb{C} : -2 < \mathrm{Re}(z) < 2\}, \quad \partial A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = -2 \;\text{ και }\; \mathrm{Re}(z) = 2\}$.

$\triangle$

Ένα $K \subseteq \mathbb{C}$ ονομάζεται *κλειστό* όταν περιέχει το σύνορό του ∂K, που ισοδυναμεί με το ότι το συμπλήρωμά του $\mathbb{C} \setminus K$ είναι ανοικτό. Επί παραδείγματι, ο κλειστός δίσκος $\overline{D}_\epsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \epsilon\}$ είναι κλειστό σύνολο, αφού περιέχει το σύνορό του $\partial \overline{D}_\epsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \epsilon\}$.

Ένα $B \subseteq \mathbb{C}$ ονομάζεται *φραγμένο* όταν το σύνολο $\{|z| : z \in B\}$ είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, δηλαδή όταν υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε να ισχύει ότι $|z| \leq M$, για κάθε $z \in B$.

Παραδείγματα. Από τα ανοικτά σύνολα των περιπτώσεων (1)-(5) του πρώτου παραδείγματος, φραγμένα είναι μόνο ο ανοικτός δίσκος και ο δακτύλιος.

$\triangle$

10.4 Όρια μιγαδικών συναρτήσεων

Για τον ορισμό του ορίου μιας μιγαδικής συνάρτησης χρειαζόμαστε την έννοια του σημείου συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της, η οποία εξασφαλίζει τη μοναδικότητα του ορίου.

Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$. Ένα $z_0 \in \mathbb{C}$ ονομάζεται *σημείο συσσώρευσης* του συνόλου A όταν κάθε ανοικτός δίσκος $D_\epsilon(z_0)$ περιέχει ένα (τουλάχιστον) σημείο του A διαφορετικό από το z_0, δηλαδή όταν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $z \in A$ με $z \neq z_0$ και $|z - z_0| < \epsilon$ ή ισοδύναμα $0 < |z - z_0| < \epsilon$. Εξάλλου, ένα σημείο z_0 του A, το οποίο δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A, ονομάζεται *μεμονωμένο σημείο* του A.

Σημείωση. Είναι σαφές ότι για ένα ανοικτό $A \subseteq \mathbb{C}$ όλα τα σημεία του $A \cup \partial A$ είναι σημεία συσσώρευσης του A.

Ορισμός 10.4.1 Εστω $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ μιγαδική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A και $z_0 \in \mathbb{C}$ σημείο συσσώρευσης του A. Λέμε ότι η συνάρτηση f έχει ως όριο το μιγαδικό αριθμό ℓ (ή συγκλίνει προς το μιγαδικό αριθμό ℓ), καθώς το z τείνει στο z_0, τότε και μόνο τότε όταν για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ έτσι ώστε

$$\text{για κάθε } z \in A \text{ με } 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - \ell| < \epsilon.$$

Αν το z_0 είναι μεμονωμένο σημείο του A (οπότε $z_0 \in A$) ως όριο της f, καθώς το z τείνει στο z_0, ορίζεται η τιμή $f(z_0)$.

□

Το όριο της f στο z_0, όταν υπάρχει, είναι μοναδικό και συμβολίζεται με

$$\ell = \lim_{z \to z_0} f(z).$$

Παρατηρήσεις.

(i) Για τον ορισμό της έννοιας του ορίου, δεν απαιτείται το z_0 να ανήκει στο σύνολο A ούτε να ορίζεται η τιμή $f(z_0)$.

(ii) Στις περιπτώσεις πραγματικών συναρτήσεων, ένας πραγματικός αριθμός x_0 προσεγγίζεται από δύο συγκεκριμένες κατευθύνσεις ($x > x_0$ και $x < x_0$). Όμως, στις μιγαδικές συναρτήσεις, η προσέγγιση $z \to z_0$ επιτρέπεται κατά οποιονδήποτε δυνατό τρόπο, π.χ. κατά μήκος μιας καμπύλης που διέρχεται από το z_0.

△

Παράδειγμα 10.4.1 Εξετάστε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{z \to i} \frac{z^4-1}{z-i}$.

Λύση. Από την

$$\frac{z^4 - 1}{z - i} = \frac{(z^2 - 1)(z^2 + 1)}{z - i} = (z^2 - 1)(z + i), \;\; z \neq i,$$

έχουμε

$$\lim_{z \to i} \frac{z^4 - 1}{z - i} = \lim_{z \to i} (z^2 - 1)(z + i) = -4i.$$

△

Παράδειγμα 10.4.2 Εξετάστε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}}$.

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \frac{z}{\overline{z}}$, $z \neq 0$, και προσεγγίζουμε το σημείο 0

(i) κατά μήκος του θετικού πραγματικού ημιάξονα, δηλαδή θεωρούμε ότι $z = x+i0$, $x \to 0^+$, οπότε έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+} f(x+i0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x+i0}{\overline{x+i0}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

(ii) κατά μήκος του θετικού φανταστικού ημιάξονα, δηλαδή θεωρούμε ότι $z = 0 + iy$, $y \to 0^+$, οπότε

$$\lim_{y\to 0^+} f(0+iy) = \lim_{y\to 0^+} \frac{0+iy}{\overline{0+iy}} = \lim_{y\to 0^+} \frac{iy}{-iy} = -1.$$

Οι δύο προηγούμενες προσεγγίσεις οδηγούν σε διαφορετικά όρια που σημαίνει ότι δεν υπάρχει το ζητούμενο $\lim_{z\to 0} f(z)$.

△

Με παρόμοια διαδικασία επεξεργαζόμαστε και το ακόλουθο

Παράδειγμα 10.4.3 Εξετάστε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{Re}(z)}{\mathrm{Im}(z)}$.

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{\mathrm{Im}(z)}$, $\mathrm{Im}(z) \neq 0$, και επιλέγουμε τις προσεγγίσεις του σημείου 0

(i) κατά μήκος της ημιευθείας $z = x + ix$, $x > 0$, οπότε λαμβάνουμε

$$\lim_{x\to 0^+} f(x+ix) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{Re}(x+ix)}{\mathrm{Im}(x+ix)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

(ii) κατά μήκος του θετικού φανταστικού ημιάξονα, δηλαδή θεωρούμε ότι $z = 0 + iy$, $y \to 0^+$, οπότε

$$\lim_{y\to 0^+} f(0+iy) = \lim_{y\to 0^+} \frac{\mathrm{Re}(0+iy)}{\mathrm{Im}(0+iy)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{0}{y} = 0$$

και έτσι συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει το ζητούμενο $\lim_{z\to 0} f(z)$.

△

Η συσχέτιση του ορίου μιας μιγαδικής συνάρτησης με τα όρια του πραγματικού και του φανταστικού μέρους της καταγράφεται στην ακόλουθη

Πρόταση 10.4.1 Έστω η μιγαδική συνάρτηση $f = u+iv : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ και $z_0 = x_0+iy_0$ σημείο συσσώρευσης του A. Τότε, οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι

1. $\lim_{z\to z_0} f(z) = u_0 + iv_0$

2. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0$ και $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$.

□

Πρόταση 10.4.2 (Αλγεβρικές ιδιότητες ορίων)

Έστω $f, g : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ δύο μιγαδικές συναρτήσεις και z_0 ένα σημείο συσσώρευσης του A. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν τα όρια $\lim_{z\to z_0} f(z)$ και $\lim_{z\to z_0} g(z)$. Τότε, υπάρχουν επίσης τα όρια

$$\lim_{z\to z_0}(f(z)+g(z)), \quad \lim_{z\to z_0}(\lambda f(z)), \quad \lim_{z\to z_0}(f(z)g(z)), \quad \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}$$

($\lambda \in \mathbb{C}$ και για το τελευταίο όριο υποθέτουμε ότι $\lim_{z\to z_0} g(z) \neq 0$) και ισχύουν

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_0}(f(z)+g(z)) &= \lim_{z\to z_0} f(z) + \lim_{z\to z_0} g(z),\\
\lim_{z\to z_0}(\lambda f(z)) &= \lambda \lim_{z\to z_0} f(z),\\
\lim_{z\to z_0}(f(z)g(z)) &= \left(\lim_{z\to z_0} f(z)\right)\left(\lim_{z\to z_0} g(z)\right),\\
\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} &= \frac{\lim_{z\to z_0} f(z)}{\lim_{z\to z_0} g(z)}.
\end{aligned}$$

□

10.5 Συνεχείς μιγαδικές συναρτήσεις

Η συνέχεια μιγαδικών συναρτήσεων ορίζεται με τη βοήθεια της έννοιας του ορίου όπως ακολουθεί.

Ορισμός 10.5.1 Μία μιγαδική συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, με πεδίο ορισμού το σύνολο A, ονομάζεται *συνεχής* σε ένα σημείο $z_0 \in A$ όταν υπάρχει το $\lim_{z\to z_0} f(z)$ και ισχύει

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Εξάλλου, η συνάρτηση f ονομάζεται συνεχής στο A όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο $z_0 \in A$.

□

Η συσχέτιση της συνέχειας μιας μιγαδικής συνάρτησης με τη συνέχεια του πραγματικού και του φανταστικού της μέρους καταγράφεται στο ακόλουθο

Θεώρημα 10.5.1 Μία μιγαδική συνάρτηση $f = u + iv : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής στο σημείο $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ τότε και μόνο τότε όταν οι πραγματικές συναρτήσεις $u(x, y)$ και $v(x, y)$ είναι συνεχείς στο σημείο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

□

Θεώρημα 10.5.2 (Αλγεβρικές ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων)

Έστω $f, g : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ δύο μιγαδικές συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού το υποσύνολο A του $\mathbb{C}$, οι οποίες είναι συνεχείς σε ένα σημείο $z_0 \in A$. Τότε οι συναρτήσεις

$$f + g, \quad \lambda f, \quad fg \quad \text{και} \quad \frac{f}{g}$$

(οπου $\lambda \in \mathbb{C}$ και $g(z_0) \neq 0$) είναι συνεχείς στο z_0.

□

Παραδείγματα.

(1) Οι συναρτήσεις $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z), |\overline{z}|$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{C}$.

(2) Η πολυωνυμική συνάρτηση

$$P(z) = a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \ldots + a_1\, z + a_0,\ a_i \in \mathbb{C}$$

είναι συνεχής στο $\mathbb{C}$.

(3) Η ρητή συνάρτηση

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},\ \ z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0$$

είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

(4) Η συνάρτηση

$$f(z) = \begin{cases} 0, & z = 0 \\ \frac{z}{\overline{z}}, & z \neq 0 \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής στο $z = 0$ διότι, όπως δείξαμε στο Παράδειγμα 10.4.2, δεν υπάρχει το $\lim_{z \to 0} f(z)$.

△

Θεώρημα 10.5.3 Έστω δύο μιγαδικές συναρτήσεις $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ και $g : B \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με τις ιδιότητες: $f(A) \subseteq B$, η f είναι συνεχής σε ένα σημείο $z_0 \in A$ και η g είναι συνεχής στο σημείο $f(z_0) \in B$. Τότε, η σύνθεση $(g \circ f)(z) \equiv g(f(z)) : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής στο z_0.

□

Μία μιγαδική συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ονομάζεται *φραγμένη* στο A όταν το πεδίο τιμών $f(A)$ αυτής είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}$, δηλαδή όταν υπάρχει ένα $M > 0$ έτσι ώστε να ισχύει

$$|f(z)| \leq M, \ \ \forall z \in A.$$

Θεώρημα 10.5.4 Κάθε συνεχής μιγαδική συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με πεδίο ορισμού το κλειστό και φραγμένο υποσύνολο A του $\mathbb{C}$ είναι φραγμένη.

□

Θεώρημα 10.5.5 (Θεώρημα μεγίστης και ελαχίστης τιμής)

Έστω $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ συνεχής μιγαδική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το κλειστό και φραγμένο υποσύνολο A του $\mathbb{C}$. Τότε, υπάρχουν σημεία z_ϵ και z_μ του A, έτσι ώστε να ισχύει

$$|f(z_\epsilon)| \leq |f(z)| \leq |f(z_\mu)|, \ \ \forall z \in A.$$

□

10.6 Ασκήσεις

Άσκηση 10.6.1 Λύστε τις μιγαδικές εξισώσεις

(i) $\text{Log} z = \frac{\pi}{2} i$

(ii) $\text{Log} z = \frac{3\pi}{2} i$

(iii) $e^z = \pi i$

(iv) $\sin z = \cosh 4$

(v) $\overline{e^{iz}} = e^{i\overline{z}}$

(vi) $z^{\frac{1}{2}} = 1 + i$.