Κεφάλαιο 4

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης

Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις που περιέχουν παραγώγους δεύτερης τάξης της άγνωστης συνάρτησης εμφανίζονται πολύ συχνά σε προβλήματα τα οποία ανακύπτουν στις θετικές και τεχνολογικές επιστήμες. Ο κύριος σκοπός του κεφαλαίου είναι η παρουσίαση ορισμένων βασικών μεθόδων για την επίλυση γραμμικών εξισώσεων δεύτερης τάξης. Αρχικά, διατυπώνονται γενικές αρχές και ειδικές τεχνικές για τον υπολογισμό των λύσεων. Η πλέον θεμελιώδης και σημαντική τεχνική είναι εκείνη η οποία εφαρμόζεται για τη λύση ομογενών γραμμικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές. Η βασική διαδικασία για την επίλυση μη ομογενών εξισώσεων αναπτύσσεται στη συνέχεια. Επιπρόσθετα, διατυπώνονται τεχνικές επίλυσης για ειδικές κατηγορίες γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης με μεταβλητούς συντελεστές.

4.1 Γενική θεωρία

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε τη γενική θεωρία των γραμμικών Δ.Ε. δεύτερης τάξης

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \tag{4.1.1}$$

όπου $a_0, a_1, f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα I.

Αρχικά, μελετούμε βασικές ιδιότητες των λύσεων της αντίστοιχης της (4.1.1) ομογενούς Δ.Ε.

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \tag{4.1.2}$$

Για τις λύσεις της (4.1.2) ισχύει το ακόλουθο

Λήμμα 4.1.1 Αν y_1 και y_2 είναι δύο λύσεις της ομογενούς Δ.Ε. (4.1.2) στο διάστημα I τότε η συνάρτηση

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

όπου c_1 και c_2 αυθαίρετες πραγματικές σταθερές, είναι επίσης λύση της (4.1.2) στο I.

Απόδειξη. Επειδή οι y_1 και y_2 είναι λύσεις της (4.1.2), ισχύουν

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1 = 0 \quad \text{και} \quad y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2 = 0,$$

από τις οποίες για την $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y &= (c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + a_1(c_1 y_1 + c_2 y_2)' + a_0(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ &= c_1(y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) + c_2(y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2) = 0. \end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 4.1.1 Ο ισχυρισμός του Λήμματος 4.1.1, ότι κάθε γραμμικός συνδυασμός δύο λύσεων μιας γραμμικής ομογενούς Δ.Ε. είναι επίσης λύση της, αναφέρεται ως *αρχή της υπέρθεσης*.

△

Ως ένα απλό σχετικό παράδειγμα, θεωρούμε την ομογενή γραμμική Δ.Ε. δεύτερης τάξης $y'' = 0$, η οποία έχει ως λύσεις τις συναρτήσεις $y_1 = 1$ και $y_2 = x$. Τότε, σύμφωνα με την αρχή της υπέρθεσης, η συνάρτηση $y = c_1 + c_2 x$, όπου c_1 και c_2 αυθαίρετες σταθερές, είναι επίσης λύση της Δ.Ε.

Στη συνέχεια διατυπώνουμε (χωρίς απόδειξη) το θεμελιώδες θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης για Π.Α.Τ. γραμμικών Δ.Ε. δεύτερης τάξης.

Θεώρημα 4.1.1 Για κάθε $x_0 \in I$ και $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ υπάρχει ακριβώς μία λύση $y : I \to \mathbb{R}$ του Π.Α.Τ.

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \ \ y(x_0) = y_0, \ \ y'(x_0) = y_1. \tag{4.1.3}$$

□

Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, η μόνη λύση του Π.Α.Τ. (4.1.3) με $f = 0$ και $y_0 = y_1 = 0$ είναι η συνάρτηση $y = 0$.

Έστω y_1, $y_2 : I \to \mathbb{R}$ δύο λύσεις της Δ.Ε. (4.1.2). Τότε, σύμφωνα με την αρχή της υπέρθεσης (Λήμμα 4.1.1), κάθε γραμμικός συνδυασμός $c_1 y_1 + c_2 y_2$ των λύσεων y_1 και y_2

είναι επίσης λύση της Δ.Ε. (4.1.2). Όμως, δεν ισχύει, χωρίς προϋποθέσεις για τις λύσεις y_1 και y_2, ο (αντίστροφος) ισχυρισμός: Για κάθε λύση y της Δ.Ε. (4.1.2) υπάρχουν σταθερές c_1 και c_2 έτσι ώστε να ισχύει $y = c_1y_1 + c_2y_2$.

Πράγματι, θεωρούμε, επί παραδείγματι, την πολύ απλή Δ.Ε. $y'' = 0$, της οποίας τρεις λύσεις είναι οι συναρτήσεις

$$y_1 = 1 + x, \quad y_2 = 2 + 2x, \quad y_3 = 1 - x,$$

και παρατηρούμε ότι η έκφραση (ισχυρισμός)

$$1 - x = y_3 = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1(1 + x) + c_2(2 + 2x)$$

οδηγεί στο σύστημα

$$c_1 + 2c_2 = 1 \quad \text{και} \quad c_1 + 2c_2 = -1,$$

το οποίο είναι αδύνατο.

Στην προκειμένη περίπτωση, παρατηρούμε ότι ισχύει $y_2 = 2y_1$, δηλαδή οι λύσεις y_1 και y_2 είναι γραμμικά εξαρτημένες. Όμως, όπως θα αποδείξουμε παρακάτω, η Δ.Ε. έχει ένα (τουλάχιστον) ζεύγος γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων και για οποιεσδήποτε δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις y_1 και y_2 της Δ.Ε., κάθε λύση y της Δ.Ε. εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των y_1 και y_2, δηλαδή η γενική λύση της Δ.Ε. (4.1.2) συμπίπτει με το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών $\{c_1y_1 + c_2y_2\}$.

Υπενθυμίζουμε τώρα τις έννοιες της γραμμικής εξάρτησης και γραμμικής ανεξαρτησίας δύο συναρτήσεων.

Ορισμός 4.1.1 Δύο συναρτήσεις $y_1, y_2 : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ονομάζονται *γραμμικά εξαρτημένες* στο διάστημα I όταν υπάρχουν σταθερές c_1 και c_2 με $c_1 \neq 0$ ή $c_2 \neq 0$ έτσι ώστε

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0, \ \forall x \in I. \tag{4.1.4}$$

Εξάλλου, οι συναρτήσεις y_1 και y_2 ονομάζονται *γραμμικά ανεξάρτητες* στο I όταν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένες, δηλαδή όταν για δύο σταθερές c_1 και c_2 ισχύει

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0, \ \forall x \in I \Rightarrow c_1 = c_2 = 0. \tag{4.1.5}$$

□

Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $y_1 = 1$ και $y_2 = x^2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες σε κάθε διάστημα I, διότι $c_1 + c_2x^2 = 0, \ x \in I$, πάντα έπεται ότι $c_1 = c_2 = 0$. Ενώ, οι συναρτήσεις $y_1 = \sin(2x)$ και $y_2 = \sin x \cos x$ είναι γραμμικά εξαρτημένες σε κάθε διάστημα I, διότι ισχύει $\sin(2x) - 2\sin x \cos x = 0, \ x \in \mathbb{R}$.

Σημαντικό ρόλο στην γραμμική εξάρτηση ή ανεξαρτησία των συναρτήσεων παίζει το διάστημα I που αυτές ορίζονται. Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $y_1 = x^2$ και $y_2 = x|x|$ είναι γραμμικά εξαρτημένες σε οποιοδήποτε διάστημα I που δεν περιέχει το μηδέν. Όμως, σε ένα διάστημα I που περιέχει το μηδέν, οι συναρτήσεις y_1 και y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο I, αφού ισχύουν

$$y_1 = y_2,\ \forall x \in I \text{ με } x \geq 0 \quad \text{και} \quad y_1 = -y_2,\ \forall x \in I \text{ με } x \leq 0,$$

και άρα δεν υπάρχουν μη μηδενικές σταθερές c_1 και c_2 για τις οποίες ισχύει $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0,\ \forall x \in I$.

Σημειώνουμε ότι η γραμμική ανεξαρτησία δύο συναρτήσεων σε ένα διάστημα I δεν συνεπάγεται τη γραμμική ανεξαρτησία αυτών σε κάθε υποδιάστημα του I. Εξάλλου, δύο γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις στο διάστημα I θα είναι προφανώς γραμμικά ανεξάρτητες και σε κάθε άλλο διάστημα I_1 που περιέχει το I υπό την προϋπόθεση ότι οι συναρτήσεις ορίζονται και στο I_1.

Βασική έννοια για τον έλεγχο της γραμμικής ανεξαρτησίας δύο λύσεων y_1 και y_2 της Δ.Ε. (4.1.2) είναι εκείνη της ορίζουσας Wronksi.

Ορισμός 4.1.2 Έστω δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις $y_1, y_2 : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Η συνάρτηση $W \equiv W(y_1, y_2) : I \to \mathbb{R}$, η οποία ορίζεται από την 2×2 ορίζουσα

$$W(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)\,, \tag{4.1.6}$$

ονομάζεται ορίζουσα *Wronksi* των y_1 και y_2.

□

Για την ορίζουσα Wronksi δύο λύσεων y_1 και y_2 της (4.1.2) ισχύει το ακόλουθο

Θεώρημα 4.1.2 (Abel). Για δύο λύσεις y_1 και y_2 της (4.1.2) και $x_0 \in I$, ισχύει

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\mathrm{d}t},\ \ \forall x \in I. \tag{4.1.7}$$

Απόδειξη. Από τον Ορισμό 4.1.2, έχουμε

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x),$$

από την οποία ευρίσκουμε

$$W'(x) = y_1(x)y_2''(x) - y_2(x)y_1''(x).$$

Εξάλλου, επειδή οι y_1 και y_2 είναι λύσεις της (4.1.2), η τελευταία γράφεται

$$W'(x) = y_1(x)(-a_1(x)y_2'(x) - a_0(x)y_2(x)) - y_2(x)(-a_1(x)y_1'(x) - a_0(x)y_1(x)),$$

οπότε

$$W'(x) = -a_1(x)[y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)] = -a_1(x)W(x).$$

Η τελευταία είναι Δ.Ε. πρώτης τάξης χωριζομένων μεταβλητών και έχει ως λύση

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\mathrm{d}t}, \;\; x \in I.$$

□

Παρατήρηση 4.1.2 Από την (4.1.7) προκύπτει ότι ισχύει $W(x) \neq 0$, $\forall x \in I$ τότε και μόνο τότε όταν $W(x_0) \neq 0$ για κάποιο $x_0 \in I$, δηλαδή $W(x) = 0$, $\forall x \in I$ τότε και μόνο τότε όταν $W(x_0) = 0$ για κάποιο $x_0 \in I$.

△

Στο ακόλουθο θεώρημα διατυπώνεται μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη γραμμική ανεξαρτησία δύο λύσεων y_1 και y_2 της (4.1.2).

Θεώρημα 4.1.3 Δύο λύσεις y_1 και y_2 της (4.1.2) είναι γραμμικά ανεξάρτητες τότε και μόνο τότε όταν $W(x_0) \neq 0$ για κάποιο $x_0 \in I$.

Απόδειξη. Έστω ότι οι λύσεις y_1 και y_2 της (4.1.2) είναι γραμμικά ανεξάρτητες, αλλά ισχύει $W(x) = 0$ για κάθε $x \in I$. Αν x_0 είναι ένα (σταθεροποιημένο) σημείο του I, τότε το ομογενές 2×2 (αλγεβρικό) σύστημα

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) &= 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

ως προς αγνώστους τα c_1 και c_2, έχει μία μη μηδενική λύση (c_1^*, c_2^*), επειδή η ορίζουσά του είναι η $W(x_0) = 0$.

Σύμφωνα με την αρχή της υπέρθεσης, η συνάρτηση

$$y(x) = c_1^* y_1(x) + c_2^* y_2(x), \;\; x \in I \tag{α}$$

είναι λύση της ομογενούς Δ.Ε. (4.1.2), η οποία επιπλέον ικανοποιεί επίσης τις αρχικές συνθήκες $y(x_0) = 0$ και $y'(x_0) = 0$ (αφού (c_1^*, c_2^*) είναι λύση του προηγούμενου αλγεβρικού συστήματος).

Από το Θεώρημα 4.1.1, έχουμε ότι το Π.Α.Τ.

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \;\; y(x_0) = 0, \;\; y'(x_0) = 0$$

έχει ως μοναδική λύση τη συνάρτηση $y = 0$, και έτσι από την (α) προκύπτει ότι

$$c_1^* y_1(x) + c_2^* y_2(x) = 0, \;\; \forall x \in I,$$

η οποία συνεπάγεται ότι οι λύσεις y_1 και y_2 είναι γραμμικά εξαρτημένες, αφού $(c_1^*, c_2^*) \neq (0,0)$, που συνιστά αντίφαση.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι ισχύει $W(x_0) \neq 0$ και έστω σταθερές c_1 και c_2 για τις οποίες ισχύει
$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0, \;\; \forall x \in I,$$
από την οποία προκύπτει η εξίσωση
$$c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) = 0, \;\; \forall x \in I.$$
Θεωρούμε, τώρα, το 2×2 ομογενές (αλγεβρικό) σύστημα
$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) &= 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) &= 0, \end{aligned}$$
το οποίο έχει ως ορίζουσα την $W(x_0) \neq 0$, άρα το σύστημα αυτό έχει μόνο τη μηδενική λύση, δηλαδή ισχύει $c_1 = c_2 = 0$, και επομένως οι y_1 και y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

$\square$

Συνδυάζοντας το προηγούμενο θεώρημα και το Θεώρημα 4.1.1 (ύπαρξης και μοναδικότητας), λαμβάνουμε το ακόλουθο

Πόρισμα 4.1.1 Υπάρχουν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς Δ.Ε. (4.1.2) στο I.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 4.1.1 (ύπαρξης και μοναδικότητας), για $x_0 \in I$ και $\alpha \neq 0$ σταθεροποιημένο πραγματικό αριθμό, έχουμε ότι υπάρχουν δύο λύσεις y_1 και y_2 της (4.1.2) που ικανοποιούν τις σχέσεις
$$\begin{aligned} y_1(x_0) = \alpha \quad &, \quad y_1'(x_0) = 0 \\ y_2(x_0) = 0 \quad &, \quad y_2'(x_0) = \alpha\,. \end{aligned}$$

Τότε, για την ορίζουσα Wronski W των y_1 και y_2 ισχύει ότι
$$W(x_0) = \alpha^2 \neq 0,$$
και επομένως από το Θεώρημα 4.1.3 συνάγουμε ότι οι y_1 και y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

$\square$

Τώρα, διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το ακόλουθο σημαντικό

Θεώρημα 4.1.4 Αν y_1 και y_2 είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς Δ.Ε. (4.1.2), τότε για κάθε λύση y αυτής, υπάρχουν μοναδικές σταθερές c_1^* και c_2^* έτσι ώστε να ισχύει

$$y(x) = c_1^* y_1(x) + c_2^* y_2(x). \tag{4.1.8}$$

Απόδειξη. Για τυχόν $x_0 \in I$, θεωρούμε το 2×2 ομογενές αλγεβρικό γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) &= y(x_0) \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) &= y'(x_0) \end{aligned}$$

ως προς αγνώστους τα c_1 και c_2, του οποίου η ορίζουσα είναι η ορίζουσα Wronski $W(x_0)$.

Εφόσον οι λύσεις y_1 και y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες, από το Θεώρημα 4.1.3 έχουμε $W(x_0) \neq 0$. Επομένως, το προηγούμενο σύστημα έχει μοναδική λύση (c_1^*, c_2^*), δηλαδή

$$\begin{aligned} c_1^* y_1(x_0) + c_2^* y_2(x_0) &= y(x_0) \\ c_1^* y_1'(x_0) + c_2^* y_2'(x_0) &= y'(x_0). \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την αρχή της υπέρθεσης, η συνάρτηση

$$\tilde{y}(x) = c_1^* y_1(x) + c_2^* y_2(x)$$

είναι λύση της (4.1.2), για την οποία επιπλέον ισχύουν

$$\tilde{y}(x_0) = y(x_0) \quad \text{και} \quad \tilde{y}'(x_0) = y'(x_0),$$

οπότε από το Θεώρημα 4.1.1 (ύπαρξης και μοναδικότητας), έχουμε

$$y(x) = \tilde{y}(x) = c_1^* y_1(x) + c_2^* y_2(x), \ \ \forall x \in I.$$

□

Συνδυάζοντας τώρα το Λήμμα 4.1.1 και τα Θεωρήματα 4.1.2, 4.1.3 και 4.1.4, ενοποιούμε τα αποτελέσματά τους στο ακόλουθο

Θεώρημα 4.1.5 Έστω y_1 και y_2 δύο λύσεις της ομογενούς Δ.Ε. (4.1.2) στο διάστημα I. Τότε οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι.

1. Κάθε λύση y της Δ.Ε. (4.1.2) είναι γραμμικός συνδυασμός των λύσεων y_1 και y_2 στο I, δηλαδή υπάρχουν σταθερές c_1 και c_2 έτσι ώστε να ισχύει

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \ \forall x \in I.$$

2. Οι λύσεις y_1 και y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο I.

3. Υπάρχει $x_0 \in I$ έτσι ώστε η τιμή της ορίζουσας Wronski W των y_1 και y_2 στο x_0 να είναι διάφορη από το μηδέν, δηλαδή $W(x_0) \neq 0$.

4. Για την ορίζουσα Wronski W των y_1 και y_2 ισχύει $W(x) \neq 0, \ \forall x \in I$.

□

Από το Θεώρημα 4.1.5 συνάγεται ότι για τον προσδιορίσμό *όλων* των λύσεων της ομογενούς Δ.Ε. (4.1.2), αρκεί η εύρεση *δύο* γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων y_1 και y_2 αυτής, οπότε η γενική λύση της (4.1.2) συμπίπτει με το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

όπου c_1 και c_2 αυθαίρετες πραγματικές σταθερές. Στην προκειμένη περίπτωση, το σύνολο $\{y_1, y_2\}$ αναφέρεται και ως *θεμελιώδες σύνολο λύσεων* της (4.1.2).

Πόρισμα 4.1.2 Το σύνολο Λ_o των λύσεων της ομογενούς Δ.Ε. (4.1.2) είναι διανυσματικός χώρος διάστασης 2.

Απόδειξη. Από την αρχή της υπέρθεσης, το Λ_o είναι διανυσματικός χώρος. Εξάλλου, από το Πόρισμα 4.1.1 και το Θεώρημα 4.1.4, υπάρχουν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις y_1 και y_2, οι οποίες παράγουν γραμμικά το διανυσματικό χώρο Λ_o. Έτσι, το σύνολο $B = \{y_1, y_2\}$ είναι βάση του Λ_o και άρα η διάσταση του διανυσματικού χώρου Λ_o είναι 2.

□

Το πόρισμα αυτό δικαιολογεί επίσης και τη χρήση (αναφορά) του όρου θεμελιώδες σύνολο λύσεων.

Παράδειγμα 4.1.1 Βρείτε τη γενική λύση της Δ.Ε.

$$y'' + k^2 y = 0,$$

όπου $k > 0$.

Λύση. Επαληθεύουμε εύκολα ότι οι συναρτήσεις $y_1(x) = \cos(kx)$ και $y_2(x) = \sin(kx)$ είναι λύσεις της Δ.Ε. και υπολογίζουμε την ορίζουσα Wronski W των y_1 και y_2

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos(kx) & \sin(kx) \\ -k\sin(kx) & k\cos(kx) \end{vmatrix} = k > 0\,.$$

Έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1.5, οι λύσεις y_1 και y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες και η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y(x) = c_1\cos(kx) + c_2\sin(kx), \quad x \in I.$$

△

Τώρα, για τον προσδιορισμό της γενικής λύσης της μη ομογενούς Δ.Ε. (4.1.1) χρειαζόμαστε την ακόλουθη

Πρόταση 4.1.1 Η διαφορά δύο λύσεων y_1 και y_2 της μη ομογενούς Δ.Ε. (4.1.1) είναι λύση της ομογενούς Δ.Ε. (4.1.2).

Απόδειξη. Επειδή οι y_1 και y_2 είναι λύσεις της (4.1.1), ισχύουν

$$y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1 = f(x),$$

$$y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2 = f(x),$$

οπότε αφαιρώντας κατά μέλη λαμβάνουμε

$$(y_1 - y_2)'' + a_1(x)(y_1 - y_2)' + a_0(x)(y_1 - y_2) = 0,$$

και επομένως η $y_1 - y_2$ είναι πράγματι λύση της ομογενούς Δ.Ε. (4.1.2).

□

Συνδυασμός του Θεωρήματος 4.1.4 και της Πρότασης 4.1.1 οδηγεί στο ακόλουθο

Θεώρημα 4.1.6 Έστω ότι y_1 και y_2 είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς Δ.Ε. (4.1.2) στο I και y_μ είναι μία μερική λύση της μη ομογενούς Δ.Ε. (4.1.1) στο I. Τότε, κάθε λύση y της (4.1.1) είναι της μορφής

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_\mu(x),\ x \in I. \tag{4.1.9}$$

Απόδειξη. Κάθε συνάρτηση y της μορφής (4.1.9) είναι λύση της μη ομογενούς Δ.Ε. (4.1.1). Πράγματι, από τις υποθέσεις έχουμε

$$y'' + a_1y' + a_0y = c_1y_1'' + c_2y_2'' + y_\mu'' + a_1(c_1y_1' + c_2y_2' + y_\mu') + a_0(c_1y_1 + c_2y_2 + y_\mu) =$$

$$c_1[y_1'' + a_1y_1' + a_0y_1] + c_2[y_2'' + a_1y_2' + a_0y_2] + y_\mu'' + a_1y_\mu' + a_0y_\mu = 0 + 0 + f = f.$$

Αντιστρόφως, αν y είναι μία οποιαδήποτε λύση της (4.1.1), τότε από την Πρόταση 4.1.1, η διαφορά $y - y_\mu$ είναι λύση της ομογενούς Δ.Ε. (4.1.2). Εφόσον οι y_1 και y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (4.1.2), από το Θεώρημα 4.1.4, υπάρχουν σταθερές c_1 και c_2 ώστε

$$y - y_\mu = c_1y_1 + c_2y_2.$$

□

Σημείωση 4.1.1 Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1.4, κάθε λύση y_o της ομογενούς Δ.Ε. (4.1.2) εκφράζεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός

$$y_o(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad x \in I,$$

όπου y_1 και y_2 είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (4.1.2). Επομένως, από το Θεώρημα 4.1.6, κάθε λύση y της μη ομογενούς Δ.Ε. (4.1.1) είναι το άθροισμα μιας μερικής λύσης της y_μ και της γενικής λύσης y_o της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε., δηλαδή

$$y(x) = y_o(x) + y_\mu(x), \quad x \in I. \tag{4.1.10}$$

△

Κατά αντιστοιχία με την ομογενή Δ.Ε., η οικογένεια λύσεων

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_\mu,$$

όπου c_1 και c_2 αυθαίρετες πραγματικές σταθερές, αποτελεί τη *γενική λύση* της (4.1.1).

Παράδειγμα 4.1.2 Βρείτε τη γενική λύση της Δ.Ε.

$$y'' + k^2 y = x,$$

όπου $k > 0$.

Λύση. Στο Παράδειγμα 4.1.1 έχουμε υπολογίσει τη γενική λύση

$$y_o(x) = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx)$$

της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε.

Εξάλλου, επαληθεύεται εύκολα ότι η συνάρτηση $y_\mu(x) = k^{-2}\, x$ είναι μία μερική λύση της δοθείσας μη ομογενούς Δ.Ε. Έτσι, σύμφωνα με την (4.1.10), η ζητούμενη γενική λύση είναι

$$y(x) = y_o(x) + y_\mu(x) = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx) + k^{-2}\, x.$$

△

Τέλος, συνδυάζοντας τα Θεωρήματα 4.1.1 και 4.1.6, διατυπώνουμε το ακόλουθο

Θεώρημα 4.1.7 Έστω ότι y_1 και y_2 είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς Δ.Ε. (4.1.2) στο I και y_μ είναι μία μερική λύση της μη ομογενούς Δ.Ε. (4.1.1) στο I. Τότε, υπάρχουν μοναδικές σταθερές c_1 και c_2 έτσι ώστε το Π.Α.Τ. (4.1.3) να έχει τη μοναδική λύση

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_\mu(x), \quad x \in I.$$

□

Παράδειγμα 4.1.3 Λύστε το Π.Α.Τ.

$$y'' - y = x^2,\ \ y(0) = 3,\ \ y'(0) = 3.$$

Λύση. Επαληθεύουμε αρχικά ότι οι συναρτήσεις $y_1(x) = e^x$ και $y_2(x) = e^{-x}$ είναι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε. και στη συνέχεια υπολογίζουμε την ορίζουσα Wronksi $W = -2 \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, και έτσι συμπεραίνουμε ότι οι y_1 και y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Εξάλλου, διαπιστώνουμε εύκολα ότι η συνάρτηση $y_\mu(x) = -2 - x^2$ είναι μία μερική λύση της δοθείσας μη ομογενούς Δ.Ε. Άρα, από την (4.1.10), η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 2 - x^2.$$

Οι σταθερές c_1 και c_2 ικανοποιούν το σύστημα

$$\begin{aligned} y(0) = c_1 + c_2 - 2 = 3 \\ y'(0) = c_1 - c_2 = 3, \end{aligned}$$

το οποίο προκύπτει από τις αρχικές συνθήκες και το οποίο έχει τη λύση $c_1 = 4$ και $c_2 = 1$. Έτσι, η λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$y(x) = 4e^x + e^{-x} - 2 - x^2.$$

△

4.2 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

Ο προσδιορισμός σε εκπεφρασμένη μορφή των λύσεων των γραμμικών Δ.Ε. δεύτερης τάξης με συντελεστές συναρτήσεις δεν είναι πάντα δυνατός σε αντίθεση με τις γραμμικές Δ.Ε. πρώτης τάξης των οποίων οι λύσεις εκφράζονται ως ολοκληρώματα των συναρτήσεων των συντελεστών (βλ. Παρ. 2.3). Όμως, όταν οι συντελεστές των y, y', y'' μιας ομογενούς Δ.Ε. δεύτερης τάξης είναι σταθεροί τότε η γενική λύση της Δ.Ε. προσδιορίζεται με την ακόλουθη διαδικασία, η οποία βασίζεται στον αλγεβρικό υπολογισμό των ριζών ενός συγκεκριμένου πολυωνύμου.

Μια Δ.Ε. της μορφής

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{4.2.1}$$

όπου $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, λέγεται *ομογενής γραμμική Δ.Ε. δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές*.