Λύση. Εφαρμόζοντας την (2.3.7), ευρίσκουμε τη γενική λύση

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int 3x^2\mathrm{d}x}\left[\int 3x^2 e^{-x^3} e^{\int 3x^2\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + c\right] \\ &= e^{-x^3}\left[\int 3x^2 e^{-x^3} e^{x^3}\mathrm{d}x + c\right] \\ &= e^{-x^3}\left[\int 3x^2\,\mathrm{d}x + c\right] \\ &= e^{-x^3}(x^3+c). \end{aligned}$$

△

2.4 Ακριβείς διαφορικές εξισώσεις

Στην παράγραφο αυτή ασχολούμαστε με την επίλυση Δ.Ε. πρώτης τάξης της μορφής

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0, \tag{2.4.1}$$

όπου P και Q είναι συνεχείς συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό υποσύνολο D του $\mathbb{R}^2$.

Ως μία εισαγωγή στη διαδικασία επίλυσης των Δ.Ε. αυτών επεξεργαζόμαστε αρχικά τη Δ.Ε.

$$(4x^3y + 3x^2y^2) + (x^4 + 2x^3y)y' = 0.$$

Η εξίσωση αυτή δεν είναι γραμμική ούτε χωριζομένων μεταβλητών. Όμως, εύκολα βλέπουμε ότι ισχύουν

$$4x^3y + 3x^2y^2 = \frac{\partial}{\partial x}(x^4y + x^3y^2)$$

και

$$x^4 + 2x^3y = \frac{\partial}{\partial y}(x^4y + x^3y^2).$$

Έτσι, η Δ.Ε. γράφεται

(α) $$\Phi_x(x,y) + \Phi_y(x,y)y' = 0,$$

όπου

$$\Phi(x,y) = x^4y + x^3y^2.$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα αλυσίδας για τη συνάρτηση $\Phi(x,y)$ με $y = y(x)$, παρατηρούμε ότι η (α) επίσης γράφεται

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi(x, y(x)) = 0,$$

οπότε έχουμε

$$\Phi(x, y) = c,$$

δηλαδή

$$x^4 y + x^3 y^2 = c,$$

όπου c σταθερά. Η τελευταία εξίσωση ορίζει υπό πεπλεγμένη μορφή τη γενική λύση (γενικό ολοκλήρωμα) της Δ.Ε.

Η παραπάνω ανάλυση οδηγεί στη διατύπωση της ακόλουθης πρότασης.

Πρόταση 2.4.1 Αν υπάρχει μία C^1 συνάρτηση $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$$\Phi_x = P \quad \text{και} \quad \Phi_y = Q \quad \text{στο } D, \tag{2.4.2}$$

τότε η

$$\Phi(x, y) = c$$

ορίζει υπό πεπλεγμένη μορφή τη γενική λύση (το γενικό ολοκλήρωμα) της Δ.Ε. (2.4.1).

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας τον κανόνα αλυσίδας για τη συνάρτηση $\Phi(x, y)$ με $y = y(x)$ και λαμβάνοντας υπόψη την υπόθεση (2.4.2) και τη Δ.Ε. (2.4.1), ευρίσκουμε

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi(x, y(x)) = \Phi_x(x, y(x)) + \Phi_y(x, y(x))y'(x) = 0,$$

από την οποία προκύπτει η $\Phi(x, y) = c$.

□

Η τελευταία πρόταση διακρίνει την ακόλουθη ειδική κατηγορία των Δ.Ε. (2.4.1).

Ορισμός 2.4.1 Η Δ.Ε. (2.4.1) ονομάζεται *ακριβής* όταν υπάρχει μία C^1 συνάρτηση $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$$\Phi_x = P \quad \text{και} \quad \Phi_y = Q \quad \text{στο } D.$$

Δηλαδή η Δ.Ε. (2.4.1) είναι ακριβής όταν το σύστημα (2.4.2) των μερικών διαφορικών εξισώσεων έχει μία C^1 λύση $\Phi(x, y)$.

□

Για την πληρέστερη κατανόηση επεξεργαζόμαστε αρχικά δύο συγκεκριμένα παραδείγματα, όπου περιγράφεται η διαδικασία επίλυσης του συστήματος (2.4.2).

Παράδειγμα 2.4.1 Θεωρούμε τη Δ.Ε.

$$(2x + y^2) + 2xyy' = 0$$

και εξετάζουμε αν το αντίστοιχο αυτής σύστημα (2.4.2) έχει λύση.

Λύση. Το σύστημα (2.4.2) για τη Δ.Ε. είναι

$$\Phi_x = 2x + y^2, \quad \Phi_y = 2xy.$$

Ολοκληρώνουμε την πρώτη ως προς x

$$\Phi(x, y) = \int (2x + y^2)\mathrm{d}x = x^2 + xy^2 + g(y),$$

όπου $g(y)$ αυθαίρετη συνάρτηση του y.

Παραγωγίζουμε την τελευταία ως προς y

$$\Phi_y = 2xy + g'(y),$$

και λαμβάνοντας υπόψη τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος, ευρίσκουμε

$$2xy + g'(y) = 2xy,$$

οπότε $g'(y) = 0$ και άρα $g(y) = c$.

Επομένως, η λύση του συστήματος είναι

$$\Phi(x, y) = x^2 + xy^2 + c.$$

△

Εδώ, παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x + y^2) = 2y = \frac{\partial}{\partial x}(2xy).$$

Η συνθήκη αυτή, όπως θα διαπιστώσουμε παρακάτω, είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχει το σύστημα λύση.

Παράδειγμα 2.4.2 Θεωρούμε τη Δ.Ε.

$$(x^2 + y) + xyy' = 0$$

και εξετάζουμε αν το αντίστοιχο αυτής σύστημα (2.4.2) έχει λύση.

Λύση. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία του προηγούμενου παραδείγματος, ευρίσκουμε διαδοχικά

$$\Phi(x, y) = \int (x^2 + y)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + xy + g(y),$$

όπου $g(y)$ αυθαίρετη συνάρτηση του y,

$$\Phi_y = x + g'(y),$$

και έτσι

$$x + g'(y) = xy,$$

το οποίο είναι αδύνατο (διότι η g είναι συνάρτηση του y ενώ η παράγωγός της ευρίσκεται συνάρτηση των x και y).

Κατά συνέπεια, το σύστημα δεν έχει λύση, δηλαδή η Δ.Ε. δεν είναι ακριβής.

△

Εδώ, παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y) = 1 \neq y = \frac{\partial}{\partial x}(xy).$$

Η διαδικασία επίλυσης του συστήματος (2.4.2), η οποία περιγράφεται στα δύο τελευταία παραδείγματα, είναι γενική και διατυπώνεται με λεπτομέρειες ως εξής.

Ολοκληρώνουμε την $\Phi_x = P$ ως προς x και έχουμε

(α) $$\Phi(x, y) = \textstyle\int P(x, y)\mathrm{d}x + g(y),$$

όπου $g(y)$ είναι αυθαίρετη παραγωγίσιμη συνάρτηση του y.

Υπολογίζουμε την μερική παράγωγο της (α) ως προς y

(β) $$\Phi_y(x, y) = \tfrac{\partial}{\partial y} \textstyle\int P(x, y)\mathrm{d}x + g'(y) = \int \tfrac{\partial}{\partial y} P(x, y)\mathrm{d}x + g'(y).$$

Επειδή ισχύει $\Phi_y = Q$, από την (β) ευρίσκουμε

(γ) $$g'(y) = Q(x, y) - \textstyle\int \tfrac{\partial}{\partial y} P(x, y)\mathrm{d}x.$$

Ολοκληρώνουμε την (γ) ως προς y και έχουμε

(δ) $$g(y) = \textstyle\int \left(Q(x, y) - \int \tfrac{\partial}{\partial y} P(x, y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Συνδυάζοντας τις (α) και (δ), λαμβάνουμε

$$\Phi(x, y) = \int P(x, y)\mathrm{d}x + \int \left(Q(x, y) - \int \frac{\partial}{\partial y} P(x, y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y. \qquad (2.4.3)$$

Σημειώνουμε ότι αν σε κάποιο βήμα της προηγούμενης διαδικασίας οδηγηθούμε σε αντίφαση, τότε το σύστημα δεν έχει λύση, δηλαδή η Δ.Ε. δεν είναι ακριβής.

Στη Δ.Ε. (2.4.1) αντιστοιχεί το διανυσματικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (Δ.Ε.Ο.)

$$\int_\Gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

κατά μήκος μιας οποιασδήποτε παραμετρικής καμπύλη Γ του D, η δε ακρίβεια της Δ.Ε. έχει στενή συσχέτιση (είναι ισοδύναμη) προς την ανεξαρτησία του Δ.Ε.Ο. από την καμπύλη ολοκλήρωσης. Δηλαδή, πιο συγκεκριμένα, ισχύει το ακόλουθο σημαντικό θεώρημα της Διανυσματικής Ανάλυσης, το οποίο έχει αξιοσημείωτες εφαρμογές στις Δ.Ε. και στη Μιγαδική Ανάλυση.

Θεώρημα 2.4.1 Έστω $P, Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό και πολυγωνικά συνεκτικό (ισοδύναμα ανοικτό και παραμετρικά συνεκτικό) υποσύνολο D του $\mathbb{R}^2$. Τότε, οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι.

(i) Η Δ.Ε. (2.4.1) είναι ακριβής.

(ii) Το Δ.Ε.Ο.

$$\int_\Gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

είναι ανεξάρτητο της (τμηματικά C^1) καμπύλης, δηλαδή για κάθε δύο σημεία $A(a_1, a_2)$ και $B(b_1, b_2)$ του D και για κάθε δύο τμηματικά C^1 παραμετρικές καμπύλες Γ_1 και Γ_2 με αρχή το A και πέρας το B, ισχύει

$$\int_{\Gamma_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{\Gamma_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

(iii) Για κάθε τμηματικά C^1 κλειστή παραμετρική καμπύλη C ισχύει

$$\int_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0.$$

□

Όταν το Δ.Ε.Ο. $\int_\Gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ είναι ανεξάρτητο της καμπύλης ολοκλήρωσης Γ, τότε για κάθε δύο σημεία $A(a_1, a_2)$ και $B(b_1, b_2)$ του D ορίζεται το Ε.Ο. $\int_{(a_1,a_2)}^{(b_1,b_2)}$ από το A στο B από τον τύπο

$$\int_{(a_1,a_2)}^{(b_1,b_2)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y := \int_\Gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y,$$

όπου Γ τυχούσα τμηματικά C^1 παραμετρική καμπύλη του D με αρχή το $A(a_1, a_2)$ και πέρας το $B(b_1, b_2)$.

Αναφερόμενοι τώρα, στο Θεώρημα 2.4.1, σημειώνουμε ότι όταν ισχύει ένας από τους ισοδύναμους ισχυρισμούς (i)-(iii) (άρα ισχύουν και οι υπόλοιποι δύο), τότε η αναζητούμενη συνάρτηση Φ του Ορισμού 2.4.1 εκφράζεται από τον τύπο

$$\Phi(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y, \quad (x,y) \in D,$$

όπου (x_0, y_0) αυθαίρετο σταθεροποιημένο σημείο του D.

Όταν οι συναρτήσεις P και Q της Δ.Ε. (2.4.1) ορίζονται σε ειδικά ανοικτά και παραμετρικά συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$, αναφερόμενα ως απλά συνεκτικά σύνολα, τότε καθένας από τους ισχυρισμούς (i)-(iii) του Θεωρήματος 2.4.1 είναι επίσης ισοδύναμος και προς τη συνθήκη $P_y = Q_x$.

Προτού όμως διατυπώσουμε το σχετικό θεώρημα, υπενθυμίζουμε τον ορισμό του απλά συνεκτικού συνόλου. Έτσι, ένα ανοικτό και πολυγωνικά συνεκτικό (ισοδύναμα ανοικτό και παραμετρικά συνεκτικό) υποσύνολο D του $\mathbb{R}^2$ ονομάζεται *απλά συνεκτικό*, όταν για κάθε απλή, κλειστή και τμηματικά C^1 παραμετρική καμπύλη Γ του D έχουμε ότι το εσωτερικό $\epsilon\sigma\Gamma$ της καμπύλης Γ περιέχεται στο D (δηλαδή όταν το D δεν έχει «οπές»).

Στο επόμενο θεώρημα διατυπώνεται μία ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να είναι ακριβής η Δ.Ε. (2.4.1).

Θεώρημα 2.4.2 Έστω $P, Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ δύο C^1 συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό, πολυγωνικά συνεκτικό και απλά συνεκτικό σύνολο D. Τότε, οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι.

(i) Η Δ.Ε. (2.4.1) είναι ακριβής.

(ii) Ισχύει

$$P_y = Q_x \quad \text{στο } D. \tag{2.4.4}$$

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Έστω $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία C^1 συνάρτηση για την οποία ισχύουν οι (2.4.2). Επειδή οι P και Q είναι C^1 συναρτήσεις στο D, οι (2.4.2) συνεπάγονται ότι η Φ είναι C^2 συνάρτηση και άρα ισχύει

$$\Phi_{xy} = \Phi_{yx},$$

οπότε έχουμε

$$P_y = \Phi_{xy} = \Phi_{yx} = Q_x.$$

(ii)⇒(i) Αρχικά αναζητούμε συνάρτηση $\Phi(x,y)$ για την οποία ισχύει

(α) $$\Phi_x(x,y) = P(x,y), \quad \forall x \in D.$$

Ολοκληρώνοντας την (α) ως προς x λαμβάνουμε

(β) $$\Phi(x,y) = \int P(x,y)\mathrm{d}x + g(y),$$

όπου η $g(y)$ είναι αυθαίρετη συνάρτηση μόνο της μεταβλητής y, η οποία επιλέγεται να είναι παραγωγίσιμη.

Από την (β) με μερική παραγώγιση ως προς y ευρίσκουμε

(γ) $$\Phi_y(x,y) = \tfrac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\mathrm{d}x + g'(y) = \int \tfrac{\partial}{\partial y}P(x,y)\mathrm{d}x + g'(y)$$

(Η δεύτερη ισότητα ισχύει λόγω της συνέχειας της συνάρτησης P).

Απαιτούμε τώρα για τη συνάρτηση $\Phi(x,y)$ να ισχύει

(δ) $$\Phi_y(x,y) = Q(x,y), \quad \forall x \in D,$$

οπότε από την (γ) λαμβάνουμε

(ε) $$g'(y) = Q(x,y) - \int \tfrac{\partial}{\partial y}P(x,y)\mathrm{d}x.$$

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(Q(x,y) - \int \frac{\partial}{\partial y}P(x,y)\mathrm{d}x\right) &= Q_x(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int P_y(x,y)\mathrm{d}x \\ &= Q_x(x,y) - P_y(x,y) = 0,\end{aligned}$$

δηλαδή η συνάρτηση $Q(x,y) - \int \frac{\partial}{\partial y}P(x,y)\mathrm{d}x$ είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής y.

Κατά συνέπεια, η συνάρτηση $g(y)$ προσδιορίζεται από την (ε) με ολοκλήρωση ως προς y, δηλαδή

$$g(y) = \int \left[Q(x,y) - \int \frac{\partial}{\partial y}P(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y,$$

και άρα από την (β) η αναζητούμενη συνάρτηση Φ είναι η

$$\Phi(x,y) = \int P(x,y)\mathrm{d}x + \int \left[Q(x,y) - \int \frac{\partial}{\partial y}P(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y. \tag{2.4.5}$$

Εναλλακτικά, επίσης ευρίσκουμε

$$\Phi(x,y) = \int Q(x,y)\mathrm{d}x + \int \left[P(x,y) - \int \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x. \tag{2.4.6}$$

□

Στην πράξη όμως είναι προτιμότερο να επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία αναζήτησης της Φ παρά να απομνημονεύσουμε τους δύο τελευταίους τύπους.

Δεύτερη απόδειξη της συνεπαγωγής (ii)⇒(i) του Θεωρήματος 2.4.2.

Μία απλούστερη και συντομότερη απόδειξη της συνεπαγωγής επιτυγχάνεται με εφαρμογή του τύπου του Green: Έστω ένα σταθεροποιημένο σημείο $A(x_0,y_0)$ του D. Θεωρούμε τυχόν σημείο $B(x,y)$ του D, δύο πολυγωνικές καμπύλες Γ_1 και Γ_2 του D με αρχή το A και πέρας το B, την κλειστή καμπύλη $\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2$ του D και το υποσύνολο $S = \epsilon\sigma\Gamma$ του D. Εφαρμόζοντας τον τύπο του Green, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1}(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) - \int_{\Gamma_2}(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) &= \int_{\Gamma}(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y)\\ &= \int_S\int(P_y - Q_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,\end{aligned}$$

το οποίο σημαίνει ότι το Δ.Ε.Ο. $\int_\Gamma(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y)$ είναι ανεξάρτητο της πολυγωνικής καμπύλης Γ του D. Συνεπώς, ορίζεται (καλά) η συνάρτηση

$$\Phi(x,y) = \int_\Gamma(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y), \tag{2.4.7}$$

όπου Γ τυχούσα πολυγωνική καμπύλη του D με αρχή το A και πέρας το B, για την οποία διαπιστώνουμε εύκολα ότι ισχύουν

$$\Phi_x = P \quad \text{και} \quad \Phi_y = Q.$$

□

Παρατήρηση 2.4.1 Η υπόθεση ότι το D είναι απλά συνεκτικό δεν χρειάζεται στην απόδειξη της συνεπαγωγής (i)⇒(ii) αλλά είναι απαραίτητη για την απόδειξη της συνεπαγωγής (ii)⇒(i), όπως συμπεραίνουμε από το ακόλουθο παράδειγμα.

△

Παράδειγμα 2.4.3 Για τις συναρτήσεις

$$P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad \text{και} \quad Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

ισχύει $P_y = Q_x$ αλλά δεν υπάρχει συνάρτηση $\Phi(x,y)$ με $\Phi_x = P$ και $\Phi_y = Q$.

Λύση. Υπολογίζουμε

$$P_y = \frac{y^2 - x^2}{x^2+y^2} = Q_x.$$

Στη συνέχεια θεωρούμε την περιφέρεια Γ του μοναδιαίου κύκλου με κέντρο το (0,0) που έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ t \in [0, 2\pi]$$

και υπολογίζουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_\Gamma(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) = \int_0^{2\pi}(-\sin t, \cos t)\cdot(-\sin t, \cos t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}t = 2\pi.$$

Εφόσον το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος της κλειστής καμπύλης Γ είναι διάφορο του μηδενός δεν είναι ανεξάρτητο από την καμπύλη Γ το οποίο, ως γνωστόν, είναι ισοδύναμο με το ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $\Phi(x,y)$ με $\Phi_x = P$ και $\Phi_y = Q$.

Στο παράδειγμα αυτό ισχύει η υπόθεση του ισχυρισμού (ii) αλλά το πεδίο ορισμού $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ των συναρτήσεων P και Q δεν είναι απλά συνεκτικό, αφού δεν περιέχει το σημείο (0,0).

$\triangle$

Όταν το πεδίο ορισμού D των συναρτήσεων P και Q είναι ένα ανοικτό ορθογώνιο (ή ανοικτός δίσκος) του $\mathbb{R}^2$, τότε ισχύει το ακόλουθο

Θεώρημα 2.4.3 Έστω P και Q δύο C^1 συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό ορθογώνιο

$$R^0 = (a,b) \times (c,d), \quad -\infty \le a < b,\, c < d \le +\infty,$$

ή έναν ανοικτό δίσκο D με κέντρο το (x_0, y_0) και ακτίνα r. Αν ισχύει $P_y = Q_x$ στο R^0 (ή στο D) τότε η Δ.Ε.

$$P + Qy' = 0$$

είναι ακριβής και μία C^1 συνάρτηση $\Phi(x,y)$, για την οποία ισχύουν $\Phi_x = P$ και $\Phi_y = Q$, δίνεται από τον τύπο

$$\Phi(x,y) = \int_\alpha^x P(t,\beta)\mathrm{d}t + \int_\beta^y Q(x,t)\mathrm{d}t, \tag{2.4.8}$$

όπου (α,β) είναι ενα (τυχόν σταθεροποιημένο) σημείο του R^0 (ή του D), και συνεπώς η γενική λύση της Δ.Ε. δίνεται υπό πεπλεγμένη μορφή από την

$$\Phi = c.$$

Απόδειξη. Έστω $A(\alpha,\beta)$ σταθεροποιημένο σημείο του R^0 και $B(x,y)$ τυχόν σημείο του R^0. Θεωρούμε τα σημεία A, B και $\Gamma(x,\beta)$ και την πολυγωνική γραμμή $C = A\Gamma \cup \Gamma B$, όπου τα ευθύγραμμα τμήματα $A\Gamma$ και ΓB είναι παράλληλα προς του x και y άξονες αντιστοίχως και έχουν παραμετρικές παραστάσεις

$$(t,\beta),\ \alpha \le t \le x \quad \text{και} \quad (x,t),\ \beta \le t \le y.$$

Εφαρμόζουμε τον τύπο (2.4.7) στη (δεύτερη) απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.2 και υπολογίζουμε το Δ.Ε.Ο.

$\square$

Παράδειγμα 2.4.4 Εξετάστε αν η Δ.Ε.

$$e^y + y\cos x + (xe^y + \sin x)y' = 0$$

είναι ακριβής και αν είναι βρείτε τη λύση της.

Λύση. Οι συναρτήσεις

$$P(x,y) = e^y + y\cos x \quad \text{και} \quad Q(x,y) = xe^y + \sin x,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

είναι C^1 στο (ανοικτό, πολυγωνικά συνεκτικό και) απλά συνεκτικό σύνολο $\mathbb{R}^2$ και επιπλέον ισχύει

$$P_y = e^y + \cos x = Q_x.$$

Κατά συνέπεια, από το Θεώρημα 2.4.2 η Δ.Ε. είναι πράγματι ακριβής. Έτσι, εφαρμόζοντας τώρα τον τύπο (2.4.8) για το σημείο $(\alpha,\beta) = (0,0)$, βρίσκουμε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned}\Phi(x,y) &= \int_0^x \mathrm{d}t + \int_0^y (xe^t + \sin x)\mathrm{d}t = x + [xe^t + t\sin x]_{t=0}^y \\ &= x + xe^y + y\sin x - x = xe^y + y\sin x,\end{aligned}$$

από την οποία προκύπτει (υπό πεπλεγμένη μορφή) η γενική λύση

$$xe^y + y\sin x = c$$

της Δ.Ε.

△

Παράδειγμα 2.4.5 Λύστε τη Δ.Ε.

$$e^x + y + \sin y + (e^y + x + x\cos y)y' = 0.$$

Λύση. Οι συναρτήσεις

$$P(x,y) = e^x + y + \sin y \quad \text{και} \quad Q(x,y) = e^y + x + x\cos y,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

είναι C^1 στο $\mathbb{R}^2$ και ισχύει

$$P_y = 1 + \cos y = Q_x,$$

οπότε η Δ.Ε. είναι ακριβής, και άρα εφαρμόζοντας την (2.4.8) για το $(\alpha,\beta) = (0,0)$, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}\Phi(x,y) &= \int_0^x e^t\mathrm{d}t + \int_0^y (e^t + x + x\cos t)\mathrm{d}t = [e^t]_{t=0}^x + [e^t + xt + x\sin t]_{t=0}^y \\ &= e^x - 1 + e^y + xy + x\sin y - 1,\end{aligned}$$

από την οποία προκύπτει (υπό πεπλεγμένη μορφή) η γενική λύση

$$e^x + e^y + xy + x\sin y = c.$$

△

Ολοκληρωτικός παράγοντας

Η κατηγορία των ακριβών Δ.Ε. δεν είναι αρκετά περιεκτική διότι η συνθήκη $P_y = Q_x$ απαιτεί ισχυρή συσχέτιση των συναρτήσεων P και Q. Ακόμη και πολύ απλές Δ.Ε., όπως είναι επί παραδείγματι η $(3x+2y)+xy'=0$, δεν είναι ακριβείς. Όμως, όταν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση επί x τότε η νέα εξίσωση $(3x^2+2yx)+x^2y'=0$ γίνεται ακριβής.

Έτσι οδηγούμαστε στον ακόλουθο

Ορισμός 2.4.2 Έστω μία μη ακριβής Δ.Ε.

$$P+Qy'=0.$$

Μία συνάρτηση $\mu = \mu(x,y)$ για την οποία η Δ.Ε.

$$\mu P + \mu Q y' = 0 \tag{2.4.9}$$

είναι ακριβής, ονομάζεται *ολοκληρωτικός παράγοντας* της Δ.Ε.

□

Τώρα τίθεται το ερώτημα, κάτω από ποιές συνθήκες για μία μη ακριβή Δ.Ε. $P+Qy'=0$ υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας. Ως απάντηση στο ερώτημα, μία ικανή συνθήκη ύπαρξης ολοκληρωτικού παράγοντα αποτελεί η υπόθεση ότι η Δ.Ε. έχει μία γενική λύση $\Phi(x,y)=c$. Πράγματι, υποθέτουμε ότι η Δ.Ε. (2.4.1) έχει μία λύση $\Phi(x,y)=c$, οπότε λαμβάνουμε

(α) $$\Phi_x + \Phi_y y' = 0.$$

Επιλύοντας την (α) και την (2.4.1) ως προς y', ευρίσκουμε

$$y' = -\frac{P}{Q} = -\frac{\Phi_x}{\Phi_y},$$

από όπου προκύπτει

$$\frac{\Phi_y}{Q} = \frac{\Phi_x}{P} \equiv \mu,$$

η οποία επίσης γράφεται

$$\Phi_x = \mu P \quad \text{και} \quad \Phi_y = \mu Q, \tag{2.4.10}$$

δηλαδή η Δ.Ε. (2.4.9) είναι ακριβής και ισοδύναμη με την ακριβή εξίσωση (α) και κατά συνέπεια η Δ.Ε. (2.4.1) έχει έναν (τουλάχιστον) ολοκληρωτικό παράγοντα.

Υποθέτουμε τώρα ότι μία μη ακριβής Δ.Ε. έχει έναν ολοκληρωτικό παράγοντα μ. Τότε, υπάρχει μία συνάρτηση Φ έτσι ώστε η εξίσωση $\Phi(x,y)=c$ να περιέχει υπό πεπλεγμένη μορφή τη γενική λύση της (2.4.9). Απαλείφοντας τώρα τον ολοκληρωτικό παράγοντα μ από την (2.4.9), παρατηρούμε ότι η $\Phi(x,y)=c$ περιέχει επίσης τη γενική λύση της αρχικής (2.4.1). Κατά συνέπεια η συνθήκη είναι και αναγκαία.

Τα συμπεράσματα της παραπάνω ανάλυσης συνοψίζονται στην ακόλουθη

Πρόταση 2.4.2 Έστω μία μη ακριβής Δ.Ε. $P+Qy'=0$, όπου οι P και Q είναι C^1 συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό, πολυγωνικά συνεκτικό και απλά συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Τότε, οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι.

(i) Η Δ.Ε. έχει μία γενική λύση $\Phi(x,y)=c$.

(ii) Υπάρχει ένας ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu \neq 0$ της Δ.Ε.

□

Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.4.2, μία συνάρτηση $\mu = \mu(x,y)$ είναι ολοκληρωτικός παράγοντας της Δ.Ε. (2.4.1) τότε και μόνο τότε όταν ισχύει

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q),$$

από την οποία προκύπτει

$$\mu P_y + \mu_y P = \mu Q_x + \mu_x Q,$$

η οποία για $\mu \neq 0$ επίσης γράφεται

$$\frac{1}{\mu}(Q\mu_x - P\mu_y) = P_y - Q_x. \tag{2.4.11}$$

Επομένως, οι ολοκληρωτικοί παράγοντες της Δ.Ε. (2.4.1) αποτελούν τις λύσεις της μερικής διαφορικής εξίσωσης (2.4.11) η οποία συνήθως έχει δύσκολη επίλυση.

Όμως, υπάρχουν ορισμένες περιπτώσεις, τις οποίες καταγράφουμε παρακάτω, όπου η διαδικασία είναι σχετικά προσιτή. Μεταξύ αυτών συγκαταλέγονται εκείνες που η αναζητούμενη συνάρτηση μ είναι συνάρτηση μόνο του x ή μόνο του y ή μόνο του xy.

Εξετάζουμε αρχικά αν η μερική διαφορική εξίσωση (2.4.11) έχει ως λύση μία συνάρτηση $\mu = \mu(x)$. Σχετικά, ισχύει η ακόλουθη

Πρόταση 2.4.3 Μία μη ακριβής Δ.Ε. $P+Qy'=0$, όπου οι P και Q είναι C^1 συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό, πολυγωνικά συνεκτικό και απλά συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ έχει ως ολοκληρωτικό παράγοντα μία συνάρτηση $\mu = \mu(x)$ τότε και μόνο τότε όταν η $\frac{P_y - Q_x}{Q}$ είναι συνάρτηση μόνο του x. Στην προκειμένη περίπτωση, ο ολοκληρωτικός παράγοντας εκφράζεται ως

$$\mu(x) = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q}\mathrm{d}x}. \tag{2.4.12}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η (2.4.1) έχει ως ολοκληρωτικό παράγοντα τη συνάρτηση $\mu = \mu(x)$. Τότε, έχουμε

$$\mu_x = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} \quad \text{και} \quad \mu_y = 0,$$

οπότε η (2.4.11) γράφεται

$$\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} = \frac{P_y - Q_x}{Q}. \tag{2.4.13}$$

Επειδή το αριστερό μέλος της (2.4.13) είναι συνάρτηση μόνο του x πρέπει και το δεξιό μέλος της να είναι συνάρτηση μόνο του x. Έτσι, θέτοντας

$$g(x) \equiv \frac{P_y - Q_x}{Q},$$

αναγόμαστε στη Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} = \mu g(x),$$

η οποία έχει ως λύση τη συνάρτηση

$$\mu = e^{\int g(x)\mathrm{d}x}.$$

Αντιστρόφως, έστω ότι η $\frac{P_y-Q_x}{Q}$ είναι συνάρτηση μόνο του x. Τότε, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\mu(x) = e^{\int g(x)\mathrm{d}x},$$

για την οποία ισχύει

$$\mu_x = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} = \mu\frac{P_y - Q_x}{Q}, \quad \mu_y = 0,$$

και διαπιστώνουμε εύκολα ότι η συγκεκριμένη συνάρτηση μ αποτελεί λύση της (2.4.11), το οποίο σημαίνει ότι η μ είναι ολοκληρωτικός παράγοντας της Δ.Ε. $P + Qy' = 0$.

□

Παράδειγμα 2.4.6 Λύστε τη Δ.Ε.

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0, \;\; x > 0,$$

ευρίσκοντας έναν ολοκληρωτικό παράγοντα αυτής.

Λύση. Η εξίσωση δεν είναι ακριβής διότι

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3xy + y^2) = 3x + 2y \neq 2x + y = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + xy) = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Εξετάζουμε αν η Δ.Ε. έχει ολοκληρωτικό παράγοντα συνάρτηση μόνο του x. Για αυτό υπολογίζουμε τη συνάρτηση $\frac{P_y-Q_x}{Q}$ η οποία είναι

$$\frac{3x + 2y - (2x + y)}{x^2 + xy} = \frac{1}{x}.$$

Κατα συνέπεια, η Δ.Ε. έχει ολοκληρωτικό παράγοντα τη συνάρτηση

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x} = x.$$

Πολλαπλασιάζουμε τη Δ.Ε. με $\mu(x) = x$ και λαμβάνουμε

$$(3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y)y' = 0,$$

η οποία είναι ακριβής Δ.Ε.

Αναζητούμε τώρα μία συνάρτηση $\Phi(x, y)$ τέτοια ώστε

$$\Phi_x = 3x^2y + xy^2 \quad \text{και} \quad \Phi_y = x^3 + x^2y.$$

Αρχίζουμε ολοκληρώνοντας την πρώτη ως προς x

$$\Phi = \int (3x^2y + xy^2)\mathrm{d}x = x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 + h(y).$$

Παραγωγίζουμε την τελευταία ως προς y και βρίσκουμε

$$\Phi_y = x^3 + x^2y + h'(y),$$

και άρα έχουμε

$$x^3 + x^2y + h'(y) = x^3 + x^2y,$$

οπότε $h'(y) = 0$ δηλαδή $h(y) = c$.

Έτσι, η γενική λύση της Δ.Ε. περιέχεται υπό πεπλεγμένη μορφή στην

$$x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = c.$$

△

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται και η επόμενη πρόταση, η οποία δίνει ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να έχει μία μη ακριβής Δ.Ε. ολοκληρωτικό παράγοντα συνάρτηση μόνο του y, του xy, του y/x και του x/y αντιστοίχως.

Πρόταση 2.4.4 Έστω μία μη ακριβής Δ.Ε. $P+Qy' = 0$, όπου οι P και Q είναι C^1 συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό, πολυγωνικά συνεκτικό και απλά συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Τότε, ισχύουν

(i) Η Δ.Ε. έχει ως ολοκληρωτικό παράγοντα μία συνάρτηση $\mu = \mu(y)$ τότε και μόνο τότε όταν η $\frac{Q_x - P_y}{P}$ είναι συνάρτηση μόνο του y, οπότε ο ολοκληρωτικός παράγοντας εκφράζεται ως

$$\mu(y) = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{P}\mathrm{d}y}. \tag{2.4.14}$$

(ii) Η Δ.Ε. έχει ως ολοκληρωτικό παράγοντα μία συνάρτηση $\mu = \mu(xy)$ τότε και μόνο τότε όταν η $\frac{Q_x - P_y}{xP - yQ}$ είναι συνάρτηση μόνο του $z = xy$, οπότε ο ολοκληρωτικός παράγοντας εκφράζεται ως

$$\mu(z) = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{xP - yQ} \mathrm{d}z}. \tag{2.4.15}$$

(iii) Η Δ.Ε. έχει ως ολοκληρωτικό παράγοντα μία συνάρτηση $\mu = \mu(y/x)$ τότε και μόνο τότε όταν η $\frac{x^2(Q_x - P_y)}{xP + yQ}$ είναι συνάρτηση μόνο του $z = y/x$, οπότε ο ολοκληρωτικός παράγοντας εκφράζεται ως

$$\mu(z) = e^{\int \frac{x^2(Q_x - P_y)}{xP + yQ} \mathrm{d}z}. \tag{2.4.16}$$

(iv) Η Δ.Ε. έχει ως ολοκληρωτικό παράγοντα μία συνάρτηση $\mu = \mu(x/y)$ τότε και μόνο τότε όταν η $\frac{y^2(P_y - Q_x)}{xP + yQ}$ είναι συνάρτηση μόνο του $z = x/y$, οπότε ο ολοκληρωτικός παράγοντας εκφράζεται ως

$$\mu(z) = e^{\int \frac{y^2(P_y - Q_x)}{xP + yQ} \mathrm{d}z}. \tag{2.4.17}$$

□

Παράδειγμα 2.4.7 Αποδείξτε ότι η Δ.Ε.

$$xy^2 + (x^2y - x)y' = 0, \ \ (x, y) \in R^0 = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$$

έχει ολοκληρωτικό παράγοντα ο οποίος είναι συνάρτηση του xy και βρείτε τη γενική λύσης της.

Λύση. Η εξίσωση δεν είναι ακριβής διότι

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) = 2xy \neq 2xy - 1 = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y - x) = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Για να αποδείξουμε ότι η Δ.Ε. έχει ολοκληρωτικό παράγοντα που είναι συνάρτηση μόνο του xy, υπολογίζουμε τη συνάρτηση

$$\frac{Q_x - P_y}{xP - yQ} = \frac{2xy - 1 - 2xy}{x\,xy^2 - y\,(x^2y - x)} = -\frac{1}{xy}.$$

Άρα, σύμφωνα με τον ισχυρισμό (ii) της τελευταίας πρότασης, η Δ.Ε. έχει πράγματι ολοκληρωτικό παράγοντα που είναι συνάρτηση μόνο του $z = xy$, ο οποίος υπολογίζεται από τον τύπο

$$\mu(z) = e^{-\int \frac{1}{z} \mathrm{d}z} = \frac{1}{z}.$$

Έτσι, πολλαπλασιάζουμε την αρχική Δ.Ε. με $\mu(z) = \mu(xy) = \frac{1}{xy}$ και οδηγούμαστε στην ακριβή Δ.Ε.

$$y + \left(x - \frac{1}{y}\right) y' = 0.$$

Για να βρούμε τη γενική λύση της τελευταίας, υπολογίζουμε τη συνάρτηση $\Phi(x,y)$ από τον τύπο (2.4.8) για $(\alpha,\beta)=(1,1)$ και $(x,y)\in R^0$

$$\Phi(x,y)=\int_1^x \mathrm{d}t+\int_1^y\left(x-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=xy-\ln y-1,$$

οπότε η γενική λύση της Δ.Ε. περιέχεται υπό πεπλεγμένη μορφή στην

$$xy-\ln y=c.$$

△

2.5 Διαφορική εξίσωση Bernoulli

Ορισμένες μη γραμμικές Δ.Ε. πρώτης τάξης μπορεί να αναχθούν σε γραμμικές εξισώσεις με κατάλληλη αλλαγή της εξαρτημένης μεταβλητής. Επί παραδείγματι, κάθε Δ.Ε. της μορφής

$$y'+p(x)y=q(x)y^r, \tag{2.5.1}$$

όπου r ακέραιος αριθμός και p, q συνεχείς συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα διάστημα I του $\mathbb{R}$, η οποία είναι γνωστή ως *Δ.Ε. Bernoulli*, είναι αυτού του τύπου.

Στις ειδικές περιπτώσεις $r=0$ και $r=1$ η (2.5.1) ανάγεται σε γραμμική εξίσωση. Στην πρώτη περίπτωση ($r=0$) έχουμε

$$y'+p(x)y=q(x),$$

η οποία είναι γραμμική Δ.Ε. πρώτης τάξης και λύνεται με τη διαδικασία που περιγράφεται στην Παράγραφο 2.3. Στη δεύτερη περίπτωση ($r=1$) η εξίσωση γίνεται

$$y'+p(x)y=q(x)y,$$

η οποία επίσης γράφεται

$$y'=(q(x)-p(x))y,$$

που είναι χωριζομένων μεταβλητών και έχει ιδιάζουσα λύση την $y=0$ και γενική λύση την

$$y=\int(q(x)-p(x))\mathrm{d}x+c.$$

Για κάθε άλλη τιμή του r η εξίσωση γίνεται γραμμική με εφαρμογή της αντικατάστασης

$$z=y^{1-r}. \tag{2.5.2}$$

Παραγωγίζοντας ως προς x την (2.5.2), ευρίσκουμε

$$z'=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-r)y^{-r}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

από την οποία προκύπτει

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1-r} y^r \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \quad (r \neq 1).$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία στην (2.5.1), λαμβάνουμε

$$\frac{1}{1-r} y^r \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x)y^r,$$

από την οποία, με τη βοήθεια της (2.5.2), προκύπτει

$$\frac{1}{1-r} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + p(x)z = q(x), \tag{2.5.3}$$

και έτσι καταλήγουμε στη Δ.Ε.

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + (1-r)p(x)z = (1-r)q(x), \tag{2.5.4}$$

η οποία είναι μία γραμμική Δ.Ε. ως προς z.

Η τελευταία λύνεται ως προς z με τη διαδικασία της Παραγράφου 2.3. Τέλος, θέτουμε $z = y^{1-r}$.

Παράδειγμα 2.5.1 Λύστε τη Δ.Ε.

$$y' - \frac{y}{x} = -\frac{5}{2} x^2 y^3, \ \ x \neq 0.$$

Λύση. Εδώ, έχουμε Δ.Ε. Bernoulli με $r = 3$. Έτσι, θέτουμε $z = y^{-2}$, οπότε $z' = -2y^{-3}y'$ και οδηγούμαστε στη γραμμική Δ.Ε. πρώτης τάξης ως προς z

$$z' + \frac{2z}{x} = 5x^2.$$

Ο ολοκληρωτικός παράγοντας για αυτή τη γραμμική εξίσωση ειναι

$$\mu(x) = e^{2\int \frac{\mathrm{d}x}{x}} = e^{2\ln|x|} = e^{\ln x^2} = x^2.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας Δ.Ε. με x^2, έχουμε

$$(x^2 z)' = x^2 z' + 2xz = 5x^4,$$

οπότε

$$x^2 z = 5 \int x^4 \mathrm{d}x = x^5 + c,$$

από την οποία ευρίσκουμε

$$y^{-2} = z = x^3 + cx^{-2}.$$

△

Παράδειγμα 2.5.2 Λύστε το Π.Α.Τ.

$$y' + xy = \frac{x}{y^3}, \quad y(0) = 2.$$

Λύση. Η Δ.Ε. του Π.Α.Τ. είναι Bernoulli με $r = -3$. Θέτουμε $z = y^4$, οπότε $z' = 4y^3y'$ και έτσι η αρχική Δ.Ε. ανάγεται στην

$$z' + 4xz = 4x.$$

Η τελευταία είναι γραμμική ως προς z και έχει ως ολοκληρωτικό παράγοντα

$$\mu(x) = e^{\int 4x\mathrm{d}x} = e^{2x^2}.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας Δ.Ε. με e^{2x^2}, ευρίσκουμε

$$(e^{2x^2}z)' = e^{2x^2}z' + 4xe^{2x^2}z = 4xe^{2x^2},$$

οπότε

$$e^{2x^2}z = \int 4xe^{2x^2}\mathrm{d}x = e^{2x^2} + c,$$

δηλαδή

$$z = 1 + ce^{-2x^2}.$$

Άρα, έχουμε

$$y^4 = 1 + ce^{-2x^2}$$

και εφαρμόζοντας την αρχική συνθήκη $y(0) = 2$, ευρίσκουμε $c = 15$, και κατά συνέπεια η λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$y^4 = 1 + 15e^{-2x^2}.$$

△

Παράδειγμα 2.5.3 Λύστε τη Δ.Ε.

$$I'(t) = \rho I(t) - \frac{\rho}{K}(I(t))^2,$$

η οποία μοντελοποιεί τη διάχυση της πληροφορίας σε κοινωνικά δίκτυα (βλ. Παράγραφο 1.2).

Λύση. Έχουμε Δ.Ε. Bernoulli με $r = 2$. Θέτουμε $z = I^{-1}$, οπότε $z' = -I^{-2}I'$ και αναγόμαστε στη γραμμική Δ.Ε. πρώτης τάξης ως προς z

$$z' = -\rho z + \frac{\rho}{K},$$

η οποία έχει ως λύση

$$z = \frac{1}{K} + c\, e^{-\rho t},$$

(όπου c αυθαίρετη πραγματική σταθερά) από όπου ευρίσκουμε

$$I(t) = \frac{K\, e^{\rho t}}{cK + e^{\rho t}}.$$

△

2.6 Διαφορική εξίσωση Ricatti

Δ.Ε. της μορφής

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x), \tag{2.6.1}$$

όπου p, q, r συνεχείς συναρτήσεις σε ένα $I \subseteq \mathbb{R}$ καλούνται *Δ.Ε. Ricatti*.

Αν είναι γνωστή μία μερική λύση y_1 της (2.6.1), τότε θα δείξουμε ότι με το μετασχηματισμό

$$y = y_1 + u, \tag{2.6.2}$$

η (2.6.1) ανάγεται σε Δ.Ε. Bernoulli ως προς u.

Πράγματι, εισάγοντας την (2.6.2) στην (2.6.1) λαμβάνουμε

$$y_1' + u' + p(x)(y_1 + u) + q(x)(y_1 + u)^2 = r(x). \tag{2.6.3}$$

Επειδή όμως η y_1 ικανοποιεί την (2.6.1), ισχύει

$$y_1' + p(x)y_1 + q(x)y_1^2 = r(x),$$

και άρα η (2.6.3) γράφεται

$$u' + (p(x) + 2q(x)y_1)\, u = -q(x)u^2, \tag{2.6.4}$$

που είναι Δ.Ε. Bernoulli της μορφής (2.5.1) ως προς u.

Παράδειγμα 2.6.1 Λύστε το Π.Α.Τ.

$$y' = (y - x)^2 + 1, \;\; y(0) = \frac{1}{2},$$

αν μία μερική λύση της Δ.Ε. είναι η $y_1 = x$.