ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Είναι γνωστό ότι για πολλά ορισμένα ολοκληρώματα δεν υπάρχουν αναλυτικές μέθοδοι ακριβούς επίλυσής τους. Ετσι λοιπόν έχουν αναπτυχθεί προσεγγιστικές μέθοδοι υπολογισμού τέτοιων ολοκληρωμάτων. Στο Κεφάλαιο αυτό αναπτύσσουμε τις μεθόδους τραπεζίου, Simpson και Romberg, δίνοντας έμφαση στον τρόπο προσέγγισης τέτοιων προβλημάτων.

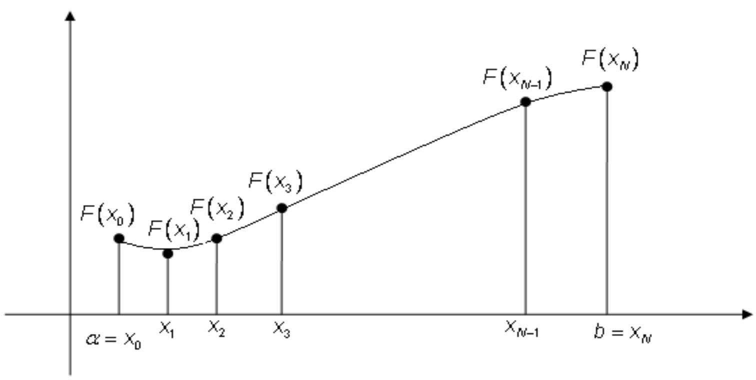
1. Η μέθοδος τραπεζίου

Με τη μέθοδο αυτή προσεγγίζουμε την τιμή του ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης f σ' ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα $[\alpha,b]$ με χρήση εμβαδών τραπεζίων που προκύπτουν από την προσέγγιση της συνάρτησής μας από μία τεθλασμένη γραμμή. Για ευκολία υποθέτουμε ότι η f είναι θετική στο $[\alpha,b]$ όπως φαίνεται στο σχήμα 1. Η διαδικασία που ακολουθούμε είναι η εξής:

- Έστω $\{x_0=\alpha, x_1,...,x_N=b\}$ $x_0<x_1<....<x_N$ είναι ένας ομοιόμορφος διαμερισμός του $[\alpha,b]$, δηλαδή χωρίζουμε το $[\alpha,b]$ σε N ισομήκη υποδιαστήματα.

- Τότε: $x_i = x_0 + \kappa\dfrac{b-\alpha}{N}, \quad \kappa = 0,...,N$.

- Υπολογίζουμε τις τιμές $f(x_i), \quad i=0,....,N$.



Σχήμα 1

- Σχηματίζουμε τα διαδοχικά ευθύγραμμα με άκρα τα $f(x_0),...,f(x_N)$ οπότε σχηματίζεται μία τεθλασμένη γραμμή.

- Υπολογίζουμε τα εμβαδά των N-τραπεζίων που σχηματίζονται και έχουμε:

$$\int_\alpha^b f(x)dx \cong E_{\tau\rho\alpha\pi._1} + ... + E_{\tau\rho\alpha\pi._N}$$

$$= \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}(x_1 - x_0) + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}(x_2 - x_1) + ... + \frac{f(x_{N-1})+f(x_N)}{2}(x_N - x_{N-1})$$

$$= \frac{b-\alpha}{2N}(f(x_0)+f(x_1)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_2)+f(x_3)...+f(x_{N-1})+f(x_{N-1})+f(x_N))$$

$$= \frac{b-\alpha}{2N}(f(x_0)+f(x_N)+2(f(x_1)+...+f(x_{N-1})))$$

$$= \frac{b-\alpha}{2N}\left(f(x_0)+f(x_N)+2\sum_{k=1}^{N-1} f(x_k)\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\alpha^b f(x)dx. \tag{1}$$

Σφάλμα:

Είναι γνωστό ότι αν προσεγγίσουμε μία συνεχή συνάρτηση $f(x)$ σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,b]$ με μία τεθλασμένη γραμμή, δηλαδή με ένα πολυώνυμο 1ου βαθμού $p_1(x)$, τότε το σφάλμα είναι:

$$f(x)-p_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-\alpha)(x-b) = -\frac{f''(\xi)}{2}(x-\alpha)(b-x),\ \xi \in (\alpha,b)$$

υπό την προϋπόθεση ότι η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Επομένως:

$$\int_\alpha^b f(x)-p_1(x)dx = -\frac{f''(\xi)}{2}\int_\alpha^b (x-\alpha)(b-x)dx$$

$$= -\frac{f''(\xi)}{2}\frac{(b-\alpha)^3}{6} = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-\alpha)^3,$$

άρα εάν *e* είναι το σφάλμα στην περίπτωση της μεθόδου τραπεζίου, έχουμε:

$$e = \int_{\alpha}^{b} f(x)dx - \left(\frac{b-\alpha}{2N}\left(f(x_0)+f(x_N)+2\sum_{k=1}^{N-1} f(x_k)\right)\right)$$

άρα:

$$e = -\frac{f''(\xi_1)}{12}(x_1-x_0)^3 - \frac{f''(\xi_2)}{12}(x_2-x_1)^3 - \dots - \frac{f''(\xi_N)}{12}(x_N-x_o)^3,\ \xi_i \in (x_i, x_{i+1})$$

$$= -\frac{(b-\alpha)^3}{12N^3}(f''(\xi_1)+\dots+f''(\xi_N).$$

Αν λοιπόν $M = \max\limits_{x\in[\alpha,b]}\{|f''(x)|: x \in [\alpha,b]\}$, τότε:

$$|e| \le \frac{(b-\alpha)^3}{12N^3}(M+\dots+M) = \frac{(b-\alpha)^3}{12N^3}MN = \frac{(b-\alpha)^3}{12N^2}\cdot M. \qquad (2)$$

<u>Παράδειγμα</u> 1 Υπολογίστε την προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^1 e^{-x^2}dx$, χρησιμοποιώντας $N=8$ ισομήκεις υποδιαιρέσεις του κλειστού διαστήματος $[0,1]$ με τη μέθοδο τραπεζίου και υπολογίστε το σφάλμα.

Λύση:

Για τον υπολογισμό της προσεγγιστικής τιμής του ολοκληρώματος θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (1).

- b – α = μήκος διαστήματος ολοκλήρωσης = 1 – 0 = 1.
- Ν = πλήθος υποδιαστημάτων = πλήθος σημείων – 1 = 8. Επομένως χρειαζόμαστε 9 σημεία.
- Εύρος υποδιαστημάτων = $\frac{b-\alpha}{N} = \frac{1-0}{8} = 0.125$,

άρα:

$$x_0 = 1,\ x_1 = 0.125, x_2 = 0.25,\ x_3 = 0.375, \dots, x_7 = 0.875,\ x_8 = 1$$

- Εφόσον $f(x) = e^{-x^2}$, υπολογίζουμε τις τιμές $f(x_i)$, $i = 0,...,8$ και προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας τιμών:

0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875	1
1	0.9844	0.9394	0.8688	0.7788	0.6766	0.5697	0.465	0.3678

Χρησιμοποιούμε τον τύπο (1) για τις τιμές του παραπάνω πίνακα και προκύπτει ότι :

$$f(x)dx \cong 0.7458 .$$

Για τον υπολογισμό του σφάλματος αρκεί να υπολογίσουμε τη σταθερά M του τύπου 2. Παρατηρούμε ότι $f''(x) = -2e^{-x^2} + 4e^{-x}x^2$ και είναι εύκολο να δει κανείς ότι

$$M = \max\left\{\left|f''(x)\right| : x \in [0,1]\right\} = \left|f''(0)\right| = 2,$$

οπότε:

$$|e| \leq \frac{2 \bullet 1^3}{12 \bullet 8^2} = \frac{1}{6 \bullet 64} = \frac{1}{384}.$$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1. Να γίνει εφαρμογή της μεθόδου τραπεζίου στα δεδομένα:

-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
-4	2	0	1	4	2	6

2. Υπολογίστε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f για τις οποίες το σφάλμα υπολογισμού του $\int_{\alpha}^{b} f(x)dx$ με χρήση της μεθόδου τραπεζίου είναι μηδέν.

2. Η μέθοδος Simpson:

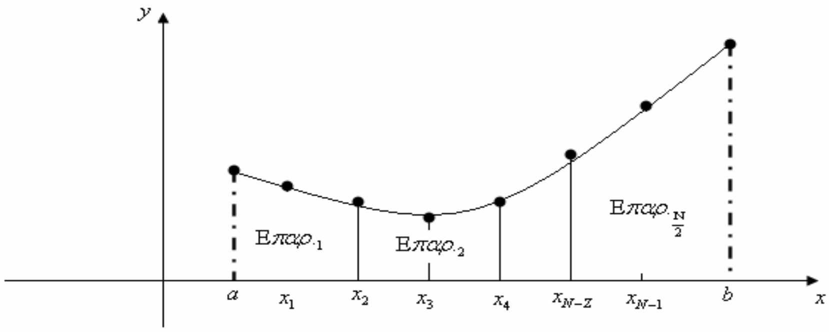
Με τη μέθοδο αυτή προσεγγίζουμε την τιμή του $\int_{\alpha}^{b} f(x)dx$ μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα $[\alpha,b]$ με χρήση εμβαδών παραβολών, οι οποίες προκύπτουν από την προσέγγιση της συνάρτησής μας σε στοιχειώδη υποδιαστήματα του $[\alpha,b]$ από πολυώνυμα $2^{ου}$ βαθμού, δηλ. από παραβολές. Όπως θα δούμε παρακάτω το σφάλμα (για τον ίδιο αριθμό υποδιαιρέσεων του $[\alpha,b]$) είναι καλύτερο σε σχέση με τη μέθοδο τραπεζίου. Υπάρχουν διάφορες παραλλαγές της μεθόδου αυτής. Για την καλύτερη κατανόηση της μεθόδου αναφέρουμε τη βασική της εκδοχή.

- Έστω $\{x_0 = \alpha, x_1, ..., x_N = b\}$ $x_0 < x_1 < .... < x_N$ είναι ένας ομοιόμορφος διαμερισμός του $[\alpha,b]$, δηλαδή χωρίζουμε το $[\alpha,b]$ σε *N* ισομήκη υποδιαστήματα.

- Τότε: $x_i = x_0 + \kappa \dfrac{b-\alpha}{N}, \quad \kappa = 0,...,N$.

- Υπολογίζουμε τις τιμές $f(x_i), \quad i = 0,....,N$.

- Σχηματίζουμε τις διαδοχικές παραβολές που διέρχονται από τα σημεία $f(x_i), f(x_{i+1}), f(x_{i+2}), \ i = 0,...,N/2$ οπότε πρέπει **N = ζυγός**.



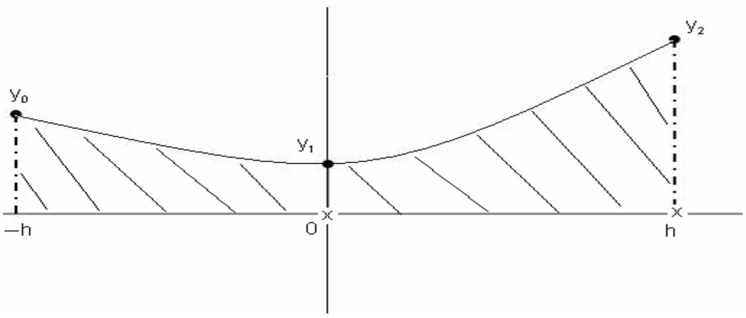
Σχήμα 2

- Υπολογίζουμε τα εμβαδά των N/2-παραβολών που σχηματίζονται και έχουμε:

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)dx \cong E_{\pi\alpha\rho\alpha\beta.1} + ... + E_{\pi\alpha\rho\alpha\beta.\frac{N}{2}}.$$

Για να υπολογίσουμε τα προαναφερθέντα εμβαδά χρήσιμο είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα Εστω παραβολή $y(x) = \alpha x^2 + bx + c$ όπως στο κάτωθι σχήμα:



Σχήμα 3

τότε:

$$E_{\pi\alpha\rho\alpha\beta.} = \int_{-h}^{h} (\alpha x^2 + bx + c)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Απόδειξη:

$$E_{\pi\alpha\rho\alpha\beta.} = \int_{-h}^{h} (\alpha x^2 + bx + c)dx = \left.\frac{\alpha x^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right|_{-h}^{h}$$

$$= \frac{\alpha h^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch - \left(-\frac{\alpha h^3}{3} + \frac{bh^2}{2} - ch\right) = \frac{2\alpha h^3}{3} + 2ch = \frac{h}{3}\left(2\alpha h^2 + 6c\right).$$

Αλλά:

$$\begin{array}{ll} \alpha(-h)^2 + b(-h) + c = y_0 & \alpha h^2 - bh + c = y_0 \\ \alpha 0^2 + b0 + c = y_1 & c = y_1 \\ \alpha h^2 + bh + c = y_2 & \alpha h^2 + bh + c = y_2 \\ + \rule{20em}{0.4pt} & \\ & 2\alpha h^2 + 4c = y_0 + 4y_1 + y_2 \end{array}$$

Τελικά:

$$E_{\pi\alpha\rho\alpha\beta} = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2). \quad \square$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε:

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)dx \cong E_{\pi\alpha\rho\alpha\beta._1} + \ldots + E_{\pi\alpha\rho\alpha\beta._{\frac{N}{2}}}$$

$$= \frac{b-\alpha}{3N}\left(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right)+\frac{b-\alpha}{3N}\left(f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\right)$$

$$+\ldots+\frac{b-\alpha}{3N}\left(f(x_{N-2})+4f(x_{N-1})+f(x_N)\right)$$

$$= \frac{b-\alpha}{3N}(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)+f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)+\ldots$$

$$\ldots+f(x_{N-2})+4f(x_{N-1})+f(x_N))$$

$$\int_\alpha^b f(x)dx \cong \frac{b-\alpha}{3N}\left(f(x_0)+f(x_N)+2\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1} f(x_{2i})+4\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} f(x_{2i-1})\right). \qquad (3)$$

Σφάλμα:

Εργαζόμενοι όπως παραπάνω, δηλαδή λαμβάνονται υπόψη ότι ο τύπος Simpson ολοκληρώνει ακριβώς και πολυώνυμα $3^{ου}$ βαθμού έχουμε:

$$f(x)-p_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{24}(x-\alpha)\left(x-\frac{\alpha+b}{2}\right)^2(b-x) \text{ κ.λπ.}$$

οπότε υπολογίζουμε:

$$|e| \le \frac{(b-\alpha)^5}{180N^4}M, \text{ όπου } M=\max\left\{|f^{(4)}(x)|: x\in[\alpha,b]\right\}. \qquad (4)$$

<u>**Παράδειγμα**</u> **1** Υπολογίστε την προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^1 e^{-x^2}dx$, χρησιμοποιώντας $N=8$ ισομήκεις υποδιαιρέσεις του κλειστού διαστήματος $[0,1]$ με τη μέθοδο Simpson και υπολογίστε το σφάλμα.

Λύση:

Για τον υπολογισμό της προσεγγιστικής τιμής του ολοκληρώματος θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (3).

- b – α = μήκος διαστήματος ολοκλήρωσης = 1 – 0 = 1.

- N = πλήθος υποδιαστημάτων = πλήθος σημείων – 1 = 8. Επομένως χρειαζόμαστε 9 σημεία.

- Εύρος υποδιαστημάτων = $\frac{b-\alpha}{N} = \frac{1-0}{8} = 0.125$,

άρα:

$$x_0 = 1,\ x_1 = 0.125, x_2 = 0.25,\ x_3 = 0.375, ..., x_7 = 0.875,\ x_8 = 1$$

- Εφόσον $f(x) = e^{-x^2}$, υπολογίζουμε τις τιμές $f(x_i),\ i = 0,...,8$ και προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας τιμών:

0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875	1
1	0.9844	0.9394	0.8688	0.7788	0.6766	0.5697	0.465	0.3678

Χρησιμοποιούμε τον τύπο (3) για τις τιμές του παραπάνω πίνακα και προκύπτει ότι:

$$f(x)dx \cong 0.7467\ .$$

Για τον υπολογισμό του σφάλματος αρκεί να υπολογίσουμε τη σταθερά M του τύπου (4). Με διαδοχικές παραγωγίσεις είναι εύκολο να δει κανείς ότι

$$M = \max\left\{\left|f^{(4)}(x)\right| : x \in [0,1]\right\} = 12,$$

οπότε:

$$|e| \leq \frac{12}{180 \bullet 8^4} 1^5 = 0.000016\ .$$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

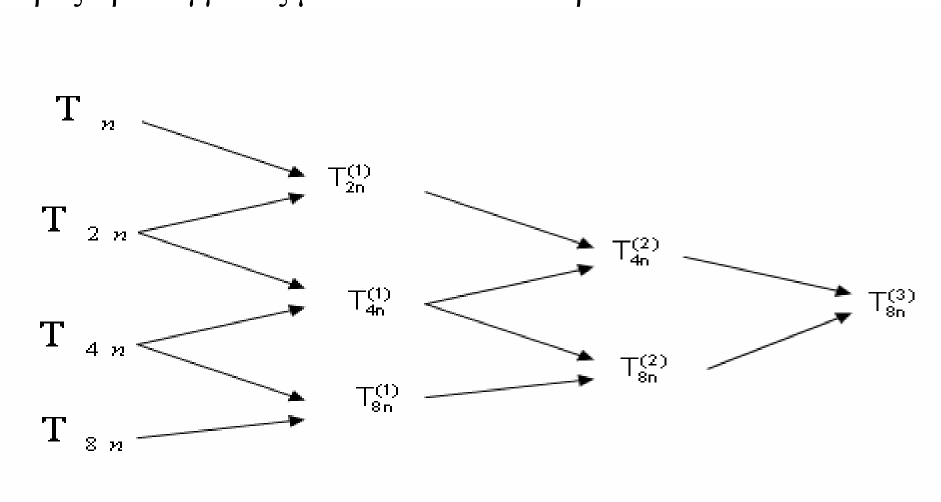
1. Να γίνει εφαρμογή της μεθόδου Simpson στα δεδομένα:

-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
-4	2	0	1	4	2	6

2. Υπολογίστε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f για τις οποίες το σφάλμα υπολογισμού του $\int_{\alpha}^{b} f(x)dx$ με χρήση της μεθόδου Simpson είναι μηδέν.

3. **Ολοκλήρωση Romberg**

Χρησιμοποιεί μία τεχνική διαδοχικών διχοτομήσεων του διαστήματος ολοκλήρωσης με στόχο τη μείωση του σφάλματος αποκοπής. Αν T_n είναι η προσέγγιση του ολοκληρώματος που προκύπτει από τον κανόνα τραπεζίου με n-υποδιαστήματα υπολογίζουμε τις T_{2n}, T_{4n}, T_{8n} κ.λπ. Συνδυάζοντας τις προσεγγίσεις αυτές μπορούμε να πάρουμε ακόμα καλύτερες προσεγγίσεις με τον ακόλουθο τρόπο:



Σχήμα 4

όπου εάν το συνολικό πλήθος των υποδιαστημάτων του [α,b] είναι N = 2^{μ}n, τότε:

$$T_{2i}^{(j)} = T_{2i}^{(j-1)} + \frac{T_{2i}^{(j-1)} - T_{i}^{(j-1)}}{4^{j}-1}, \quad i,j = 1,2,\ldots\mu. \tag{5}$$

Παράδειγμα: Υπολογίστε με τη μέθοδο Romberg το $\int_0^{0.8} \frac{\eta\mu x}{x} dx$ χρησιμοποιώντας 8 υποδιαιρέσεις του [0,0.8] όπως παρακάτω:

0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
1	0.9983	0.9933	0.9851	0.9735	0.9589	0.9411	0.9203	0.8967

Λύση: Αρχικά υπολογίζουμε το $\int_0^{0.8} \frac{\eta\mu x}{x} dx$ με χρήση του τύπου (1) του τραπεζίου για n =1, 2, 4, 8 ισομήκεις υποδιαιρέσεις του διαστήματος [0,0.8]:

$$n = 1: \; T_1 = \frac{b-\alpha}{2}(f_0 + f_8) = 0.7586.$$

$$n = 2: \ T_2 = \frac{b - \alpha}{4}(f_0 + 2(f_4 + f_8)) = 0.7687.$$

$$n = 4: \ T_4 = \frac{b - \alpha}{8}(f_0 + 2(f_2 + f_4 + f_6) + f_8) = 0.7712.$$

$$n = 8: \ T_8 = \frac{b - \alpha}{16}(f_0 + 2(f_1 + ... + f_7) + f_8) = 0.7718.$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τον τύπο (5) (βλέπε σχήμα 4) για j = 1:

$$T_2^{(1)} = T_2^{(0)} + \frac{T_2^{(0)} - T_1^{(0)}}{4 - 1} = 0.7221.$$

$$T_4^{(1)} = T_4^{(0)} + \frac{T_4^{(0)} - T_2^{(0)}}{4 - 1} = 0.772097.$$

$$T_8^{(1)} = T_8^{(0)} + \frac{T_8^{(0)} - T_4^{(0)}}{4 - 1} = 0.772095.$$

έπειτα για j = 2:

$$T_4^{(2)} = T_4^{(1)} + \frac{T_4^{(1)} - T_2^{(1)}}{4^2 - 1} = 0.77209577.$$

$$T_8^{(2)} = T_8^{(1)} + \frac{T_8^{(1)} - T_4^{(1)}}{4^2 - 1} = 0.77209578,$$

και τελικά:

$$I \cong T_8^{(2)} + \frac{T_8^{(2)} - T_4^{(2)}}{4^3 - 1} = 0.77209578.$$