ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΥΡΕΣΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ

§ 4.1 *Γραμμικοί μετασχηματισμοί-Ιδιοτιμές-Ιδιοδιανύσματα*

Εστω $\boldsymbol{R}^n$ είναι ο γνωστός n-διάστατος πραγματικός διανυσματικός χώρος. Μία απεικόνιση $L:\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ καλείται *γραμμική απεικόνιση* ή *γραμμικός μετασχηματισμός*, αν για κάθε $x, y \in \boldsymbol{R}^n$ και $a, b \in \boldsymbol{R}$ ισχύει

$$L\big(a\,x + b\,y\big) = a\,L(x) + b\,L(y).$$

Είναι επίσης γνωστό ότι σε κάθε γραμμικό μετασχηματισμό αντιστοιχεί ένα μοναδικός πίνακας A έτσι ώστε:

$$L(x) = A\,x. \tag{4.1}$$

Εφόσον x, $L(x)$ είναι διανύσματα του $\boldsymbol{R}^n$, μπορούμε να πούμε ότι η δράση του πίνακα Α σε ένα διάνυσμα x (βλέπε (4.1)) έχει ως συνέπεια την κατασκευή ενός νέου διανύσματος $L(x)$, το οποίο εν γένει διαφέρει από το x, τόσο κατά μέτρο όσο και κατά διεύθυνση. Ωστόσο υπάρχουν ορισμένα διανύσματα με την εξής ιδιότητα: *η δράση του γραμμικού μετασχηματισμού (4.1) επιφέρει μεταβολή μόνον του μέτρου τους χωρίς να μεταβάλλεται καθόλου η διεύθυνσή τους*. Τέτοια διανύσματα καλούνται ***ιδιοδιανύσματα***. *Ο λόγος των μέτρων ενός ιδιοδιανύσματος μετά και πριν τη δράση του πίνακα A* σε αυτό, καλείται ***ιδιοτιμή*** του πίνακα A.

Προκύπτει λοιπόν κατά φυσικό τρόπο ο ακόλουθος:

Ορισμός 4.1.1 Εστω A πίνακας διάστασης $n \times n$ και b ένα μη μηδενικό διάνυσμα στήλη. Το b καλείται πραγματικό ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A, αν και μόνον αν υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε:

$$A\,b = \lambda\,b.$$

Ο αριθμός λ καλείται ιδιοτιμή του πίνακα A. Υπάρχουν άπειρα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε μία συγκεκριμένη ιδιοτιμή.

Υπενθυμίζουμε ότι οι ιδιοτιμές ενός τετραγωνικού πίνακα A είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$Det(A-\lambda\, I_n)=0,$$

όπου I_n είναι ο μοναδιαίος πίνακας διάστασης $n\times n$. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε κάθε τιμή του λ στην εξίσωση

$$\left(A-\lambda\, I_n\right)x=\boldsymbol{0},$$

όπου $\boldsymbol{0}$ είναι ο μηδενικός πίνακας στήλη και $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ διάνυσμα στήλη και λύνουμε το αντίστοιχο ομογενές σύστημα. Οι λύσεις που προκύπτουν είναι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην εκάστοτε ιδιοτιμή.

Παράδειγμα 1 Να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Λύση Οι ιδιοτιμές είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$Det(A-\lambda\, I_n)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \left(1-\lambda\right)^2-4^2=0$$

$$\lambda=-3 \text{ ή } \lambda=5.$$

- Για $\lambda=-3$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση

$$\left(A-\lambda\, I_n\right)x=\boldsymbol{0} \Rightarrow \left(A+3\, I_n\right)x=\boldsymbol{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 4x_1+4x_2=0 \\ 4x_1+4x_2=0 \end{matrix} \Rightarrow 4x_1+4x_2=0 \Rightarrow x_1=-x_2,$$

άρα:

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

συνεπώς το σύνολο $\left\{ x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \ x_2 \in \boldsymbol{R} \right\}$ είναι το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda = -3$. Ομοίως:

- Για $\lambda = 5$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση

$$\left(A - \lambda\, I_n\right) x = \boldsymbol{0} \Rightarrow \left(A - 5\, I_n\right) x = \boldsymbol{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} -4x_1 + 4x_2 = 0 \\ -4x_1 + 4x_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow -4x_1 + 4x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \,,$$

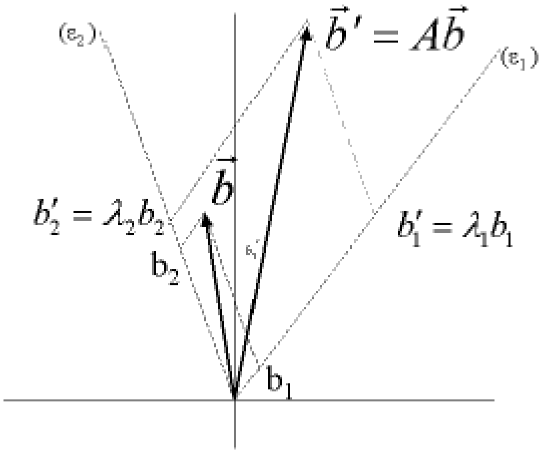
άρα:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

συνεπώς το σύνολο $\left\{ x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \ x_2 \in \boldsymbol{R} \right\}$ είναι το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda = 5$. □

§ 3.2 *Αριθμητική εύρεση της απολύτως μεγαλύτερης πραγματικής ιδιοτιμής*

Η σημασία της εύρεσης της απολύτως μεγαλύτερης πραγματικής ιδιοτιμής βασίζεται στην ακόλουθη γεωμετρική παρατήρηση:



Σχήμα 4 Μέσω της δράσης του πίνακα A ένα τυχαίο διάνυσμα έλκεται προς το φορέα των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στη μεγαλύτερη κατ' απόλυτο τιμή ιδιοτιμή

Εστω ένα τυχαίο διάνυσμα *b* (όχι ιδιοδιάνυσμα) και (ε_1) ο φορέας των ιδιοδιανυσμάτων με ιδιοτιμή λ_1 και (ε_2) ο φορέας των ιδιοδιανυσμάτων με ιδιοτιμή λ_2, όπου $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. Αν αναλύσουμε το διάνυσμα *b* σε δύο συνιστώσες b_1 και b_2 επί των φορέων (ε_1) και (ε_2) αντίστοιχα, η δράση του πίνακα *A* επί των διανυσμάτων b_1 και b_2, δημιουργεί δύο νέα διανύσματα b_1', b_2':

$$b_1' = A\, b_1 = \lambda_1\, b_1, \quad b_2' = A\, b_2 = \lambda_2\, b_2 .$$

Εχουμε λοιπόν:

$$\varepsilon\phi(b, b_1) = \frac{\| b_2 \|}{\| b_1 \|}$$

$$\varepsilon\phi(b', b_1) = \frac{\| b_2' \|}{\| b_1' \|} = \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}\ \frac{\| b_2 \|}{\| b_1 \|},$$

και επειδή $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ ισχύει

$$\varepsilon\phi(b', b_1) < \varepsilon\phi(b, b_1) \Rightarrow (b', b_1) < (b, b_1),$$

άρα αφού η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων b', b_1 είναι μικρότερη της γωνίας μεταξύ των διανυσμάτων b, b_1 *συμπεραίνουμε ότι η δράση ενός πίνακα A με πραγματικές ιδιοτιμές επί τυχαίου διανύσματος με μη μηδενικές προβολές προς τις ιδιοδιευθύνσεις, προκαλεί στροφή του τυχαίου διανύσματος προς την κατεύθυνση του ιδιοδιανύσματος με την απολύτως μεγαλύτερη ιδιοτιμή*.

Είναι σαφές ότι με διαδοχικές δράσεις του πίνακα *A* επί του διανύσματος *b*, η διεύθυνση του *b* τείνει να ταυτισθεί με την διεύθυνση του φορέα (ε_1). Ουσιαστικά λοιπόν η ιδιοδιεύθυνση με την απολύτως μεγαλύτερη ιδιοτιμή έλκει όλα τα διανύσματα του χώρου, με την έννοια ότι διαδοχικές δράσεις του πίνακα *A* σε σχεδόν οποιοδήποτε διάνυσμα έχουν ως συνέπεια να στραφεί το διάνυσμα ώστε η διεύθυνση του να τείνει να ταυτισθεί με τη διεύθυνση του ιδιοδιανύσματος που αντιστοιχεί στη απόλυτα μεγαλύτερη ιδιοτιμή. Τα μόνα διανύσματα που ξεφεύγουν είναι τα κάθετα στην συγκεκριμένη ιδιοδιεύθυνση, τα οποία όμως με τη σειρά τους έλκονται από τα ιδιοδιανύσματα με τη 2^{η} μεγαλύτερη ιδιοτιμή κλπ.

Αν οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι πραγματικές, υπάρχει μία απλή αριθμητική μέθοδος για την εύρεση της απολύτως μεγαλύτερης ιδιοτιμής του, ενώ ταυτόχρονα βρίσκεται και ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμά της. Η μέθοδος, γνωστή ως ***<u>μέθοδος των δυνάμεων</u>*** υλοποιείται με τα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 1^o: Εστω $b_0 = \begin{pmatrix} b_{01} \\ \vdots \\ b_{0n} \end{pmatrix}$ ένα τυχαίο διάνυσμα στήλη. Με τη δράση δοθέντος πίνακα *A* επί του διανύσματος b_0 προκύπτει ένα νέο διάνυσμα b_1:

$$b_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{pmatrix} = A\, b_0 .$$

Βήμα 2^o: Διαιρούμε το διάνυσμα b_1 με την πρώτη συνιστώσα b_{11}, εφόσον $b_{11} \neq 0$. Αν $b_{11} = 0$ τότε διαιρούμε την πρώτη κατά σειρά μη μηδενική συνιστώσα μετά την $b_{11} \neq 0$. Εστω $b_{11} \neq 0$, ορίζουμε ένα νέο διάνυσμα:

$$b_1^{(1)} = \frac{1}{b_{11}} \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b_{11}^{(1)} \\ \vdots \\ b_{1n}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το βήμα 1 για το διάνυσμα $b_1^{(1)}$, οπότε παίρνουμε ένα νέο διάνυσμα $b_2 = \begin{pmatrix} b_{11}^{(1)} \\ \vdots \\ b_{1n}^{(1)} \end{pmatrix} = A\, b_1^{(1)}$ και με εφαρμογή του βήματος 2 προκύπτει ένα νέο διάνυσμα $b_2^{(2)}$:

$$b_2^{(1)} = \frac{1}{b_{21}} \begin{pmatrix} b_{21} \\ \vdots \\ b_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b_{11}^{(1)} \\ \vdots \\ b_{1n}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Αν η ανωτέρω διαδικασία συνεχισθεί *N* φορές, τότε ο φορέας του διανύσματος $b_N^{(1)}$ τείνει να ταυτισθεί με τον φορέα του ιδιοδιανύσματος που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη κατ' απόλυτη τιμή ιδιοτιμή, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω. Θεωρώντας τώρα ότι ισχύει η ακόλουθη ισότητα:

$$b_N = A\, b_{N-1}^{(1)} = \lambda\, b_{N-1}^{(1)} \Rightarrow \begin{pmatrix} b_{1N} \\ \vdots \\ b_{nN} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ b_{nN-1}^{(1)} \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = b_{1N},$$

προκύπτει ότι η 1^{η} συνιστώσα πριν την τελευταία κανονικοποίηση μας δίνει την αλγεβρική τιμή της απολύτως μεγαλύτερης ιδιοτιμής.

Σημείωση 1 Με τη μέθοδο της δύναμης μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε και την κατ' απόλυτη τιμή μικρότερη ιδιοτιμή, διότι αν λ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A, τότε η λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του A^{-1}, οπότε εφαρμόζουμε τη μέθοδο της δύναμης για τον πίνακα A^{-1} . Επίσης υπάρχουν και μέθοδοι για την αριθμητική εύρεση και των υπολοίπων ιδιοτιμών, που βασίζονται στην εύρεση ενός πίνακα που περιέχει τις εναπομείνασες ιδιοτιμές και εφαρμογή της μεθόδου της δύναμης για αυτόν τον πίνακα κλπ.

Παράδειγμα 2 Υπολογίστε με τη μέθοδο των δυνάμεων τη μέγιστη κατ΄ απόλυτο τιμή ιδιοτιμή του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

με ακρίβεια 2 δεκαδικών ψηφίων.

Λύση Εστω $b_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ένα τυχαίο διάνυσμα στήλη, υπολογίζουμε:

1^{η} επανάληψη:

$$b_1 = A\, b_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$b_1^{(1)} = \frac{1}{b_{11}} b_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \boxed{4} \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7/4 \end{pmatrix}.$$

2^{η} επανάληψη:

$$b_2 = A\, b_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 7/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.75 \\ 6.5 \end{pmatrix}$$

$$b_2^{(1)} = \frac{1}{b_{21}} b_2 = \frac{1}{3.75} \begin{pmatrix} \boxed{3.75} \\ 6.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.73333 \end{pmatrix}.$$

3η επανάληψη:

$$b_3 = A\, b_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1.73333 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.73333 \\ 6.46666 \end{pmatrix}$$

$$b_3^{(1)} = \frac{1}{b_{31}} b_3 = \frac{1}{3.73333} \begin{pmatrix} \boxed{3.73333} \\ 6.46666 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.73214 \end{pmatrix}.$$

4η επανάληψη:

$$b_4 = A\, b_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1.73214 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.73214 \\ 6.46428 \end{pmatrix}$$

$$b_4^{(1)} = \frac{1}{b_{41}} b_4 = \frac{1}{3.73214} \begin{pmatrix} \boxed{3.73214} \\ 6.46428 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.73205 \end{pmatrix}.$$

Αφού $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 3.75$, $\lambda_3 = 3.73333$, $\lambda_4 = 3.73214$ και $|\lambda_4 - \lambda_3| = 0.00119$ έχουμε ότι $\lambda \cong 3.73333$. Το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί είναι το $\begin{pmatrix} 1 \\ 1.73205 \end{pmatrix}$. □

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των πινάκων:

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 34 & -12 \\ 0 & -12 & 41 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Απάντ.: Ιδιοτιμές του *A*: $\lambda = 50, \lambda = 25$ (διπλή).
Ιδιοτιμές του *B*: $\lambda = 0$ (διπλή).
Ιδιοτιμές του C: $\lambda = 5$ ή $\lambda = 3$.

2.Υπολογίστε με τη μέθοδο της δύναμης την μεγαλύτερη κατ' απόλυτο τιμή ιδιοτιμή και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα των πινάκων κάνοντας *N=5* επαναλήψεις. Συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με την πραγματική τιμή της απόλυτα μεγαλύτερης ιδιοτιμής.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$