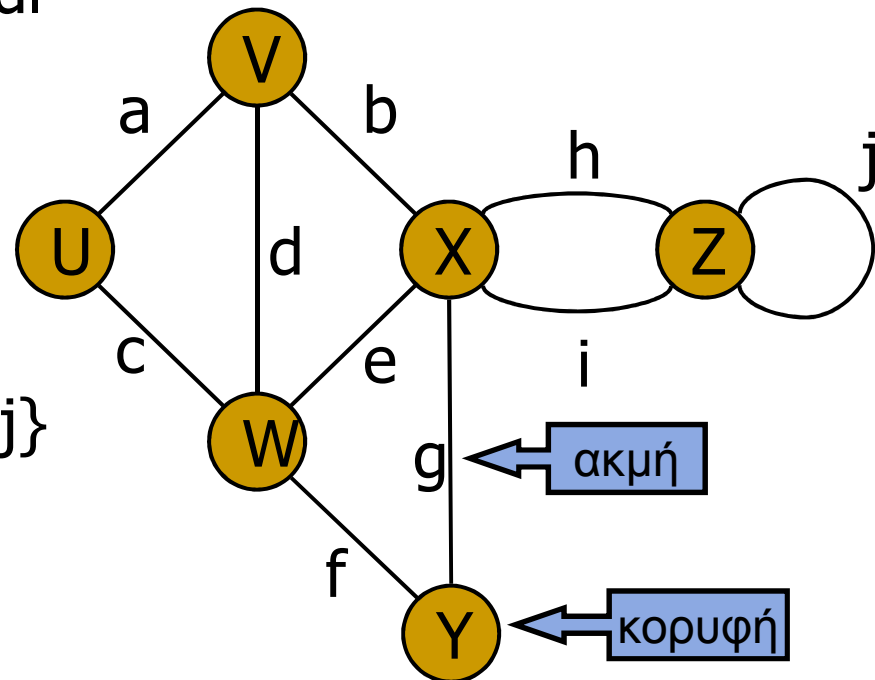

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Βασικές Έννοιες Γραφημάτων

Data and Web Science Lab

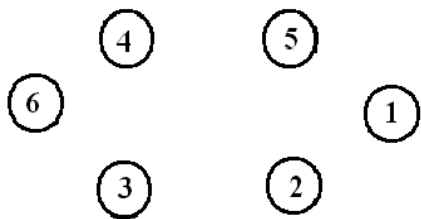
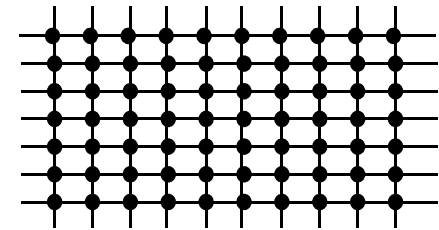
Τι είναι γράφος (ή γράφημα);

- Ορισμός: σύνολο **κορυφών** (ή κόμβων) που συνδέονται με ένα σύνολο **ακμών**
- Συμβολισμός: $G(V,E)$, $G=(V,E)$, $(V(G),E(G))$
- $V=\{U, V, W, X, Y, Z\}$
- $E=\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$



Ορισμοί

- **τάξη**-order, n , το πλήθος των κορυφών: $n=|V|$
- **μέγεθος**-size, m , το πλήθος των ακμών: $m=|E|$
- γράφος λέγεται **αραιός**-sparse αν $m \approx n$
- γράφος λέγεται **πυκνός**-dense αν $m \approx n^2$.
- γράφος λέγεται **πεπερασμένος**-finite, αν n, m πεπερασμένα
- γράφος λέγεται **άπειρος**-infinite, αλλιώς
- Ειδικές περιπτώσεις: $n=0$: **κενός**-empty

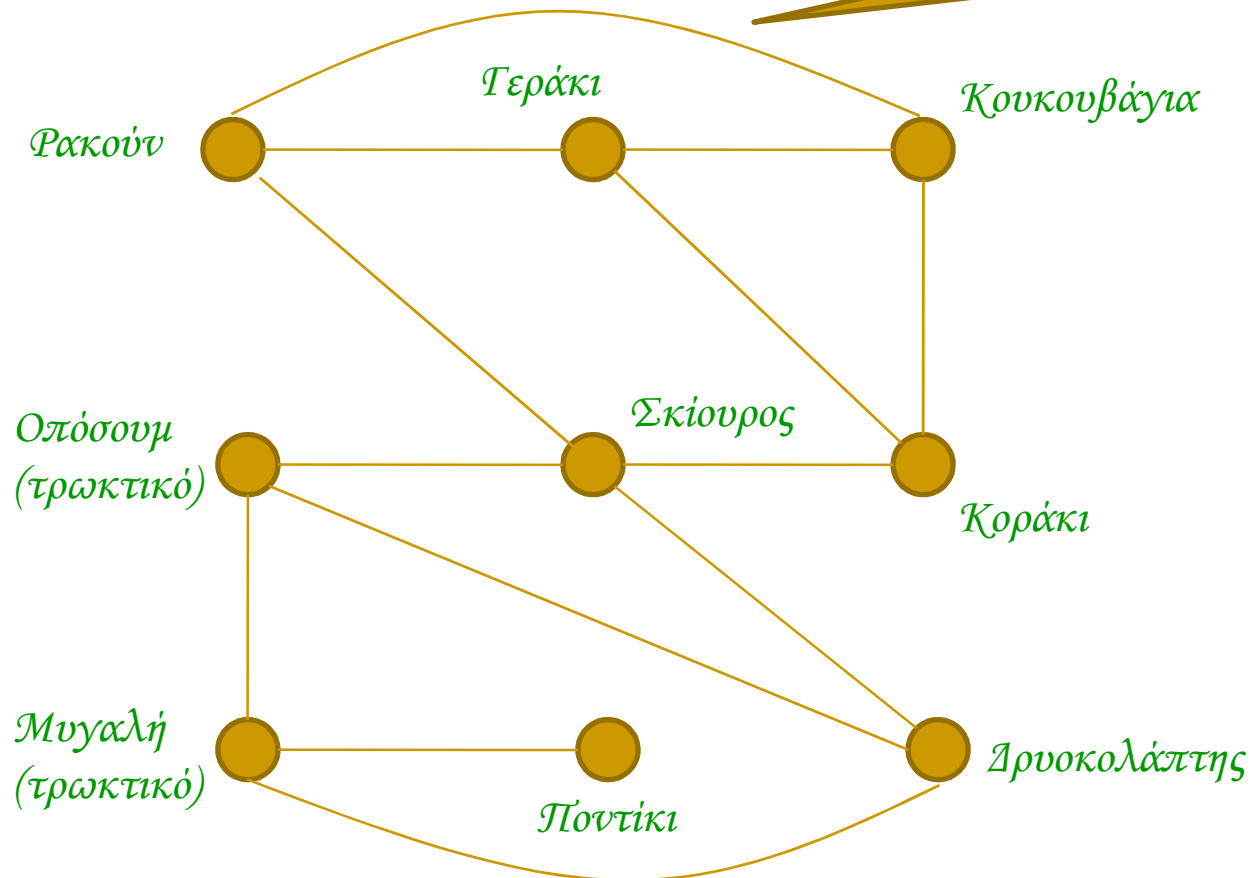


$n=1$: **ασήμαντος**-trivial

$m=0$: **μηδενικός**-null (N_n)

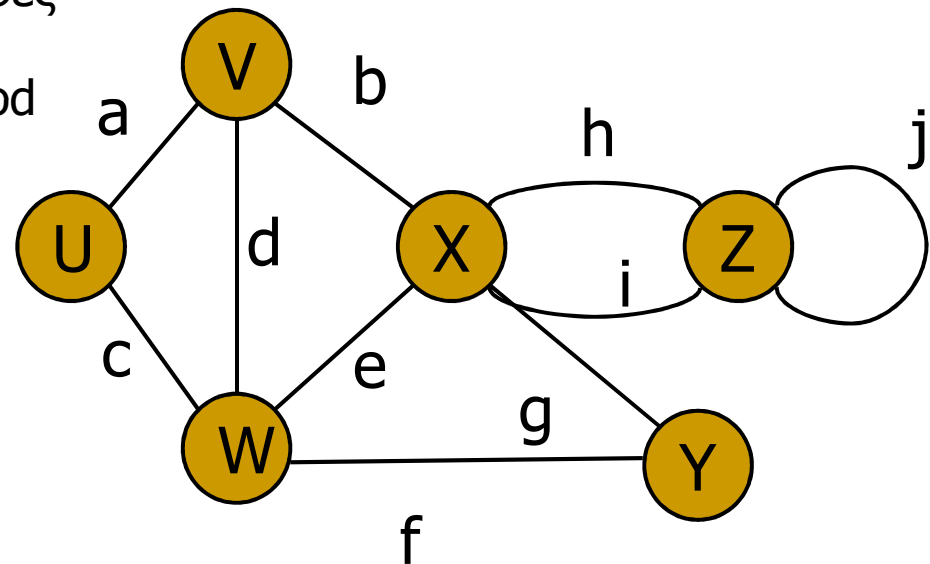
Παράδειγμα γράφου

Μέγεθος;
Τάξη;



Ορισμοί για Κορυφές-Ακμές

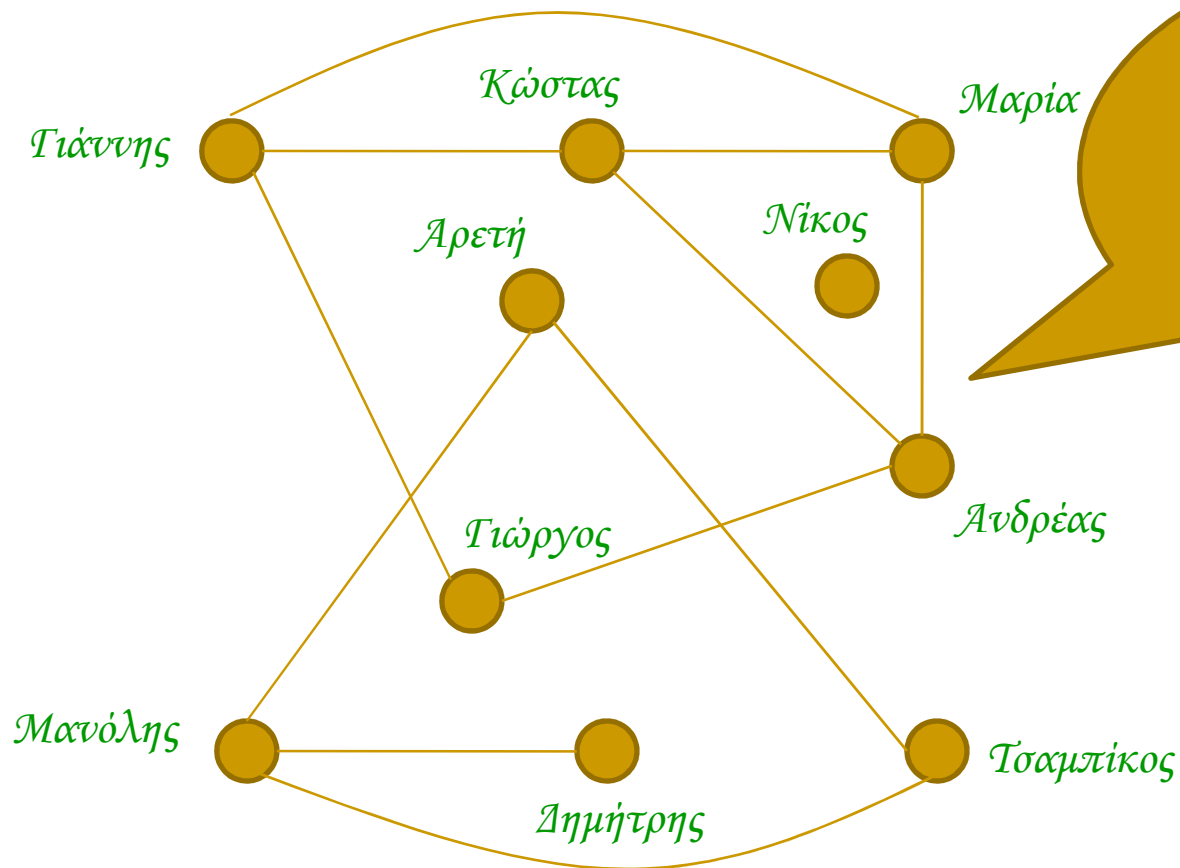
- **Τερματικά σημεία**—endpoints ακμής
 - τα U, V είναι τερματικά σημεία της a
- Ακμές **προσπίπτουσες**—incident σε κορυφή
 - οι a, d, b προσπίπτουν στην V
- **Γειτονικές**—neighbor κορυφές
 - οι U, V είναι γειτονικές
- **Ανεξάρτητες**—independent κορυφές
 - οι U, X είναι ανεξάρτητες
- **Γειτονιά κορυφής** — neighborhood
 - $N(v) = \{u \in V(G) \mid (v, u) \in E(G)\}$
 - $N(U) = \{V, W\}$
- **Παράλληλες**—parallel ακμές
 - οι h, i είναι παράλληλες
- **Βρόγχος**—self-loop
 - η j είναι βρόχος
- **Βαθμός**—degree κορυφής:
 - $d(U) = |N(v)| = 2$
- **Ελάχιστος και μέγιστος βαθμός γράφου**
 - $d(G) = 2, D(G) = 5$



Επιπλέον βασικές έννοιες

- **Απομονωμένη**-isolated κορυφή: $d(v)=0$
- **Εκκρεμής**-pendant κορυφή: $d(v)=1$
- Αν V_1, \dots, V_k είναι ανεξάρτητα υποσύνολα κορυφών, τότε οι υπογράφοι $G(V_1), \dots, G(V_k)$ είναι οι **συνδεδεμένες συνιστώσες** – connected components του γράφου G
- **Συνδεδεμένος**-connected γράφος, αν αποτελείται από μία μόνο συνιστώσα
- **Συνδεδεμένος κατά ελάχιστο τρόπο** – minimally connected, αν η διαγραφή μιας μόνο ακμής τον αποσυνδέει και δημιουργεί συνιστώσες
- **Σειρά**-rank: $r=n-k$, n η τάξη και k το πλήθος των συνιστωσών
- **Μηδενικότητα**-nullity: $\mu=m-n+k$

Παράδειγμα – Γράφος Γνωριμιών



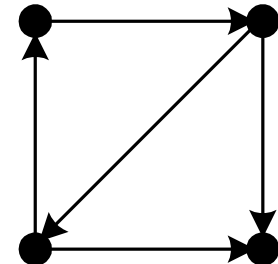
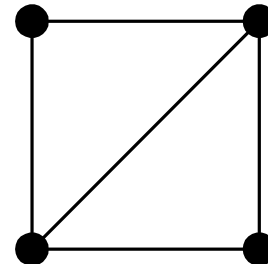
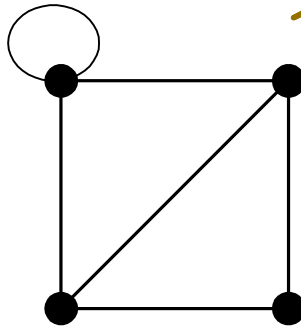
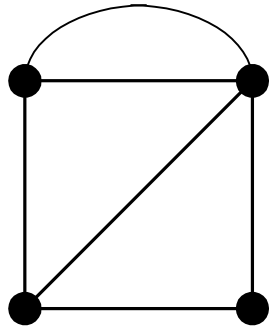
Απομονωμένες;
Εκκρεμής;
Συνιστώσες;
Κατ'ελάχιστο τρόπο;
Σειρά;
Μηδενικότητα;

Περισσότερες Βασικές Έννοιες

- **Παράλληλες**-parallel ακμές: ενώνουν το ίδιο ζεύγος κορυφών
- **Απλός**-simple γράφος: δεν περιλαμβάνει παράλληλες ακμές ή βρόχους
- **Ψευδογράφος**-pseudograph: περιλαμβάνει βρόχους
- **Πολυγράφος**-multigraph: με παράλληλες ακμές αλλά χωρίς βρόχους
- **Υποκείμενος**-underlying: ο γράφος που προκύπτει αν απαλειφθούν οι βρόχοι και οι παράλληλες ακμές
- **Κατευθυνόμενος**-directed ή **προσανατολισμένος**-oriented, $D(V,A)$, είναι ο γράφος που αποτελείται από ένα μη κενό σύνολο κορυφών και διατεταγμένα ζεύγη κορυφών που συνδέονται με τα **τόξα**-arcs.

Παράδειγμα

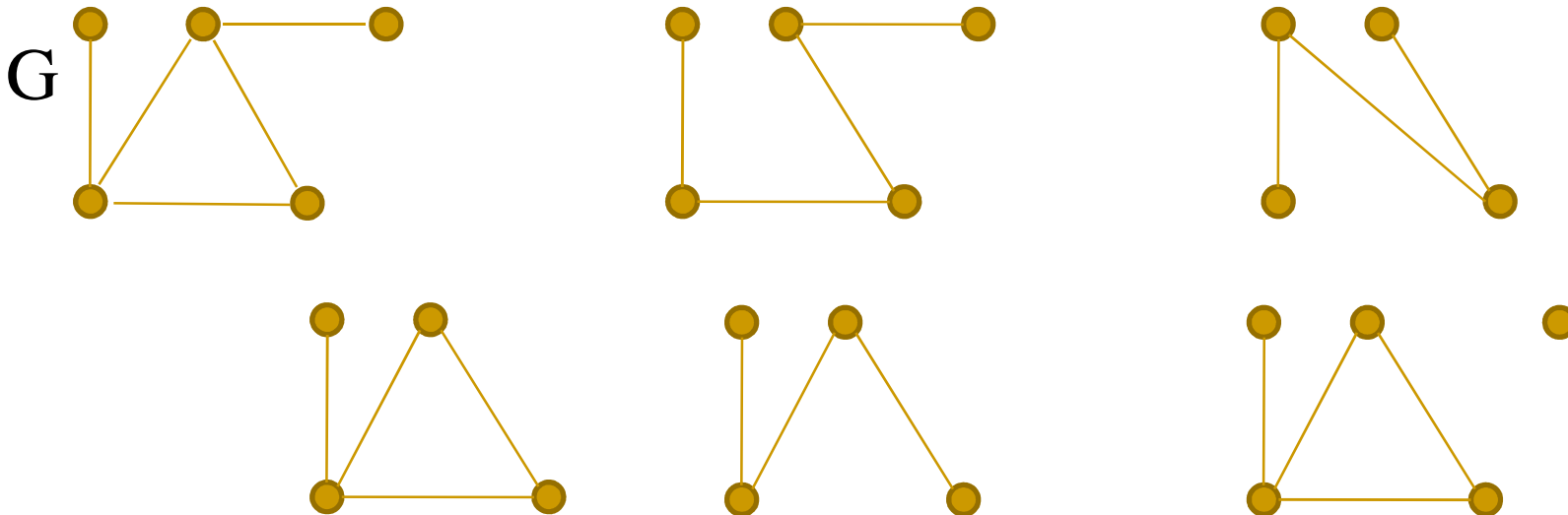
Τι είναι το
καθένα;



Υπογράφοι

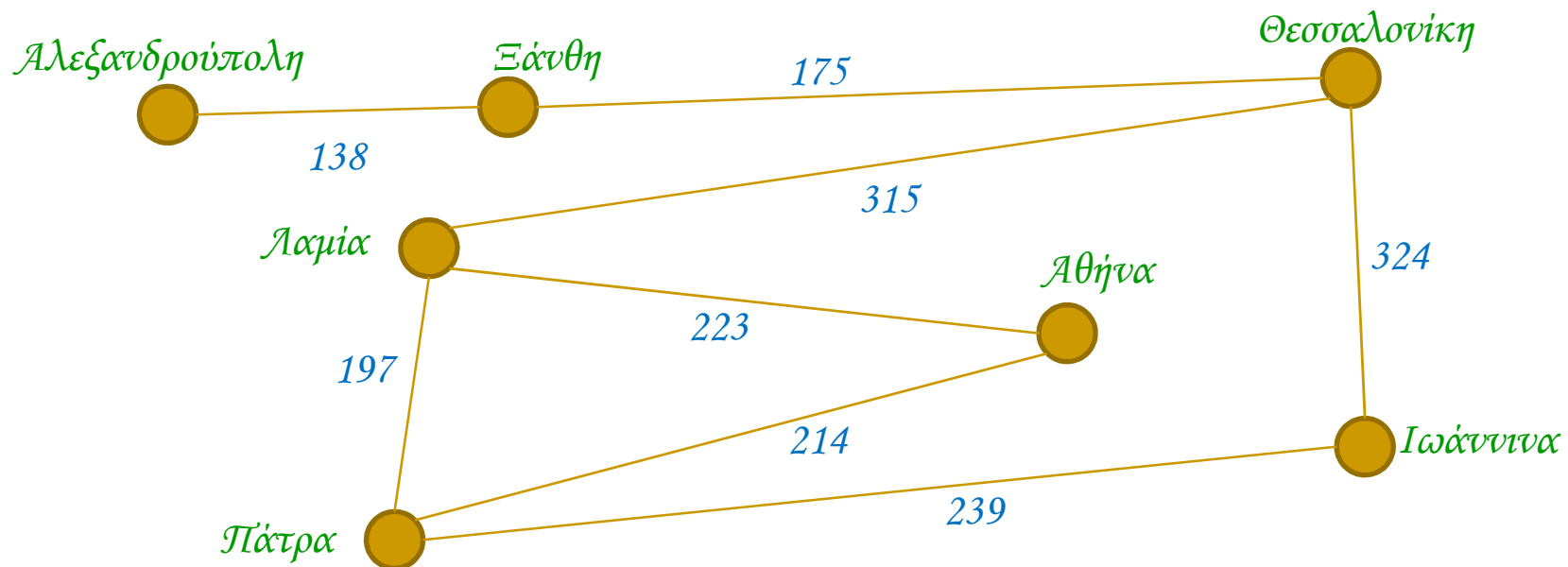
- Υπογράφος
- Υπεργράφος
- Ζευγνύων υπογράφος
- Επηρεασμένος από σύνολο κορυφών/ακμών

Τι είναι το
καθένα;



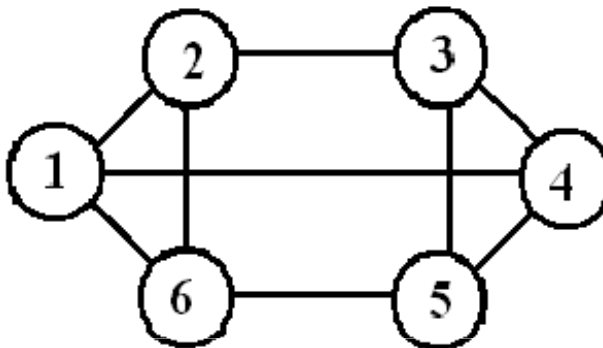
Ζυγισμένοι Γράφοι

- Για κάθε ακμή ενός γράφου $w(e)$ είναι το **βάρος**-weight αυτής και αν υπάρχει, τότε έχουμε ζυγισμένο γράφο
- Βάρος γράφου είναι το άθροισμα τα βαρών
- Ετικέτες στις κορυφές ή τις ακμές των γράφων

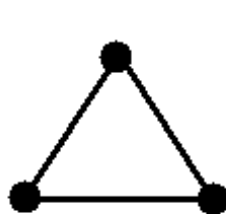


Τακτικός και Κυκλικός γράφος

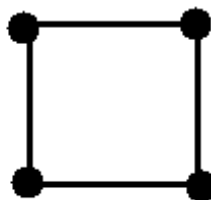
- **Τακτικοί**-regular γράφοι : όλες οι κορυφές έχουν το ίδιο d



- **Κυκλικός**-cyclic γράφος (C_n): όλοι οι κορυφές έχουν $d=2$



C_3



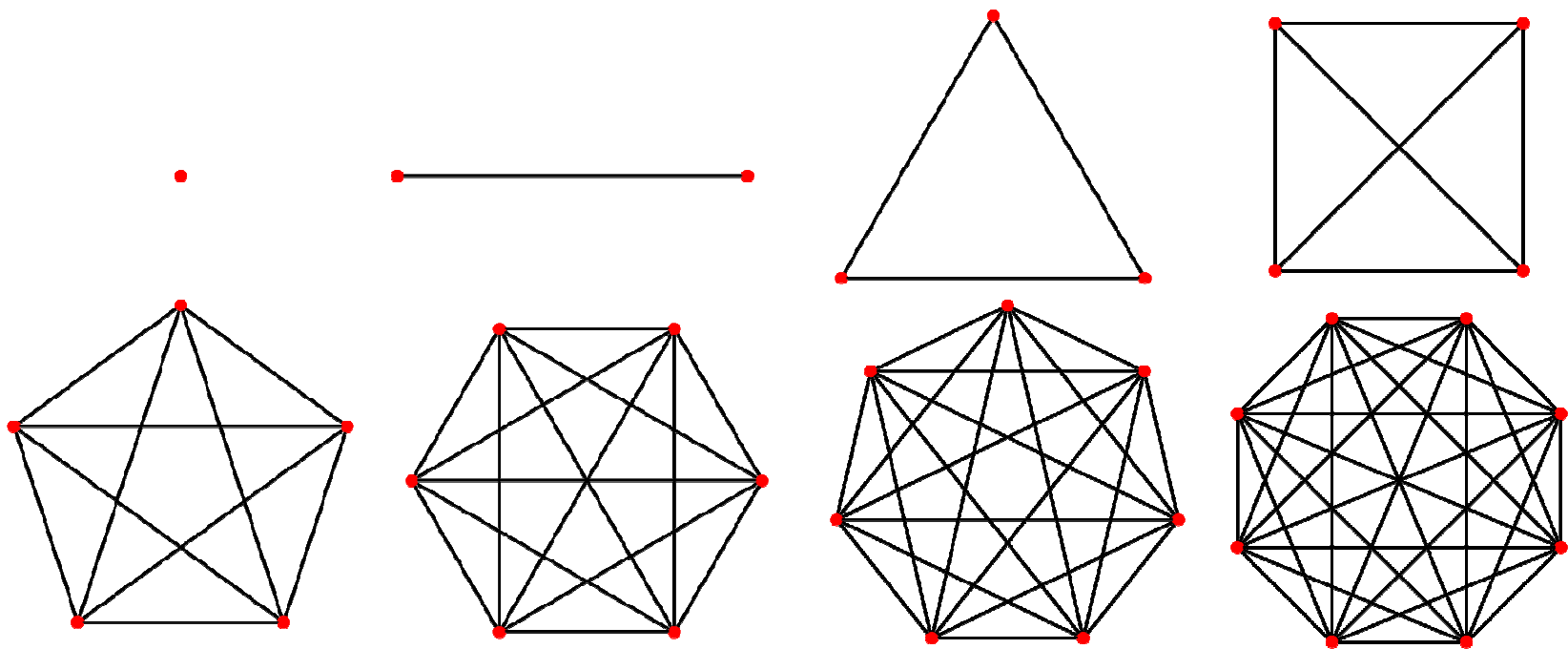
C_4



C_5

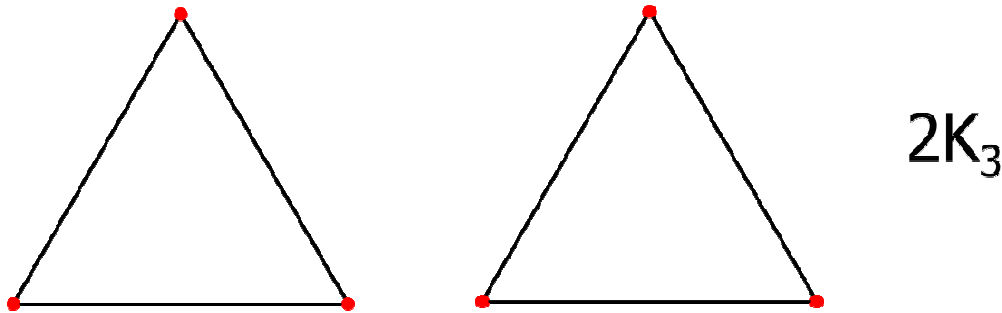
Πλήρης γράφος

- **Πλήρης γράφος** K_n : όλες οι κορυφές του ενώνονται.
Είναι και τακτικός γράφος βαθμού $n-1$



Γράφος με πλήρεις συνιστώσες

- Γράφος με m συνιστώσες τύπου K_n : mK_n



Βασικά Θεωρήματα

- Λήμμα των χειραψιών (Euler): $\sum_{\forall v \in V} d(v) = 2|E|$
- Τακτικός γράφος βαθμού k : $|V| \times k = 2|E|$
- Το πλήθος των κορυφών περιττού βαθμού ενός πεπερασμένου γράφου είναι άρτιος αριθμός.

Επιπλέον Θεωρήματα

- Ένας πλήρης γράφος K_n έχει $m = n(n-1)/2$ ακμές
- Για έναν απλό γράφο G με n κορυφές, m ακμές και k συνιστώσες ισχύει:

$$n-k \leq m \leq (n-k)(n-k+1)/2$$

- Κάθε απλός γράφος με n κορυφές και τουλάχιστον $(n-1)(n-2)/2$ ακμές είναι συνδεδεμένος

Απαρίθμηση

- Το πλήθος των απλών γράφων με ετικέτες που έχουν n κορυφές και m ακμές είναι

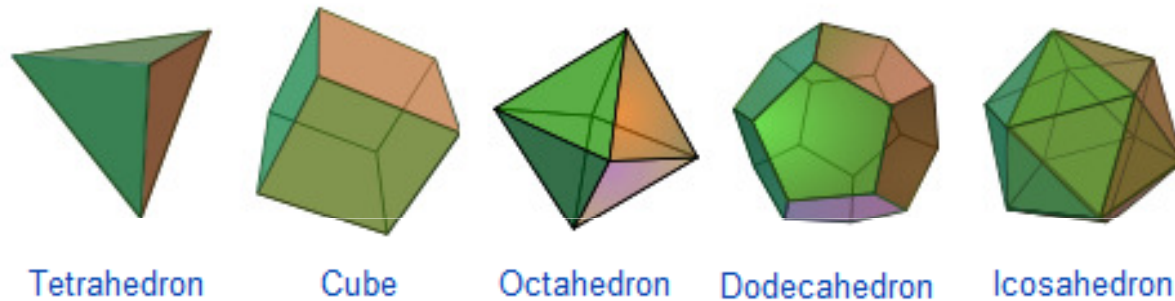
$$\binom{n(n-1)/2}{m}$$

- Το πλήθος των απλών γράφων με ετικέτες και n κορυφές είναι

$$2^{n(n-1)/2}$$

Πλατωνικοί γράφοι

- Ο σκελετός των πλατωνικών στερεών: τετράεδρο, κύβος, οκτάεδρο, δωδεκάεδρο, εικοσάεδρο



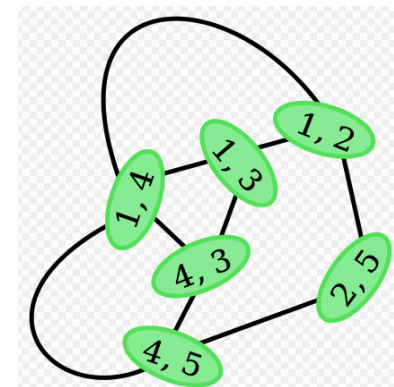
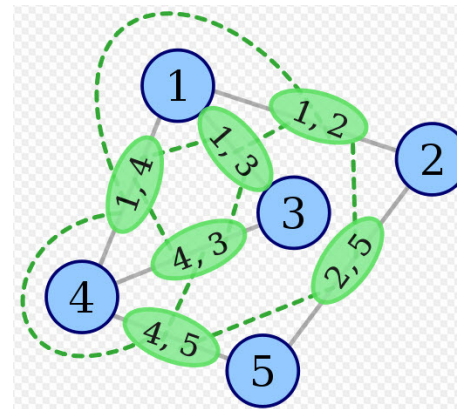
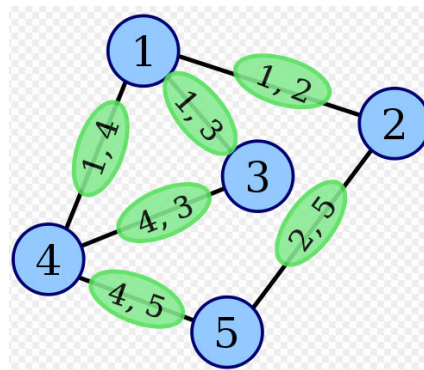
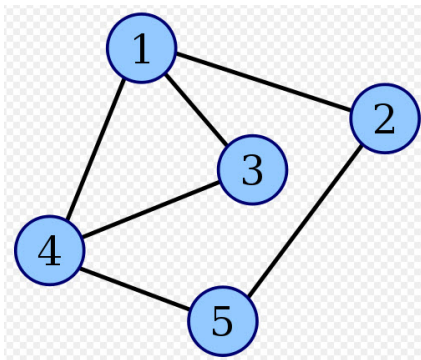
Πλατωνικοί γράφοι (συνέχεια)

	Όψεις f	Κορυφές n	Ακμές m	f+n-m
Τετράεδρο	4	4	6	
Εξάεδρο	6	8	12	
Οκτάεδρο	8	6	12	
Δωδεκάεδρο	12	20	30	
Εικοσάεδρο	20	12	30	

Γραμμικός γράφος

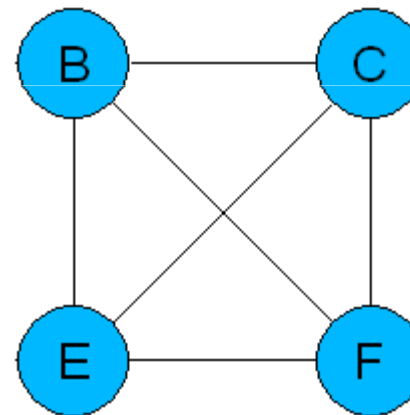
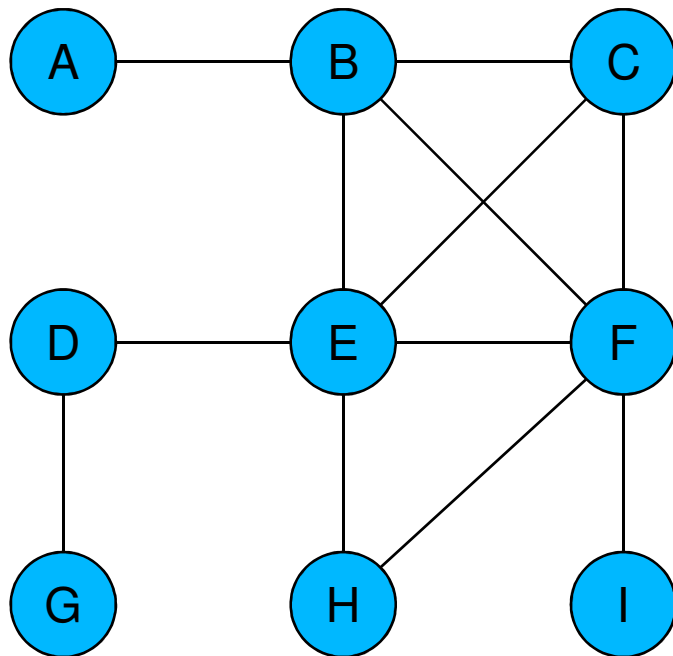
- **Γραμμικός**-linear γράφος $L(G)$ ενός γράφου G :
 m κορυφές, μία για κάθε ακμή του G έτσι ώστε δύο κορυφές του να είναι γειτονικές αν οι αντίστοιχες ακμές του G προσπίπτουν στην ίδια κορυφή
- Το πλήθος των ακμών του γραμμικού γράφου $L(G)$ είναι

$$|E(L(G))| = \frac{1}{2} \sum_{\forall v \in V} d(v)^2 - m$$



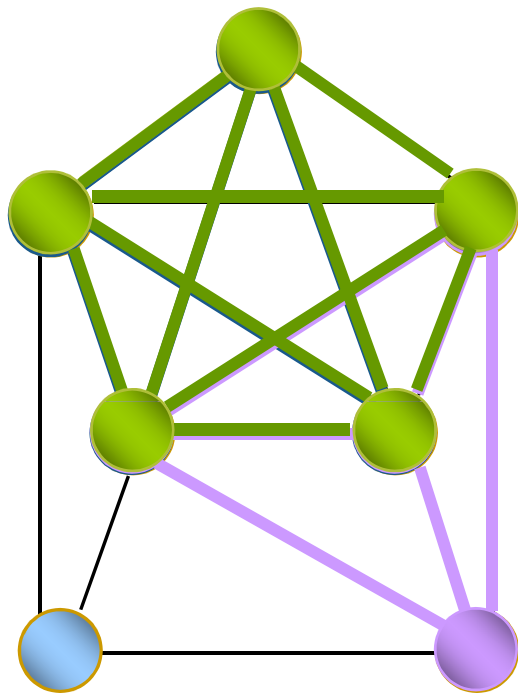
Γράφος Κλίκα

- **Κλίκα** H (clique) ενός γράφου G , είναι ένας υπογράφος με ένα σύνολο κορυφών S , έτσι ώστε ο $H(S)$ να είναι πλήρης. **Αριθμός κλίκας** ω , λέγεται η τάξη της **μέγιστης** κλίκας.



$$S = \{B, C, E, F\}, \omega = 4$$

Γράφος Κλίκα (2)



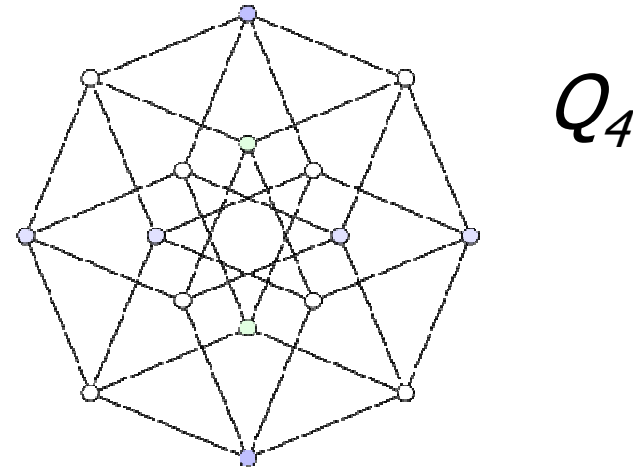
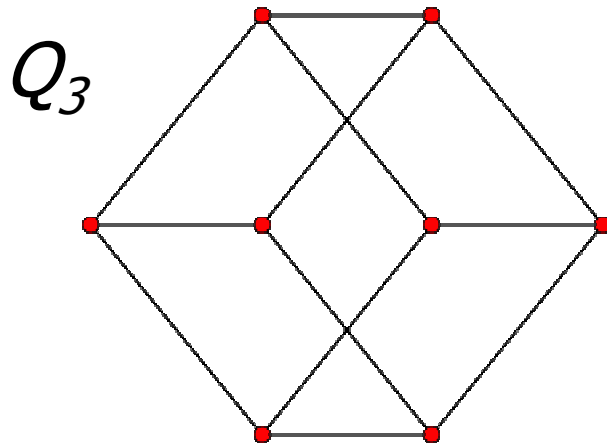
Κλίκα: ο υπογράφος K_4

Maximal κλίκα: μία κλίκα που
δεν μπορεί να μεγαλώσει
προσθέτοντας νέες κορυφές

Maximum κλίκα: η μεγαλύτερη
μέγιστη κλίκα

Υπερκύβος

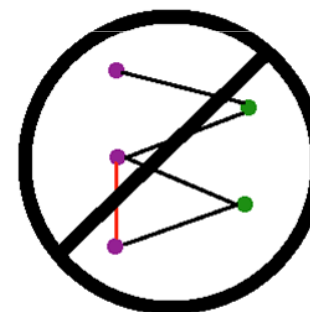
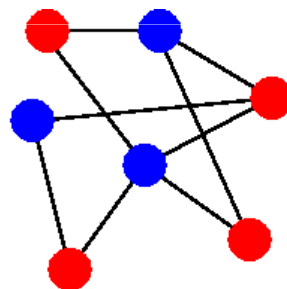
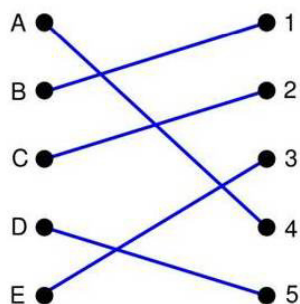
- **Υπερκύβος** λέγεται ένας γράφος τακτικός βαθμού n – συμβολίζεται με Q_n – με κορυφές που αντιστοιχούν στο σύνολο των συμβολοσειρών που μπορούν να σχηματισθούν με n bits.



- Ποιά είναι η μορφή των Q_0, Q_1, Q_2 ?
- Πως παράγεται ο υπερκύβος Q_{n+1} από ένα υπερκύβο Q_n ?

Διμερής Γράφος

- Αν οι κορυφές του γράφου G επιμερίζονται σε δύο υποσύνολα V_1 και V_2 , έτσι ώστε κάθε ακμή του G να προσπίπτει σε μία κορυφή του V_1 και μία του V_2 , τότε ο γράφος G ονομάζεται **διμερής**-bipartite ή **διγράφος**-bigraph, ενώ τα V_1 και V_2 ονομάζονται **μερικά σύνολα** -partite sets.

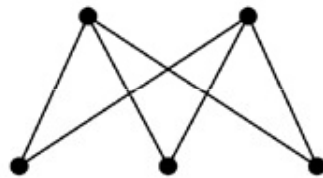


- **Διτακτικός**-biregular λέγεται ένας διμερής γράφος αν όλες οι κορυφές ενός συνόλου (V_1 ή V_2) έχουν τον ίδιο βαθμό.

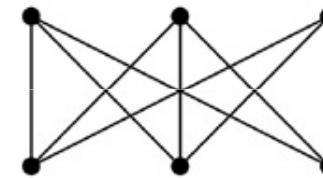
Πλήρης Διμερής Γράφος

- Αν κάθε κορυφή του V_1 συνδέεται με κάθε κορυφή του V_2 , τότε ο γράφος G ονομάζεται **πλήρης διμερής** - complete bipartite και συμβολίζεται με $K_{i,j}$, όπου $|V_1|=i$ και $|V_2|=j$

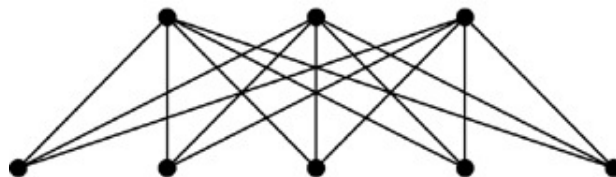
© The McGraw-Hill Companies, Inc. all rights reserved.



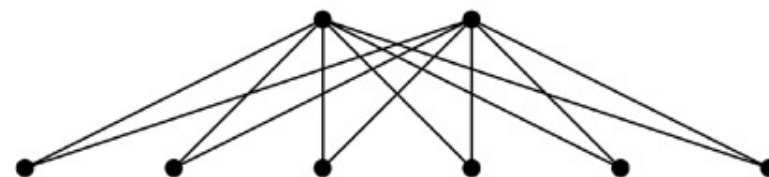
$K_{2,3}$



$K_{3,3}$



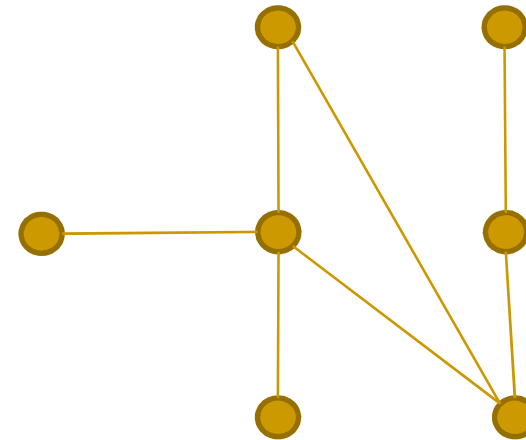
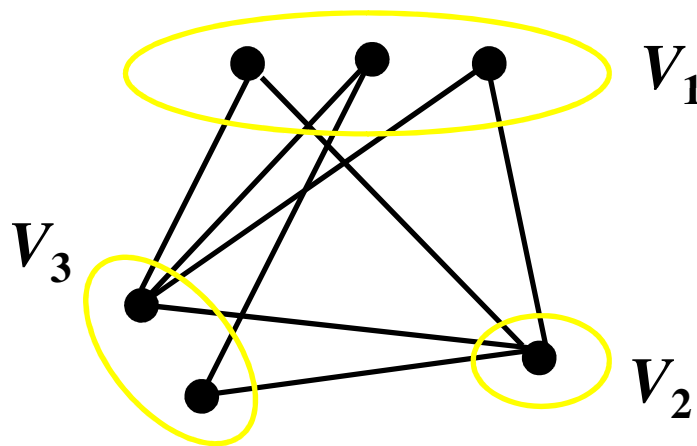
$K_{3,5}$



$K_{2,6}$

Πολυμερής Γράφος

- Ένας γράφος G ονομάζεται **πολυμερής** (k -partite) αν το σύνολο $V(G)$ μπορεί να χωρισθεί σε k μη κενά υποσύνολα V_1, V_2, \dots, V_k έτσι ώστε καμία ακμή του G να μην ενώνει κορυφές του ίδιου **μερικού**-partite συνόλου του G



Τι είδους πολυμερής γράφος είναι ο ανωτέρω ?