ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ

Η ανάγκη για την τεχνική των ελαχίστων τετραγώνων προκύπτει από δύο διαφορετικές κατευθύνσεις που έχουμε μελετήσει έως τώρα. Από την μία, έχουμε μελετήσει την επίλυση γραμμικών συστημάτων της μορφής $Ax=b$, δεδομένου ότι υπάρχει λύση. Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε τι γίνεται αν δεν υπάρχει λύση για αυτό το σύστημα. Όταν το σύστημα είναι αδύνατο, που είναι πιθανό να συμβεί όταν το πλήθος των εξισώσεων είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των αγνώστων, τότε το καλύτερο που μπορούμε να κάνουμε είναι να βρούμε μία προσέγγιση με βάση τα ελάχιστα τετράγωνα.

Επίσης, στο Κεφάλαιο 5 είδαμε τρόπους με τους οποίους μπορούμε να προσεγγίσουμε μία συνάρτηση στα σημεία που μας δίνονται. Όμως, αν τα σημεία είναι πάρα πολλά ή τα σημεία έχουν ένα περιθώριο λάθους τότε η εύρεση ενός πολυωνύμου μεγάλου βαθμού σπάνια είναι η καλύτερη λύση. Σε αυτή τη περίπτωση είναι καλύτερα να χρησιμοποιούμε πιο απλά μοντέλα για την προσέγγιση αυτών των δεδομένων. Τα ελάχιστα τετράγωνα είναι ένας μηχανισμός που ενδείκνυται σε αυτές τις περιπτώσεις.

Έστω ότι δίνονται τα σημεία (x_i, f_i), $i = 1,\dots,n$ και θέλουμε να προσδιορίσουμε ένα πολυώνυμο βαθμού 1 της μορφής $y = at + b$, έτσι ώστε το άθροισμα των τετραγώνων:

$$E(a,b) = \sum_{k=1}^{n} \left(f_i - (at_i + b) \right)^2 = \text{ελάχιστο.}$$

Αναγκαία συνθήκη για να ισχύει αυτό είναι:

$$\frac{\partial E(a,b)}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial E(a,b)}{\partial b} = 0,$$

δηλαδή:

$$\begin{cases} nb + a\sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} f_i \\ a\sum_{i=1}^{n} t_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} f_i \end{cases}$$

Η ορίζουσα των συντελεστών του παραπάνω συστήματος είναι πάντα διάφορη του μηδενός, οπότε το σύστημα έχει μοναδική λύση. Το πολυώνυμο που προκύπτει καλείται *πολυώνυμο 1ου βαθμού ελαχίστων τετραγώνων* και χρησιμοποιείται ευρέως στη στατιστική για τη συσχέτιση μεταξύ δύο ποσοτήτων. Ομοίως, αν θέλουμε να προσδιορίσουμε ένα πολυώνυμο $a_0 + a_1x + ... + a_mx^m$ βαθμού m, ώστε το άθροισμα των τετραγώνων να είναι ελάχιστο, καλούμαστε να λύσουμε ένα ανάλογο σύστημα $(m+1)\times(m+1)$. Στη συνέχεια θα δούμε πιο αναλυτικά την τεχνική προσέγγισης διακριτών ελαχίστων τετραγώνων καθώς και βέλτιστες προσεγγίσεις σε ευκλείδιους χώρους.

6.1 Γραμμικά Συστήματα χωρίς Λύση

Έχουμε δει στο Κεφάλαιο 3 τι πρέπει να ισχύει για ένα γραμμικό σύστημα ώστε να έχει λύση και προφανώς τα ίδια ισχύουν όταν δεν έχει καμία λύση και είναι αδύνατο. Για παράδειγμα το παρακάτω σύστημα είναι αδύνατο μιας και η 1η με την 3η εξίσωση δεν μπορούν να ικανοποιούνται ταυτόχρονα.

$$x_1 + x_2 = 2$$
$$x_1 - x_2 = 1$$
$$x_1 + x_2 = 3$$

Τι σημαίνει όταν λέμε ότι ένα σύστημα είναι αδύνατο; Μπορεί για παράδειγμα οι συντελεστές να εμπεριέχουν κάποιο σφάλμα και να μας οδηγούν σε αυτό το συμπέρασμα χωρίς να μπορούμε να δώσουμε λύση με τις μεθόδους που βασίζονται στην απαλοιφή κατά Gauss. Αυτό που θα κάνουμε είναι να βρούμε ένα διάνυσμα λύσεων *x* που είναι ό,τι ***κοντινότερο*** σε λύση.

Αν αυτή την «κοντινότητα» την εκφράσουμε με τη βοήθεια της Ευκλείδιας απόστασης, τότε υπάρχει ένας απλός αλγόριθμος να βρίσκουμε αυτό το *x*. Αυτή η λύση σε αυτή την περίπτωση είναι η λύση ***ελαχίστων τετραγώνων.***

Ας γράψουμε το παραπάνω σύστημα σε μορφή πινάκων:

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$$

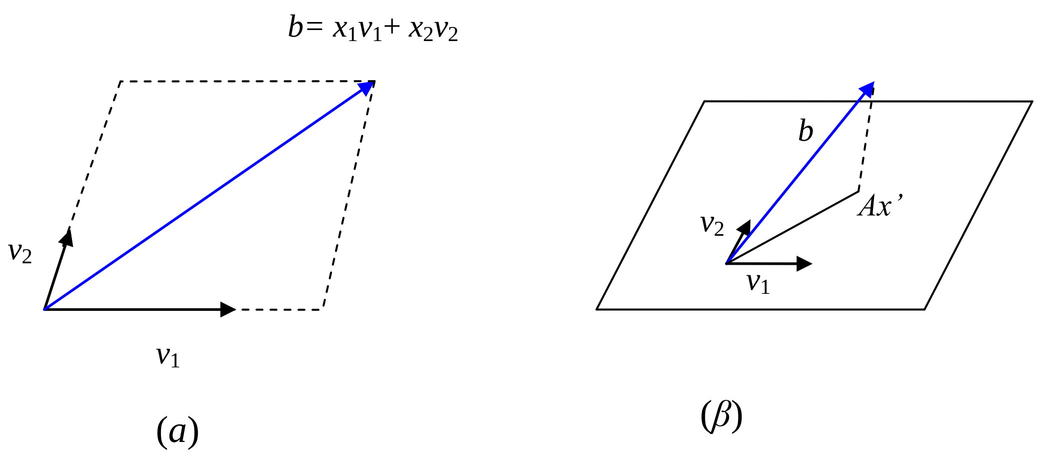
το οποίο μπορεί να γραφεί ως

$$x_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$$

Γενικά κάθε $m\times n$ σύστημα μπορεί να γραφεί σε αυτή τη μορφή σαν μία εξίσωση διανυσμάτων:

$$x_1v_1+x_2v_2+\cdots+x_nv_n=b$$

Στο παράδειγμά μας, προσπαθούμε να εκφράσουμε το b σαν έναν γραμμικό συνδυασμό από τρισδιάστατα διανύσματα. Ο συνδυασμός αυτός δημιουργεί μία επιφάνεια στο R^3 και έχει λύση μόνο αν το διάνυσμα b κείται σε αυτή την επιφάνεια.



Σχήμα 1: Γεωμετρική λύση ενός συστήματος 3 εξισώσεων με 2 αγνώστους. (α) Για να έχει λύση το διάνυσμα b θα πρέπει να είναι γραμμικός συνδυασμός των v_1 και v_2. (β) Αν το b είναι εκτός επιφάνειας δεν θα υπάρχει λύση. Η λύση ελαχίστων τετραγώνων x' δίνει ένα διάνυσμα Ax' σαν λύση που είναι το κοντινότερο στο b σε σχέση με την Ευκλείδια απόσταση.

Με βάση το σχήμα 1(β), μπορούμε να υπολογίσουμε μία προσεγγιστική λύση που να είναι η κοντινότερη σε σχέση με την ευκλείδια απόσταση. Αυτό το διάνυσμα Ax' έχει την εξής ιδιότητα: η διαφορά b-Ax' είναι κάθετη στην επιφάνεια $\{Ax|\ x \in R^n\}$. Θα εκμεταλλευτούμε αυτή την ιδιότητα για να υπολογίσουμε το x', την λύση ελαχίστων τετραγώνων.

Γνωρίζουμε ότι το b-Ax' είναι κάθετο στην επιφάνεια $\{Ax|\ x \in R^n\}$. Επομένως:

$$(Ax)^T(b - Ax') = 0, \forall x \in R^n \Rightarrow$$
$$x^T A^T (b - Ax') = 0, \forall x \in R^n$$

το οποίο σημαίνει ότι το διάνυσμα $A^T(b - Ax')$ είναι κάθετο σε κάθε διάνυσμα $x \in R^n$, καθώς και στον εαυτό του. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο όταν:

$$A^T(b - Ax') = 0$$

Αυτή η εξίσωση δίνει ένα σύστημα εξισώσεων για την παραγωγή της λύσης ελαχίστων τετραγώνων x', οι οποίες ονομάζονται ***κανονικές εξισώσεις***.

Κανονικές Εξισώσεις

Δοθέντος του αδύνατου συστήματος

$$Ax = b$$

λύνουμε το σύστημα

$$A^T A x' = A^T b$$

για την λύση ελαχίστων τετραγώνων.

Παράδειγμα 6.1 Βρείτε την λύση ελαχίστων τετραγώνων για το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Λύση:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Επομένως οι κανονικές εξισώσεις είναι:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Από όπου παίρνουμε ότι x=7/4 και y=3/4.

Αντικαθιστώντας την λύση ελαχίστων τετραγώνων στην αρχική εξίσωση παίρνουμε:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1 \\ 2.5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Για να βρούμε το σφάλμα βρίσκουμε το υπόλοιπο:

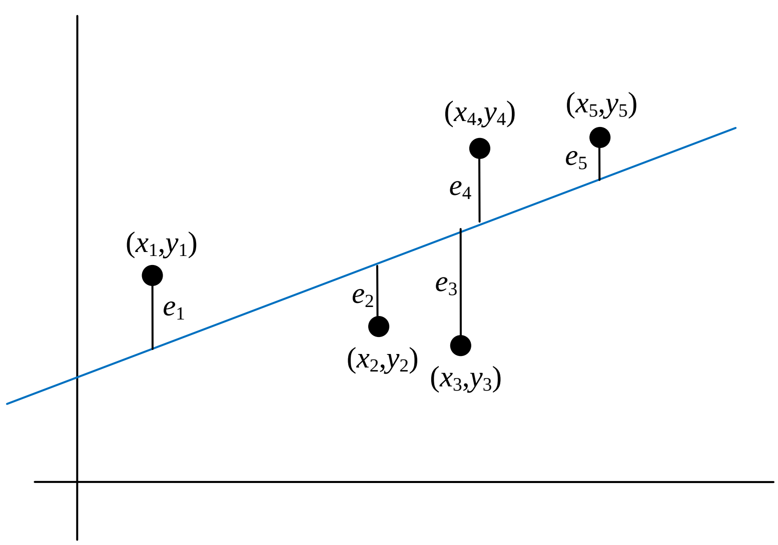
$$r = b - Ax = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1 \\ 2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Η νόρμα 2 του r είναι η:

$$\|r\|_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} = \sqrt{0.5} \approx 0.707$$

6.2 Εύρεση Μοντέλων για Δεδομένα

Έστω (x_1,y_1), (x_2,y_2),…, (x_m,y_m) ένα σύνολο σημείων στο επίπεδο (δεδομένα). Δοθείσης μίας οικογένειας μοντέλων (π.χ. y=a+bx) βρίσκουμε το καλύτερο στιγμιότυπο αυτής της οικογένειας ώστε να ταιριάζει καλύτερα στα δεδομένα με βάση τη νόρμα 2 (ευκλείδια απόσταση). Η ιδέα των ελαχίστων τετραγώνων είναι η μέτρηση της διαφοράς του μοντέλου από τα πραγματικά δεδομένα με το τετράγωνο του σφάλματος και επιλογή του κατάλληλου μοντέλου ώστε να ελαχιστοποιούνται αυτές οι ποσότητες. Αυτό φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 2: Η καλύτερη γραμμή είναι αυτή που ελαχιστοποιεί την ποσότητα $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 + e_5^2$ σε σχέση με όλες τις γραμμές y=a+bx.

Παράδειγμα 6.2 Ποια είναι η καλύτερη γραμμή που ταιριάζει στα δεδομένα (1,2), (-1,1) και (1,3).

Λύση: Το μοντέλο είναι το $y=a+bx$ και ο στόχος είναι να βρούμε τα καλύτερα a και b. Αντικατάσταση των δεδομένων δίνει:

$$a + b = 2$$

$$a - b = 1$$

$$a + b = 3$$

ή σε μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ξέρουμε ότι αυτό το σύστημα δεν έχει λύση μιας και άλλωστε τα τρία σημεία δεν είναι συνευθειακά. Οι καλύτερη λύση προκύπτει από το παράδειγμα 6.1 οπότε η καλύτερη ευθεία είναι η $y = \frac{7}{4} + \frac{3}{4}x$. Τα ίδια ισχύουν σχετικά με το σφάλμα.

Με βάση και το προηγούμενο παράδειγμα μπορούμε να δώσουμε την παρακάτω διαδικασία ώστε να λύνουμε ταιριάσματα ελαχίστων τετραγώνων:

Δοθέντος ενός συνόλου σημείων (x_1,y_1), (x_2,y_2),…, (x_m,y_m):

1. Επιλέγουμε ένα παραμετροποιημένο μοντέλο (γραμμή, πολυώνυμο κτλ.) που θα χρησιμοποιηθεί για το ταίριασμα των δεδομένων.
2. Αντικατάσταση των δεδομένων στο μοντέλο. Έτσι παίρνουμε ένα γραμμικό σύστημα για την εύρεση των παραμέτρων.
3. Επίλυση των αντίστοιχων κανονικών εξισώσεων και του συστήματος που προκύπτει.

Παράδειγμα 6.3 Ποια είναι η καλύτερη γραμμή και ποια η καλύτερη τετραγωνική καμπύλη που ταιριάζει στα δεδομένα (-1,1), (0,0), (1,0) και (2,-2).

Όσον αφορά την τετραγωνική καμπύλη έχουμε:

$$y = a + bt + ct^2$$

και αντικαθιστώντας τα σημεία έχουμε:

$$a - b + c = 1$$

$$a = 0$$

$$a + b + c = 0$$

$$a + 2b + 4c = -2$$

το οποίο σε μορφή πίνακα γίνεται:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Επομένως οι κανονικές εξισώσεις είναι:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

όπου τελικά a=0.45, b=-0.65 και c=-0.25. Άρα η εξίσωση είναι η

$$y = 0.45 - 0.65t - 0.25t^2$$

Το υπόλοιπο είναι:

$$r = b - Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.85 \\ 0.45 \\ -0.45 \\ -1.85 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.15 \\ -0.45 \\ 0.45 \\ -0.15 \end{bmatrix}$$

Επομένως,

$$\|r\|_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2} = \sqrt{0.45} \approx 0.67$$

Όσον αφορά την γραμμή έχουμε:

$$y = a + bt$$

και αντικαθιστώντας τα σημεία έχουμε:

$$a - b = 1$$

$$a = 0$$
$$a + b = 0$$
$$a + 2b = -2$$

το οποίο έπειτα από πράξεις αντίστοιχες με παραπάνω παίρνουμε το σύστημα κανονικών εξισώσεων:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

όπου τελικά *a*=0.2 και *b*=-0.9. Άρα η εξίσωση είναι η

$$y = 0.2 - 0.9t$$

Το υπόλοιπο είναι:

$$r = b - Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.2 \\ -0.7 \\ -1.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ -0.2 \\ 0.7 \\ -0.4 \end{bmatrix}$$

Επομένως,

$$\|r\|_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2} = \sqrt{0.7} \approx 0.84$$

Επομένως, η προσέγγιση με την παραβολή είναι καλύτερη από την προσέγγιση με γραμμή.

6.3 *Βέλτιστες προσεγγίσεις σε ευκλείδειους χώρους*

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με προσεγγίσεις που ελαχιστοποιούν αποστάσεις σε διανυσματικούς χώρους, με νόρμα που προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο. Υπενθυμίζουμε ότι

Ορισμός 6.1.1 Εστω *X* ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος. Μία απεικόνιση **(.,.)**: $X \times X \to \boldsymbol{R}$ καλείται ***εσωτερικό γινόμενο*** στο *X*, αν ισχύουν:

- *(x + y , z) = (x,y) + (x , z)* για κάθε $x,y,z \in X$
- *(λ x , y) = λ (x , y)* για κάθε $x,y \in X$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$
- *(x , y) = (y , x)* για κάθε $x,y \in X$
- *(x , x) > 0* για κάθε $x \in X-\{0\}$.

Ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, στον οποίο έχει ορισθεί ένα εσωτερικό γινόμενο, καλείται ***ευκλείδειος χώρος***. Αν ισχύει $(x\ , y) = 0$, θα λέμε ότι τα x,y είναι κάθετα μεταξύ τους ***κάθετα***, ***ή ορθογώνια***. Η ποσότητα $||x||$ = $\sqrt{(x,x)}$ καλείται ***νόρμα*** του στοιχείου x και η ποσότητα $d(x,y) = || x - y ||$ καλείται ***απόσταση*** μεταξύ των στοιχείων x και y.

Παραδείγματα:

(1) Στο διανυσματικό χώρο $C[a,b]$ των συνεχών συναρτήσεων στο κλειστό διάστημα $[\alpha,b]$, η απεικόνιση:

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

είναι ένα εσωτερικό γινόμενο.

(2) Στο διανυσματικό χώρο $\boldsymbol{R}^n = \{x=(x_1,\ldots,x_n): x_i \in \boldsymbol{R}\}$, η απεικόνιση:

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{n} x_i y_i$$

είναι ένα εσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός 6.1.2 Εστω X ένας ευκλείδιος διανυσματικός χώρος με νόρμα $\|.\|$, $x \in X$ και έστω Y ένα υποσύνολο του X. Ένα στοιχείο $y \in Y$ για το οποίο ισχύει:

$$||x\text{-}y|| \leq ||x\text{-}z||, \text{ για κάθε } z \in Y,$$

καλείται ***βέλτιστη προσέγγιση*** του X από το Y. Εναλλακτικά μπορεί να γράψει κάποιος ότι $(x,z) = (y,z)$, για κάθε $z \in Y$.

Θεώρημα 6.1.1 Εστω X ένας ευκλείδιος διανυσματικός χώρος με νόρμα $\|.\|$, $x \in X$ και Y ένας υπόχωρος του X. Ένα στοιχείο $y \in Y$ είναι βέλτιστη προσέγγιση του x από το y, αν και μόνον αν ισχύει:

$$\text{για κάθε } z \in Y, \ \ (x - y, z) = 0. \tag{6.1}$$

Αν λοιπόν ο υπόχωρος Y είναι πεπερασμένης διάστασης n και $\{s_1,\dots,s_n\}$ είναι μία βάση του, τότε κάθε στοιχείο z του Y μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης ως εξής:

$$z = \sum_{k=1}^{n} z_k \ s_k ,$$

οπότε η σχέση (6.1) ικανοποιείται αν και μόνον αν:

$$(x - y, s_k) = 0, k = 1, \dots, n$$

Συνεπώς, αν $y = \sum_{k=1}^{n} y_k \ s_k$, όπου y_k είναι άγνωστοι συντελεστές, έχουμε:

$$\begin{pmatrix} (s_1,s_1) & (s_1,s_2) & \cdots & (s_1,s_n) \\ (s_2,s_1) & (s_2,s_2) & \cdots & (s_2,s_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (s_n,s_1) & (s_n,s_1) & \cdots & (s_n,s_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x,s_1) \\ (x,s_2) \\ \vdots \\ (x,s_n) \end{pmatrix}. \qquad (6.2)$$

Το παραπάνω είναι ένα γραμμικό σύστημα ως προς $y_1, \dots, y_n$, το οποίο λύνεται μονοσήμαντα, αφού το αντίστοιχο ομογενές σύστημα έχει μόνο την τετριμμένη μηδενική λύση. Ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων καλείται ***πίνακας του Gram***. Είναι σαφές από τα παραπάνω, ότι αν η βάση $\{s_1,\dots,s_n\}$ είναι ορθοκανονική, δηλαδή αν τα στοιχεία της βάσης είναι ανά δύο κάθετα και μοναδιαία, τότε θα ισχύει $(s_i, s_k) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$, δηλαδή ο πίνακας του Gram είναι ο μοναδιαίος, άρα παίρνουμε άμεσα ότι:

$$y_k = (x, s_k),$$

συνεπώς η βέλτιστη προσέγγιση y του στοιχείου x είναι η:

$$y = \sum_{k=1}^{n} (x, s_k) \ s_k .$$

Παράδειγμα 6.1 Να προσδιορισθεί το πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού, το οποίο είναι η βέλτιστη προσέγγιση της συνάρτησης $f(x) = sin(\pi x)$ στο διάστημα [-1,1], στο χώρο των πολυωνύμων 2^{ου} βαθμού, ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του χώρου (βλέπε παράδειγμα 1). Υπολογίστε το σφάλμα της βέλτιστης προσέγγισης.

Λύση Θεωρούμε τη βάση $\{x^i, i=0,1,2\}$ του χώρου των πολυωνύμων 2^{ου} βαθμού, τότε εφόσον για $i,k = 0,1,2$ έχουμε:

$$(s_i, s_k) = \int_{-1}^{1} x^i\ x^k dx = \left[\frac{x^{k+i+1}}{k+i+1}\right]_{-1}^{1} = \frac{1-(-1)^{k+i+1}}{k+i+1},$$

το σύστημα (6.2) γίνεται:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{\pi} \\ 0 \end{bmatrix}$$

άρα $y_1 = 0, y_2 = 3/\pi, y_3 = 0$, οπότε (0,3/π,0):

$$y = \frac{3}{\pi}x$$

Για το σφάλμα έχουμε:

$$\|f - y\| = \sqrt{\left(\int_{-1}^{1}\left(\sin(\pi x) - \frac{3}{\pi}x\right)^2\right)} \approx 0{,}626157$$

□

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Προσδιορίστε τη βέλτιστη προσέγγιση της συνάρτησης $f(x) = 2\ e^x+1$ από ένα πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού, ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του χώρου των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα [-1,1].

2. Προσδιορίστε τη βέλτιστη προσέγγιση της συνάρτησης $f(x) = e^x + συν(πx)$ από ένα πολυώνυμο 4^{ου} βαθμού, ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του χώρου των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα [1,4].

3. Υπολογίστε την ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων που προσεγγίζει τα σημεία:

t	*-3*	*-2*	*0*	*1*	*4*	*6*
F	*-1.4*	*0*	*1.2*	*5.5*	*7*	*9*

Απάντ: $y = 2.37667 + 1.17333\, x$.

4. Υπολογίστε την ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων που προσεγγίζει τα σημεία:

t	*-4.2*	*-3.6*	*-2.3*	*-1.8*	*-1.1*	*-0.4*	*0.6*	*1.2*
F	*10*	*7*	*13*	*11*	*9*	*12*	*8*	*11*

Απάντ: $y = 10.3441 + 0.151099\, x$.

5. Να βρείτε την λύση ελαχίστων τετραγώνων για το παρακάτω μη επιλύσιμο σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Απάντ: $α = 4$ και το b είναι τυχαίο.