Επανάληψη

(Τοπικά ακρότατα)

Να βρεθούν τα τοπ. ακρ. της $f(x,y) = x\cdot y$ (εφόσον υπάρχουν)

Λύση αρχικά λύνουμε την εξ. $\nabla f = \vec{0} \iff \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

Υπολογίζουμε $f_{xx} = 0$, $f_{xy} = 1$

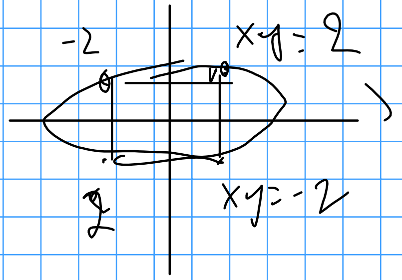
$f_{yy} = 0$

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -1 < 0$$

άρα το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Δεν έχει τ. ακρότατα η f

2) (Lagrange) Βρείτε τη μέγιστη κ ελάχιστη τιμή που παίρνει η συνάρτηση $f(x,y) = xy$, στην έλλειψη



$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \leftarrow (\text{κλειστό + φραγμένο})$$

Λύση Η συνθήκη είναι $g(x,y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0.$

Λύνουμε το σύστημα: $\begin{cases} \nabla f = \lambda \cdot \nabla g \\ g = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \lambda \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) \\ g = 0 \end{cases}$

$g = 0$ ← σημεία της έλλειψης

Θεωρώ την (διαν.) εξίσωση ότι: $(y, x) = \lambda\left(\frac{x}{4}, y\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} y = \lambda \frac{x}{4} \\ x = \lambda y \end{cases}$

οπότε $y = \frac{\lambda}{4}(\lambda y) = \frac{\lambda^2}{4} y \Longleftrightarrow y\left(1 - \frac{\lambda^2}{4}\right) = 0 \Longleftrightarrow y = 0$ ή $\lambda = \pm 2.$

Περίπτωση 1 : Για $y=0$, έχω $x=0$. Αλλά το $(0,0)$ δεν είναι σημείο της έλλειψης, διότι $g(0,0)=0\neq -1$.

Άρα $y\neq 0$.

Περίπτωση 2 $y\neq 0$, $\lambda=\pm 2$.

Έχω, $x=\pm 2y$, και

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1=0 \Leftrightarrow \frac{(\pm 2y)^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{4y^2+4y^2=8} \checkmark$$

$$\Leftrightarrow y=\pm 1, \text{ άρα } x=\pm 2$$

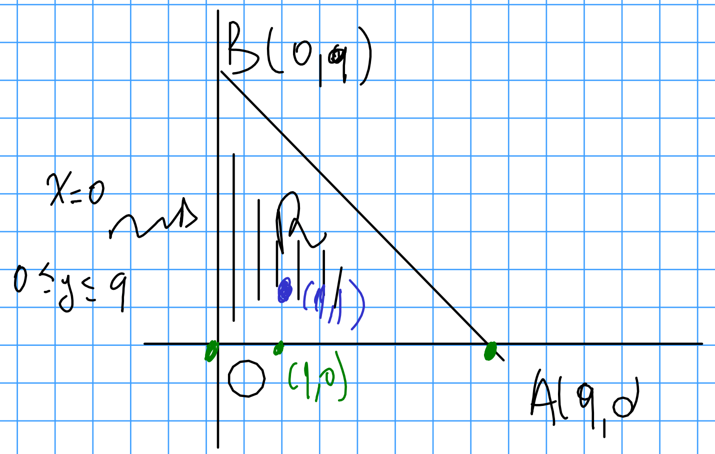
Επομένως, τα ακρότατα είναι σημεία $(\pm 2, 1)$, $(\pm 2, -1)$

Θυμητ, $f(x,y) = x \cdot y$ $\xrightarrow{(\pm 2,1)} \pm 2$ άρα, $\max f = 2$

$\xrightarrow{(\frac{x}{2}, -y)} \pm 2$ $\min f = -2$

3) (ολικά ακρότατα) Βρείτε το ολικό μέγιστο & ολικό ελάχιστο της $f(x,y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$ στο τριγωνικό χωρίο του πρώτου τεταρτημορίου που περικλείεται από τις ευθείες $x=0$, $y=0$, $y=9-x$.

Λύση



Τα κρίσιμα σημεία είναι

$$f_x = f_y = 0 \quad (\text{εσ. σημεία})$$

και στο σύνορο του χωρίου R.

Εσωτερικά σημεία

$$f = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$$

$$\nabla f = \vec{0} \iff \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 - 2x = 0 \\ 2 - 2y = 0 \end{cases} \iff \{ (x,y) = (1,1), \ \boxed{f(1,1) = 4}$$

Συνοριακά σημεία

• Ευθ. τμήμα OA : $y=0$, $0 \le x \le 9$

Η συνάρτηση $f(x,y) = f(x,0) = 2+2x-x^2$, $x \in [0,9]$

Για $x=0$, $\boxed{f(0,0)=2}$

Για $x=9$, $f(9,0) = 2+18-81 = \boxed{-61}$

Εσ. σημεία $(0,9)$: $f'(x,0) = 2-2x = 0 \Rightarrow x=1$

άρα $f(1,0) = 2+2\cdot 1 - 1^2 = \boxed{3}$

• Ευθ. τμήμα OB: $x=0$, $0 \le y \le 9$

$f(x,y) = f(0,y) = 2+2y-y^2$ (λόγω συμμετρίας, με εναλλαγή των x,y)

Προκύπτουν $\boxed{f(0,0)=2}$

$$\boxed{f(0,9)=-61}$$

$$\boxed{f(0,1)=3}$$

• Ευθ. τμήμα AB : $y=9-x,\ 0\leq x\leq 9$

όπου η $f(x,y)=f(x,9-x)=2+2x+2(9-x)-x^2-(9-x)^2=$

$$=-2x^2+18x-61$$

$f'(x,9-x)=18-4x=0 \Leftrightarrow x=18/4=9/2$

Το $y = 9 - x = 9 - 9/2 = 9/2$ άρα το στ. σημείο $(9/2, 9/2)$

(Τα άκρα τα έχουμε δει προηγουμένως)

Επομένως, $\boxed{f(9/2, 9/2) = -41/2}$

$$\{-41/2, \; 2, \; 3, \; -61, \; 4\}$$

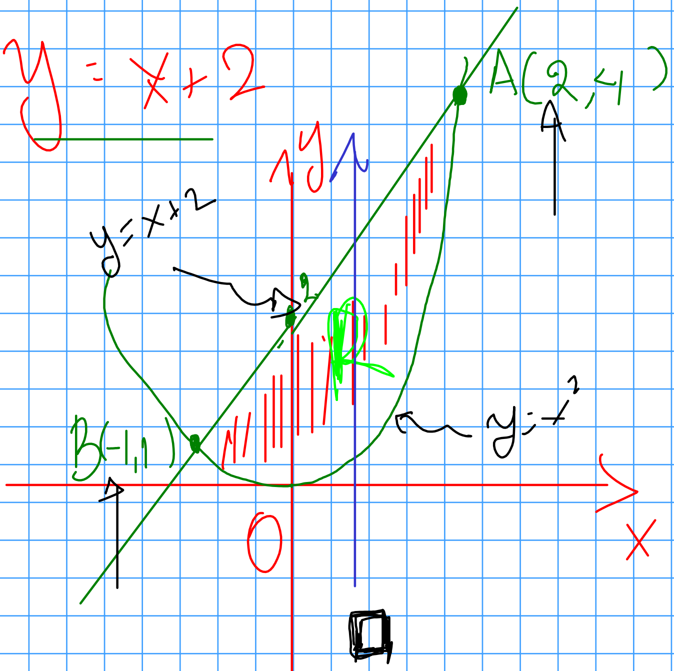
άρα $\max f = 4$

$\min f = -61$

4) (Διπλά). Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου R που περικλείεται από την παραβολή $y=x^2$ και την ευθεία

$y = x+2$

Λύση



$$E(R) = \iint_R dx\,dy = \int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} dy\,dx$$

(ως προς y)

$$= \int_{-1}^{2} (x+2-x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{2}$$

$$\left(\frac{2^2}{2} + 2\cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) =$$

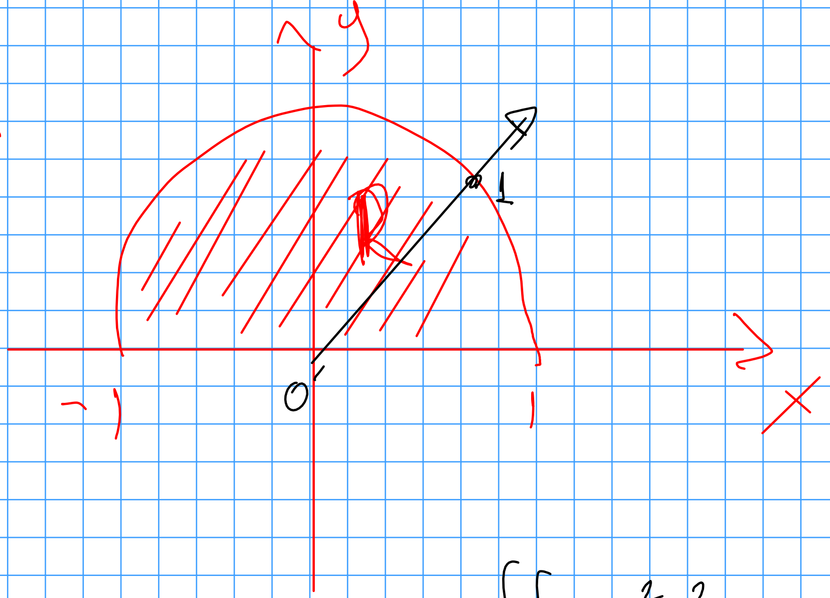
$$= \left(6 - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{6} - 2 \right) = \frac{9}{2} \text{ τ.μ.α.}$$

5) (Πολικές) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\iint_{\Omega} e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

όπου R το ημικυκλικό χωρίο που φράσσεται από τον άξονα x'x και από την καμπύλη $y=\sqrt{1-x^2}$

Λύση



Κάνουμε αλλαγή σε πολικές συν/ες

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\underbrace{dx\,dy} = \underbrace{r\,dr\,d\theta} \quad ✓$$

$$\iint_R e^{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\pi}\int_0^1 \left[e^{r^2} r\right] dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{2} e^{r^2} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (e - 1)\, d\theta = \frac{e-1}{2} \int_0^{\pi} d\theta =$$

$$= \frac{\pi(e-1)}{2}$$

6) (Επικαμπύλιο β' είδους)

Βρείτε το έργο της $\vec{F} = \boxed{(y-x^2)}\vec{i} + \underbrace{(z-y^2)}\vec{j} + \underbrace{(x-z^2)}\vec{k}$

επί της καμπύλης $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$, από

σημείο $(0,0,0)$ $[t=0]$ στο σημείο $(1,1,1)$ $[t=1]$.

Λύση 64

Θα υπολογίσουμε το $\displaystyle\underbrace{\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}}$, $\quad C: \vec{r}=\vec{r}(t)$, $0 \le t \le 1$.

$\vec{F}\circ\vec{r}(t)$

1ο βήμα: Βρίσκουμε το $\boxed{\vec{F}}\,(\underbrace{\vec{r}(t)}) =$

$$= (t^2 - t^2)\vec{i} + (t^3 - t^4)\vec{j} + (t - t^6)\vec{k}$$

$$= (0,\ t^3 - t^4,\ t - t^6)$$

2ο βήμα $\quad \vec{r}\,' = \dot{\vec{r}} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = (1,\ 2t,\ 3t^2)$

3ο βήμα $\quad \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) = (0,\ t^3 - t^4,\ t - t^6)\cdot(1,\ 2t,\ 3t^2)$

$$= 2t(t^3 - t^4) + 3t^2(t - t^6) =$$

$$= 2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8$$

<u>4ο βήμα</u>

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \left(2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8\right) dt$$

$$= \left[\frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{6}t^6 + \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{9}t^9\right]_{t=0}^{t=1} =$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{2}{6} + \frac{3}{4} - \frac{3}{9} = \boxed{\frac{29}{60}}$$