Κεφάλαιο 10

Μιγαδικές συναρτήσεις

Στο κεφάλαιο αυτό ορίζεται η γενική έννοια μιας μιγαδικής συνάρτησης μιας μιγαδικής μεταβλητής, καταγράφονται οι στοιχειώδεις μιγαδικές συναρτήσεις: εκθετική συνάρτηση, τριγωνομετρικές και υπερβολικές συναρτήσεις, λογαριθμική συνάρτηση και δυναμοσυνάρτηση. Στη συνέχεια διακρίνονται ορισμένα ειδικά υποσύνολα του μιγαδικού επιπέδου (δίσκος, ανοικτό σύνολο, κλειστό σύνολο, πολυγωνικά συνεκτικό σύνολο, πεδίο). Ιδιαιτέρως, εξετάζεται το όριο και η συνέχεια των μιγαδικών συναρτήσεων. Τα υποσύνολα των μιγαδικών, τα οποία διακρίναμε προηγουμένως, θεωρούμενα ως πεδία ορισμού των μιγαδικών συναρτήσεων, συμβάλλουν καθοριστικά στον ορισμό και τη μελέτη της συνέχειας και της παραγώγου μιγαδικών συναρτήσεων.

10.1 Συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής

Μία συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ αναφέρεται ως μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής με πεδίο ορισμού το A και συμβολίζεται επίσης με $w = f(z), z \in A$.

Επί παραδείγματι, οι τύποι

$$\begin{aligned} &w = \mathrm{Re}(z)\,,\ z \in \mathbb{C},\\ &w = \overline{z}\,,\ z \in \mathbb{C},\\ &w = \mathrm{Arg}(z)\,,\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

ορίζουν μιγαδικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το αναφερόμενο σύνολο.

Η συνάρτηση

$$P(z) = a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \ldots + a_1\, z + a_0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad a_i \in \mathbb{C}\ \ (i = 0, 1, \ldots, n)$$

ορίζεται ως *μιγαδικό πολυώνυμο* n-βαθμού και η συνάρτηση

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad z \in A = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0\},$$

όπου $P(z)$ και $Q(z)$ πολυωνυμα του z, ορίζεται ως *ρητή* συνάρτηση.

Έστω $w = f(z), z \in A$, μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής. Τότε, η έκφραση

$$w = u + iv = f(z) = f(x + iy)$$

οδηγεί στη θεώρηση των πραγματικών συναρτήσεων δύο μεταβλητών

$$u = u(x, y) = \mathrm{Re}(f(x + iy)) \quad \text{και} \quad v = v(x, y) = \mathrm{Im}(f(x + iy)), \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2,$$

όπου $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in A\}$, για τις οποίες ισχύει

$$w = f(z) = f(x + iy) = \mathrm{Re}(f(x + iy)) + i\mathrm{Im}(f(x + iy)) = u(x, y) + iv(x, y). \quad (10.1.1)$$

Οι συναρτήσεις u και v αναφέρονται ως το *πραγματικό* και το *φανταστικό μέρος* της f και συνήθως γράφουμε $f = u + iv$.

Παράδειγμα 10.1.1 Βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος u και v της συνάρτησης

$$w = f(z) = \frac{1}{z}, \ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Λύση. Από την

$$f(x + iy) = \frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2},$$

και την (10.1.1) έχουμε

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \ \text{ και } \ v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

△

Παράδειγμα 10.1.2 Βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος u και v της συνάρτησης

$$w = f(z) = z^2, \ z \in \mathbb{C}.$$

Λύση. Από την

$$f(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy,$$

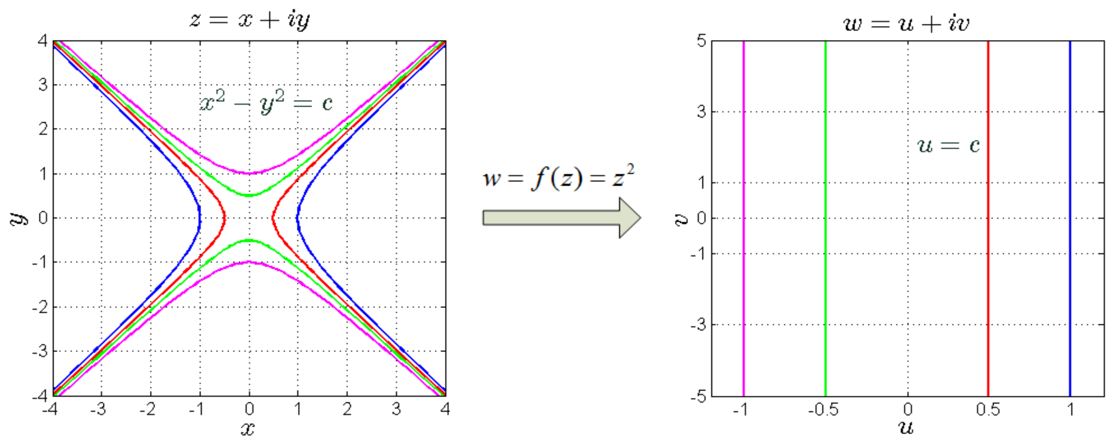
και την (10.1.1) έχουμε

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \ \text{ και } \ v(x, y) = 2xy.$$

$\triangle$

Αν η $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής, τότε το γράφημα της f είναι ένα υποσύνολο του καρτεσιανού επιπέδου. Αν η $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής, τότε το γράφημα της f απαιτεί τέσσερις διαστάσεις (δύο για τις ανεξάρτητες μεταβλητές x, y και δύο για τις εξαρτημένες u, v) και για την οπτικοποίησή του απαιτούνται άλλες τεχνικές. Για παράδειγμα, μπορούμε να κατασκευάσουμε τα γραφήματα των πραγματικών συναρτήσεων $|f(z)|$, $\mathrm{Re}(f(z))$ και $\mathrm{Im}(f(z))$ της μιγαδικής μεταβλητής $z = x + iy$ που είναι επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$. Εναλλακτικά, το γράφημα της συνάρτησης $w = f(z)$ οπτικοποιείται ως εικόνα ένας υποσυνόλου σημείων (x, y) του επιπέδου $z = x + iy$ σε ένα σύνολο σημείων (u, v) του επιπέδου $w = u + iv$.

Για τη συνάρτηση $w = f(z) = z^2$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$, από το προηγούμενο παράδειγμα, έχουμε ότι $u(x, y) = x^2 - y^2$ και $v(x, y) = 2xy$. Έτσι, τα σημεία (x, y) της υπερβολής $x^2 - y^2 = c$, όπου c σταθερά, του z-επιπέδου απεικονίζονται, μέσω της $f(z)$, στα σημεία (u, v) του w-επιπέδου με $u = c$, δηλαδή σε μία κατακόρυφη ευθεία του w-επιπέδου (Σχήμα 10.1). Περαιτέρω, τα σημεία της υπερβολής $2xy = d$, όπου d σταθερά, απεικονίζονται στην οριζόντια ευθεία $v = d$ (Σχήμα 10.2).



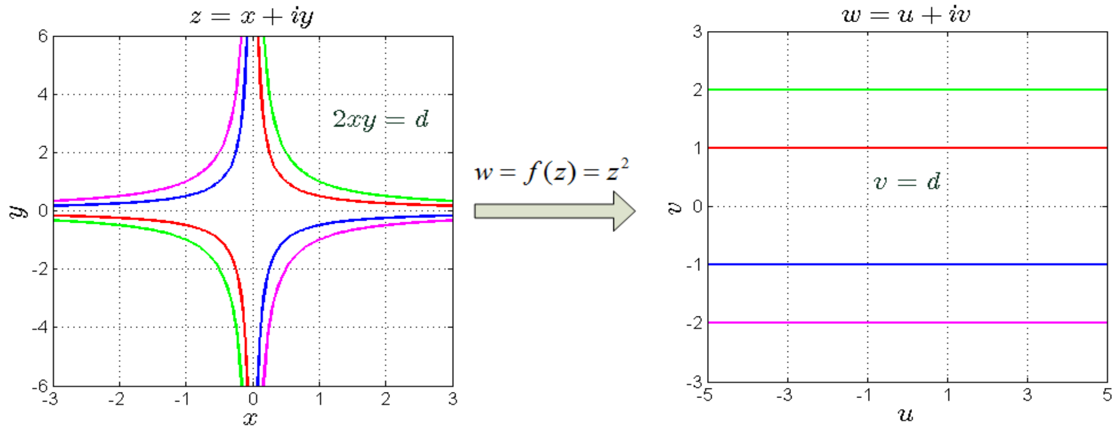
Σχήμα 10.1: Η συνάρτηση $w = f(z) = z^2$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$, απεικονίζει τις υπερβολές $x^2 - y^2 = c$ του z-επιπέδου σε κατακόρυφες ευθείες $u = c$ του w-επιπέδου.

10.2 Στοιχειώδεις μιγαδικές συναρτήσεις

Εκθετική συνάρτηση

Η μιγαδική εκθετική συνάρτηση e^z, $z \in \mathbb{C}$, ορίζεται με τη βοήθεια της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής από τον τύπο

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y), \ z = x + iy \in \mathbb{C}. \tag{10.2.1}$$



Σχήμα 10.2: Η συνάρτηση $w = f(z) = z^2$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$, απεικονίζει τις υπερβολές $2xy = d$ του z-επιπέδου σε οριζόντιες ευθείες $v = d$ του w-επιπέδου.

Άμεσες συνέπειες του ορισμού είναι οι εξής ιδιότητες.

Όταν $y = 0$, τότε $z = x \in \mathbb{R}$ και $e^z = e^x$. Όταν $x = 0$, τότε $z = iy$ και προκύπτει ο *τύπος Euler*

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y. \tag{10.2.2}$$

Το πραγματικό και φανταστικό μέρος της εκθετικής συνάρτησης είναι αντιστοίχως

$$u(x,y) = e^x \cos y \quad \text{και} \quad v(x,y) = e^x \sin y\,.$$

Στην ακόλουθη πρόταση καταγράφονται οι κυριότερες ιδιότητες της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης.

Πρόταση 10.2.1 Για $z, w \in \mathbb{C}$ ισχύουν

(1) $$e^z e^w = e^{z+w}\,,$$

(2) $$e^{z-w} = \frac{e^z}{e^w}, \qquad e^{-z} = \frac{1}{e^z}\,,$$

(3) $$e^z \neq 0 \quad \text{και} \quad \arg(e^z) = \mathrm{Im}(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\,,$$

(4) $$|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$$

(5) $$e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z},$$

(6) $$e^z = e^w \Leftrightarrow z - w = 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}.$$

(7) $$e^z = e^{z+2k\pi i},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Απόδειξη.

(1) Διαπιστώνεται από την (10.2.1) με τη βοήθεια στοιχειωδών τριγωνομετρικών υπολογισμών.

(2) Απο την (1) έχουμε ότι $e^z\, e^{-z} = e^0 = 1$ και άρα $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$.

(3) Η $e^z e^{-z} = 1$ συνεπάγεται ότι $e^z \neq 0$.

(4) Προκύπτει επειδή $|e^{i\mathrm{Im}(z)}| = 1$.

(5) $e^z = 1 \Rightarrow |e^z| = e^x = 1 \Rightarrow x = 0$.

Έτσι, $e^z = e^{iy} = \cos y + i \sin y = 1 \Rightarrow \cos y = 1$ και $\sin y = 0 \Rightarrow y = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,

και άρα $z = 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$. Αντιστρόφως, αν $z = 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$, τότε $e^z = 1$.

(6) Από την (2) έχουμε $e^z = e^w \Rightarrow e^{z-w} = 1 \Rightarrow z - w = 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$.

(7) Προκύπτει ως άμεση συνέπεια της ιδιότητας (6).

□

Σημείωση 10.2.1 Από την ιδιότητα (7) της τελευταίας πρότασης, βλέπουμε ότι η μιγαδική εκθετική συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο $2\pi i$. Εξάλλου, δεν ισχύει αντίστοιχη ιδιότητα για την πραγματική περιοδική συνάρτηση.

△

Παράδειγμα 10.2.1 Λύστε τη μιγαδική εξίσωση $e^z = \alpha i,\ \alpha > 0$.

Λύση. Για $z = x + iy$, έχουμε

$$\begin{aligned} e^z = \alpha i &\Rightarrow e^x \cos y = 0 \ \text{και}\ e^x \sin y = \alpha \\ &\Rightarrow\ y = k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \ \text{και}\ \sin y > 0 \\ &\Rightarrow\ y = 2n\pi + \frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

οπότε

$$e^x = \alpha \ \Rightarrow x = \ln \alpha,$$

και τελικά

$$z = \ln \alpha + \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) i,\ \ n \in \mathbb{Z}.$$

△

Παράδειγμα 10.2.2 Βρείτε το μέτρο, το πραγματικό καθώς και το φανταστικό μέρος του

$$z = e^{(2+3i)x}, \; x \in \mathbb{R}.$$

Λύση. Από την (10.2.1), έχουμε ότι

$$z = e^{(2+3i)x} = e^{2x}e^{3ix} = e^{2x}(\cos(3x) + i\sin(3x)) = e^{2x}\cos(3x) + ie^{2x}\sin(3x),$$

και άρα

$$\mathrm{Re}\big(e^{(2+3i)x}\big) = e^{2x}\cos(3x),$$

και

$$\mathrm{Im}\big(e^{(2+3i)x}\big) = e^{2x}\sin(3x).$$

$\triangle$

Παράδειγμα 10.2.3 Βρείτε το μέτρο, το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του

$$z = e^{e^{ix}}, \; x \in \mathbb{R}.$$

Λύση. Από τις

$$e^{e^{ix}} = e^{\cos x + i\sin x} = e^{\cos x}e^{i\sin x},$$

και

$$\left|e^{i\sin x}\right| = 1,$$

λαμβάνουμε

$$\left|e^{e^{ix}}\right| = e^{\cos x}.$$

Επίσης, επειδή

$$e^{\cos x}e^{i\sin x} = e^{\cos x}\big(\cos(\sin x) + i\sin(\sin x)\big),$$

έχουμε ότι

$$\mathrm{Re}\big(e^{e^{ix}}\big) = e^{\cos x}\cos(\sin x)$$

και

$$\mathrm{Im}\big(e^{e^{ix}}\big) = e^{\cos x}\sin(\sin x).$$

$\triangle$

Παράδειγμα 10.2.4 Δείξτε ότι

$$\overline{e^{z}} = e^{\overline{z}}, \;\; z \in \mathbb{C}.$$

Λύση. Για $z = x + iy$, έχουμε

$$\overline{e^z} = \overline{e^{x+iy}} = \overline{e^x e^{iy}} = e^x \overline{e^{iy}} = e^x e^{-iy} = e^{x-iy} = e^{\overline{z}}.$$

△

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Για $x \in \mathbb{R}$, από τις

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

και

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

λαμβάνουμε

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ και } \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

οι οποίες μας οδηγούν στον ορισμό των μιγαδικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων ημιτόνου και συνημιτόνου

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{και} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \;\; z \in \mathbb{C}. \tag{10.2.3}$$

Με χρήση των (10.2.1) και (10.2.3) μπορεί να αποδειχτεί εύκολα ότι για τις $\cos z$ και $\sin z$ ισχύουν όλες οι βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες που ισχύουν για τις αντίστοιχες πραγματικές συναρτήσεις.

Παράδειγμα 10.2.5 Λύστε τις μιγαδικές εξισώσεις

$$\sin z = 0 \text{ και } \cos z = 0.$$

Λύση. Με τη βοήθεια των τύπων (10.2.3) και της ιδιότητας (6) της εκθετικής συνάρτησης, ευρίσκουμε

$$\sin z = 0 \Rightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 0 \Rightarrow e^{2iz} = 1 = e^0$$

$$\Rightarrow 2iz = 0 + 2k\pi i, \; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow z = k\pi, \; k \in \mathbb{Z}.$$

και

$$\cos z = 0 \Rightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 0 \Rightarrow e^{2iz} = -1 = e^{i\pi}$$

$$\Rightarrow 2iz = i\pi + 2k\pi i, \; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z}.$$

△

Παράδειγμα 10.2.6 Δείξτε ότι

$$\overline{\sin z} = \sin \overline{z}, \quad \overline{\cos z} = \cos \overline{z}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Λύση. Με τη βοήθεια του αποτελέσματος του Παραδείγματος 10.2.4, ευρίσκουμε

$$\overline{\sin z} = \frac{\overline{e^{iz} - e^{-iz}}}{\overline{2i}} = -\frac{e^{-i\overline{z}} - e^{i\overline{z}}}{2i} = \frac{e^{i\overline{z}} - e^{-i\overline{z}}}{2i} = \sin \overline{z}.$$

και

$$\overline{\cos z} = \frac{\overline{e^{iz} + e^{-iz}}}{2} = \frac{e^{-i\overline{z}} + e^{i\overline{z}}}{2} = \cos \overline{z}.$$

△

Σημείωση 10.2.2 Οι μιγαδικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις δεν είναι φραγμένες σε αντίθεση με τις αντίστοιχες πραγματικές συναρτήσεις.

Παραδείγματος χάριν, για τη συνάρτηση $\sin z$ με $z = x + iy$, από την ιδιότητα (7) της Πρότασης 8.1.3, έχουμε

$$|\sin z| = \left| \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right| \geq \frac{|e^{iz}| - |e^{-iz}|}{2} = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2},$$

και επομένως, για $z = iy$ με $y \to -\infty$, λαμβάνουμε $|\sin z| \to +\infty$.

△

Περαιτέρω, ορίζουμε τις μιγαδικές συναρτήσεις εφαπτομένης και συνεφαπτομένης από τους τύπους

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \ z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \quad \text{και} \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \ z \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z}, \ z \in \mathbb{C}. \quad (10.2.4)$$

Υπερβολικές συναρτήσεις

Οι μιγαδικές συναρτήσεις υπερβολικό συνημίτονο και υπερβολικό ημίτονο ορίζονται με τη βοήθεια της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης ως εξής

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{και} \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \ z \in \mathbb{C}. \quad (10.2.5)$$

Οι ιδιότητες των πραγματικών υπερβολικών συναρτήσεων διατηρούνται και στις αντίστοιχες μιγαδικές. Για παράδειγμα, από τις (10.2.5), εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι ισχύουν

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1, \quad \sinh(2z) = 2 \sinh z \cosh z,$$

$$\cosh(-z) = \cosh z, \quad \sinh(-z) = -\sinh z.$$

Υπάρχει μία στενή συσχέτιση ανάμεσα στις μιγαδικές τριγωνομετρικές και υπερβολικές συναρτήσεις. Ακριβέστερα, για κάθε μιγαδικό αριθμό $z = x + iy$, ισχύουν

$$\begin{aligned}
&\sin(iz) = i\sinh z, \quad \cos(iz) = \cosh z,\\
&\sinh(iz) = i\sin z, \quad \cosh(iz) = \cos z,\\
&\sinh z = \sinh x\cos y + i\cosh x\sin y,\\
&\cosh z = \cosh x\cos y + i\sinh x\sin y,\\
&\sin z = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y,\\
&\cos z = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y,
\end{aligned}$$

οι οποίες εκφράζουν τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των μιγαδικών τριγωνομετρικών και υπερβολικών συναρτήσεων, και από τις οποίες προκύπτουν

$$|\sinh z| = \sqrt{\sinh^2 x + \sin^2 y} \quad \text{και} \quad |\cosh z| = \sqrt{\sinh^2 x + \cos^2 y}. \tag{10.2.6}$$

Οι μιγαδικές υπερβολικές συναρτήσεις $\sinh z$ και $\cosh z$ είναι, όπως και η μιγαδική εκθετική συνάρτηση, περιοδικές με περίοδο $2\pi i$.

Για να λύσουμε την εξίσωση

$$\sinh z = 0,$$

παρατηρούμε, με τη βοήθεια της (10.2.6), ότι ισχύει

$$\sinh z = 0 \Leftrightarrow \sinh x = 0 \quad \text{και} \quad \sin y = 0.$$

Οι λύσεις των τελευταίων είναι

$$x = 0 \quad \text{και} \quad y = k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z},$$

και έτσι ευρίσκουμε τις ρίζες

$$z = k\pi i, \ \ k \in \mathbb{Z}$$

της εξίσωσης.

Με παρόμοιο τρόπο, συνάγουμε ότι η εξίσωση

$$\cosh z = 0$$

έχει τις ρίζες

$$z = \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) i, \ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Εξάλλου, οι συναρτήσεις υπερβολική εφαπτομένη και υπερβολική συνεφαπτομένη ορίζονται από

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \ z \neq \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) i \quad \text{και} \quad \coth z = \frac{1}{\tanh z}, \ z \neq k\pi i, \ \ k \in \mathbb{Z}. \tag{10.2.7}$$

Οι συναρτήσεις $\tanh z$ και $\coth z$ είναι περιοδικές με περίοδο πi.

Λογαριθμική συνάρτηση

Για $z \neq 0$ και $w = u + iv$, η εξίσωση

$$e^w = z,$$

γράφεται

$$e^{u+iv} = e^u(\cos v + i\sin v) = z,$$

από την οποία προκύπτουν

$$e^u = |z| \Rightarrow u = \ln|z| \;\; \text{και} \;\; v = \text{Arg}(z) + 2k\pi,\; k \in \mathbb{Z}, \tag{10.2.8}$$

οπότε

$$w = \ln|z| + i\text{Arg}(z) + 2k\pi i,\; k \in \mathbb{Z},$$

ενώ ισχύει

$$0 \leq \text{Arg}(z) < 2\pi.$$

Η πλειότιμη συνάρτηση

$$\log z = \ln|z| + i\text{Arg}(z) + 2k\pi i, \;\; z \neq 0, \;\; k \in \mathbb{Z} \tag{10.2.9}$$

ονομάζεται *λογάριθμος* του z. Εξάλλου, η (10.2.9), για $k = 0$, ορίζει μία μονότιμη συνάρτηση

$$\text{Log}z = \ln|z| + i\text{Arg}(z), \;\; z \neq 0, \tag{10.2.10}$$

η οποία ονομάζεται *κύρια ή πρωτεύουσα τιμή ή (πρωτεύων κλάδος) του λογαρίθμου.*

Για $z = x > 0$ (οπότε $\text{Arg}(z) = \text{Arg}(x) = 0$), η κύρια τιμή του μιγαδικού λογαρίθμου συμπίπτει με την πραγματική συνάρτηση $\ln x$, δηλαδή ισχύει

$$\text{Log}x = \ln x, \;\; x > 0,$$

ενώ

$$\log x = \ln x + 2k\pi i, \;\; x > 0, \;\; k \in \mathbb{Z},$$

και επομένως η μιγαδική λογαριθμική συνάρτηση διαφέρει από τη πραγματική λογαριθμική συνάρτηση κατά ακέραια πολλαπλάσια του $2\pi i$.

Παράδειγμα 10.2.7 Βρείτε τους λογαρίθμους

$$\text{(i)}\ \log i, \quad \text{(ii)}\ \text{Log}(2i), \quad \text{(iii)}\ \text{Log}(-5), \quad \text{(iv)}\ \text{Log}(1+i).$$

Λύση.

(i) $$\log i = \ln|i| + i\mathrm{Arg}(i) + 2k\pi i = i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i,\ \ k \in \mathbb{Z},$$

(ii) $$\mathrm{Log}(2i) = \ln|2i| + i\mathrm{Arg}(2i) = \ln 2 + i\frac{\pi}{2},$$

(iii) $$\mathrm{Log}(-5) = \ln|-5| + i\mathrm{Arg}(-5) = \ln 5 + i\pi,$$

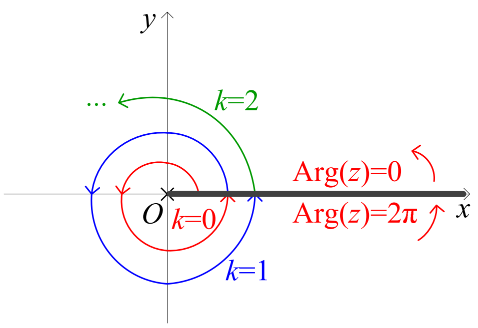
(iv) $$\mathrm{Log}(1+i) = \ln|1+i| + i\mathrm{Arg}(1+i) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}.$$

△

Έστω, τώρα ότι θεωρούμε ένα συγκεκριμένο σημείο $z = x > 0$ και τον πρωτεύοντα κλάδο της λογαριθμικής συνάρτησης $\log z$ (δηλαδή επιλέγουμε $k = 0$). Τότε

$$\log z = \mathrm{Log} z = \ln x.$$

Στη συνέχεια αφήνουμε το z να μεταβληθεί σε ένα κύκλο με κέντρο το 0 και ακτίνα x, οπότε $z = xe^{i\theta}$, $0 \le \theta < 2\pi$. Καθώς το θ μεταβάλλεται από το 0 στο 2π, η τιμή της συνάρτησης $\log z$ μεταβάλλεται αντιστοίχως από $\ln x$ σε $\ln x + 2\pi i$. Έτσι, βλέπουμε ότι το $z = 0$ είναι ένα *κλαδικό σημείο*, καθώς περιστροφή γύρω από το σημείο αυτό (με ακτίνα x που μπορεί να επιλεγεί κατάλληλα μικρή) οδηγεί σε αλλαγή της τιμής της $\log z$, αφού μεταπίπτουμε σε έναν άλλο κλάδο της συνάρτησης, ο οποίος προσδιορίζεται από μία νέα τιμή του k στην (10.2.9). Πράγματι, μετά από μία περιστροφή βρισκόμαστε στον $k = 1$ κλάδο της $\log z$. Στην επόμενη περιστροφή θα βρεθούμε στον $k = 2$ κλάδο κοκ. Υπό αυτή την έννοια, βλέπουμε ότι η $\log z$ έχει άπειρους κλάδους, ενώ η ημιευθεία $z = x > 0$ (θετικός πραγματικός ημιάξονας) του μιγαδικού επιπέδου ονομάζεται *κλαδική τομή* (Σχήμα 10.3).

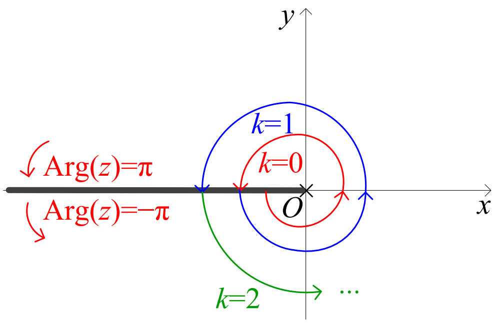


Σχήμα 10.3: Κλαδική τομή (έντονη γραμμή) και κλάδοι της μιγαδικής λογαριθμικής συνάρτησης $\log z$ για $0 \le \mathrm{Arg}(z) < 2\pi$. Το κλαδικό σημείο $z = 0$ απεικονίζεται με $\times$.

Οι επιλογές του πρωτεύοντος κλάδου της λογαριθμικής συνάρτησης καθώς και της κλαδικής τομής γενικά καθορίζονται από το διάστημα μήκους 2π, στο οποίο ανήκει το πρωτεύον όρισμα $\mathrm{Arg}(z)$ του μιγαδικού z. Για παράδειγμα, αν είχαμε ορίσει

$$-\pi \leq \mathrm{Arg}(z) < \pi,$$

τότε η αλλαγή στην τιμή (στον κλάδο) της $\log z$ θα γινόταν σε κάθε πέρασμα από την ημιευθεία $z = x < 0$ (αρνητικός πραγματικός ημιάξονας), η οποία θα όριζε και την κλαδική τομή (Σχήμα 10.4). Τότε, ένας $z = x < 0$ στον πρωτεύοντα κλάδο ($k = 0$) της $\log z$ έχει τιμή $\ln|x| - \pi i$, ενώ μετά από περιστροφή κατά 2π περί το $z = 0$ μεταπίπτουμε στον επόμενο κλάδο ($k = 1$) της $\log z$ με τιμή $\ln|x| - \pi i + 2\pi i = \ln|x| + \pi i$.



Σχήμα 10.4: Κλαδική τομή (έντονη γραμμή) και κλάδοι της μιγαδικής λογαριθμικής συνάρτησης $\log z$ για $-\pi \leq \mathrm{Arg}(z) < \pi$. Το κλαδικό σημείο $z = 0$ απεικονίζεται με $\times$.

Περαιτέρω, μπορούμε να αποδείξουμε ότι το $z = \infty$ είναι επίσης κλαδικό σημείο της $\log z$ (για την απόδειξη βλ. π.χ. [1]). Η κλαδική τομή οπτικοποιείται ως μία καμπύλη η οποία ενώνει τα δύο κλαδικά σημεία $z = 0$ και $z = \infty$. Απεικονίζοντας την κλαδική τομή, με τη βοήθεια της στερεογραφικής προβολής (8.3.3), στη σφαίρα Riemann Σ διαπιστώνουμε ότι η εικόνα της κλαδικής τομής είναι τόξο κύκλου που ενώνει το νότιο πόλο $O(0,0,0)$ της Σ με το βόρειο πόλο $N(0,0,2)$ αυτής.

Εξάλλου, για την συνάρτηση $\log(zw)$, από την (10.2.9) για $z \neq 0$ και $w \neq 0$, ευρίσκουμε

$$\log(zw) = \ln|zw| + i\mathrm{Arg}(zw) + 2k\pi i,\ \ k \in \mathbb{Z},$$

οπότε από την (8.4.6), με $k = k_1 + k_2$, λαμβάνουμε

$$\log(zw) = \ln|z| + \ln|w| + i\mathrm{Arg}(z) + i\mathrm{Arg}(w) + 2k_1\pi i + 2k_2\pi i,\ \ k_1, k_2 \in \mathbb{Z},$$

η οποία γράφεται ως

$$\log(zw) = \log z + \log w,\quad z, w \neq 0, \tag{10.2.11}$$

όπου στην τελευταία η ισότητα θεωρείται μεταξύ συνόλων, δηλαδή για κάθε $b \in \log(zw)$ υπάρχουν $b_1 \in \log z$ και $b_2 \in \log w$ τέτοια ώστε $b = b_1 + b_2$.

Σημειώνουμε επίσης ότι, με παρόμοια διαδικασία, και υπό την ίδια έννοια ισότητας συνόλων, προκύπτει ο τύπος

$$\log\left(\frac{z}{w}\right) = \log z - \log w,\quad z, w \neq 0. \tag{10.2.12}$$