$\triangle$

Παράδειγμα 8.3.3 Κάθε κύκλος C της σφαίρας Riemann Σ απεικονίζεται, μέσω της στερεογραφικής προβολής (8.3.3), σε ευθεία του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$ αν ο βόρειος πόλος $N(0,0,2) \in C$ ή σε κύκλο του $\mathbb{C}$ αν $N \notin C$.

Λύση. Έστω ότι ο κύκλος C ορίζεται από τις εξισώσεις

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \delta = 0 \quad \text{και} \quad \xi^2 + \eta^2 + (\zeta - 1)^2 = 1$$

(τομή επιπέδου με τη σφαίρα). Η εξίσωση του επιπέδου, με τη βοήθεια των (8.3.3), μετασχηματίζεται

$$4\alpha\frac{x}{x^2+y^2+4} + 4\beta\frac{y}{x^2+y^2+4} + 2\gamma\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+4} + \delta = 0,$$

η οποία επίσης γράφεται

$$(2\gamma + \delta)(x^2 + y^2) + 4\alpha x + 4\beta y + 4\delta = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση παριστά κύκλο του $\mathbb{C}$ αν $2\gamma + \delta \neq 0$ και ευθεία αν $2\gamma + \delta = 0$. Όμως, παρατηρούμε ότι ισχύει

$$2\gamma + \delta = 0 \Leftrightarrow N \in C.$$

$\triangle$

Η απόσταση δύο στοιχείων z_1 και z_2 του $\widetilde{\mathbb{C}}$ ορίζεται με τη βοήθεια της ευκλείδειας απόστασης των εικόνων τους (ξ_1, η_1, ζ_1) και (ξ_2, η_2, ζ_2) στη σφαίρα Σ ως εξής

$$d(z_1, z_2) = \left((\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2\right)^{1/2}.$$

Η $d(z_1, z_2)$ παριστά το μήκος της χορδής της σφαίρας Σ που ορίζουν τα σημεία (ξ_1, η_1, ζ_1) και (ξ_2, η_2, ζ_2). Για το λόγο αυτό, η απόσταση d αναφέρεται και ως *χορδική απόσταση*. Όπως υπολογίζεται εύκολα, με τη βοήθεια των (8.3.3), η χορδική απόσταση εκφράζεται ως εξής

$$d(z_1, z_2) = \begin{cases} \frac{4|z_1 - z_2|}{((|z_1|^2+4)(|z_2|^2+4))^{1/2}}, & z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\ \frac{4}{(|z_1|^2+4)^{1/2}}, & z_1 \in \mathbb{C},\ z_2 = \infty \end{cases}.$$

8.4 Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού

Ως γνωστόν, κάθε σημείο $P(x, y)$ του επιπέδου καθορίζεται και από τις πολικές συντεταγμένες (r, θ), όπου r είναι η απόσταση του P από το O, δηλαδή το μήκος του διανύσματος

$\overrightarrow{OP}$, και θ η γωνία με αρχική πλευρά το θετικό ημιάξονα Ox και τελική πλευρά το διάνυσμα $\overrightarrow{OP}$ μετρούμενη σε ακτίνια κατά τη θετική φορά, δηλαδή την αντίωρολογιακή. Έτσι, και κάθε μιγαδικός αριθμός $z = x + iy \neq 0$, ο οποίος κατά τα γνωστά ταυτίζεται με το σημείο $P(x, y)$, εκφράζεται από τις πολικές συντεταγμένες (r, θ) του σημείου P. Από τον ορισμό του r, έχουμε

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|. \tag{8.4.1}$$

Εξάλλου, οι πολικές συντεταγμένες (r, θ) και οι καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) συνδέονται με τις σχέσεις (Σχήμα 8.4)

$$x = r\cos\theta \ \ , \ \ y = r\sin\theta. \tag{8.4.2}$$

Κάθε τιμή της γωνίας θ, για την οποία ισχύουν οι (8.4.2), ονομάζεται και *όρισμα* του z και το σύνολο όλων των ορισμάτων του z συμβολίζεται με $\arg z$ (Σχήμα 8.5). Το $\arg z$ είναι άπειρο σύνολο και η διαφορά δύο οποιωνδήποτε στοιχείων του είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Σημειώνουμε, με έμφαση, ότι μεταξύ των ορισμάτων θ του μιγαδικού αριθμού z υπάρχει ακριβώς ένα όρισμα θ για το οποίο ισχύει $0 \leq \theta < 2\pi$. Το συγκεκριμένο αυτό θ ονομάζεται *θεμελιώδες ή πρωτεύον όρισμα* του z και συμβολίζεται με $\mathrm{Arg} z$ (Σχήμα 8.6), δηλαδή

$$0 \leq \mathrm{Arg} z < 2\pi.$$

Το θεμελιώδες όρισμα $\theta = \mathrm{Arg} z$ ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + iy \neq 0$ υπολογίζεται από την εξίσωση

$$\tan\theta = \frac{y}{x},$$

όταν ληφθούν υπόψη τα τεταρτημόρια στα οποία ευρίσκονται τα x και y και συγκεκριμένα ισχύει

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \text{ και } y \geq 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x < 0 \\ 2\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \text{ και } y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \text{ και } y > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, & x = 0 \text{ και } y < 0 \end{cases}. \tag{8.4.3}$$

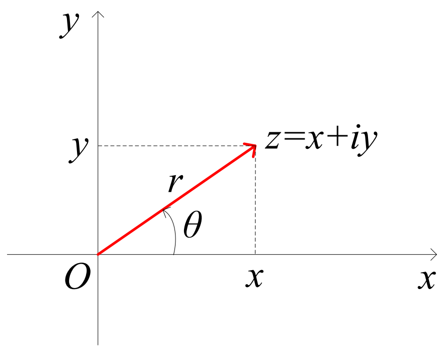
Τα $\arg z$ και $\mathrm{Arg} z$ συσχετίζονται ως εξής

$$\arg z = \mathrm{Arg} z + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}. \tag{8.4.4}$$

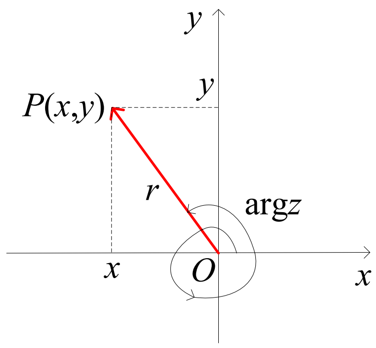
Για ένα μιγαδικό αριθμό $z = x + iy$, από την (8.4.1) και τις (8.4.2), λαμβάνουμε την *τριγωνομετρική μορφή*

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{8.4.5}$$

του z, η οποία, μεταξύ άλλων, είναι ιδιαιτέρως χρήσιμη στον υπολογισμό δυνάμεων και ριζών μιγαδικών αριθμών.



Σχήμα 8.4: Πολικές συντεταγμένες ενός μιγαδικού αριθμού z.



Σχήμα 8.5: Όρισμα arg$z$ ενός μιγαδικού αριθμού z.

Παράδειγμα 8.4.1 Βρείτε την τριγωνομετρική μορφή του $z = 1 + i$.

Λύση. Από τις $|z| = \sqrt{2}$ και $\text{Arg}z = \pi/4$, ευρίσκουμε την τριγωνομετρική μορφή του z

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

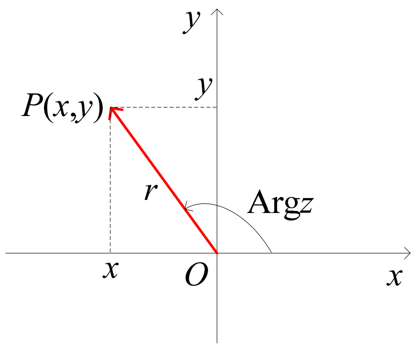
△

Περαιτέρω, για δύο μιγαδικούς αριθμούς

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{και} \quad w = |w|(\cos\phi + i\sin\phi)$$

υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} wz &= |w||z|(\cos\phi + i\sin\phi)(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= |w||z|\left[(\cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta) + i(\cos\phi\sin\theta + \sin\phi\cos\theta)\right] \\ &= |w||z|\left[\cos(\phi+\theta) + i\sin(\phi+\theta)\right] \end{aligned} \tag{8.4.6}$$



Σχήμα 8.6: Πρωτεύον όρισμα Arg$z$ ενός μιγαδικού αριθμού z.

και

$$\begin{aligned}\frac{w}{z} &= \frac{|w|}{|z|}\frac{\cos\phi + i\sin\phi}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{|w|}{|z|}\frac{(\cos\phi + i\sin\phi)(\cos\theta - i\sin\theta)}{(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)} \\ &= \frac{|w|}{|z|}\left[(\cos\phi\cos\theta + \sin\phi\sin\theta) + i(\sin\phi\cos\theta - \cos\phi\sin\theta)\right] \\ &= \frac{|w|}{|z|}\left[\cos(\phi-\theta) + i\sin(\phi-\theta)\right], \quad |z| \neq 0, \qquad (8.4.7)\end{aligned}$$

από τις οποίες προκύπτουν (Σχήμα 8.7)

$$|wz| = |w||z| \quad \text{και} \quad \arg(wz) = \arg w + \arg z$$

και

$$\left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|} \quad \text{και} \quad \arg\left(\frac{w}{z}\right) = \arg w - \arg z$$

(όπου οι ισότητες των arg σημαίνουν ισότητες συνόλων).

Ιδιαιτέρως, για $z = w$ από την (8.4.6) έπεται

$$z^2 = |z|^2\left[\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)\right].$$

Εξάλλου, για $w = \frac{1}{z}$ από την (8.4.7) και την $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = 2k\pi - \arg z$, $k \in \mathbb{Z}$, προκύπτει

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{|z|^2}\left[\cos(-2\theta) + i\sin(-2\theta)\right].$$

Από τις δύο τελευταίες, με τέλεια επαγωγή, προκύπτουν

$$z^n = |z|^n\left[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right], \ n \in \mathbb{N}$$

και

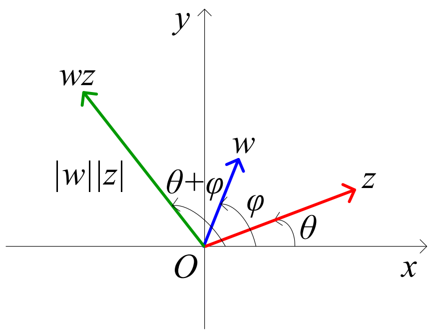
$$z^{-n} = |z|^{-n}\left[\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)\right], \ n \in \mathbb{N},$$

οι οποίες ενοποιούνται στον πολύ χρηστικό τύπο

$$z^n = |z|^n \left[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right], \ \theta \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{Z}. \tag{8.4.8}$$

Τώρα, από την (8.4.8), για $|z| = 1$, προκύπτει ο εξαιρετικά σημαντικός *τύπος του De Moivre*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta), \ \theta \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{Z}. \tag{8.4.9}$$



Σχήμα 8.7: Οπτικοποίηση των ιδιοτήτων του γινομένου δύο μιγαδικών z και w: $|wz| = |w||z|$ και $\arg(wz) = \arg(z) + \arg(w)$.

Παράδειγμα 8.4.2 Ως εφαρμογή του τύπου DeMoivre υπολογίστε την καρτεσιανή μορφή του μιγαδικού αριθμού $\frac{(1+i)^{20}}{(\sqrt{3}+i)^{12}}$.

Λύση.

$$\frac{(1+i)^{20}}{(\sqrt{3}+i)^{12}} = \frac{(\sqrt{2})^{20}\left[\cos(20\frac{\pi}{4}) + i\sin(20\frac{\pi}{4})\right]}{2^{12}\left[\cos(12\frac{\pi}{6}) + i\sin(12\frac{\pi}{6})\right]} = -\frac{2^{10}}{2^{12}} = -\frac{1}{4}.$$

△

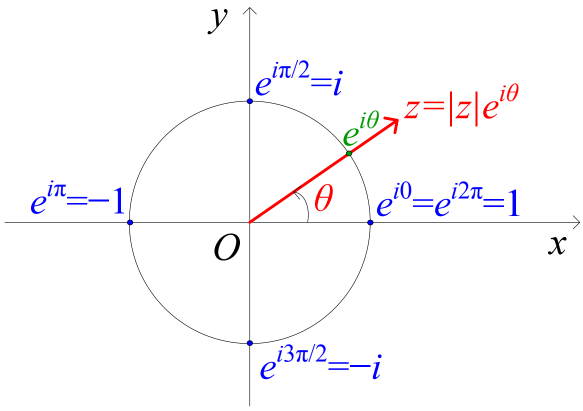
Σε αυτό το σημείο είναι χρηστικό να εισαγάγουμε μία ειδική *μιγαδική εκθετική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής*, η οποία ορίζεται από τον τύπο

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{8.4.10}$$

Εξάλλου, σημειώνουμε ότι η γενική μιγαδική εκθετική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής ορίζεται και μελετάται στο Κεφάλαιο 10 (βλ. Παράγραφο 10.2).

Έτσι, εφαρμόζοντας την προηγούμενη στην τριγωνομετρική μορφή (8.4.5), ευρίσκουμε την *εκθετική μορφή*

$$z = |z|\, e^{i\theta} \tag{8.4.11}$$



Σχήμα 8.8: Εκθετική μορφή των μιγαδικών αριθμών. Ο μοναδιαίος κύκλος στο μιγαδικό επίπεδο περιγράφεται από τη συνάρτηση $e^{i\theta}$, $0 \le \theta < 2\pi$.

του μιγαδικού αριθμού $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ (Σχήμα 8.8), η οποία συντομεύει τις εκφράσεις και απλουστεύει κατά πολύ τους υπολογισμούς, όπου υπεισέρχονται μιγαδικοί αριθμοί υπό την τριγωνομετρική μορφή.

Στην ακόλουθη πρόταση συνοψίζονται ορισμένες από τις πιο χρηστικές ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης $e^{i\theta}$.

Πρόταση 8.4.1

$$e^{i(\theta+2n\pi)} = e^{i\theta}, \quad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}, \quad |e^{i\theta}| = 1,$$
$$e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}, \quad e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n, \quad e^{i\frac{\theta}{n}} = (e^{i\theta})^{\frac{1}{n}},$$

όπου $\theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{Z}$.

□

Ο τύπος (8.4.8) με χρήση της εκθετικής μορφής του μιγαδικού αριθμού γράφεται

$$z^n = |z|^n e^{in\theta}, \ n \in \mathbb{Z}. \tag{8.4.12}$$

Παράδειγμα 8.4.3 Υπολογίστε τις παραστάσεις

(i) $(1+i)^{12}$, (ii) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^4$, (iii) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^8 + \left(1-i\sqrt{3}\right)^8$, (iv) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{13}$.

Λύση.

(i) Για το μιγαδικό αριθμό $1+i$ έχουμε $|1+i| = \sqrt{2}$ και $\tan(\mathrm{Arg}(1+i)) = 1$, οπότε $\mathrm{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$. Επομένως, η εκθετική μορφή του είναι

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}},$$

και, από την (8.4.12), έχουμε

$$(1+i)^{12} = (\sqrt{2})^{12}e^{i12\frac{\pi}{4}} = 2^6 e^{i3\pi} = -64.$$

(ii) Έχουμε ότι $|1+i\sqrt{3}| = 2$ και $\tan(\mathrm{Arg}(1+i\sqrt{3})) = \sqrt{3}$, οπότε $\mathrm{Arg}(1+i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$. Επομένως

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

και άρα από την (8.4.8) ευρίσκουμε

$$(1+i\sqrt{3})^4 = 2^4\left[\cos\left(4\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(4\frac{\pi}{3}\right)\right] = 16\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8 - i8\sqrt{3}.$$

(iii) Από την (ii) έχουμε

$$1-i\sqrt{3} = \overline{1+i\sqrt{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

και άρα

$$\begin{aligned}\left(1+i\sqrt{3}\right)^8 + \left(1-i\sqrt{3}\right)^8 &= 2^8\left[\cos\left(8\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(8\frac{\pi}{3}\right)\right] + 2^8\left[\cos\left(8\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(8\frac{\pi}{3}\right)\right]\\ &= 2\,2^8\cos\left(8\frac{\pi}{3}\right) = 2^9\left(-\frac{1}{2}\right) = -2^8.\end{aligned}$$

(iv) Για το μιγαδικό αριθμό $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ έχουμε $|\frac{\sqrt{3}+i}{2}| = 1$ και $\tan(\mathrm{Arg}(\frac{\sqrt{3}+i}{2})) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, οπότε $\mathrm{Arg}(\frac{\sqrt{3}+i}{2}) = \frac{\pi}{6}$, και άρα η εκθετική μορφή του είναι

$$\frac{\sqrt{3}+i}{2} = e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Έτσι, από την (8.4.12), ευρίσκουμε

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{13} = e^{i13\frac{\pi}{6}} = e^{i(2\pi+\frac{\pi}{6})} = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}.$$

△

Παράδειγμα 8.4.4 Αποδείξτε ότι

$$\begin{aligned}
\cos\theta + \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \ldots + \cos((2n-1)\theta) &= \frac{\sin(n\theta)\cos(n\theta)}{\sin\theta},\\
\sin\theta + \sin(3\theta) + \sin(5\theta) + \ldots + \sin((2n-1)\theta) &= \frac{\sin^2(n\theta)}{\sin\theta}.
\end{aligned}$$

Λύση. Θέτουμε

$$\begin{aligned}
X &= \cos\theta + \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \ldots + \cos((2n-1)\theta),\\
Y &= \sin\theta + \sin(3\theta) + \sin(5\theta) + \ldots + \sin((2n-1)\theta),
\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}
Z &= X + iY\\
&= (\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)) + \ldots + (\cos((2n-1)\theta) + i\sin((2n-1)\theta))\\
&= e^{i\theta} + e^{i3\theta} + \ldots + e^{i(2n-1)\theta},
\end{aligned}$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$Z - e^{i2\theta}Z = e^{i\theta} - e^{i(2n+1)\theta},$$

και έτσι ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{e^{i\theta} - e^{i(2n+1)\theta}}{1 - e^{i2\theta}} = \frac{e^{i\theta}(1 - e^{i2n\theta})}{e^{i\theta}(e^{-i\theta} - e^{i\theta})}\\
&= \frac{e^{in\theta}(e^{-in\theta} - e^{in\theta})}{e^{-i\theta} - e^{i\theta}} = e^{in\theta}\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}\\
&= \frac{\cos(n\theta)\sin(n\theta)}{\sin\theta} + i\frac{\sin(n\theta)\sin(n\theta)}{\sin\theta},
\end{aligned}$$

από την οποία προκύπτουν οι τύποι της εκφώνησης.

△

8.5 n-οστές ρίζες μιγαδικού αριθμού

Με τη βοήθεια του τύπου DeMoivre, υπολογίζουμε τις n-οστές ρίζες ενός μιγαδικού αριθμού z, δηλαδή τις ρίζες w της εξίσωσης

$$w^n = z\,,\ n \in \mathbb{N}.$$

Αν $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ και $w = |w|(\cos\phi + i\sin\phi)$ τότε από την (8.4.8), έχουμε

$$|w|^n[\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)] = |z|[\cos\theta + i\sin\theta],$$

οπότε

$$|w| = \sqrt[n]{|z|}$$

και

$$\phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z},$$

και συνεπώς οι n-οστές ρίζες του μιγαδικού αριθμού z είναι

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Παρατηρούμε ότι $w_{n+k} = w_k$, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ (λόγω της περιοδικότητας του ημιτόνου και του συνημιτόνου) και επομένως οι διαφορετικές μεταξύ τους ρίζες είναι οι

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right], \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{8.5.1}$$

Εξάλλου, με τη βοήθεια της εκθετικής μορφής, οι ρίζες αυτές εκφράζονται

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{8.5.2}$$

Εδώ, παρατηρούμε ότι ισχύει

$$w_k = w_0\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k, \tag{8.5.3}$$

δηλαδή οι n-οστές ρίζες του z είναι

$$w_0, w_0\, e^{i\frac{2\pi}{n}}, w_0\ \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^2, \ldots, w_0\ \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{n-1}.$$

Τώρα, με τη βοήθεια των (8.5.2) και (8.5.3), υπολογίζουμε

$$|w_k| = \sqrt[n]{|z|}$$

και

$$\begin{aligned} |w_k - w_{k+1}| &= \left|w_0\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k - w_0\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{k+1}\right| \\ &= |w_0|\left|\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k\right|\left|1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}\right| = \sqrt[n]{|z|}\left|1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}\right|, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \end{aligned}$$

από τις οποίες προκύπτει ότι οι n ρίζες της εξίσωσης $w^n = z$, για $z \neq 0$, είναι κορυφές κανονικού n-γώνου (κανονικού πολυγώνου με n-πλευρές), το οποίο είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\sqrt[n]{|z|}$.

Παράδειγμα 8.5.1 Λύστε την εξίσωση $w^3 = i$.

Λύση. Από την $i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$, παρατηρούμε ότι $|i| = 1$ και ένα όρισμα του i είναι το $\theta = \frac{\pi}{2}$.

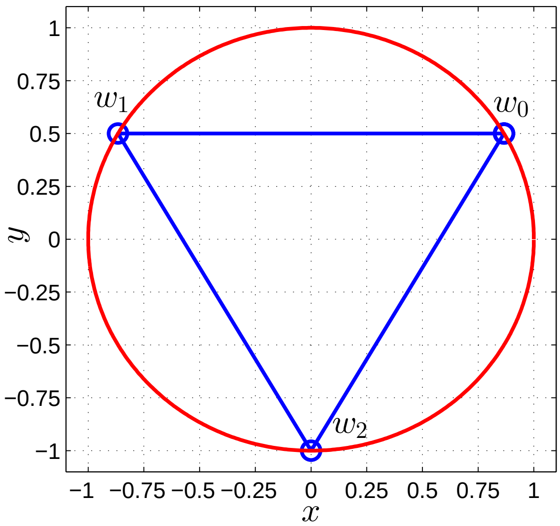
Έτσι, από την (8.5.1), λαμβάνουμε

$$w_k = \sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2,$$

δηλαδή

$$w_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\ ,\ w_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\ ,\ w_2 = -i.$$

Οι ρίζες w_0, w_1, w_2 αντιστοιχούν στις κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου, το οποίο είναι εγγεγραμμένο στο μοναδιαίο κύκλο (Σχήμα 8.9).



Σχήμα 8.9: Γεωμετρική παράσταση των κυβικών ριζών του i

△

Παράδειγμα 8.5.2 Λύστε την εξίσωση $w^3 = -2 + 2i$.

Λύση. Υπολογίζουμε

$$|-2+2i| = \sqrt{8} \quad \text{και} \quad \mathrm{Arg}(-2+2i) = \frac{3\pi}{4},$$

οπότε, από τις (8.5.2) και (8.5.3), ευρίσκουμε

$$w_0 = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = 1 + i,$$

$$w_1 = w_0 e^{i2\pi/3} = \sqrt{2}e^{i11\pi/12} = \left(\frac{-\sqrt{3}-1}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right),$$

$$w_2 = w_0 e^{i4\pi/3} = \sqrt{2}e^{i19\pi/12} = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) + i\left(\frac{-\sqrt{3}-1}{2}\right).$$

$\triangle$

Παράδειγμα 8.5.3 Βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες ενός μιγαδικού z με χρήση της τριγωνομετρικής μορφής του.

Λύση. Εφαρμόζοντας τον τύπο (8.5.1) για $n = 2$, ευρίσκουμε ότι οι δύο τετραγωνικές ρίζες w_0 και w_1 ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + iy = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ είναι οι

$$w_0 = \sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right), \quad w_1 = -w_0.$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τους τύπους

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}, \quad \sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

και ξεχωρίζουμε δύο περιπτώσεις ως προς το πρόσημο του y. Ακριβέστερα, για $y > 0$, ισχύει $0 < \theta < \pi$ και $\sin\frac{\theta}{2} > 0$, $\cos\frac{\theta}{2} > 0$, οπότε οι ρίζες w_0 και w_1 γράφονται

$$w_0 = \frac{\sqrt{|z|}}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+\cos\theta} + i\sqrt{1-\cos\theta}\right), \quad w_1 = -w_0.$$

Περαιτέρω, επειδή ισχύει

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|},$$

λαμβάνουμε για τη ρίζα w_0 ότι

$$w_0 = \frac{\sqrt{|z|}}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+\frac{x}{|z|}} + i\sqrt{1-\frac{x}{|z|}}\right),$$

οπότε, αφού $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, έχουμε τελικά, για $y > 0$, ότι

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x} + i\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}\right), \quad w_1 = -w_0. \tag{8.5.4}$$

Στην περίπτωση όπου $y < 0$, ισχύει $\pi < \theta < 2\pi$ και $\sin\frac{\theta}{2} > 0$, $\cos\frac{\theta}{2} < 0$, οπότε έχουμε

$$w_0 = \frac{\sqrt{|z|}}{\sqrt{2}}\left(-\sqrt{1+\cos\theta} + i\sqrt{1-\cos\theta}\right), \quad w_1 = -w_0,$$

οι οποίες γράφονται

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x} + i\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}\right), \quad w_1 = -w_0. \tag{8.5.5}$$

Συγκρίνοντας τις εκφράσεις (8.5.4) και (8.5.5) με την (8.1.1), βλέπουμε ότι επανευρίσκουμε, όπως εξάλλου αναμένεται, τις ρίζες (8.1.1).

△

Παράδειγμα 8.5.4 Αποδείξτε ότι η εξίσωση

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2n} = -1, \ \ n \in \mathbb{N},$$

έχει τις ρίζες

$$z = i\tan\left(\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right), \ \ k = 0, 1, \ldots, 2n-1.$$

Λύση. Αφού $\mathrm{Arg}(-1) = \pi$, από την (8.5.2), λαμβάνουμε

$$\frac{1+z}{1-z} = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{2n}}, \ \ k = 0, 1, \ldots, 2n-1,$$

από την οποία προκύπτει

$$z = \frac{e^{\frac{(2k+1)\pi i}{2n}} - 1}{e^{\frac{(2k+1)\pi i}{2n}} + 1} = \frac{\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) + i\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) - 1}{\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) + i\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) + 1}.$$

Με τη βοήθεια στοιχειωδών τριγωνομετρικών υπολογισμών, από την τελευταία ευρίσκουμε

$$z = \frac{-2\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right) + i2\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right)\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right)}{2\cos^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right) + i2\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right)\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}$$

και η ζητούμενη σχέση έπεται άμεσα.

△

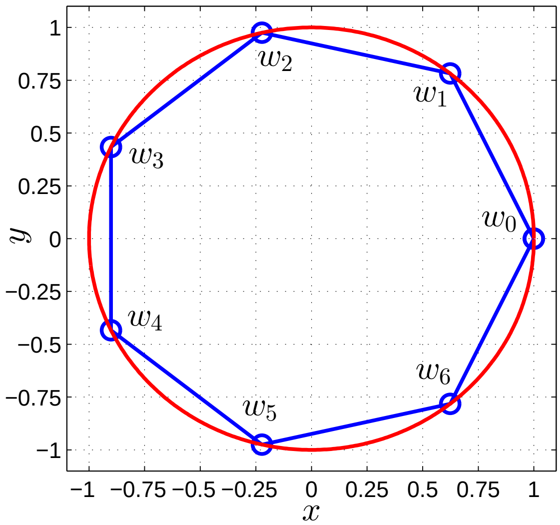
Ιδιαιτέρως, οι διαφορετικές n-οστές ρίζες της μονάδας (δηλαδή οι ρίζες της εξίσωσης $w^n = 1$) είναι

$$w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{8.5.6}$$

Εδώ, παρατηρούμε ότι ισχύει $w_k = w_1^k$ για $k = 0, 1, \ldots, n-1$, δηλαδή οι n-οστές ρίζες της μονάδας είναι

$$1, w_1, w_1^2, \ldots, w_1^{n-1}.$$

Γεωμετρικά, οι ρίζες παρίστανται από τις κορυφές ενός κανονικού n-γώνου, το οποίο είναι εγγεγραμμένο στο μοναδιαίο κύκλο (βλ. Σχήμα 8.10 για την περίπτωση $n = 7$). Το πολύγωνο έχει μία κορυφή στο σημείο που αντιστοιχεί στη ρίζα $w = 1$.



Σχήμα 8.10: Γεωμετρική παράσταση των ριζών της εξίσωσης $w^7 = 1$.

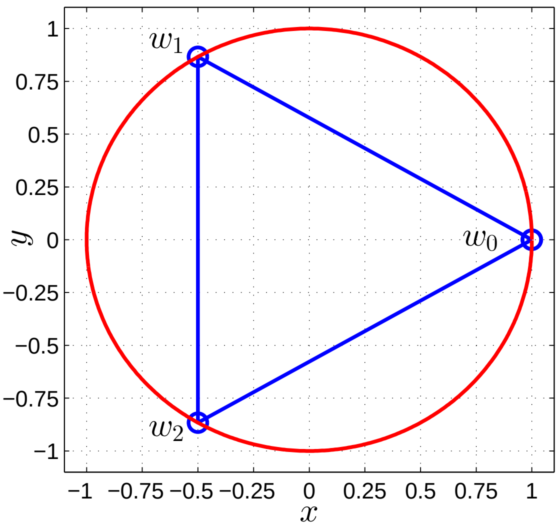
Παράδειγμα 8.5.5 Υπολογίστε τις κυβικές ρίζες της μονάδας.

Λύση. Οι λύσεις της εξίσωσης $w^3 = 1$ είναι

$$w_0 = 1, \quad w_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad w_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

και παρίστανται γεωμετρικά από τις κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου, το οποίο είναι εγγεγραμμένο στο μοναδιαίο κύκλο (Σχήμα 8.11).

△



Σχήμα 8.11: Γεωμετρική παράσταση των κυβικών ριζών της μονάδας.

8.6 Ασκήσεις

Άσκηση 8.6.1 Αποδείξτε ότι η εξίσωση

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{8}$$

παριστά κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Άσκηση 8.6.2 Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $z = x + iy$ του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση

$$\frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = c,$$

όπου z_1, z_2 σταθεροί μιγαδικοί αριθμοί και c σταθερός πραγματικός αριθμός.

Άσκηση 8.6.3 Ως εφαρμογή του τύπου DeMoivre υπολογίστε το μιγαδικό αριθμό

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\sqrt{3} + i\frac{3}{2}\right)^6}{\left(\sqrt{\frac{5}{2}} + i\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^3}$$

στη μορφή $x + iy$.