Κεφάλαιο 16

Μετασχηματισμός Fourier

Ο συνεχής μετασχηματισμός Fourier, ο οποίος είναι μία γενίκευση της σειράς Fourier, είναι ένας ολοκληρωτικός μετασχηματισμός που απεικονίζει πραγματικές ή μιγαδικές συναρτήσεις $f(t)$ του χρόνου t, οι οποίες ορίζονται σε άπειρα διαστήματα και δεν είναι κατά ανάγκη περιοδικές, σε μιγαδικές συναρτήσεις $\hat{f}(\omega)$ της κυκλικής συχνότητας ω. Η συνάρτηση $\hat{f}$ αναφέρεται συνήθως ως *μετασχηματισμός Fourier* της συνάρτησης f. Η αντιστοιχία αυτή είναι αντιστρέψιμη, δηλαδή για δοσμένη συνάρτηση $\hat{f}$ προσδιορίζεται με τη βοήθεια του *αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier* η f της οποίας η $\hat{f}$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier.

Είναι ένα χρηστικό μαθηματικό εργαλείο για τη μελέτη πολυάριθμων και σημαντικών εφαρμογών σε διαφόρους κλάδους των Θετικών και Εφαρμοσμένων Επιστημών, όπως είναι τα γραμμικά συστήματα, οι επικοινωνίες, η επεξεργασία σήματος, και η κυματική διάδοση. Όπως ο μετασχηματισμός Laplace, έτσι και ο μετασχηματισμός Fourier, είναι ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί, οι οποίοι χρησιμοποιούνται κατά ουσιαστικό τρόπο και στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Εξάλλου, στη Θεωρία Πληροφορίας επιτρέπει την εξέταση μιας κυματομορφής τόσο στο πεδίο του χρόνου όσο και της συχνότητας.

Στο κεφάλαιο αυτό ορίζεται η έννοια του μετασχηματισμού Fourier και διατυπώνονται οι βασικές ιδιότητές της. Υπολογίζονται οι μετασχηματισμοί Fourier στοιχειωδών συναρτήσεων και διατυπώνονται και επεξεργάζονται ορισμένες βασικές εφαρμογές.

16.1 Ορισμός μετασχηματισμού Fourier

Εκτός της έννοιας της σειράς Fourier, άλλες θεμελιώδεις έννοιες της Ανάλυσης Fourier είναι εκείνες του *μετασχηματισμού Fourier* και του *αντιστρόφου μετασχηματισμού Fourier*, τις οποίες ορίζουμε στην παράγραφο αυτή. Για τους ορισμούς χρειαζόμαστε την έννοια της τοπικά ολοκληρώσιμης συνάρτησης, την οποία και υπενθυμίζουμε. Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ονομάζεται *τοπικά ολοκληρώσιμη* όταν για κάθε διάστημα $[a, b]$ του $\mathbb{R}$ υπάρχει το (ορισμένο) ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ στο $\mathbb{C}$. Εξάλλου, σημειώνουμε ότι μία $2p$-περιοδική συνάρτηση είναι τοπικά ολοκληρώσιμη τότε και μόνο τότε όταν υπάρχει το ολοκλήρωμα $\int_{-p}^{p} f(x)\,dx$ στο $\mathbb{C}$.

Ορισμός 16.1.1 (Μετασχηματισμός Fourier)

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ως *μετασχηματισμός Fourier* της συνάρτησης f ορίζεται η συνάρτηση

$$\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt, \tag{16.1.1}$$

υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει στο $\mathbb{C}$ το αναγραφόμενο γενικευμένο ολοκλήρωμα. Ο μετασχηματισμός Fourier συμβολίζεται επίσης με $\mathcal{F}\{f\}$ ή αναλυτικότερα με $\mathcal{F}\{f(t)\}$.

□

Οι συναρτήσεις

$$R(\omega) = \mathrm{Re}(\hat{f}(\omega)), \quad X(\omega) = \mathrm{Im}(\hat{f}(\omega)), \quad A(\omega) = |\hat{f}(\omega)|, \quad \varphi(\omega) = \arg(\hat{f}(\omega)),$$

όπου

$$A(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)},$$

αναφέρονται, αντιστοίχως, ως το πραγματικό μέρος, το φανταστικό μέρος, το πλάτος (μέτρο) και η φάση του μετασχηματισμού Fourier.

Ορισμός 16.1.2 (Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier)

Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ως *αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier* της συνάρτησης g ορίζεται η συνάρτηση

$$\check{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \check{g}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{i\omega t}\,dt, \tag{16.1.2}$$

υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει στο $\mathbb{C}$ το αναγραφόμενο γενικευμένο ολοκλήρωμα. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier συμβολίζεται επίσης με $\mathcal{F}^{-1}\{g\}$ ή αναλυτικότερα με $\mathcal{F}^{-1}\{g(t)\}$.

□

Πρόταση 16.1.1

Η υπόθεση ότι υπάρχει το $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt$ είναι ικανή (αλλά όχι αναγκαία) για την ύπαρξη του μετασχηματισμού Fourier $\hat{f}$ της συνάρτησης f και του αντιστρόφου του $\check{f}$.

Απόδειξη. Ο ισχυρισμός συνάγεται από τη σχέση

$$|f(t)e^{-i\omega t}| = |f(t)e^{i\omega t}| = |f(t)|, \quad \forall t, \omega \in \mathbb{R}.$$

□

Πρόταση 16.1.2

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ τοπικά ολοκληρώσιμη, τμηματικά συνεχής και τοπικά τμηματικά C^1 συνάρτηση, της οποίας υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$. Τότε, ισχύει

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f(t)\}\} = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

□

Μία συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, η οποία πληρεί τις υποθέσεις της Πρότασης 16.1.2, αναπαράγεται (ανακτάται) από τον μετασχηματισμό Fourier της $\hat{f}$ μέσω του αντιστρόφου μετασχηματισμού Fourier, υπό την έννοια του ακόλουθου πορίσματος.

Πόρισμα 16.1.1

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχής και τοπικά τμηματικά C^1 συνάρτηση, της οποίας υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$. Τότε, ισχύει

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f(t)\}\}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

δηλαδή

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega. \tag{16.1.3}$$

□

Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση $\hat{f}(\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $f(t)$, οπότε η $f(t)$ είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της $\hat{f}(\omega)$, χρησιμοποιείται ενίοτε και ο συμβολισμός

$$f(t) \longleftrightarrow \hat{f}(\omega).$$

Οι $f(t)$ και $\hat{f}(\omega)$ που συνδέονται μέσω των σχέσεων (16.1.1) και (16.1.3) αναφέρονται ως *ζεύγος μετασχηματισμού Fourier.*

Παράδειγμα 16.1.1 Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier του ορθογώνιου παλμού

$$p_T(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; p_T(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le T \\ 0, & |t| > T \end{cases}. \tag{16.1.4}$$

Λύση. Για την $f(t) = p_T(t)$, με τη βοήθεια του ορισμού (16.1.1) του μετασχηματισμού Fourier, υπολογίζουμε

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-T}^{T} e^{-i\omega t}\, dt = \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_{-T}^{T} = \frac{2}{\omega}\sin(T\omega),\ \ \omega \neq 0,$$

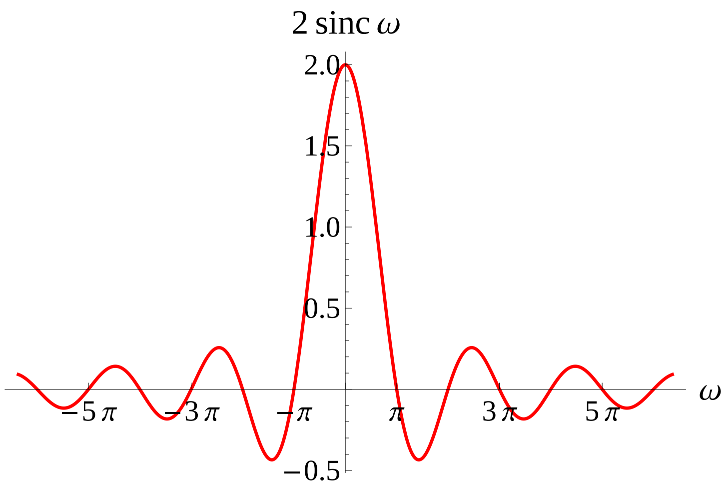
$$\hat{f}(0) = \int_{-T}^{T} dt = 2T,$$

δηλαδή

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} \frac{2}{\omega}\sin(T\omega), & \omega \neq 0 \\ 2T, & \omega = 0 \end{cases} = 2T\,\mathrm{sinc}\,(T\omega),$$

όπου

$$\mathrm{sinc}\, z \equiv \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}.$$



Σχήμα 16.1: Γραφική παράσταση του μετασχηματισμού Fourier $\hat{f}(\omega) = 2\,\mathrm{sinc}\,\omega$ του ορθογώνιου παλμού $p_1(t)$ $(T = 1)$.

△

Παράδειγμα 16.1.2 Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης

$$f(t) = e^{-at}u(t),\ \ a > 0,$$

όπου

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

η συνάρτηση Heaviside (ή συνάρτηση μοναδιαίου βήματος).

Λύση.

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \lim_{b\to+\infty} \int_0^{b} e^{-(a+i\omega)t}\,dt \\
&= -\frac{1}{a+i\omega} \lim_{b\to+\infty} \left[e^{-(a+i\omega)t}\right]_0^b \\
&= -\frac{1}{a+i\omega} \left(\lim_{b\to+\infty} (e^{-(a+i\omega)b}) - 1\right) \\
&= \frac{1}{a+i\omega} \\
&= \frac{a-i\omega}{a^2+\omega^2} = \frac{a}{a^2+\omega^2} - i\frac{\omega}{a^2+\omega^2}.
\end{aligned}$$

△

Μετασχηματισμοί Fourier άρτιων και περιττών συναρτήσεων

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε, από την

$$e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i\sin(\omega t)$$

και τον ορισμό (16.1.1) του μετασχηματισμού Fourier, έχουμε

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\,dt - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\,dt, \tag{16.1.5}$$

οπότε λαμβάνουμε

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\,dt, \tag{16.1.6}$$

$$X(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\,dt, \tag{16.1.7}$$

από τις οποίες προκύπτουν

$$R(-\omega) = R(\omega), \quad \text{δηλαδή η } R \text{ είναι άρτια συνάρτηση}$$

και

$$X(-\omega) = -X(\omega), \quad \text{δηλαδή η } X \text{ είναι περιττή συνάρτηση.}$$

Εξάλλου, σημειώνουμε ότι ισχύει

$$\overline{\hat{f}(\omega)} = \hat{f}(-\omega) \Leftrightarrow \text{η } f \text{ είναι πραγματική συνάρτηση.}$$

Άρτιες συναρτήσεις

Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι άρτια, τότε, επειδή η ολοκληρωτέα συνάρτηση στην (16.1.7) είναι περιττή (ως γινόμενο της άρτιας συνάρτησης f και της περιττής συνάρτησης $\sin(\omega t)$), έχουμε

$$X(\omega) = 0.$$

Επομένως, ο μετασχηματισμός Fourier $\hat{f}(\omega)$ είναι πραγματική συνάρτηση και, έτσι, από την (16.1.5), λαμβάνουμε

$$\hat{f}(\omega) = R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\, dt = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\, dt.$$

Εξάλλου, σημειώνουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν η $\hat{f}$ και η f είναι πραγματικές συναρτήσεις τότε η f είναι άρτια.

Περαιτέρω, επειδή η R είναι άρτια, με τον ίδιο τρόπο διαπιστώνουμε με τη βοήθεια του ορισμού (16.1.3) του αντιστρόφου μετασχηματισμού Fourier, ότι ισχύει

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} R(\omega)\cos(\omega t)\, d\omega.$$

Περιττές συναρτήσεις

Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιττή τότε, επειδή η ολοκληρωτέα συνάρτηση στην (16.1.6) είναι περιττή (ως γινόμενο της περιττής συνάρτησης f και της άρτιας συνάρτησης $\cos(\omega t)$), έχουμε

$$R(\omega) = 0,$$

δηλαδή ο μετασχηματισμός Fourier $\hat{f}(\omega)$ είναι γνήσια φανταστική συνάρτηση και από την (16.1.5) λαμβάνουμε

$$\hat{f}(\omega) = iX(\omega) = -i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\, dt = -2i\int_{0}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\, dt.$$

Σημειώνουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν η $\hat{f}$ είναι γνήσια φανταστική και η f είναι πραγματική συνάρτηση, τότε η f είναι περιττή.

Επίσης, επειδή η X είναι περιττή συνάρτηση, με τη βοήθεια του ορισμού (16.1.3) του αντιστρόφου μετασχηματισμού Fourier, βλέπουμε ότι ισχύει

$$f(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} X(\omega)\sin(\omega t)\, d\omega.$$

16.2 Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier

Στην παράγραφο αυτή καταγράφουμε τις βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier, οι οποίες προκύπτουν ως άμεσες συνέπειες των ορισμών (16.1.1) και (16.1.3) του μετασχηματισμού Fourier και του αντιστρόφου του.

Πρόταση 16.2.1 Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, $\hat{f} = \mathcal{F}\{f\}$ και $\hat{g} = \mathcal{F}\{g\}$ οι μετασχηματισμοί Fourier των f και g. Τότε, ισχύουν

- *Γραμμικότητα*

$$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \hat{f}(\omega) + \beta \hat{g}(\omega), \ \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

- *Συμμετρία*

$$\mathcal{F}\{\hat{f}(t)\} = 2\pi f(-\omega).$$

- *Κλιμάκωση χρόνου*

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right), \ \ a \neq 0.$$

- *Μετατόπιση χρόνου*

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = \hat{f}(\omega) e^{-i\omega t_0}, \ t_0 \in \mathbb{R}.$$

- *Μετατόπιση συχνότητας*

$$\mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t} f(t)\} = \hat{f}(\omega - \omega_0), \ \omega_0 \in \mathbb{R}.$$

- *Παραγώγιση στο χρόνο*

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(t)\} = (i\omega)^n \hat{f}(\omega), \ \ n \in \mathbb{N},$$

  υπό τις προϋποθέσεις ότι υπάρχει η $f^{(n)}$ και ο μετασχηματισμός Fourier αυτής.

- *Παραγώγιση στη συχνότητα*

$$\mathcal{F}\{(-it)^n f(t)\} = \hat{f}^{(n)}(\omega), \ \ n \in \mathbb{N},$$

  υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $t^n f(t)$.

- *Συζυγής συνάρτηση*

$$\mathcal{F}\{\overline{f}(t)\} = \overline{\hat{f}}(-\omega).$$

Απόδειξη. Ενδεικτικά αποδεικνύουμε τις ιδιότητες κλιμάκωσης χρόνου και παραγώγισης στο χρόνο.

Κλιμάκωση χρόνου: από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier, έχουμε

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\omega t}\, dt.$$

Διακρίνουμε, τώρα, τις δύο περιπτώσεις (i) $a > 0$ και (ii) $a < 0$.

(i) Πολλαπλασιάζουμε το ολοκλήρωμα με $\frac{a}{|a|} = 1$ και τον εκθέτη με $\frac{a}{a} = 1$, οπότε ευρίσκουμε

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\frac{\omega}{a}at}\, adt.$$

Θέτουμε $u = at$, οπότε $du = adt$ και έτσι λαμβάνουμε

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\frac{\omega}{a}u}\, du = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

(ii) Πολλαπλασιάζουμε το ολοκλήρωμα με $\frac{|a|}{|a|} = 1$ και τον εκθέτη με $-\frac{|a|}{a} = 1$, και χρησιμοποιώντας ότι $a = -|a|$, έχουμε

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(-|a|t)e^{-i\frac{\omega}{a}(-|a|t)}\, |a|dt.$$

Θέτουμε $u = -|a|t$, οπότε $du = -|a|dt$ και έτσι ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(at)\} &= -\frac{1}{|a|}\int_{\infty}^{-\infty} f(u)e^{-i\frac{\omega}{a}u}\, du \\ &= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\frac{\omega}{a}u}\, du \\ &= \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).\end{aligned}$$

Παραγώγιση στο χρόνο: αποδεικνύουμε την ιδιότητα για $n = 1$ και εφαρμόζουμε τέλεια επαγωγή. Από τον ορισμό του αντιστρόφου μετασχηματισμού Fourier, έχουμε

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\, d\omega.$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας ως προς t, ευρίσκουμε

$$f'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (i\omega)\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\, d\omega,$$

από την οποία συνάγουμε ότι

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = (i\omega)\hat{f}(\omega).$$

□

Ως εφαρμογή των ιδιοτήτων της πρότασης επεξεργαζόμαστε στο ακόλουθο παράδειγμα το μετασχηματισμό Fourier της γενικευμένης συνάρτησης (κατανομής) δέλτα, η οποία ορίζεται από τον τύπο

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) f(t)\, dt = f(\tau). \tag{16.2.1}$$

Παράδειγμα 16.2.1 (Μετασχηματισμός Fourier της κατανομής δέλτα)

Από την (16.2.1), για $\tau = 0$ και $f(t) = e^{-i\omega t}$, λαμβάνουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = 1,$$

δηλαδή ισχύει

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1. \tag{16.2.2}$$

Περαιτέρω, με τη βοήθεια των ιδιοτήτων συμμετρίας, μετατόπισης χρόνου και συχνότητας του μετασχηματισμού Fourier, ευρίσκουμε

$$\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega) \tag{16.2.3}$$

$$\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-i\omega t_0} \tag{16.2.4}$$

$$\mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega-\omega_0). \tag{16.2.5}$$

△

Εξάλλου, ως εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier της κατανομής δέλτα, υπολογίζουμε στο ακόλουθο παράδειγμα το μετασχηματισμό Fourier μιας περιοδικής συνάρτησης.

Παράδειγμα 16.2.2 (Μετασχηματισμός Fourier περιοδικής συνάρτησης)

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια $2p$-περιοδική συνάρτηση, η οποία είναι τμηματικά συνεχής στο διάστημα $[-p, p]$ και

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t}$$

η εκθετική σειρά Fourier της συνάρτησης f, όπου $\omega_0 = \frac{\pi}{p}$ και c_n οι μιγαδικοί συντελεστές Fourier που ορίζονται από τον τύπο (14.3.7).

Με τη βοήθεια του τύπου (14.5.1), αποδεικνύεται ότι

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathcal{F}\{e^{in\omega_0 t}\},$$

οπότε εφαρμόζοντας την ιδιότητα (16.2.5), ευρίσκουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της περιοδικής συνάρτησης f δίνεται από

$$\hat{f}(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0).$$

△

Στη συνέχεια εξετάζουμε το μετασχηματισμό Fourier της συνέλιξης δύο τοπικά ολοκληρωσίμων συναρτήσεων, η οποία ορίζεται όπως ακολουθεί.

Ορισμός 16.2.1 (Συνέλιξη συναρτήσεων)

Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε, η συνάρτηση

$$\begin{aligned} f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ (f * g)(x) &:= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,dy \end{aligned} \tag{16.2.6}$$

ορίζεται ως *συνέλιξη* των συναρτήσεων f και g.

□

Πρόταση 16.2.2 (Θεώρημα συνέλιξης)

Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $\hat{f} = \mathcal{F}\{f\}$ και $\hat{g} = \mathcal{F}\{g\}$ οι μετασχηματισμοί Fourier των f και g. Τότε, ισχύουν οι ιδιότητες

- *Συνέλιξη στο χρόνο*
$$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\} = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega), \tag{16.2.7}$$
δηλαδή ο μετασχηματισμός Fourier απεικονίζει τη συνέλιξη συναρτήσεων στο πεδίο του χρόνου στο γινόμενο των συναρτήσεων στο πεδίο της συχνότητας.

- *Συνέλιξη στη συχνότητα*
$$\mathcal{F}\{f(t)g(t)\} = \frac{1}{2\pi}(\hat{f} * \hat{g})(\omega), \tag{16.2.8}$$
δηλαδή ο μετασχηματισμός Fourier απεικονίζει το γινόμενο συναρτήσεων στο πεδίο του χρόνου στη συνέλιξη των συναρτήσεων στο πεδίο της συχνότητας.

Απόδειξη. Η ιδιότητα συνέλιξης στο χρόνο αποδεικνύεται ως εξής.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{(f*g)(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(t)e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-y)g(y)\,dy \right) e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-y)g(y)e^{-i\omega t}\,dt \right) dy \\
&(t-y=u \Rightarrow t=y+u) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(y)e^{-i\omega(u+y)}\,du \right) dy \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u}\,du \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-i\omega y}\,dy \right) \\
&= \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).
\end{aligned}$$

Εξάλλου, με παρόμοιο τρόπο, αποδεικνύεται η ιδιότητα συνέλιξης στη συχνότητα.

□

Στη συνέχεια, διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το Θεώρημα ροπών και το Θεώρημα Parseval.

Πρόταση 16.2.3 (Θεώρημα ροπών)

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση, της οποίας υπάρχουν οι *ροπές*

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t)\,dt, \ \ n = 0, 1, 2, \dots$$

και $\hat{f} = \mathcal{F}\{f\}$ ο μετασχηματισμός Fourier της f. Τότε, ισχύει

$$m_n = i^n \hat{f}^{(n)}(0).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη σειρά Taylor της συνάρτησης $e^{-i\omega t}$

$$e^{-i\omega t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\omega t)^n}{n!}$$

και εφαρμόζουμε το Θεώρημα ολοκλήρωσης δυναμοσειρών 13.3.5 στη δυναμοσειρά

$$f(t)e^{-i\omega t} = \sum_{n=0}^{\infty} f(t)\frac{(-i\omega t)^n}{n!},$$

οπότε ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\omega t)^n}{n!}\right)dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\omega)^n}{n!}\left(\int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t)\,dt\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n m_n \frac{\omega^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Όμως, εφαρμόζοντας το Θεώρημα Taylor για την $\hat{f}(\omega)$ έχουμε

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}^{(n)}(0)\frac{\omega^n}{n!}.$$

Έτσι, εξισώνοντας τους αντίστοιχους συντελεστές των τελευταίων δύο σειρών, επιβεβαιώνουμε τον ισχυρισμό.

□

Θεώρημα 16.2.1 (Θεώρημα Parseval)

Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, $\hat{f} = \mathcal{F}\{f\}$ και $\hat{g} = \mathcal{F}\{g\}$ οι μετασχηματισμοί Fourier των f και g. Τότε, ισχύουν

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}}(\omega)\,d\omega. \tag{16.2.9}$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g}(t)\,dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\overline{\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega}\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\hat{g}}(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\hat{g}}(\omega)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt\right)d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}}(\omega)\,d\omega.
\end{aligned}$$

□

Πόρισμα 16.2.1 (Θεώρημα Plancherel)

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $\hat{f} = \mathcal{F}\{f\}$ οι μετασχηματισμός Fourier της f. Τότε, ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 \, d\omega. \tag{16.2.10}$$

□

16.3 Εφαρμογές μετασχηματισμού Fourier

Παράδειγμα 16.3.1 Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier των συναρτήσεων $\cos(\omega_0 t)$ και $\sin(\omega_0 t)$.

Λύση.

Από την

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})$$

και την (16.2.5), έχουμε

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2}\left(2\pi\delta(\omega - \omega_0) + 2\pi\delta(\omega + \omega_0)\right) = \pi\left(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right).$$

Με παρόμοιο τρόπο, επίσης, ευρίσκουμε

$$\mathcal{F}\{\sin(\omega_0 t)\} = i\pi\left(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)\right).$$

△

Παράδειγμα 16.3.2 Αποδείξτε ότι ισχύει

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}\sin(\omega_0 t)\right\} = -\omega\pi\left(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)\right),$$

όπου δ η δέλτα κατανομή.

Λύση. Εφαρμόζοντας την ιδιότητα παραγώγισης στο χρόνο και το αποτέλεσμα του προηγούμενου παραδείγματος, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}\sin(\omega_0 t)\right\} &= (i\omega)\mathcal{F}\left\{\sin(\omega_0 t)\right\} \\ &= (i\omega)\left[i\pi\left(\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right)\right] \\ &= -\omega\pi\left(\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right).\end{aligned}$$

△

Παράδειγμα 16.3.3 Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier του διαμορφωμένου σήματος ενός παλμού, το οποίο περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$f(t) = p_T(t)\cos(\omega_0 t).$$

Λύση.

Α΄ τρόπος. Για τις συναρτήσεις $f_1(t) = p_T(t)$ και $f_2(t) = \cos(\omega_0 t)$, από τα αποτελέσματα των Παραδειγμάτων 16.1.1 και 16.3.1, έχουμε ότι

$$\mathcal{F}\{f_1(t)\} = \hat{f}_1(\omega) = \frac{2}{\omega}\sin(T\omega), \ \ \omega \neq 0$$

και

$$\mathcal{F}\{f_2(t)\} = \hat{f}_2(\omega) = \pi\left(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right).$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα συνέλιξης στη συχνότητα, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}_1(\omega-y)\hat{f}_2(y)\,dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2\frac{\sin(T(\omega-y))}{\omega-y}\pi(\delta(y-\omega_0)+\delta(y+\omega_0))\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(T(\omega-y))}{\omega-y}\delta(y-\omega_0)\,dy + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(T(\omega-y))}{\omega-y}\delta(y+\omega_0)\,dy \\ &= \frac{\sin(T(\omega-\omega_0))}{\omega-\omega_0} + \frac{\sin(T(\omega+\omega_0))}{\omega+\omega_0}.\end{aligned}$$

Β΄ τρόπος. Από την

$$p_T(t)\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}e^{i\omega_0 t}p_T(t) + \frac{1}{2}e^{-i\omega_0 t}p_T(t)$$

και, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της μετατόπισης συχνότητας, λαμβάνουμε

$$\mathcal{F}\{p_T(t)\cos\omega_0 t\} = \frac{1}{2}\left(\hat{f}_1(\omega-\omega_0)+\hat{f}_1(\omega+\omega_0)\right),$$

όπου $\hat{f}_1(\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $p_T(t)$

$$\hat{f}_1(\omega) = \frac{2\sin(T\omega)}{\omega}, \ \ \omega \neq 0.$$

△

Παράδειγμα 16.3.4 Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης

$$f(t) = p_{T/2}(t + T/2) - p_{T/2}(t - T/2),$$

όπου ο ορθογώνιος παλμός $p_T(t)$ ορίζεται από την (16.1.4).

Λύση.

Από το Παράδειγμα 16.1.1, έχουμε

$$\mathcal{F}\{p_{T/2}(t)\} = \begin{cases} \frac{2}{\omega}\sin(\omega T/2), & \omega \neq 0 \\ T, & \omega = 0 \end{cases} \equiv \hat{g}(\omega).$$

Εφαρμόζοντας, τώρα, την ιδιότητα της μετατόπισης χρόνου στη συνάρτηση f, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= e^{i\omega T/2}\hat{g}(\omega) - e^{-i\omega T/2}\hat{g}(\omega) \\ &= \begin{cases} \frac{4i\sin^2(\omega T/2)}{\omega}, & \omega \neq 0 \\ 0, & \omega = 0 \end{cases}.\end{aligned}$$

△

Παράδειγμα 16.3.5 Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier του τριγωνικού παλμού

$$q_T(t) = 1 - \frac{|t|}{T}, \ \ |t| \leq T.$$

Λύση. Ο τριγωνικός παλμός εκφράζεται με τη βοήθεια του ορθογωνίου παλμού ως εξής

$$q_T(t) = \frac{1}{T}(p_{T/2} * p_{T/2})(t).$$

Όμως, από το Παράδειγμα 16.1.1, έχουμε

$$\mathcal{F}\{p_{T/2}(t)\} = \begin{cases} \frac{2}{\omega}\sin(\omega T/2), & \omega \neq 0 \\ T, & \omega = 0 \end{cases} \equiv \hat{g}(\omega)$$

και, έτσι, εφαρμόζοντας την ιδιότητα συνέλιξης στο χρόνο, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{q_T(t)\} &= \frac{1}{T}\hat{g}^2(\omega) \\ &= \begin{cases} \frac{4\sin^2(\omega T/2)}{T\omega^2}, & \omega \neq 0 \\ T, & \omega = 0 \end{cases}.\end{aligned}$$

△

Παράδειγμα 16.3.6 (Χαμηλοπερατό φίλτρο συχνοτήτων)

Σε ιδανικό σύστημα χαμηλοπερατού φίλτρου συχνοτήτων εισέρχεται γνωστό σήμα $f(t)$ με μετασχηματισμό Fourier $\hat{f}(\omega)$. Στην έξοδο κόβονται οι υψηλές συχνότητες, δηλαδή κόβονται οι συχνότητες για $|\omega| > \omega_0$. Βρείτε το σήμα εξόδου $g(t)$.

Λύση.

Επειδή στην έξοδο αποκόπτονται οι υψηλές συχνότητες, για το μετασχηματισμό Fourier $\hat{g}(\omega)$ της εξόδου $g(t)$ ισχύει

$$(*) \qquad \hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega)p_{\omega_0}(\omega),$$

όπου $p_{\omega_0}(\omega)$ η συνάρτηση του ορθογωνίου παλμού, η οποία ορίζεται από την (16.1.4). Από το Παράδειγμα 16.1.1, έχουμε ότι

$$\mathcal{F}\{p_{\omega_0}(t)\} = \begin{cases} \frac{2}{\omega}\sin(\omega_0\omega), & \omega \neq 0 \\ 2\omega_0, & \omega = 0 \end{cases}.$$

Έτσι, εφαρμόζοντας την ιδιότητα συμμετρίας, λαμβάνουμε οτι για τη συνάρτηση

$$h(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\omega_0 t)}{\pi t}, & t \neq 0 \\ \frac{\omega_0}{\pi}, & t = 0 \end{cases},$$

ισχύει

$$\mathcal{F}\{h(t)\} = p_{\omega_0}(-\omega) = p_{\omega_0}(\omega).$$

Τώρα, εφαρμόζοντας την ιδιότητα της συνέλιξης στο χρόνο στην (*), ευρίσκουμε ότι η συνάρτηση εξόδου $g(t)$ δίνεται από

$$g(t) = f(t) * h(t).$$

△

Παράδειγμα 16.3.7 (Χαμηλοπερατό χρονικό φίλτρο)

Σε ιδανικό σύστημα εισέρχεται σήμα $f(t)$ με γνωστό μετασχηματισμό Fourier $\hat{f}(\omega)$. Στην έξοδο κόβεται η $f(t)$ για $|t| > T$. Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier $\hat{g}(\omega)$ της συνάρτησης εξόδου $g(t)$.

Λύση.

Η συνάρτηση της εξόδου εκφράζεται ως εξής

$$g(t) = f(t)p_T(t),$$

όπου $p_T(t)$ η συνάρτηση του ορθογωνίου παλμού, η οποία ορίζεται από την (16.1.4). Από το Παράδειγμα 16.1.1, έχουμε

$$\mathcal{F}\{p_T(t)\} = \begin{cases} \frac{2}{\omega}\sin(\omega T), & \omega \neq 0 \\ 2T, & \omega = 0 \end{cases} \equiv \hat{h}(\omega).$$

Τώρα, από την ιδιότητα συνέλιξης στη συχνότητα, λαμβάνουμε

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(\hat{f}(\omega) * \hat{h}(\omega)\right).$$

△

Παράδειγμα 16.3.8 (Μετασχηματισμός Fourier Γκαουσιανής συνάρτησης)

Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της Γκαουσιανής συνάρτησης $f(t) = e^{-\pi t^2}$ είναι

$$\hat{f}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}.$$

Λύση.

Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier, έχουμε

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} e^{-i\omega t}\, dt$$

και παραγωγίζοντας ως προς ω λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned} \hat{f}'(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}(-it)e^{-i\omega t}\, dt \\ &= \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (-2\pi t)e^{-\pi t^2} e^{-i\omega t}\, dt \\ &= \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{dt}e^{-\pi t^2}\right) e^{-i\omega t}\, dt. \end{aligned}$$

Στην τελευταία κάνουμε παραγοντική ολοκλήρωση και ευρίσκουμε

$$\hat{f}'(\omega) = \frac{i}{2\pi}\left[e^{-\pi t^2}e^{-i\omega t}\right]\Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} - \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}\left(\frac{d}{dt}e^{-i\omega t}\right) dt$$

και επειδή

$$\lim_{t\to\pm\infty}(e^{-\pi t^2}e^{-i\omega t}) = 0,$$

έχουμε

$$\begin{aligned}\hat{f}'(\omega) &= -\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}(-i\omega)e^{-i\omega t}\,dt\\ &= -\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}e^{-i\omega t}\,dt,\end{aligned}$$

δηλαδή η συνάρτηση $\hat{f}(\omega)$ ικανοποιεί τη γραμμική Δ.Ε. πρώτης τάξης

$$\hat{f}'(\omega) = -\frac{\omega}{2\pi}\hat{f}(\omega),$$

της οποίας η γενική λύση είναι

$$\hat{f}(\omega) = c\,e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}},$$

όπου $c = \hat{f}(0)$, οπότε ευρίσκουμε

$$\hat{f}(\omega) = \hat{f}(0)e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}.$$

Όμως, γνωρίζουμε ότι

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}\,dt = 1$$

και έτσι τελικά λαμβάνουμε

$$\hat{f}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}.$$

△

16.4 Ασκήσεις

Άσκηση 16.4.1 Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης

$$f(t) = \sin(at)\cos(bt),\;\; a,\, b\in\mathbb{R}.$$