ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Η αδυναμία επίλυσης της πλειοψηφίας των μη γραμμικών εξισώσεων με αναλυτικές μεθόδους, ώθησε στην ανάπτυξη αριθμητικών μεθόδων για την προσεγγιστική επίλυσή τους, π.χ. $συν(x) = x$, $ημ(x^2)-x-0.2 = 0$, $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[5]{x} - 5x = 0,\ x > 0$, κλπ.

§ 2.1 *Η μέθοδος διχοτόμησης*

Η μέθοδος διχοτόμησης βασίζεται στο ακόλουθο Θεώρημα:

Θεώρημα (Bolzano): Εστω $α,b \in \boldsymbol{R}$, $α < b$ και $f(x):[a,b]\rightarrow \boldsymbol{R}$ είναι μία *συνεχής* συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[a,b]$, με $f(α)\ f(b)<0$. Τότε, υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα $(α,b)$.

Με χρήση του παραπάνω θεωρήματος, δεν γνωρίζουμε αν υπάρχουν περισσότερες της μίας ρίζες, ούτε ποια είναι η τιμή τους.

Η μέθοδος:

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, θεωρούμε μία πραγματική συνάρτηση $f(x)$, συνεχή στο κλειστό διάστημα $[a,b]$, $α < b$, με $f(α)<0$ και $f(b)>0$. Εστω $ρ$ μία ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$. Κατασκευάζουμε μία ακολουθία προσεγγίσεων $m_n,\ n = 1, 2, \ldots$ της ρίζας $ρ$ ως εξής:

Βήμα 1^o: Ορίζουμε ως αρχικό διάστημα το $\boldsymbol{I_1 = [a,b]}$ και υπολογίζουμε

$$m_1 = \frac{a+b}{2},\ (1^η \text{ προσέγγιση της ρίζας})$$

να είναι το μέσον του διαστήματος I_1.

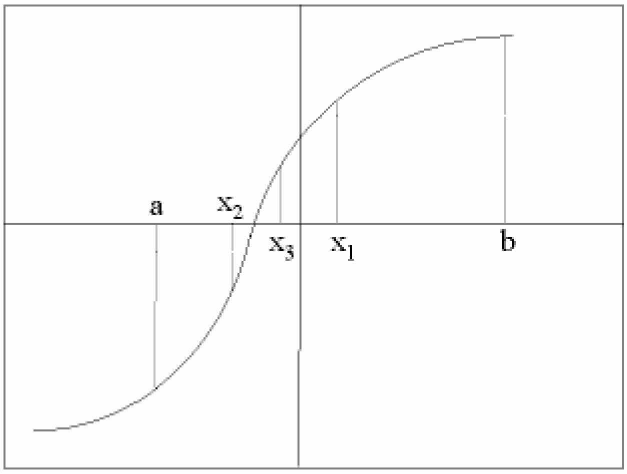
Βήμα 2^o: Υπολογίζουμε **το πρόσημο** της τιμής $f(m_1)$. Αν $f(m_1) = 0$, τότε έχουμε βρει μία ρίζα και σταματούμε, αλλιώς συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα.

Βήμα 3^o Ορίζουμε ένα νέο διάστημα

$$I_2 = \begin{cases} (a, m_1), & \acute{o}\tau\alpha\nu\ f(m_1)\, f(a) < 0 \\ (m_1, b), & \acute{o}\tau\alpha\nu\ f(m_1)\, f(a) \geq 0 \end{cases},$$

εντός του οποίου η συνάρτηση *f(x)* ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Bolzano και ως εκ τούτου υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο I_2.

Για να βούμε την $2^η$ προσέγγιση m_2 της ρίζας ρ, επιστρέφουμε στο $1^ο$ βήμα και επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1-3 <u>θεωρώντας πλέον ως αρχικό διάστημα το I_2</u> κλπ. Αποδεικνύεται ότι το $\lim_{n\to\infty} m_n = \rho$.



Σχήμα 2.1: *Μέθοδος της διχοτόμησης*

Είναι φανερό ότι σε κάθε επανάληψη των βημάτων 1-3, το εύρος του αρχικού διαστήματος όπου υπάρχει η ρίζα υποδιπλασιάζεται, διότι το ένα από τα δύο άκρα του νέου διαστήματος, μεταφέρεται ακριβώς στο μέσον του ακριβώς προηγούμενου διαστήματος. Συνεπώς, μετά από N επαναλήψεις των βημάτων 1-3, το εύρος (μήκος) $l(N)$ του διαστήματος I_N είναι:

$$l(N) = \frac{b-a}{2^{N-1}}.$$

Αν λοιπόν τερματίσουμε τη διαδικασία μετά από N επαναλήψεις, <u>δεν</u> θα έχουμε υπολογίσει την ακριβή ρίζα ρ, αλλά μία προσέγγισή της m_N. Επειδή όμως και οι δύο τιμές ρ, m_N θα βρίσκονται εντός του διαστήματος I_N (μάλιστα η m_N είναι το μέσον του I_N), θα ισχύει:

$$|\varepsilon_\rho| = |\rho - m_N| \le \frac{l(N)}{2} = \frac{b-a}{2^N},$$

που προφανώς είναι ένα άνω φράγμα για το απόλυτο σφάλμα.

Συνήθως τερματίζουμε τη διαδικασία όταν το εύρος του διαστήματος I_N γίνει μικρότερο από μία θετική παράμετρο ανοχής ε. Θέτουμε λοιπόν

$$|\varepsilon_\rho| < \varepsilon \Rightarrow \frac{b-a}{2^N} < \varepsilon$$

και λύνοντας την παραπάνω ανίσωση ως προς N προσδιορίζουμε εκ των προτέρων το πλήθος των επαναλήψεων που απαιτούνται, ώστε να έχουμε αποτέλεσμα με την επιθυμητή ακρίβεια ε:

$$N > \frac{\ln(b-a) - \ln\varepsilon}{\ln 2}.$$

Παράδειγμα 1 Εστω *f(x)* *<u>συνεχής</u>* συνάρτηση στο κλειστό διάστημα *[α,b]*, *α < b* και έστω ότι δίνεται ο ακόλουθος πίνακας:

x	*α*	*b*	*(α+b)/2*	*(α+3b)/4*
Πρόσημο των τιμών *f(x)*	—	+	—	+

Να υπολογίσετε με τη μέθοδο διχοτόμησης μία ρίζα της εξίσωσης *f(x) = 0* για *N = 3* επαναλήψεις και να υπολογίσετε το σφάλμα, εάν *b-α = 0.4*.

Λύση

***<u>1η επανάληψη</u>*:**

1ο βήμα: Ορίζουμε ως **αρχικό διάστημα το I_1 = (α,b)**. Υπολογίζουμε το μέσον του διαστήματος I_1

$$m_1 = \frac{a+b}{2}, \text{ (1η προσέγγιση της ρίζας).}$$

Βήμα 2ο: Υπολογίζουμε ***<u>το πρόσημο</u>*** της τιμής $f(m_1)$. Από τον παραπάνω πίνακα τιμών έχουμε ότι $f(m_1) < 0$.

Βήμα 3^o Υπολογίζουμε το γινόμενο του προσήμου της τιμής $f(m_1)$ με το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης f στα άκρα του διαστήματος I_1. Επειδή $f(m_1)f(b)<0$, ορίζουμε ένα νέο διάστημα I_2:

$$I_2=\left(\frac{a+b}{2}\ ,\ b\right).$$

<u>2^η επανάληψη</u>:

1^o βήμα: Ορίζουμε ως **αρχικό διάστημα το** $I_2=\left(\frac{a+b}{2}\ ,\ b\right)$. Υπολογίζουμε το μέσον του διαστήματος I_2

$$m_2=\frac{\frac{a+b}{2}+b}{2}=\frac{a+3b}{4},\ (2^{\eta}\text{ προσέγγιση της ρίζας}).$$

Βήμα 2^o: Υπολογίζουμε ***<u>το πρόσημο</u>*** της τιμής $f(m_2)$. Από τον παραπάνω πίνακα τιμών έχουμε ότι $f(m_2)>0$.

Βήμα 3^o Υπολογίζουμε το γινόμενο του προσήμου της τιμής $f(m_2)$ με το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης f στα άκρα του διαστήματος I_2. Επειδή $f\left(\frac{a+b}{2}\right)f(m_2)<0$ ορίζουμε ένα νέο διάστημα I_3:

$$I_3=\left(\frac{a+3b}{4}\ ,\ \frac{a+b}{2}\right).$$

<u>3^η επανάληψη</u>:

1^o βήμα: Ορίζουμε ως **αρχικό διάστημα το** $I_3=\left(\frac{a+3b}{4}\ ,\ \frac{a+b}{2}\right)$. Υπολογίζουμε το μέσον του διαστήματος I_3

$$m_3=\frac{\frac{a+3b}{4}+\frac{a+b}{2}}{2}=\frac{3a+5b}{8},$$

η οποία τιμή m_3, εφόσον η 3^η επανάληψη είναι και η τελευταία, μας δίνει την προσεγγιστική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$. Για το σφάλμα έχουμε:

$$|\varepsilon_\rho| \ \leq \ \frac{b-a}{2^N} = \frac{0.4}{2^3} = \frac{1}{32}.$$

Παράδειγμα 2 Να υπολογίσετε με τη μέθοδο διχοτόμησης τη μοναδική ρίζα της εξίσωσης $2x+2 = e^x$ στο διάστημα *(1,2)*. Η διαδικασία να σταματήσει όταν το εύρος του τελικού διαστήματος γίνει μικρότερο του *0.04*.

Λύση Εφόσον

$$|\varepsilon_\rho| \ \leq \ \frac{b-a}{2^N} \leq 0.04 \Rightarrow \frac{1}{2^N} \leq 0.04 \Rightarrow 2^N \geq 25 \Rightarrow \ln\left(2^N\right) \geq \ln\left(25\right)$$

$$N \geq \frac{\ln 25}{\ln 2} \cong 4.64 \Rightarrow N = 5,$$

άρα χρειαζόμαστε **τουλάχιστον *5* <u>επαναλήψεις</u>**, ώστε το σφάλμα να γίνει μικρότερο του *0.04*. Παρατηρούμε ότι $f(x) = 2x+2-e^x$ και $f(1) = 1$, $f(2)<0$, άρα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα *(0,1)*.

<u>***1^{η} επανάληψη***</u>:

1^{o} βήμα: Ορίζουμε ως **αρχικό διάστημα το $I_1 = (1,2)$**. Υπολογίζουμε το μέσον του διαστήματος I_1

$$m_1 = \frac{1+2}{2} = 1.5.$$

Βήμα 2^{o}: Υπολογίζουμε <u>***το πρόσημο***</u> της τιμής

$$f(1.5) = 2\ 1.5 + 2 - e^{1.5} = 3 + 2 - 4.48169 < 0.$$

Βήμα 3^{o} Υπολογίζουμε το γινόμενο του προσήμου της τιμής $f(m_1) = f(1.5)$ με το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης *f* στα άκρα του διαστήματος I_1. Επειδή $f(1.5)f(2) < 0$ ορίζουμε ένα νέο διάστημα I_2:

$$I_2 = \left(1.5\ ,2\right).$$

<u>***2^{η} επανάληψη***</u>:

1^o βήμα: Ορίζουμε ως **αρχικό διάστημα το $I_2 = (1.5\ ,\ 2)$**. Υπολογίζουμε το μέσον του διαστήματος I_2

$$m_2 = \frac{1.5+2}{2} = 1.75\,.$$

Βήμα 2^o: Υπολογίζουμε ***<u>το πρόσημο</u>*** της τιμής $f(1.75) = 3.5 + 2 - 5.7546 < 0.$

Βήμα 3^o Υπολογίζουμε το γινόμενο του προσήμου της τιμής $f(m_2) = f(1.75)$ με το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης f στα άκρα του διαστήματος I_2. Επειδή $f(1.5)f(1.75) < 0$, ορίζουμε ένα νέο διάστημα I_3:

$$I_3 = \left(1.5\ ,\ 1.75\right).$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, εκτελέστε τις <u>υπόλοιπες 3 επαναλήψεις</u> και διαπιστώστε ότι η προσεγγιστική ρίζα είναι η $m_5 = 1.67835$.

§ 2.2 *Επαναληπτικές μέθοδοι. Μέθοδος Newton-Raphson*

Κάθε εξίσωση της μορφής $f(x) = 0$, μπορεί να γραφεί ισοδύναμα στη μορφή $x = \varphi(x)$ με πολλούς τρόπους. Σε τέτοιες παραστάσεις βασίζονται οι λεγόμενες επαναληπτικές μέθοδοι.

Ορισμός 2.2.1 Ένα σημείο x^* του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης φ καλείται σταθερό σημείο της, αν ισχύει $\varphi(x^*) = x^*$.

Στις επαναληπτικές μεθόδους, γράφουμε την εξίσωση $f(x) = 0$ στη μορφή $x = \varphi(x)$ και ξεκινώντας από μία αρχική τιμή x_0, υπολογίζουμε μία ακολουθία προσεγγίσεων ενός σταθερού σημείου της φ από τη σχέση $x_n = \varphi(x_{n-1})$. Αν λοιπόν $x_n \to x^*$ και αν η $\varphi(x)$ είναι συνεχής στο σημείο x^*, τότε το x^* είναι σταθερό σημείο της φ. Πράγματι:

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi\left(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\right) = \varphi\left(x^*\right).$$

<u>Υπαρξη και μοναδικότητα σταθερού σημείου</u>

Θεώρημα 2.2.1 Εστω $\varphi:[a,b]\to[a,b]$ συνεχής πραγματική συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$\text{υπάρχει } 0 < C < 1: \ |\varphi(x) - \varphi(y)| \ \le \ C \ |x - y| \ \forall x, y \in [a,b],$$

(μία τέτοια συνάρτηση καλείται ***συστολή***), τότε η συνάρτηση φ έχει ***μοναδικό σταθερό σημείο x****. Επιπλέον, για οποιαδήποτε αρχική τιμή $x_0 \in [a,b]$, η ακολουθία x_n με αναδρομικό τύπο $x_n = \varphi(x_{n-1})$ συγκλίνει προς το x^* . Τέλος, για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει:

$$|x_n - x^*| \ \le \ C \ |x_{n-1} - x^*|. \tag{2.1}$$

Τάξη σύγκλισης ακολουθίας

Η σχέση (2.1), υπονοεί ότι η ***ακολουθία*** $\boldsymbol{x_n}$ ***συγκλίνει (τουλάχιστον) γραμμικά*** στο σταθερό σημείο x^* της $\varphi(x)$. Γενικότερα, θα λέμε ότι η ***σύγκλιση είναι (τουλάχιστον) τάξης p, p > 1***, αν ισχύει

$$|x_n - x^*| \ \le \ C \ |x_{n-1} - x^*|^p, \quad \text{για κάθε φυσικό αριθμό } n.$$

Προσδιορισμός της τάξης σύγκλισης μιας ακολουθίας

Για τον προσδιορισμό της τάξης σύγκλισης μιας ακολουθίας x_n που είναι γενικά μία δύσκολη υπόθεση, πολύ χρήσιμο είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα 2.2.2 Εστω ότι $x_n \neq x^*$ για κάθε φυσικό αριθμό n και έστω ότι ισχύει:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} = a \neq 0,$$

τότε η τάξη σύγκλισης της ακολουθίας x_n είναι ***ακριβώς*** p.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι πλέον των υποθέσεων του θεωρήματος συστολής 2.2.1, έχουμε ότι η συνάρτηση $\varphi(x)$ είναι *συνεχώς παραγωγίσιμη* στο $[a,b]$. Τότε, από το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού, υπάρχει τιμή ξ_n μεταξύ των x_n και x:

$$x_{n+1} - x^* = \varphi(x_n) - \varphi(x^*) \ = \ \varphi'(\xi_n)(x_n - x^*).$$

Εφόσον $x_n \to x^*$, θα ισχύει ότι $\xi_n \to x^*$ και λόγω συνέχειας της $\varphi'(x)$ έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = \varphi'(x^*).$$

Αν λοιπόν $0 < |\varphi'(x^*)| < 1$, τότε η τάξη σύγκλισης που παράγει η επαναληπτική μέθοδος $x_n = \varphi(x_{n-1})$ είναι ακριβώς ένα. Για να πάρουμε λοιπόν επαναληπτικές μεθόδους $x_n = \varphi(x_{n-1})$ με τάξη σύγκλισης μεγαλύτερη του 1, θα πρέπει να αναζητήσουμε μεθόδους για τις οποίες ισχύει

$$\varphi'(x^*) = 0.$$

Μία τέτοια είναι και η μέθοδος Newton-Raphson που θα αναπτύξουμε στη συνέχεια.

Παράδειγμα 3 Εστω πραγματική συνάρτηση f, τέτοια ώστε x^* είναι απλή ρίζα της $f(x) = 0$ και η f είναι <u>δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μία περιοχή του x^*</u>. Να δειχθεί ότι η επαναληπτική μέθοδος

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

συγκλίνει στο x^* και να υπολογισθεί η τάξη σύγκλισης.

Λύση Θεωρούμε την επαναληπτική μέθοδο $x = \varphi(x)$, όπου $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Παραγωγίζουμε και βρίσκουμε:

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2} \Rightarrow \varphi'(x^*) = 0,$$

άρα υπάρχει μία περιοχή I του x^* τέτοια ώστε $|\varphi'(x)| \le C < 1$, οπότε

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le |\varphi'(\xi)||x - y| \le C|x - y|,\ x, y \in I,$$

οπότε από το θεώρημα 2.2.1 της συστολής η $\varphi(x)$ έχει μοναδικό σταθερό σημείο x^*, και η ακολουθία (x_n) με αναδρομικό τύπο $x_n = \varphi(x_{n-1}) \to x^*$, $n \to \infty$.

Για να υπολογίσουμε την τάξη σύγκλισης θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 2.2.2. Από τον τύπο του Taylor με κέντρο το σημείο x^* έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(x^*) + f'(x^*)(x_n - x^*) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(x_n - x^*)^2,\ \xi_n \in (x^*, x_n) \text{ ή } \xi_n \in (x_n, x^*) \\ f'(x_n) &= f'(x^*) + f''(\xi_n')(x_n - x^*),\ \xi' \in (x^*, x_n) \text{ ή } \xi_n \in (x_n, x^*) \end{aligned}.$$

Αντικαθιστούμε τις τιμές $f(x_n), f'(x_n)$ στον αναδρομικό τύπο $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, και παίρνουμε:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x^*) + f'(x^*)(x_n - x^*) + \dfrac{f''(\xi_n)}{2}(x_n - x^*)^2}{f'(x^*) + f''(\xi_n{}')(x_n - x^*)},$$

$$x_{n+1} - x^* = (x_n - x^*) - \frac{f'(x^*)(x_n - x^*) + \dfrac{f''(\xi_n)}{2}(x_n - x^*)^2}{f'(x^*) + f''(\xi_n{}')(x_n - x^*)}$$

$$x_{n+1} - x^* = (x_n - x^*)^2 \frac{f''(\xi_n{}') - \dfrac{f''(\xi_n)}{2}}{f'(x^*) + f''(\xi_n{}')(x_n - x^*)},$$

άρα: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \dfrac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \neq 0$, άρα η τάξη σύγκλισης είναι 2. □

<u>Η μέθοδος Newton-Raphson</u>

Η μέθοδος Newton-Raphson βασίζεται στο ακόλουθο:

Θεώρημα 2.2.3 Εστω μία πραγματική συνάρτηση *f(x)*:

(α) η *f(x)* είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα *[α,b]*, με $f'(x), f''(x) \neq 0$ για κάθε *x∈[α,b]* ,

(β) *f(α) f(b)<0,*

τότε υπάρχει <u>μοναδική</u> ρίζα *x** της εξίσωσης *f(x)=0* στο ανοικτό διάστημα *(α,b)*, η οποία είναι το <u>όριο της αναδρομικής ακολουθίας</u>:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},\ n = 1, 2, \ldots,$$

όπου το αρχικό σημείο x_0 της αναδρομικής σχέσης εκλέγεται έτσι ώστε

$$f(x_0)\,f''(x_0) > 0\,.$$

Απόδειξη Από τη συνθήκη (β) και την παραγωγισιμότητα της *f(x)* προκύπτει ότι η εξίσωση *f(x) = 0* έχει μία τουλάχιστον ρίζα x^* στο ανοικτό διάστημα *(α,b)*. Εφόσον δε $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,b]$, προκύπτει ότι η συνάρτηση *f(x)* είναι γνησίως μονότονη στο *[α,b]*, άρα η ρίζα x^* είναι μοναδική. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι *f(α) < 0*, άρα *η f είναι γνησίως αύξουσα*. Επιπλέον, έστω x_0: $f(x_0) > 0$, τότε από τη συνθήκη $f(x_0)f''(x_0) > 0$ προκύπτει ότι $f''(x_0) > 0$ και εφόσον ισχύει $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,b]$ θα έχουμε $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha,b]$, δηλαδή η *f* είναι κυρτή στο *[α,b]*.

Θεωρούμε τώρα την ακολουθία $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f\left(x_{n-1}\right)}{f'\left(x_{n-1}\right)},\ n = 1,2,...$

Με τη μέθοδο της επαγωγής θα δείξουμε ότι η (x_n) *είναι κάτω φραγμένη από τη ρίζα* x^*.

Αφού η *f (x)* είναι γνησίως αύξουσα και $f(x_0) > 0 = f(x^*)$, προκύπτει ότι $x_0 > x^*$.Υποθέτουμε ότι $x_n > x^*$, θα δείξουμε ότι $x_{n+1} > x^*$. Από το ανάπτυγμα Taylor της *f(x)* με κέντρο το σημείο x_n έχουμε:

$$f(x) = f(x_n) + f'\left(x_n\right)\left(x - x_n\right) + \frac{f''\left(\xi_n\right)}{2}\left(x - x_n\right)^2,\ \xi_n \in \left(x, x_n\right),$$

οπότε για $x = x^*$ έχουμε:

$$0 = f(x^*) = f(x_n) + f'\left(x_n\right)\left(x^* - x_n\right) + \frac{f''\left(\xi_n\right)}{2}\left(x^* - x_n\right)^2,\ \xi_n \in \left(x, x_n\right)$$

άρα $f(x_n) + f'\left(x_n\right)\left(x^* - x_n\right) < 0$,

(αφού υποθέσαμε ότι η *f* είναι κυρτή) και κάνοντας τις πράξεις παίρνουμε

$$x_n - \frac{f(x_n)}{f'\left(x_n\right)} > x^* \Rightarrow x_{n+1} > x^*\,.$$

Αρα η ακολουθία *(x_n)* είναι κάτω φραγμένη.

Από την παραπάνω ανισότητα και τη μονοτονία της f ισχύει ότι

$$f(x_{n+1}) > f(x^*) = 0 \text{ για κάθε } n$$

άρα:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'\left(x_{n-1}\right)} < x_{n-1} \quad \text{για κάθε } n,$$

δηλαδή η ακολουθία *(x_n) είναι γνησίως φθίνουσα*. Αφού είναι και κάτω φραγμένη συγκλίνει σε έναν αριθμό $\overline{x}$. Τότε:

$$\lim x_n = \lim x_{n-1} - \frac{\lim f(x_{n-1})}{\lim f'\left(x_{n-1}\right)} \Rightarrow \overline{x} = \overline{x} - \frac{f(\overline{x})}{\lim f'\left(x_{n-1}\right)} \Rightarrow f(\overline{x}) = 0,$$

άρα το όριο της ακολουθίας x_n είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$. □

Πόρισμα 2.2.1 Με τις προϋποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος, το σφάλμα κατά την προσέγγιση της μοναδικής ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$ με τη μέθοδο Newton-Raphson από τον όρο x_n δίνεται από τη σχέση

$$\left|x_n - x^*\right| \leq \frac{M}{2m}\left|x_n - x_{n-1}\right|^2,$$

όπου $m = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)|$, $M = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

Απόδειξη Εστω x^* η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$, από το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού ισχύει:

$$f(x^*) - f(x_n) = f'\left(c_n\right)\left(x^* - x_n\right),\ c_n \in \left(x, x_n\right) \ ,$$

άρα $0 - f(x_n) = f'\left(c_n\right)\left(x^* - x_n\right)$, συνεπώς:

$$\left|x^* - x_n\right| = \frac{|f(x_n)|}{|f'(c_n)|} \leq \frac{|f(x_n)|}{m}, \tag{2.2}$$

όπου $m = \min_{x\in[a,b]} f'(x)$. Από το ανάπτυγμα Taylor της $f(x)$ με κέντρο το σημείο x_{n-1} έχουμε:

$$f(x) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x - x_{n-1}) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(x - x_{n-1})^2,\ \xi_n \in (x, x_{n-1}),$$

οπότε για $x = x_n$ έχουμε:

$$f(x_n) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(x_n - x_{n-1})^2,\ \xi_n \in (x_{n+1}, x_n)$$

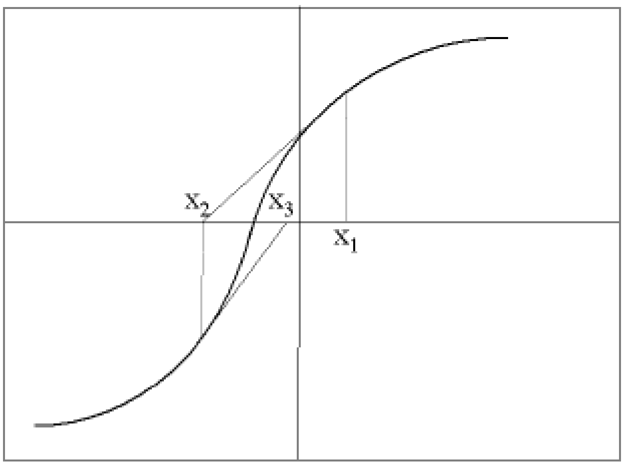
$$= \frac{f''(\xi_n)}{2}(x_n - x_{n-1})^2, \qquad (2.3)$$

διότι $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \Rightarrow f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 0$.

Αντικαθιστούμε την (2.3) στην (2.2) και παίρνουμε το ζητούμενο. □

<u>Γεωμετρική ερμηνεία</u>

Η γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου γίνεται σαφής με τη βοήθεια του ακόλουθου σχήματος:



Σχήμα 2: Η μέθοδος Newton

Εστω $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ η 1η προσέγγιση της ρίζας στην 1η επανάληψη. Η εξίσωση της εφαπτόμενης της συνάρτησης *f(x)* στο σημείο *(x_1, f(x_1))* είναι:

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1).$$

Η εφαπτόμενη ευθεία τέμνει τον άξονα των x σε ένα σημείο x_2 το οποίο υπολογίζεται εύκολα αν θέσουμε στην εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας $y = 0, x = x_2$, οπότε βρίσκουμε:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad ,$$

η οποία είναι ακριβώς η αναδρομική σχέση του Θεωρήματος 2.2.3 για $n = 2$. Συνεχίζοντας, διαπιστώνουμε η κάθε επόμενη προσέγγιση x_{n+1} είναι το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της εφαπτόμενης της $f(x)$ στο σημείο $(x_n, f(x_n))$ με τον άξονα των x.

Παράδειγμα 4 Να προσεγγισθεί με τη μέθοδο Newton – Raphson η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $2x - e^{-x} = 0$ στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$ για $N = 3$ επαναλήψεις και να υπολογισθεί το σφάλμα της μεθόδου.

Λύση Ορίζουμε $f(x) = 2x - e^{-x}$, και υπολογίζουμε

$$f'(x) = 2 + e^{-x}, f''(x) = -e^{-x}.$$

Προφανώς $f'(x), f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,1)$, $f(0) = -1$, $f(1)=1.63212$, άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 2.2.3 και συνεπώς υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$, η οποία είναι το όριο της αναδρομικής ακολουθίας $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},\ n = 0,1,...$

Επιλέγουμε ως αρχικό σημείο εκκίνησης το $x_0 = 0$, ή $x_0 = 1$ (ένα από τα δύο άκρα του αρχικού διαστήματος $(0,1)$) βάσει της συνθήκης $f(x_0)f''(x_0) > 0$ του Θεωρήματος 2.2.3. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι $f(0)f''(0) > 0,$ ενώ $f(1)f''(1) < 0$, άρα

$$x_0 = 0.$$

<u>$1^η$ επανάληψη</u>:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = 0 - \frac{-1}{2+e^0} = \frac{1}{3}.$$

2η επανάληψη:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{1}{3} - \frac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{f'\left(\frac{1}{3}\right)} = 0.351689.$$

3η επανάληψη:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.351689 - \frac{f(0.351689)}{f'(0.351689)} = 0.351734,$$

η οποία είναι και η προσεγγιστική τιμή της ρίζας.

Το σφάλμα υπολογίζεται από το Πόρισμα 2.2.1 για *n = 3*:

$$|x_3 - x^*| \le \frac{M}{2m}|x_3 - x_2|^2 = \frac{M}{2m}|0.351734 - 0.351689|^2,$$

όπου $m = \min_{x\in[0,1]}|f'(x)|$, $M = \max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$. Επειδή

$$m = \min_{x\in[0,1]}|f'(x)| = \min_{x\in[0,1]}\left(2 + e^{-x}\right) = 2 + e^{-1} = 2.36788,$$

$$M = \max_{x\in[0,1]}|f''(x)| = \max_{x\in[0,1]} e^{-x} = e^0 = 1,$$

έχουμε: $|x_3 - x^*| \le \frac{1}{2\ 2.36788}|0.351734 - 0.351689|^2 = 4.27598\ 10^{-10}$.

Παρατήρηση: Είναι σαφές από η μέθοδος Newton – Raphson είναι ειδική περίπτωση επαναληπτικής μεθόδου της μορφής $x_n = \varphi(x_{n-1})$, όπου η συνάρτηση επανάληψης είναι της μορφής:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad .$$

Επειδή $\varphi'(x) = -\frac{f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}$, με την προϋπόθεση ότι $f'(x^*) \neq 0$ (δηλαδή x^* απλή ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$), προκύπτει ότι $\varphi'(x^*) = 0$, άρα η τάξη σύγκλισης είναι μεγαλύτερη του 1. στο Θεώρημα 2.2.3 είδαμε ότι η σύγκλιση είναι τετραγωνική.

Γενίκευση της μεθόδου Newton-Raphson σε συστήματα εξισώσεων

Δίδεται το σύστημα εξισώσεων $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$, όπου *f, g* πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών και έστω *(x*,y*)* μία λύση του. Υποθέτοντας ότι σε μία περιοχή του πεδίου ορισμού υπάρχουν οι δεύτερες μερικές παράγωγοι των *f,g* και είναι συνεχείς, έχουμε από το Θεώρημα Taylor για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών:

$$\begin{aligned} 0 &= f(x^*,y^*) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x-x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y^*) + O\left((x-x^*)^2 + (y-y^*)^2\right) \\ 0 &= g(x^*,y^*) = g(x,y) + \frac{\partial g}{\partial x}(x-x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(y-y^*) + O\left((x-x^*)^2 + (y-y^*)^2\right) \end{aligned}.$$

Παραλείποντας τους τετραγωνικούς όρους γράφουμε:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x^* \\ y-y^* \end{pmatrix} \cong -\begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}.$$

Οδηγούμαστε λοιπόν υπό κατάλληλες προϋποθέσεις (η ιακωβιανή ορίζουσα είναι διάφορη του μηδενός και *x, y* αρκετά κοντά στα *x*, y**), σε μία επαναληπτική μέθοδο της μορφής:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x_n,y_n)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x_n,y_n)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g(x_n,y_n)}{\partial x} & \dfrac{\partial g(x_n,y_n)}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n+1}-x_n \\ y_{n+1}-y_n \end{pmatrix} \cong -\begin{pmatrix} f(x_n,y_n) \\ g(x_n,y_n) \end{pmatrix}$$

όπου μάλιστα η σύγκλιση είναι τετραγωνική.

§ 2.3 *Μέθοδος τέμνουσας (secant method)*

Η μέθοδος Newton-Raphson απαιτεί γνώση της *f′(x)*. Στην περίπτωση που η παράγωγος δεν είναι γνωστή ή είναι δύσκολο να υπολογισθεί, καταφεύγουμε συνήθως στη μέθοδο της τέμνουσας.

Ας θεωρήσουμε τον αναδρομικό τύπο της μεθόδου Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n = 0,1,...$$

και ας θυμηθούμε ότι

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f\left(x\right)}{(x+h) - x},\ h\ \mu\iota\kappa\rho\grave{o}.$$

Για $x = x_n$, $x_{n+1} = x_n + h$, έχουμε:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_{n+1}) - f\left(x_n\right)}{x_{n+1} - x_n}.$$

Αν λοιπόν στον αναδρομικό τύπο Newton-Raphson αντικαταστήσουμε αντί της παραγώγου $f'(x_n)$, το δεξιό μέλος της παραπάνω ισότητας, προκύπτει η **μέθοδος της τέμνουσας**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\ \left(x_n - x_{n-1}\right)}{f(x_n) - f(x_{n-1})},\ n = 1,...,$$

η οποία χρειάζεται προφανώς δύο αρχικές συνθήκες x_0, x_1. Η μέθοδος βασίζεται στο ακόλουθο:

Θεώρημα 2.3.1 Εστω μία πραγματική συνάρτηση *f(x)*:

(α) η *f(x)* είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα *[α,b]*, με $f'(x), f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,b]$,

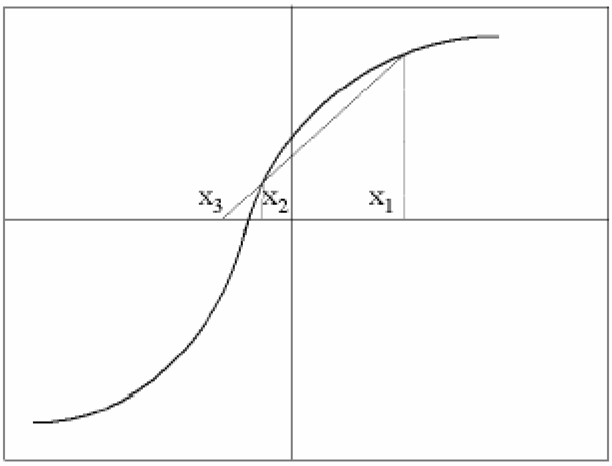
(β) *f(α) f(b)<0*,

τότε υπάρχει <u>μοναδική</u> ρίζα *x** της εξίσωσης *f(x)=0* στο ανοικτό διάστημα *(α,b)*, η οποία είναι το <u>όριο της αναδρομικής ακολουθίας</u>:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\ \left(x_n - x_{n-1}\right)}{f(x_n) - f(x_{n-1})},\ n = 1,\ldots,$$

όπου ως αρχικά σημεία x_0, x_1 της αναδρομικής σχέσης μπορούν να θεωρηθούν για ευκολία τα άκρα του διαστήματος *(α,b)*, δηλαδή $x_0 = \alpha$, $x_1 = b$. Η τάξη σύγκλισης της μεθόδου είναι $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1.62$.

<u>Γραφική επίλυση</u>



Σχήμα 3 Η μέθοδος τέμνουσας

Παράδειγμα 5 Να προσεγγισθεί με τη μέθοδο τέμνουσας μία προσέγγιση της $\sqrt{3}$ στο ανοικτό διάστημα *(1,2)*, για $N = 3$ επαναλήψεις.

Λύση Ορίζουμε $f(x) = x^2 - 3$ και εφόσον $f'(x), f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (1,2)$, $f(1) = -2$, $f(2) = 1$, ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 2.3.1 και συνεπώς υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$, η οποία είναι το όριο της αναδρομικής ακολουθίας

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\ \left(x_n - x_{n-1}\right)}{f(x_n) - f(x_{n-1})},\ n = 1,\ldots$$

Εκλέγουμε $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ (τα δύο άκρα του αρχικού διαστήματος *(1,2)*) και υπολογίζουμε

<u>1η επανάληψη</u>:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)\,\left(x_1 - x_0\right)}{f(x_1) - f(x_0)} = 2 - \frac{f(2)\,\left(2-1\right)}{f(2) - f(1)} = 2 - \frac{1}{3} = 1.\overline{6}.$$

2^η^ επανάληψη:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)\,\left(x_2 - x_1\right)}{f(x_2) - f(x_1)} = 1.\overline{6} - \frac{f(1.\overline{6})\,\left(1.\overline{6} - 2\right)}{f(1.\overline{6}) - f(2)} = 1.72727\,.$$

3^η^ επανάληψη:

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)\,\left(x_3 - x_2\right)}{f(x_3) - f(x_2)} = 1.72727 - \frac{f(1.72727)\,\left(1.72727 - 1.\overline{6}\right)}{f(1.72727) - f(1.\overline{6})} = 1.73214\,,$$

η οποία είναι και η προσεγγιστική τιμή της ρίζας.

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνονται οι συναρτήσεις: (α) $f(x) = e^{2x} + 2x + 1,\ x \in [-1,0]$,
(β) $g(x) = 2^x - 5x + 2,\ x \in [0,1]$,
(γ) $h(x) = x^3 - x - 1,\ x \in [1,2]$.

Α. Αφού δείξετε ότι κάθε μία από τις ανωτέρω συναρτήσεις έχει μοναδική πραγματική ρίζα στα αντίστοιχα διαστήματα, να υπολογίσετε με τη μέθοδο διχοτόμησης μία προσέγγιση της ρίζας για κάθε μία εξ αυτών, ώστε το σφάλμα από την ακριβή τιμή της ρίζας να είναι μικρότερο του *0.06*.

Απάντηση:

(α) N = 6 επαναλήψεις

$\{m_1 = -0.5,\ m_2 = -0.75,\ m_3 = -0.625,\ m_4 = -0.6875,\ m_5 = -0.65625,\ m_6 = -0.64063\}$

(β) N = 6 επαναλήψεις

$\{m_1 = 0.5,\ m_2 = 0.75,\ m_3 = 0.625,\ m_4 = 0.6875,\ m_5 = 0.71875,\ m_6 = 0.73438\}$

(γ) N = 6 επαναλήψεις

$\{m_1 = 1.5,\ m_2 = 1.25,\ m_3 = 1.375,\ m_4 = 1.3125,\ m_5 = 1.34375,\ m_6 = 1.32813\}$

Β. Να υπολογίσετε με τη μέθοδο Newton-Raphson μία προσέγγιση της ρίζας για κάθε μία από τις συναρτήσεις (α)-(γ), για $N = 4$ επαναλήψεις και να υπολογίσετε το σφάλμα.

Απάντηση:

(α) $\{ x_0 = 0, x_1 = -0.5, x_2 = -0.634471, x_3 = -0.639227, x_4 = -0.639232\}$

$|e| \leq 1.11699\ 10^{-10}$.

(β) $\{ x_0 = 0, x_1 = 0.69656, x_2 = 0.73212, x_3 = 0.73224, x_4 = 0.73224\}$

$|e| \cong 0$.

(γ) $\{x_0 = 2., x_1 = 1.54545, x_2 = 1.35961, x_3 = 1.3258, x_4 = 1.32472\}$

$|e| \leq 0.00001$.

Γ. Να υπολογίσετε με τη μέθοδο τέμνουσας μία προσέγγιση της ρίζας για κάθε μία από τις συναρτήσεις (α)-(γ), για $N = 4$ επαναλήψεις.

Απάντηση:

(α) $\{x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = -0.69816, x_3 = -0.64981, x_4 = -0.63910, x_5 = -0.63923\}$.

(β) $\{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 0.75, x_3 = 0.7317, x_4 = 0.73225, x_5 = 0.73224\}$.

(γ) $\{x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 1.16667, x_3 = 1.25311, x_4 = 1.33721, x_5 = 1.32385\}$.

Σημείωση: Οι πράξεις να γίνουν με στρογγυλοποίηση στο 5^{o} δεκαδικό ψηφίο.

2. Να δειχθεί ότι η μέθοδος: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f(x_n) + f'(x_n)}$ συγκλίνει τετραγωνικά.

Υπόδειξη: Οπως στο παράδειγμα 3 σελ. 31.

3. Δείξτε ότι η ακολουθία $x_{n+1} = \frac{1}{2} e^{\left(\frac{x_n}{2}\right)}$, $n = 1, \ldots$ συγκλίνει και το όριό της βρίσκεται στο $[0,1]$.

Υπόδειξη: Δείξτε ότι η $\varphi(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}$ είναι συστολή, βλέπε Θεώρημα 2.2.1.

4. Εστω $a_n = \sqrt{2+\sqrt{2+...+2}}$, n = *1,2,...*Χρησιμοποιώντας μία κατάλληλη επαναληπτική μέθοδο, δείξτε ότι $\lim a_n = 2$. Επίσης δείξτε ότι $\lim \frac{a_{n+1}-2}{a_n-2} = \frac{1}{4}$.

5. Δίνεται η επαναληπτική μέθοδος

$$x_{n+1} = x_n + \lambda\left(x_n^2 - 3\right),\ n = 0,1,2...$$

(α) Να βρεθεί διάστημα τιμών της παραμέτρου λ ώστε η επαναληπτική μέθοδος να συγκλίνει.
(β) Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η σύγκλιση να είναι τετραγωνική.
(γ) Είναι η μέθοδος Newton-Raphson πιο αποτελεσματική μέθοδος από αυτήν που αντιστοιχεί για την τιμή του λ που βρέθηκε στο ερώτημα (β);

6. Εστω $f(x) = x\,(x-2)^3$, τότε να επιλέξετε και να εφαρμόσετε την πλέον αποτελεσματική μορφή της μεθόδου Newton-Raphson για τον προσδιορισμό της ρίζας $x = 2$ για $N = 3$ επαναλήψεις. Ποια η τάξη σύγκλισης;

7. Δίνεται το σύστημα εξισώσεων: $\{f(x,y)=0,\quad g(x,y)=0\}$, όπου $f(x,y) = 1 - x - y^2 \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ και $g(x,y) = e^{-xy} + 5\eta\mu(\pi x) - 2$. Εφαρμόστε την μέθοδο Newton-Raphson για συστήματα εξισώσεων για N=3 επαναλήψεις.