Втор колоквиум Линеарна алгебра, 2023

Секоја од дадените задачи носи по 50 поени. Треба да изберете две кои ќе ги решавате. Ако ги решавате сите три, го добивате бројот на поени на подобрите две.

Задача 1. Нека M_2 е множеството од сите реални матрици (со реални коефициенти) од ред 2x2. Над него се дефинирани со стандардните операции собирање на матрици и множење на матрица со скалар.

А) (2) Дали $M_2(\mathbf{Q})$ е векторски простор?

Б) (3) Определи дали за секоја $M_2(\mathbf{Q})$ е е затворено во однос на множење со скалар

В) (3) Определи дали за секоја $A \in M_2$ има адитивен инверз за $M_2(\mathbf{Q})$! Докажи!

Г) (3) Дали за секој полином $A \in M_2$ за $M_2(\mathbf{Q})$ секои скалари a, b $\in$ Q важи (a+b)A = aA+bA!

Д) (8) Провери дали V={A|detA=0} и U={A|A е дијагонална} се векторски потпростори од M_2 ($\mathbf{R}$)!

Ѓ) (7) Покажи дека пресек на потпростори е векторски простор!

Е) (7) Покажи дека f: $M_2(\mathbf{R}) \to P_2(\mathbf{R})$ дефинирано со $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=ax^2+(b+c)x+d$ е линеарно пресликување!

Ѓ) (5) Определи ја матрицата на пресликување на f (од Е) во однос на стандардните бази за M_2 и P_2!

Е) (8) Определи Null(f) и Rank(f), (за пресликувањето на f од Е)

Ж) (2) Определи го Rank(f^2)!

Задача 2. А) (6) Дефинирај скаларен производ на два вектори и дади барем две својства кои важат за скаларен производ.

Б) (2+3) Дефинирај ортогонални вектори и ортогонален комплемент!

В) (5) Покажи дека ако векторот **z** е ортогонален на векторите **x** и **y**, тогаш е ортогонален и на било која линеарна комбинација од нив (т.е. за секое a, b $\in$R, **z** е ортогонален на a**x**+b**y**)

Г) Дадена $A=\begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & -7 & 8 \end{bmatrix}$.

Г1) (12) Определи ортогонална база B_1 за ColA! (ортогонални вектори, не мора да се нормирани)

Г2) (8) Направи QR декомпозиција за A!

Д) (14) Нека W е векторскиот простор генериран од колоните на A од под Г) (W=ColA). Нека f:W $\to$W, f($\mathbf{a}_1$) = $\mathbf{a}_1$+ $\mathbf{a}_2$, f($\mathbf{a}_1$) = $\mathbf{a}_1$ – $\mathbf{a}_3$, f($\mathbf{a}_3$) = $\mathbf{a}_2$+ $\mathbf{a}_3$. Определи ја матрицата на трансформација на f во однос на базата B_1 од под Г).

Задача 3. А) (5) Дефинирај детерминанта на матрица. (можеш да ја искажеш било која дефиниција)

Б) (5) Докажи дека ако сите елементи од една редица во матрицата се 0, тогаш и детерминантата е 0!

В) Нека A и B се 4x4 матрици за кои важи detA=-1, detB=3.

В1) (1) Дали некоја од овие матрици е сингуларна (т.е. неинверзибилна)?

В2) (6) Пресметај det(A^TBA) и det($A^{-1}BA$)

Г) (3) Дефинирај сопствен вектор за матрица A!

Д) (5) Нека V={**a**, **b**, **c**} е множество од сопствени вектори за A, кои одговараат на три различни сопствените врености. Докажи дека V е линеарно независно!

Ѓ) Дадена е матрицата A=$\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Ѓ1) (6) Пресметај го карактеристичниот полином за A!

Ѓ2) (5) Покажи дека 3 е сопствена вредност и определи го соодветниот сопствен потпростор!

Ѓ3) (8) Определи ги останатите сопствени вредности и соодветните сопствени потпростори!

Ѓ4) (4) Дали е можно да се направи дијагонализација на A? Ако е можно направи дијагонализација, а ако не е можно, објасни зошто!

Ѓ5) (5) Пресметај A^{10}!