Mathematische Logik

Tutorium 18 - Blatt 6

Steffen Brand
steffen.brand@rwth-aachen.de

23.05.2025

Hinweis

Die Folien können (und werden leider auch) Fehler enthalten, oder es kann passieren, dass ich mal keine Zeit habe die Folien zu erstellen. Also probiert am besten immer zu den Tutorien zu gehen, und verlasst euch nicht nur auf die Folien!

Tutoriumsaufgabe 1

Beschreiben Sie jeweils in Worten, welche Eigenschaften die folgenden $\{E/2\}$-Sätze ausdrücken. Das heißt, vervollständigen Sie die folgende Aussage für $x \in [5]$:

$$\mathfrak{G} \models \varphi_x \Leftrightarrow \dots$$

Geben Sie dabei nicht den L($\{E/2\}$)-Satz "wörtlich" wieder (indem Sie beispielweise lediglich die Quantoren durch Formulierungen wie "es gibt ein x, sodass..." ersetzen), sondern nutzen Sie möglichst knappe und präzise Formulierungen und Begriffe der Graphentheorie.

Tutoriumsaufgabe 1

Eine Formel φ ohne freie Variablen (also mit $\mathrm{frei}(\varphi) = \emptyset$) nennen wir geschlossene Formel oder Satz.

Tutoriumsaufgabe 1

Beispiel 4.37

$$\varphi_1 := \forall x \forall y \big(E(x,y) \to E(y,x) \big) \wedge \forall x \neg E(x,x)$$

besagt, dass $\mathfrak{G}$ ein Graph ist.

Formal heißt das:

$$\mathfrak{G} \models \varphi_1 \iff \mathfrak{G} \text{ ist ein Graph.}$$

Tutoriumsaufgabe 1

Ein (ungerichteter) Graph ist eine $\{E\}$-Struktur $\mathfrak{G} = (G, E^{\mathfrak{G}})$, bei der die Relation $E^{\mathfrak{G}}$ symmetrisch und irreflexiv ist.

Tutoriumsaufgabe 1

(2) $\mathscr{R}$ ist symmetrisch, wenn für alle $a, b \in A$ gilt: $(a, b) \in \mathscr{R} \implies (b, a) \in \mathscr{R}$.
$\mathscr{R}$ ist antisymmetrisch, wenn für alle $a, b \in A$, $a \neq b$ gilt: $(a, b) \in \mathscr{R} \implies (b, a) \notin \mathscr{R}$.

Tutoriumsaufgabe 1

(1) $\mathscr{R}$ ist reflexiv, wenn für alle $a \in A$ gilt: $(a, a) \in \mathscr{R}$.
$\mathscr{R}$ ist irreflexiv, wenn für alle $a \in A$ gilt: $(a, a) \notin \mathscr{R}$.

Tutoriumsaufgabe 1

Satz: $\varphi_1 = \forall x \forall y (E(x, y) \rightarrow \neg E(y, x))$.

Tutoriumsaufgabe 1

Satz: $\varphi_1 = \forall x \forall y (E(x,y) \rightarrow \neg E(y,x))$.

$\mathfrak{G} \models \varphi_1$

$\iff$ Für alle Knoten u und v in G gilt, dass wenn eine Kante von u nach v verläuft, keine Kante von v zu u verläuft. (Intuitiv)

Tutoriumsaufgabe 1

Satz: $\varphi_1 = \forall x \forall y (E(x, y) \rightarrow \neg E(y, x))$.

$\mathfrak{G} \models \varphi_1$

$\iff$ Für alle Knoten u und v in G gilt, dass wenn eine Kante von u nach v verläuft, keine Kante von v zu u verläuft. (Intuitiv)

$\iff$ Für alle $u, v \in G$ gilt: Wenn $(u, v) \in E^{\mathfrak{G}}$ dann $(v, u) \notin E^{\mathfrak{G}}$. (Formal)

Tutoriumsaufgabe 1

Satz: $\varphi_1 = \forall x \forall y (E(x,y) \rightarrow \neg E(y,x))$.

$\mathfrak{G} \models \varphi_1$

$\iff$ Für alle Knoten u und v in G gilt, dass wenn eine Kante von u nach v verläuft, keine Kante von v zu u verläuft. (Intuitiv)

$\iff$ Für alle $u, v \in G$ gilt: Wenn $(u,v) \in E^{\mathfrak{G}}$ dann $(v,u) \notin E^{\mathfrak{G}}$. (Formal)

$\iff$ $E^{\mathfrak{G}}$ ist antisymmetrisch und besitzt keinen Knoten mit einer Kante zu sich selbst.

Tutoriumsaufgabe 1

(2) $\mathscr{R}$ ist symmetrisch, wenn für alle $a, b \in A$ gilt: $(a, b) \in \mathscr{R} \implies (b, a) \in \mathscr{R}$.
$\mathscr{R}$ ist antisymmetrisch, wenn für alle $a, b \in A$, $a \neq b$ gilt: $(a, b) \in \mathscr{R} \implies (b, a) \notin \mathscr{R}$.

Tutoriumsaufgabe 1

Satz: $\varphi_2 = \exists x \exists y (E(x, y) \rightarrow \neg E(y, x))$.

Tutoriumsaufgabe 1

Satz: $\varphi_2 = \exists x \exists y(E(x,y) \rightarrow \neg E(y,x))$.

$\mathfrak{G} \models \varphi_2$

$\iff$ Es existiert ein Knoten u und es existiert ein Knoten v im Graph G, sodass zwischen diesen Knoten höchstens eine Kante verläuft. (Intuitiv)

Tutoriumsaufgabe 1

Satz: $\varphi_2 = \exists x \exists y (E(x, y) \to \neg E(y, x))$.

$\mathfrak{G} \models \varphi_2$

$\iff$ Es existiert ein Knoten u und es existiert ein Knoten v im Graph G, sodass zwischen diesen Knoten höchstens eine Kante verläuft. (Intuitiv)

$\iff$ Es existieren $u, v \in G$, sodass gilt: Wenn $(u, v) \in E^{\mathfrak{G}}$ dann $(v, u) \notin E^{\mathfrak{G}}$. (Formal)

$\iff$ Es existieren $u, v \in G$, sodass gilt: $(u, v) \notin E^{\mathfrak{G}}$ oder $(v, u) \notin E^{\mathfrak{G}}$.

Tutoriumsaufgabe 1

Satz: $\varphi_2 = \exists x \exists y (E(x,y) \to \neg E(y,x))$.

$\mathfrak{G} \models \varphi_2$

$\iff$ Es existiert ein Knoten u und es existiert ein Knoten v im Graph G, sodass zwischen diesen Knoten höchstens eine Kante verläuft. (Intuitiv)

$\iff$ Es existieren $u, v \in G$, sodass gilt: Wenn $(u,v) \in E^{\mathfrak{G}}$ dann $(v,u) \notin E^{\mathfrak{G}}$. (Formal)

$\iff$ Es existieren $u, v \in G$, sodass gilt: $(u,v) \notin E^{\mathfrak{G}}$ oder $(v,u) \notin E^{\mathfrak{G}}$.

$\iff E^{\mathfrak{G}} \neq G \times G$.

Tutoriumsaufgabe 1

Satz: $\varphi_3 = \exists x \exists y (E(x, y) \land \neg E(y, x))$.

Tutoriumsaufgabe 1

Satz: $\varphi_3 = \exists x \exists y (E(x, y) \land \neg E(y, x))$.

$\mathfrak{G} \models \varphi_3$

$\iff$ Es existiert ein Knoten u und es existiert ein Knoten v in Graph G, zwischen denen genau eine Kante verläuft. (Intuitiv)

Tutoriumsaufgabe 1

Satz: $\varphi_3 = \exists x \exists y (E(x, y) \wedge \neg E(y, x))$.

$\mathfrak{G} \models \varphi_3$

$\iff$ Es existiert ein Knoten u und es existiert ein Knoten v in Graph G, zwischen denen genau eine Kante verläuft. (Intuitiv)

$\iff$ Es existieren $u, v \in G$, sodass gilt: $(u, v) \in E^{\mathfrak{G}}$ und $(v, u) \notin E^{\mathfrak{G}}$. (Formal)

$\iff$ $E^{\mathfrak{G}}$ ist nicht symmetrisch.

Tutoriumsaufgabe 1

(2) $\mathscr{R}$ ist symmetrisch, wenn für alle $a, b \in A$ gilt: $(a, b) \in \mathscr{R} \implies (b, a) \in \mathscr{R}$.
$\mathscr{R}$ ist antisymmetrisch, wenn für alle $a, b \in A$, $a \neq b$ gilt: $(a, b) \in \mathscr{R} \implies (b, a) \notin \mathscr{R}$.

Tutoriumsaufgabe 1

Satz: $\varphi_4 = \exists x \forall y (E(x, y) \wedge \neg E(y, x))$.

Tutoriumsaufgabe 1

Satz: $\varphi_4 = \exists x \forall y (E(x, y) \land \neg E(y, x))$.

$\mathfrak{G} \models \varphi_4$

$\iff$ Es existiert ein Knoten u in G, sodass je eine Kante von diesen Knoten auf alle Knoten in G ausgeht, und zeitgleich verläuft keine Kante von einem Knoten aus G zum Knoten u. (Intuitiv)

Tutoriumsaufgabe 1

Satz: $\varphi_4 = \exists x \forall y (E(x,y) \land \neg E(y,x))$.

$\mathfrak{G} \models \varphi_4$

$\iff$ Es existiert ein Knoten u in G, sodass je eine Kante von diesen Knoten auf alle Knoten in G ausgeht, und zeitgleich verläuft keine Kante von einem Knoten aus G zum Knoten u. (Intuitiv)

$\iff$ Es existiert $u \in G$, sodass für alle $v \in G$ gilt: $(u,v) \in E^{\mathfrak{G}}$ und $(v,u) \notin E^{\mathfrak{G}}$. (Formal)

$\iff$ Es existiert $u \in G$, sodass eine Kante von u zu allen Knoten $v \in G$ führt, aber nicht zurück.

Tutoriumsaufgabe 1

Satz: $\varphi_4 = \exists x \forall y (E(x, y) \land \neg E(y, x))$.

$\mathfrak{G} \models \varphi_4$

$\iff$ Es existiert ein Knoten u in G, sodass je eine Kante von diesen Knoten auf alle Knoten in G ausgeht, und zeitgleich verläuft keine Kante von einem Knoten aus G zum Knoten u. (Intuitiv)

$\iff$ Es existiert $u \in G$, sodass für alle $v \in G$ gilt: $(u, v) \in E^{\mathfrak{G}}$ und $(v, u) \notin E^{\mathfrak{G}}$. (Formal)

$\iff$ Es existiert $u \in G$, sodass eine Kante von u zu allen Knoten $v \in G$ führt, aber nicht zurück.

Das ist jedoch ein Widerspruch! Es müsste dann gelten $(v, v) \in E^{\mathfrak{G}}$, als auch $(v, v) \notin E^{\mathfrak{G}}$. Die Formel ist also unerfüllbar. Vorsichtig sein!

Tutoriumsaufgabe 1

Satz: $\varphi_5 = \forall x \exists y (E(x, y) \wedge \neg E(y, x))$.

Tutoriumsaufgabe 1

Satz: $\varphi_5 = \forall x \exists y (E(x, y) \wedge \neg E(y, x))$.

$\mathfrak{G} \models \varphi_5$

$\iff$ Für alle Knoten in G gibt es mindestens ein Mal den Fall, dass eine Kante von diesem Knoten zu einem anderen ausgeht, aber keine Kante zurück führt. (Intuitiv)

Tutoriumsaufgabe 1

Satz: $\varphi_5 = \forall x \exists y (E(x,y) \land \neg E(y,x))$.

$\mathfrak{G} \models \varphi_5$

$\iff$ Für alle Knoten in G gibt es mindestens ein Mal den Fall, dass eine Kante von diesem Knoten zu einem anderen ausgeht, aber keine Kante zurück führt. (Intuitiv)

$\iff$ Für alle $u \in G$ existiert ein $v \in G$, sodass gilt: $(u,v) \in E^{\mathfrak{G}}$ und $(v,u) \notin E^{\mathfrak{G}}$. (Formal)

$\iff$ Jeder Knoten $u \in G$ hat eine ausgehende Kante, deren Rückrichtung nicht Teil der Kantenrelation ist.

Tutoriumsaufgabe 2

Sei $w \in \{a, b\}^*$ und $\mathfrak{A}_w$ die dazugehörige Wortstruktur. Geben Sie $\sigma_{\{a,b\}}$-Sätze an, sodass für $x \in [4]$ gilt:

$$\mathfrak{A}_w \models \varphi_x \Leftrightarrow w \in L_x.$$

Tutoriumsaufgabe 2

Sei Σ ein endliches, nicht-leeres Alphabet. Für jedes $a \in \Sigma$ sei P_a ein einstelliges Relationssymbol, und es sei

$$\sigma_\Sigma \quad := \quad \{\dot{\leq}\} \cup \{P_a \mid a \in \Sigma\}.$$

Für jedes Wort $w := a_1 \cdots a_n \in \Sigma^*$ mit $a_1, \dots, a_n \in \Sigma$ sei $\mathfrak{A}_w$ folgende σ_Σ-Struktur:

- Das Universum ist $A_w := \{0, \dots, n\}$.
- $\dot{\leq}^{\mathfrak{A}_w}$ ist die natürliche lineare Ordnung auf A_w, d.h.,

$$\dot{\leq}^{\mathfrak{A}_w} = \big\{(i,j) \bigm| 0 \leq i \leq j \leq n\big\}.$$

- Für jedes $a \in \Sigma$ ist $P_a^{\mathfrak{A}_w} := \big\{i \in [n] \bigm| a_i = a\big\}$.

Tutoriumsaufgabe 2

$L_1 := (a^* b)^*$

und

$\varphi_1 := \forall x \ (P_a(x) \ \_\_\_\_ \ \exists y \ (x \mathrel{\dot{\leq}} y \ \_\_\_\_ \ P_b(y)))$ Für alle Positionen x im Wort gilt..

Tutoriumsaufgabe 2

$L_1 := (a^* b)^*$

und

$\varphi_1 := \forall x\ (P_a(x)$ ____ $\exists y\ (x \dot{\leq} y$ ____ $P_b(y)))$ Für alle Positionen x im Wort gilt..

$\varphi_1 := \forall x\ (P_a(x) \rightarrow \exists y\ (x \dot{\leq} y$ ____ $P_b(y)))$ ..wenn an der Position x ein a steht, dann existiert eine höhere Position y..

Tutoriumsaufgabe 2

$L_1 := (a^* b)^*$

und

$\varphi_1 := \forall x \ (P_a(x) \ \_\_\_\_ \ \exists y \ (x \dot{\leq} y \ \_\_\_\_ \ P_b(y)))$ Für alle Positionen x im Wort gilt..

$\varphi_1 := \forall x \ (P_a(x) \rightarrow \exists y \ (x \dot{\leq} y \ \_\_\_\_ \ P_b(y)))$ ..wenn an der Position x ein a steht, dann existiert eine höhere Position y..

$\varphi_1 := \forall x \ (P_a(x) \rightarrow \exists y \ (x \dot{\leq} y \ \wedge P_b(y)))$ ..und an der steht ein b.

Tutoriumsaufgabe 2

$L_2 := (ab^*)^*$

und

$\varphi_2 := \forall x \; (\; \_\_\_\_\_\_\_\_ \; \exists y \; (\; \_\_\_\_\_\_\_\_ \;))$ Für alle Positionen x im Wort gilt..

Tutoriumsaufgabe 2

$L_2 := (ab^*)^*$

und

$\varphi_2 := \forall x\ (\ \_\_\_\_\_\_\_\_\ \exists y\ (\ \_\_\_\_\_\_\_\_\ ))$ Für alle Positionen x im Wort gilt..

$\varphi_2 := \forall x\ (P_b(x) \rightarrow \exists y\ (\ \_\_\_\_\_\_\_\_\ ))$ ..wenn an der Position x ein b steht, dann existiert im Wort eine Position y..

Tutoriumsaufgabe 2

$L_2 := (ab^*)^*$

und

$\varphi_2 := \forall x$ (________ $\exists y$ (________)) Für alle Positionen x im Wort gilt..

$\varphi_2 := \forall x\ (P_b(x) \rightarrow \exists y$ (________)) ..wenn an der Position x ein b steht, dann existiert im Wort eine Position y..

$\varphi_2 := \forall x\ (P_b(x) \rightarrow \exists y\ (y \mathbin{\dot{\leq}} x$ ____)) ..welche niedriger als x liegt..

Tutoriumsaufgabe 2

$L_2 := (ab^*)^*$

und

$\varphi_2 := \forall x \; (\text{\_\_\_\_\_\_\_\_} \; \exists y \; (\text{\_\_\_\_\_\_\_\_} \;))$ Für alle Positionen x im Wort gilt..

$\varphi_2 := \forall x \; (P_b(x) \rightarrow \exists y \; (\text{\_\_\_\_\_\_\_\_} \;))$ ..wenn an der Position x ein b steht, dann existiert im Wort eine Position y..

$\varphi_2 := \forall x \; (P_b(x) \rightarrow \exists y \; (y \mathrel{\dot{\leq}} x \; \text{\_\_\_\_} \;))$ ..welche niedriger als x liegt..

$\varphi_2 := \forall x \; (P_b(x) \rightarrow \exists y \; (y \mathrel{\dot{\leq}} x \wedge P_a(y)))$ ..und an dieser steht ein a.

Tutoriumsaufgabe 2

$L_3 := (aa^*bb^*)^*$

und

$\varphi_3 := \forall x\ (P_a(x)$ ____________________ $) \wedge (P_b(x)$ ____________________ $))$ Für alle Position x im Wort gilt..

Tutoriumsaufgabe 2

$L_3 := (aa^* bb^*)^*$

und

$\varphi_3 := \forall x \; (P_a(x)$ ____________________ $) \land (P_b(x)$ ____________________ $))$ Für alle Position x im Wort gilt..

$\forall x \; ((P_a(x) \rightarrow \exists y(x \mathrel{\dot{\leq}} y \land P_b(y))) \land (P_b(x)$ ____________________ $))$ ..wenn an der Position x ein a steht, dann steht an einer höheren Position y ein b..

Tutoriumsaufgabe 2

$L_3 := (aa^*bb^*)^*$

und

$\varphi_3 := \forall x\ (P_a(x)$ ____________________ $) \wedge (P_b(x)$ ____________________ $))$ Für alle Position x im Wort gilt..

$\forall x\ ((P_a(x) \rightarrow \exists y(x \dot{\leq} y \wedge P_b(y))) \wedge (P_b(x)$ ____________________ $))$ ..wenn an der Position x ein a steht, dann steht an einer höheren Position y ein b..

$\forall x\ ((P_a(x) \rightarrow \exists y(x \dot{\leq} y \wedge P_b(y))) \wedge (P_b(x) \rightarrow \exists y(y \dot{\leq} x \wedge P_a(y))))$ ..und wenn an der Position x ein b steht, dann steht an einer niedrigeren Position y ein a.

Tutoriumsaufgabe 2

$L_4 := (ab)^*$

und

$\varphi_4 :=$ ____

Tutoriumsaufgabe 2

$L_4 := (ab)^*$

und

$\varphi_4 :=$ ____

$$\begin{aligned}&\forall x \; ((P_a(x) \rightarrow \exists y(x \dot{\leq} y \land P_b(y) \;\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \;)) \\ &\;\land \; (P_b(x) \rightarrow \exists y(y \dot{\leq} x \land P_a(y) \;\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \;))\end{aligned}$$

Tutoriumsaufgabe 2

$L_4 := (ab)^*$

und

$\varphi_4 :=$ ____

$$\forall x\ ((P_a(x) \to \exists y(x \dot{\leq} y \land P_b(y)\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\ ))$$
$$\land\ (P_b(x) \to \exists y(y \dot{\leq} x \land P_a(y)\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\ ))$$

$$\forall x\ ((P_a(x) \to \exists y(x \dot{\leq} y \land P_b(y) \land \forall z(z \dot{\leq} x \lor y \dot{\leq} z)))$$
$$\land\ (P_b(x) \to \exists y(y \dot{\leq} x \land P_a(y) \land \forall z(z \dot{\leq} y \lor x \dot{\leq} z))))$$

Tutoriumsaufgabe 2

$L_4 := (ab)^*$

und

$\varphi_4 :=$ ____

$$\begin{aligned}&\forall x\ ((P_a(x) \rightarrow \exists y(x \dot{\leq} y \land P_b(y) \text{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ })) \\ &\ \land (P_b(x) \rightarrow \exists y(y \dot{\leq} x \land P_a(y) \text{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ }))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\forall x\ ((P_a(x) \rightarrow \exists y(x \dot{\leq} y \land P_b(y) \land \forall z(z \dot{\leq} x \lor y \dot{\leq} z))) \\ &\ \land (P_b(x) \rightarrow \exists y(y \dot{\leq} x \land P_a(y) \land \forall z(z \dot{\leq} y \lor x \dot{\leq} z))))\end{aligned}$$

Intuition: Es kann keine Position z zwischen dem a und b geben, an der ein anderer Buchstabe steht. Das a und b stehen also immer direkt nebeneinander.

Tutoriumsaufgabe 3

In dieser Aufgabe betrachten wir den Körper der rellen Zahlen, also die σ_{Ar}-Struktur $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, \dot{+}^{\mathfrak{R}}, \dot{*}^{\mathfrak{R}}, \dot{0}^{\mathfrak{R}}, \dot{1}^{\mathfrak{R}})$ mit der üblichen Definition der Addition, Multiplikation und Konstanten.

Tutoriumsaufgabe 3

Sei $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, \dot{+}^{\mathfrak{R}}, \dot{*}^{\mathfrak{R}}, \dot{0}^{\mathfrak{R}}, \dot{1}^{\mathfrak{R}})$.
Gebt jeweils eine $L(\sigma_{Ar})$-Formel $\varphi(x)$ an, sodass für alle $r \in \mathbb{R}$ genau dann $\mathfrak{R} \models \varphi(r)$ gilt, wenn $r = 0$.

Tutoriumsaufgabe 3

Sei $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, \dot{+}^{\mathfrak{R}}, \dot{*}^{\mathfrak{R}}, \dot{0}^{\mathfrak{R}}, \dot{1}^{\mathfrak{R}})$.
Gebt jeweils eine $L(\sigma_{Ar})$-Formel $\varphi(x)$ an, sodass für alle $r \in \mathbb{R}$ genau dann $\mathfrak{R} \models \varphi(r)$ gilt, wenn $r = 0$.

$\varphi_0(x) := x \doteq \dot{0}$.

Tutoriumsaufgabe 3

Sei $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, \dot{+}^{\mathfrak{R}}, \dot{*}^{\mathfrak{R}}, \dot{0}^{\mathfrak{R}}, \dot{1}^{\mathfrak{R}})$.
Gebt jeweils eine $L(\sigma_{Ar})$-Formel $\varphi(x)$ an, sodass für alle $r \in \mathbb{R}$ genau dann $\mathfrak{R} \models \varphi(r)$ gilt, wenn $r = 0$.

$\varphi_0(x) := x \doteq \dot{0}$.

Intuition: Die Formel wertet natürlich nur dann zu "Wahr" aus, wenn $r = 0$ ist.

Tutoriumsaufgabe 3

Sei $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, \dot{+}^{\mathfrak{R}}, \dot{*}^{\mathfrak{R}}, \dot{0}^{\mathfrak{R}}, \dot{1}^{\mathfrak{R}})$.
Gebt jeweils eine $L(\sigma_{Ar})$-Formel $\varphi(x)$ an, sodass für alle $r \in \mathbb{R}$ genau dann $\mathfrak{R} \models \varphi(r)$ gilt, wenn $r = -1$.

Tutoriumsaufgabe 3

Sei $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, \dot{+}^{\mathfrak{R}}, \dot{*}^{\mathfrak{R}}, \dot{0}^{\mathfrak{R}}, \dot{1}^{\mathfrak{R}})$.
Gebt jeweils eine $L(\sigma_{Ar})$-Formel $\varphi(x)$ an, sodass für alle $r \in \mathbb{R}$ genau dann $\mathfrak{R} \vDash \varphi(r)$ gilt, wenn $r = -1$.

$\varphi_{-1}(x) := x \dot{\neq} \dot{1} \land x \dot{*} x \doteq \dot{1}$.

Tutoriumsaufgabe 3

Sei $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, \dot{+}^{\mathfrak{R}}, \dot{*}^{\mathfrak{R}}, \dot{0}^{\mathfrak{R}}, \dot{1}^{\mathfrak{R}})$.
Gebt jeweils eine $L(\sigma_{Ar})$-Formel $\varphi(x)$ an, sodass für alle $r \in \mathbb{R}$ genau dann $\mathfrak{R} \models \varphi(r)$ gilt, wenn $r = -1$.

$$\varphi_{-1}(x) := x \mathrel{\dot{\neq}} \dot{1} \wedge x \mathbin{\dot{*}} x \doteq \dot{1}.$$

Intuition:

$x \mathbin{\dot{*}} x \doteq \dot{1}$ stellt sicher, dass die Formel nur für $r = 1$ oder $r = -1$ zu "Wahr" auswertet.
$x \mathrel{\dot{\neq}} \dot{1}$ stellt sicher, dass die Formel für $r = 1$ nicht zu "Wahr" auswertet. Also wertet die Formel nur noch für $r = -1$ zu "Wahr" aus.

Tutoriumsaufgabe 3

Sei $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, \dot{+}^{\mathfrak{R}}, \dot{*}^{\mathfrak{R}}, \dot{0}^{\mathfrak{R}}, \dot{1}^{\mathfrak{R}})$.
Gebt jeweils eine $L(\sigma_{Ar})$-Formel $\varphi(x)$ an, sodass für alle $r \in \mathbb{R}$ genau dann $\mathfrak{R} \models \varphi(r)$ gilt, wenn $r = \sqrt{2}$.

Tutoriumsaufgabe 3

Sei $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, \dot{+}^{\mathfrak{R}}, \dot{*}^{\mathfrak{R}}, \dot{0}^{\mathfrak{R}}, \dot{1}^{\mathfrak{R}})$.
Gebt jeweils eine $L(\sigma_{Ar})$-Formel $\varphi(x)$ an, sodass für alle $r \in \mathbb{R}$ genau dann $\mathfrak{R} \models \varphi(r)$ gilt, wenn $r = \sqrt{2}$.

$$\varphi_{\sqrt{2}}(x) := \exists y\ (x \doteq y \dot{*} y) \wedge x \dot{*} x \doteq \dot{1} \dot{+} \dot{1}.$$

Tutoriumsaufgabe 3

Sei $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, \dot{+}^{\mathfrak{R}}, \dot{*}^{\mathfrak{R}}, \dot{0}^{\mathfrak{R}}, \dot{1}^{\mathfrak{R}})$.
Gebt jeweils eine $L(\sigma_{Ar})$-Formel $\varphi(x)$ an, sodass für alle $r \in \mathbb{R}$ genau dann $\mathfrak{R} \vDash \varphi(r)$ gilt, wenn $r = \sqrt{2}$.

$$\varphi_{\sqrt{2}}(x) := \exists y \; (x \doteq y \dot{*} y) \land x \dot{*} x \doteq \dot{1} \dot{+} \dot{1}.$$

Intuition:

$x \dot{*} x \doteq \dot{1} \dot{+} \dot{1}$ stellt sicher, dass die Formel nur für $r = -\sqrt{2}$ und $r = \sqrt{2}$ zu "Wahr" auswertet.
$\exists y \; (x \doteq y \dot{*} y)$ stellt sicher, dass die Formel für $r = -\sqrt{2}$ nicht zu "Wahr" auswertet. Also wertet die Formel nur noch für $r = \sqrt{2}$ zu "Wahr" aus.

Tutoriumsaufgabe 3

b) Zeigen oder widerlegen Sie, dass es für jedes $s \in \mathbb{R}$ eine Formel $\varphi_s(x) \in \mathrm{L}(\sigma_{\mathrm{Ar}})$ gibt, welche s in $\mathfrak{R}$ (wie in a)) definiert, d.h. sodass für alle $r \in \mathbb{R}$ genau dann $\mathfrak{R} \models \varphi_s(r)$ gilt, wenn $r = s$.

Tutoriumsaufgabe 3

Die Aussage ist falsch.

Ansonsten würde eine injektive Abbildung von den reellen Zahlen zu den dazugehörigen definierenden Formeln existieren, aber:

$\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

$L(\sigma_{Ar})$ ist nach Definition abzählbar.

Es kann also keine injektive Abbildung von den reellen Zahlen zu den dazugehörigen definierenden Formeln existieren.

Schönes Wochenende :)