

# **Mathematische Logik**

**Tutorium 18 - Blatt 11**

Steffen Brand

[steffen.brand@rwth-aachen.de](mailto:steffen.brand@rwth-aachen.de)

11.07.2025

# Tutoriumsaufgabe 1

---

Sei  $\Sigma = \{a, b\}$  und seien

- a)  $L_1 = (aa)^*$ ,
- b)  $L_2 = (ab + aa)^*$ ,
- c)  $L_3 = (ab^*a)^*$ .

Um die Notation zu vereinfachen, schreiben wir im folgenden  $\mathcal{K}_i$  für die Klasse  $\mathcal{K}_{L_i}$ , wobei  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

Geben Sie für einen Satz  $\varphi_i \in \text{MSO}(\sigma)$  (für ein passendes  $\sigma$ ) für  $i \in \{1, 2, 3\}$  an, sodass für alle  $\sigma$ -Strukturen  $\mathfrak{A}$  gilt:

$$\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_i \iff \mathfrak{A} \models \varphi_i.$$

# Tutoriumsaufgabe 1

---

Was ist besonders an der monadischen Logik der 2. Stufe?

# Tutoriumsaufgabe 1

---

Für eine Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$  sei

$$\mathcal{K}_L := \{\mathfrak{A} \mid \text{es gibt ein } w \in L, \text{ so dass } \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}_w\}.$$

# Tutoriumsaufgabe 1

---

$$\varphi_1 := \forall X((\exists x X(x)) \rightarrow \exists x(X(x) \wedge \forall y(X(y) \rightarrow x \dot{\leq} y))).$$

Intuitiv: Für jede Teilmenge gilt, dass wenn diese nicht leer ist, auch ein kleinstes Element  $x$  innerhalb der Teilmenge existiert.

# Tutoriumsaufgabe 1

---

$$\varphi_1 := \forall X((\exists x X(x)) \rightarrow \exists x(X(x) \wedge \forall y(X(y) \rightarrow x \dot{\leq} y))).$$

Intuitiv: Für jede Teilmenge gilt, dass wenn diese nicht leer ist, auch ein kleinstes Element  $x$  innerhalb der Teilmenge existiert.

$$\varphi_2 := \forall X((\exists x X(x)) \rightarrow \exists x(X(x) \wedge \forall y(X(y) \rightarrow y \dot{\leq} x)))$$

Intuitiv: Für jede Teilmenge gilt, dass wenn diese nicht leer ist, auch ein größtes Element  $x$  innerhalb der Teilmenge existiert.

# Tutoriumsaufgabe 1

---

$$\varphi_1 := \forall X((\exists x X(x)) \rightarrow \exists x(X(x) \wedge \forall y(X(y) \rightarrow x \leq y))).$$

Intuitiv: Für jede Teilmenge gilt, dass wenn diese nicht leer ist, auch ein kleinstes Element  $x$  innerhalb der Teilmenge existiert.

$$\varphi_2 := \forall X((\exists x X(x)) \rightarrow \exists x(X(x) \wedge \forall y(X(y) \rightarrow y \leq x)))$$

Intuitiv: Für jede Teilmenge gilt, dass wenn diese nicht leer ist, auch ein größtes Element  $x$  innerhalb der Teilmenge existiert.

$$\varphi_{\text{total endlich}} := \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_{\text{Reflexivit\"at}} \wedge \varphi_{\text{Antisymmetrie}} \wedge \varphi_{\text{Transitivit\"at}} \wedge \varphi_{\text{Konnexit\"at}}$$

Intuitiv: Eine totale Ordnung ist nach Definition reflexiv, antisymmetrisch, transitiv und konnex. Eine total geordnete Menge ist genau dann endlich, wenn jede Teilmenge bez\"uglich  $\leq$  ein kleinstes und gr\"o\u00dftes Element hat. Also wenn es keine unendlich aufsteigende und keine unendlich absteigende Folge gibt.

# Tutoriumsaufgabe 1

---

$$\varphi_a := \forall x(P_a(x) \rightarrow \bigwedge_{b \in \Sigma, b \neq a} \neg P_b(x)).$$

Intuitiv: Wenn an einer Position  $x$  Buchstabe  $a$  steht, dann steht an dieser Position kein anderer Buchstabe. Also: An jeder Position steht höchstens ein Buchstabe.

# Tutoriumsaufgabe 1

---

$$\varphi_a := \forall x(P_a(x) \rightarrow \bigwedge_{b \in \Sigma, b \neq a} \neg P_b(x)).$$

Intuitiv: Wenn an einer Position  $x$  Buchstabe  $a$  steht, dann steht an dieser Position kein anderer Buchstabe. Also: An jeder Position steht höchstens ein Buchstabe.

$$\varphi_{pos} := \forall x(\neg \varphi_0(x) \leftrightarrow (\bigvee_{a \in \Sigma} P_a(x)))$$

Intuitiv:  $\varphi_0(x)$  ist die Formel, die zu wahr auswertet, wenn  $x$  das "kleinste Element" ist. Dann sagt die Formel, dass wenn wir eine Position ungleich der kleinsten betrachten, an dieser Position ein Buchstabe stehen muss. Also: An jeder Position, welche nicht die kleinste Position ist, steht mindestens ein Buchstabe.

# Tutoriumsaufgabe 1

---

$$\varphi_{Wort} := \varphi_{total\ endlich} \wedge \varphi_{pos} \wedge \bigwedge_{a \in \Sigma} \varphi_a$$

Intuitiv:  $\varphi_{pos}$  und  $\bigwedge_{a \in \Sigma} \varphi_a$  sagen zusammen aus, dass an jeder Position, außer der kleinsten, genau ein Buchstabe steht.  $\varphi_{total\ endlich}$  sagt aus, dass es sich um eine endliche, totale Ordnung handelt. Insgesamt sagt  $\varphi_{Wort}$  dann aus, dass die Struktur isomorph zu einer Wortstruktur ist.

Ihr dürft  $\varphi_{Wort}$  in der Hausaufgabe verwenden.

# Tutoriumsaufgabe 1 (a)

---

- $L_1 = (aa)^*$

## Tutoriumsaufgabe 1 (a)

---

- $L_1 = (aa)^*$
- $\varphi_0(x) := \forall y (x \dot{\leq} y)$   
Intuitiv:  $x$  ist das kleinste Element in der Ordnung.

# Tutoriumsaufgabe 1 (a)

---

- $L_1 = (aa)^*$
- $\varphi_0(x) := \forall y (x \dot{\leq} y)$   
Intuitiv:  $x$  ist das kleinste Element in der Ordnung.
- $\varphi_{last} := \forall y (y \dot{\leq} x)$   
Intuitiv:  $x$  ist das letzte bzw. größte Element in der Ordnung.

# Tutoriumsaufgabe 1 (a)

---

- $L_1 = (aa)^*$

- $\varphi_0(x) := \forall y (x \dot{\leq} y)$

Intuitiv:  $x$  ist das kleinste Element in der Ordnung.

- $\varphi_{last} := \forall y (y \dot{\leq} x)$

Intuitiv:  $x$  ist das letzte bzw. größte Element in der Ordnung.

- $\varphi_{+1}(x, y) := x \dot{\leq} y \wedge \forall z (z \dot{\leq} x \vee y \dot{\leq} z) \wedge x \neq y$

Intuitiv:  $y$  folgt direkt auf  $x$ .

# Tutoriumsaufgabe 1 (a)

---

- $L_1 = (aa)^*$
- $\varphi_0(x) := \forall y (x \dot{\leq} y)$   
Intuitiv:  $x$  ist das kleinste Element in der Ordnung.
- $\varphi_{last} := \forall y (y \dot{\leq} x)$   
Intuitiv:  $x$  ist das letzte bzw. größte Element in der Ordnung.
- $\varphi_{+1}(x, y) := x \dot{\leq} y \wedge \forall z (z \dot{\leq} x \vee y \dot{\leq} z) \wedge x \neq y$   
Intuitiv:  $y$  folgt direkt auf  $x$ .
- $\varphi_{+2}(x, y) := \exists z (\varphi_{+1}(z, y) \wedge \varphi_{+1}(x, z))$   
Intuitiv: Ein Element  $z$  folgt direkt auf  $x$  und ein Element  $y$  folgt direkt auf  $z$ .

# Tutoriumsaufgabe 1 (a)

---

- $L_1 = (aa)^*$

- $\varphi_0(x) := \forall y (x \dot{\leq} y)$

Intuitiv:  $x$  ist das kleinste Element in der Ordnung.

- $\varphi_{last} := \forall y (y \dot{\leq} x)$

Intuitiv:  $x$  ist das letzte bzw. größte Element in der Ordnung.

- $\varphi_{+1}(x, y) := x \dot{\leq} y \wedge \forall z (z \dot{\leq} x \vee y \dot{\leq} z) \wedge x \neq y$

Intuitiv:  $y$  folgt direkt auf  $x$ .

- $\varphi_{+2}(x, y) := \exists z (\varphi_{+1}(z, y) \wedge \varphi_{+1}(x, z))$

Intuitiv: Ein Element  $z$  folgt direkt auf  $x$  und ein Element  $y$  folgt direkt auf  $z$ .

- $\varphi_g(X) := \forall x (X(x) \leftrightarrow (\varphi_0(x) \vee \exists y (X(y) \wedge \varphi_{+2}(y, x)))) \wedge \exists z (X(z) \wedge \varphi_0(z))$

Intuitiv: In der Relation  $X$  sind genau die Elemente enthalten, welche eine "gerade Position" unter der Ordnung besitzen.

# Tutoriumsaufgabe 1 (a)

---

Und somit gilt für:

$$\varphi_1 := \varphi_{Wort} \wedge \forall x(\neg P_b(x)) \wedge \exists X(\varphi_g(X) \wedge \forall x(\varphi_{last}(x) \rightarrow X(x))).$$

folgendes:

$$\mathfrak{A} \models \varphi_1 \iff \mathfrak{A} \in \mathcal{K}_{(aa)^*} \text{ mit } \mathcal{K}_{(aa)^*} := \{\mathfrak{A} \mid \text{es gibt ein } w \in (aa)^*, \text{ sodass } \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}_w\}.$$

mit der Intuition: Jede Struktur, welche  $\varphi_1$  erfüllt, ist isomorph zu einer Wortstruktur  $\mathfrak{A}_w$  mit  $w \in (aa)^*$ , der Sprache, in der Wörter gerader Länge enthalten sind, bei denen an keiner Position ein  $b$  steht.

## Tutoriumsaufgabe 1 (b)

---

- $L_2 = (ab + aa)^*$

## Tutoriumsaufgabe 1 (b)

---

- $L_2 = (ab + aa)^*$
- $\varphi_{Wort}$ ,  $\varphi_g$  und  $\varphi_{last}$  wie vorher.

## Tutoriumsaufgabe 1 (b)

---

- $L_2 = (ab + aa)^*$
- $\varphi_{Wort}$ ,  $\varphi_g$  und  $\varphi_{last}$  wie vorher.
- $\varphi_2 := \varphi_{Wort} \wedge \exists X(\varphi_g(X) \wedge \forall x(P_b(x) \rightarrow X(x)) \wedge \forall x(\varphi_{last}(x) \rightarrow X(x)))$

## Tutoriumsaufgabe 1 (b)

---

- $L_2 = (ab + aa)^*$
- $\varphi_{Wort}$ ,  $\varphi_g$  und  $\varphi_{last}$  wie vorher.
- $\varphi_2 := \varphi_{Wort} \wedge \exists X(\varphi_g(X) \wedge \forall x(P_b(x) \rightarrow X(x)) \wedge \forall x(\varphi_{last}(x) \rightarrow X(x)))$
- Intuitiv: Isomorph zu einer Wortstruktur, und wenn ein  $b$  erscheint, dann steht es an einer geraden Position. Außerdem besitzt das Wort eine gerade Länge.

## Tutoriumsaufgabe 1 (b)

---

Und somit gilt für  $\varphi_2$  folgendes:

$$\mathfrak{A} \models \varphi_2 \iff \mathfrak{A} \in \mathcal{K}_{(ab+aa)^*} \text{ mit}$$
$$\mathcal{K}_{(ab+aa)^*} := \{\mathfrak{A} \mid \text{es gibt ein } w \in (ab + aa)^*, \text{ sodass } \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}_w\}.$$

mit der Intuition: Jede Struktur, welche  $\varphi_2$  erfüllt, ist isomorph zu einer Wortstruktur  $\mathfrak{A}_w$  mit  $w \in (ab + aa)^*$ , der Sprache, in der Wörter eine gerade Länge haben und  $b$ 's nur an geraden Positionen erscheinen.

## Tutoriumsaufgabe 1 (c)

---

- $L_3 = (ab^*a)^*$

## Tutoriumsaufgabe 1 (c)

---

- $L_3 = (ab^*a)^*$
- $\varphi_{Wort}$ ,  $\varphi_0$  und  $\varphi_{+1}$  wie vorher.

## Tutoriumsaufgabe 1 (c)

---

- $L_3 = (ab^*a)^*$
- $\varphi_{Wort}$ ,  $\varphi_0$  und  $\varphi_{+1}$  wie vorher.
- $\varphi_1 := \neg\varphi_0(x) \wedge \forall y (\varphi_0(y) \vee x \dot{\leq} y)$

Intuitiv:  $x$  ist das zweitkleinste Element unter der Ordnung.

## Tutoriumsaufgabe 1 (c)

---

- $L_3 = (ab^*a)^*$
- $\varphi_{Wort}$ ,  $\varphi_0$  und  $\varphi_{+1}$  wie vorher.
- $\varphi_1 := \neg\varphi_0(x) \wedge \forall y (\varphi_0(y) \vee x \dot{\leq} y)$

Intuitiv:  $x$  ist das zweitkleinste Element unter der Ordnung.

- $\varphi_{disjunkt}(X_1, X_2) := \forall x(\neg(X_1(x) \wedge X_2(x)))$   
Intuitiv:  $X_1$  und  $X_2$  sind zwei disjunkte Relationen.

## Tutoriumsaufgabe 1 (c)

---

- $L_3 = (ab^*a)^*$
- $\varphi_{Wort}$ ,  $\varphi_0$  und  $\varphi_{+1}$  wie vorher.
- $\varphi_1 := \neg\varphi_0(x) \wedge \forall y (\varphi_0(y) \vee x \dot{\leq} y)$

Intuitiv:  $x$  ist das zweitkleinste Element unter der Ordnung.

- $\varphi_{disjunkt}(X_1, X_2) := \forall x(\neg(X_1(x) \wedge X_2(x)))$

Intuitiv:  $X_1$  und  $X_2$  sind zwei disjunkte Relationen.

- $\varphi_{a-Partition}(X_1, X_2) := \varphi_{disjunkt}(X_1, X_2) \wedge \forall x(P_a(x) \leftrightarrow (X_1(x) \vee X_2(x)))$

Intuitiv:  $X_1$  und  $X_2$  sind disjunkt und enthalten zusammen alle Positionen vom Buchstaben  $a$ .

## Tutoriumsaufgabe 1 (c)

---

- $L_3 = (ab^*a)^*$

## Tutoriumsaufgabe 1 (c)

---

- $L_3 = (ab^*a)^*$
- $\varphi_3 := \varphi_{Wort} \wedge \exists X_1 \exists X_2 (\varphi_{a-Partition}(X_1, X_2) \dots$

## Tutoriumsaufgabe 1 (c)

---

- $L_3 = (ab^*a)^*$
- $\varphi_3 := \varphi_{Wort} \wedge \exists X_1 \exists X_2 (\varphi_{a-Partition}(X_1, X_2) \dots$
- Isomorph zu einer Wortstruktur und alle Positionen von  $a$  sind disjunkt in  $X_1$  und  $X_2$  enthalten...

## Tutoriumsaufgabe 1 (c)

---

- $L_3 = (ab^*a)^*$
- $\varphi_3 := \varphi_{Wort} \wedge \exists X_1 \exists X_2 (\varphi_{a-Partition}(X_1, X_2) \dots$
- Isomorph zu einer Wortstruktur und alle Positionen von  $a$  sind disjunkt in  $X_1$  und  $X_2$  enthalten...
- $\dots \wedge \forall x(X_1(x) \rightarrow \exists y(x \dot{\leq} y \wedge X_2(y)) \wedge \forall z(x \dot{\leq} z \wedge x \neq z \wedge z \dot{\leq} y \rightarrow \neg X_1(z))) \dots$

## Tutoriumsaufgabe 1 (c)

---

- $L_3 = (ab^*a)^*$
- $\varphi_3 := \varphi_{Wort} \wedge \exists X_1 \exists X_2 (\varphi_{a-Partition}(X_1, X_2) \dots$
- Isomorph zu einer Wortstruktur und alle Positionen von  $a$  sind disjunkt in  $X_1$  und  $X_2$  enthalten...
- $\dots \wedge \forall x(X_1(x) \rightarrow \exists y(x \overset{.}{\leq} y \wedge X_2(y)) \wedge \forall z(x \overset{.}{\leq} z \wedge x \neq z \wedge z \overset{.}{\leq} y \rightarrow \neg X_1(z))) \dots$
- ... wenn Position  $x$  in  $X_1$ , dann existiert spätere Position  $y$  in  $X_2$ , und dazwischen liegt kein anderes  $a$  mit Position  $z$  ebenfalls in  $X_1$ ...

## Tutoriumsaufgabe 1 (c)

---

- $L_3 = (ab^*a)^*$
- $\varphi_3 := \varphi_{Wort} \wedge \exists X_1 \exists X_2 (\varphi_{a-Partition}(X_1, X_2) \dots$
- Isomorph zu einer Wortstruktur und alle Positionen von  $a$  sind disjunkt in  $X_1$  und  $X_2$  enthalten...
- ...  $\wedge \forall x (X_1(x) \rightarrow \exists y (x \dot{\leq} y \wedge X_2(y)) \wedge \forall z (x \dot{\leq} z \wedge x \neq z \wedge z \dot{\leq} y \rightarrow \neg X_1(z))) \dots$
- ... wenn Position  $x$  in  $X_1$ , dann existiert spätere Position  $y$  in  $X_2$ , und dazwischen liegt kein anderes  $a$  mit Position  $z$  ebenfalls in  $X_1$ ...
- ...  $\wedge \forall x (X_2(x) \rightarrow \forall y (\varphi_{+1}(x, y) \rightarrow X_1(y))) \dots$

## Tutoriumsaufgabe 1 (c)

---

- $L_3 = (ab^*a)^*$
- $\varphi_3 := \varphi_{Wort} \wedge \exists X_1 \exists X_2 (\varphi_{a-Partition}(X_1, X_2) \dots$
- Isomorph zu einer Wortstruktur und alle Positionen von  $a$  sind disjunkt in  $X_1$  und  $X_2$  enthalten...
- ...  $\wedge \forall x (X_1(x) \rightarrow \exists y (x \leq y \wedge X_2(y)) \wedge \forall z (x \leq z \wedge x \neq z \wedge z \leq y \rightarrow \neg X_1(z))) \dots$
- ... wenn Position  $x$  in  $X_1$ , dann existiert spätere Position  $y$  in  $X_2$ , und dazwischen liegt kein anderes  $a$  mit Position  $z$  ebenfalls in  $X_1$ ...
- ...  $\wedge \forall x (X_2(x) \rightarrow \forall y (\varphi_{+1}(x, y) \rightarrow X_1(y))) \dots$
- ... wenn Position  $x$  in  $X_2$  und ein Buchstabe direkt danach folgt, dann liegt die Position wieder in  $X_1$ ...

## Tutoriumsaufgabe 1 (c)

---

- $L_3 = (ab^*a)^*$
- $\varphi_3 := \varphi_{Wort} \wedge \exists X_1 \exists X_2 (\varphi_{a-Partition}(X_1, X_2) \dots$
- Isomorph zu einer Wortstruktur und alle Positionen von  $a$  sind disjunkt in  $X_1$  und  $X_2$  enthalten...
- ...  $\wedge \forall x (X_1(x) \rightarrow \exists y (x \dot{\leq} y \wedge X_2(y)) \wedge \forall z (x \dot{\leq} z \wedge x \neq z \wedge z \dot{\leq} y \rightarrow \neg X_1(z))) \dots$
- ... wenn Position  $x$  in  $X_1$ , dann existiert spätere Position  $y$  in  $X_2$ , und dazwischen liegt kein anderes  $a$  mit Position  $z$  ebenfalls in  $X_1$ ...
- ...  $\wedge \forall x (X_2(x) \rightarrow \forall y (\varphi_{+1}(x, y) \rightarrow X_1(y))) \dots$
- ... wenn Position  $x$  in  $X_2$  und ein Buchstabe direkt danach folgt, dann liegt die Position wieder in  $X_1$ ...
- ...  $\wedge \forall x (\varphi_1(x) \rightarrow X_1(x)))$

## Tutoriumsaufgabe 1 (c)

---

- $L_3 = (ab^*a)^*$
- $\varphi_3 := \varphi_{Wort} \wedge \exists X_1 \exists X_2 (\varphi_{a-Partition}(X_1, X_2) \dots$
- Isomorph zu einer Wortstruktur und alle Positionen von  $a$  sind disjunkt in  $X_1$  und  $X_2$  enthalten...
- ...  $\wedge \forall x (X_1(x) \rightarrow \exists y (x \leq y \wedge X_2(y)) \wedge \forall z (x \leq z \wedge x \neq z \wedge z \leq y \rightarrow \neg X_1(z))) \dots$
- ... wenn Position  $x$  in  $X_1$ , dann existiert spätere Position  $y$  in  $X_2$ , und dazwischen liegt kein anderes  $a$  mit Position  $z$  ebenfalls in  $X_1$ ...
- ...  $\wedge \forall x (X_2(x) \rightarrow \forall y (\varphi_{+1}(x, y) \rightarrow X_1(y))) \dots$
- ... wenn Position  $x$  in  $X_2$  und ein Buchstabe direkt danach folgt, dann liegt die Position wieder in  $X_1$ ...
- ...  $\wedge \forall x (\varphi_1(x) \rightarrow X_1(x)))$
- ... und der erste Buchstabe ist ein  $a$  mit Position 1 aus der Relation  $X_1$ .

## Tutoriumsaufgabe 1 (c)

---

Und somit gilt für  $\varphi_3$  folgendes:

$$\mathfrak{A} \models \varphi_3 \iff \mathfrak{A} \in \mathcal{K}_{(ab^*a)^*} \text{ mit } \mathcal{K}_{(ab^*a)^*} := \{\mathfrak{A} \mid \text{es gibt ein } w \in (ab^*a)^*, \text{ sodass } \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}_w\}.$$

mit der Intuition: Jede Struktur, welche  $\varphi_3$  erfüllt, ist isomorph zu einer Wortstruktur  $\mathfrak{A}_w$  mit  $w \in (ab^*a)^*$ , der Sprache, in der Wörter immer mit einem  $a$  (aus  $X_1$ ) beginnen, dann beliebig viele  $b$ 's auftauchen können, dann jedoch noch ein  $a$  (aus  $X_2$ ) erscheinen muss. Und falls danach noch ein Buchstabe folgt, ist es wieder ein  $a$  aus  $X_1$  und es geht wieder von vorne los.

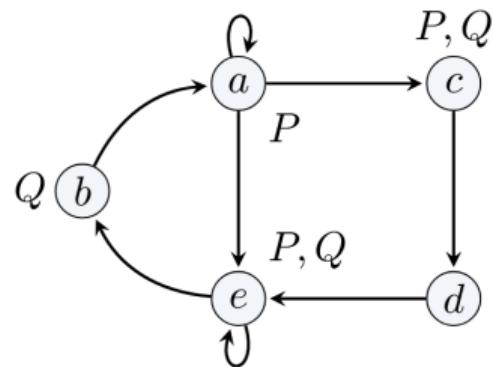
## Tutoriumsaufgabe 2

---

Wir betrachten die modallogische Formel

$$\varphi := \Diamond(Q \rightarrow \Box(P))$$

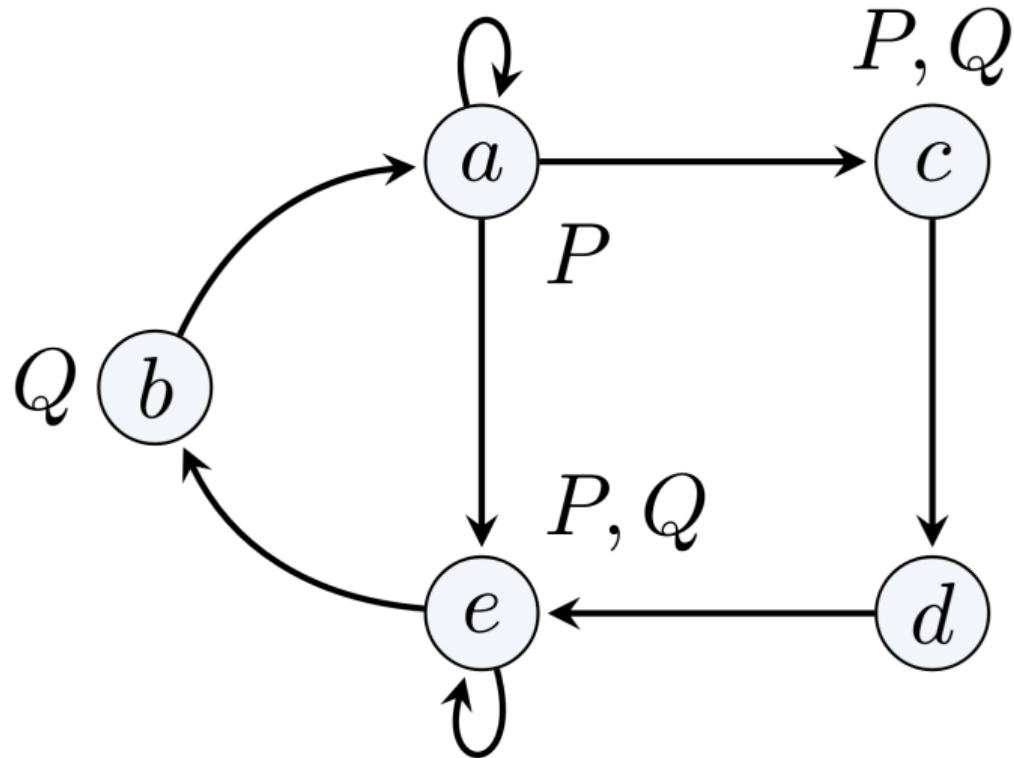
und die folgende Kripkestruktur  $\mathfrak{A}$  mit Universum  $A$ .



Geben Sie alle Welten  $x \in A$  an, sodass  $\mathfrak{A}, x \models \varphi$  gilt.

## Tutoriumsaufgabe 2

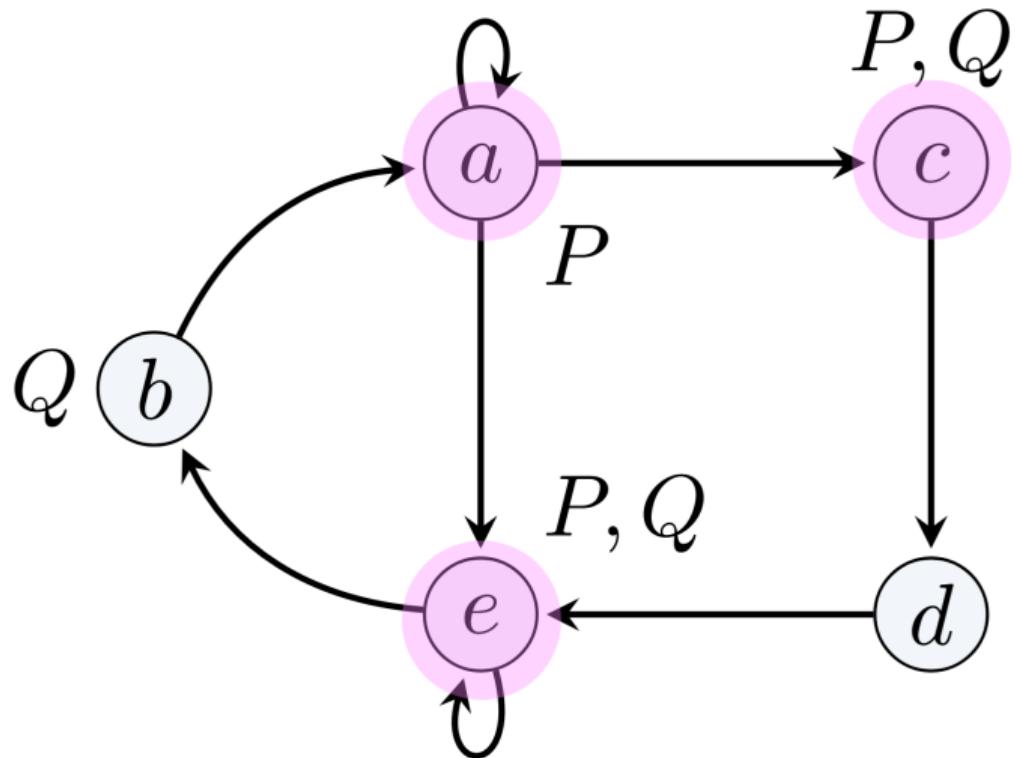
---



## Tutoriumsaufgabe 2

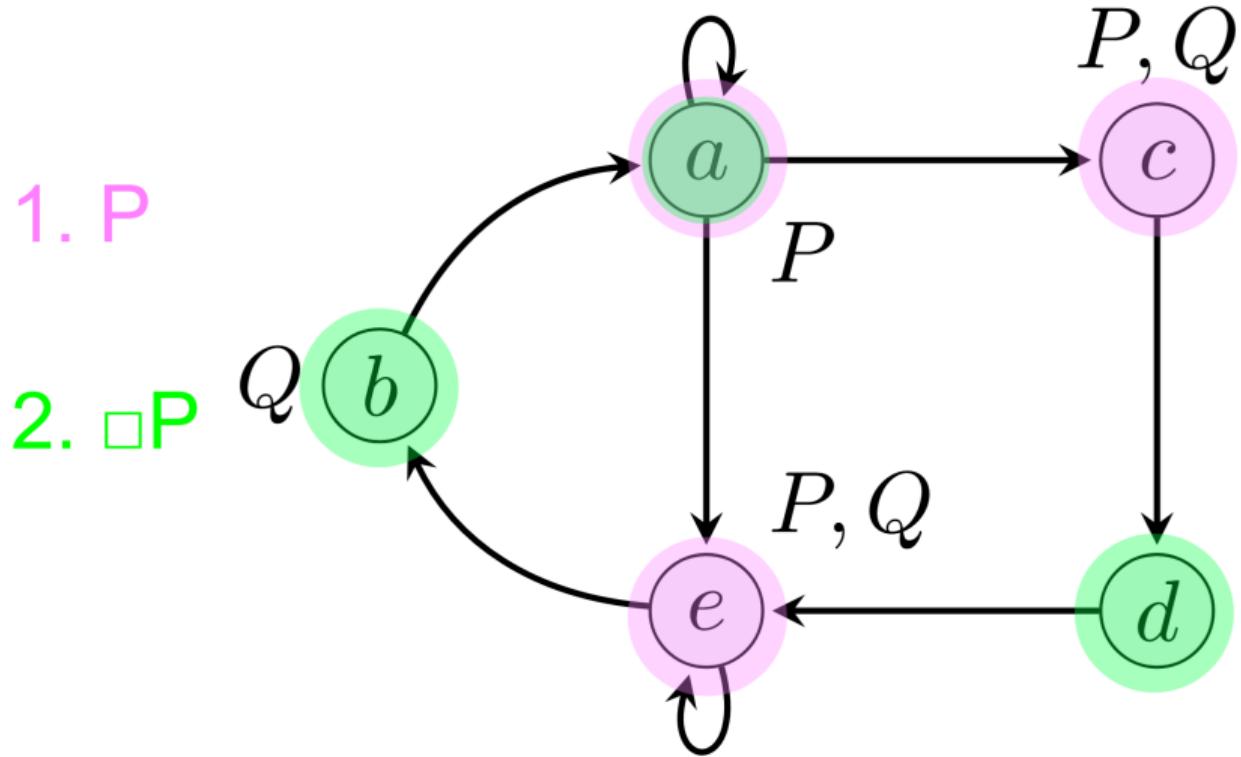
---

1. P



## Tutoriumsaufgabe 2

---

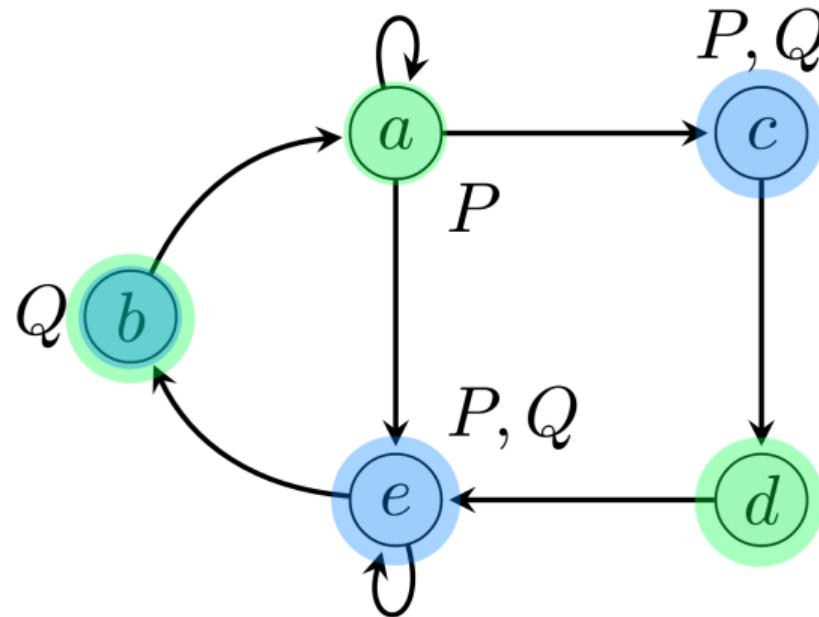


## Tutoriumsaufgabe 2

---

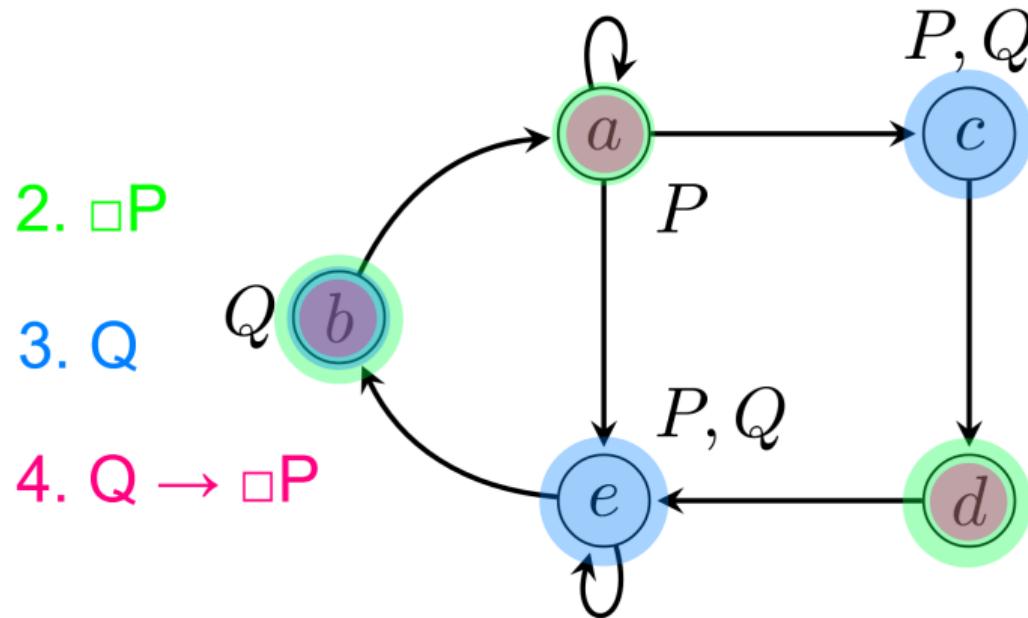
2.  $\square P$

3. Q



## Tutoriumsaufgabe 2

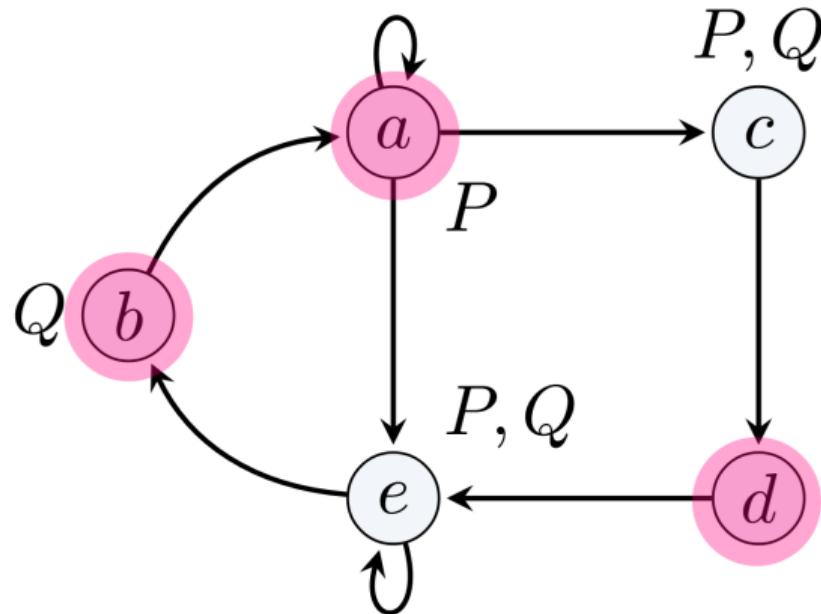
---



## Tutoriumsaufgabe 2

---

4.  $Q \rightarrow \square P$

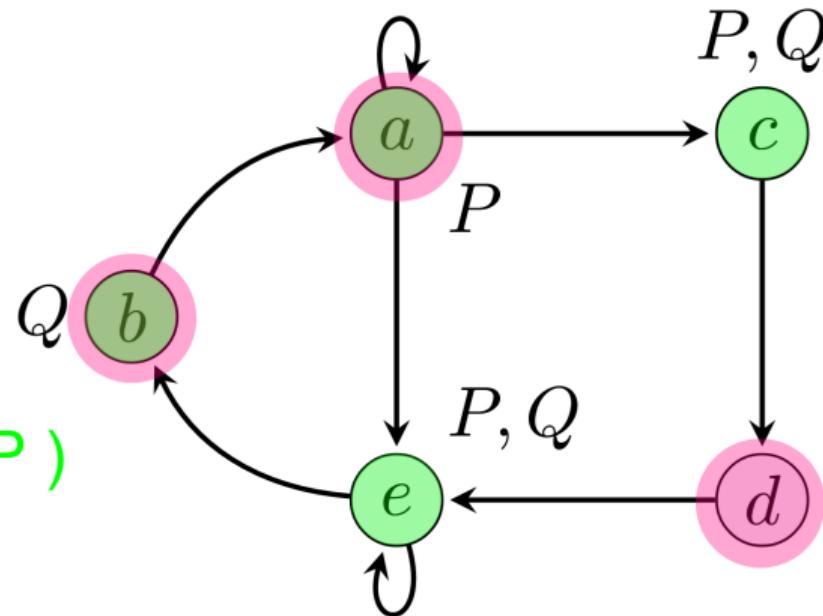


## Tutoriumsaufgabe 2

---

4.  $Q \rightarrow \square P$

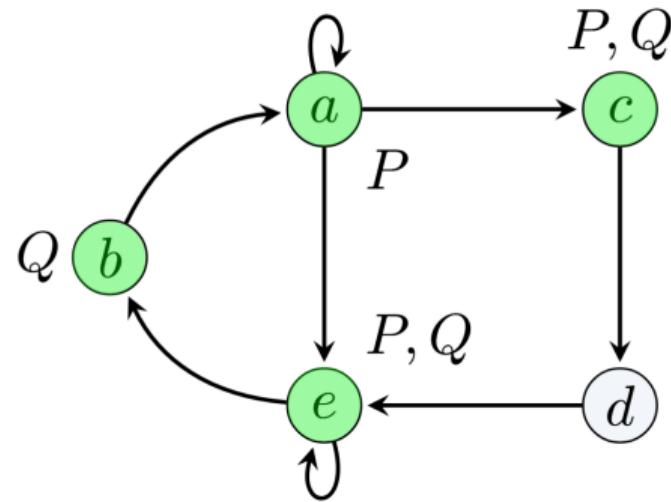
5.  $\diamond(Q \rightarrow \square P)$



# Tutoriumsaufgabe 2

---

5.  $\Diamond(Q \rightarrow \Box P)$



## Tutoriumsaufgabe 2

---

Also gilt:  $\mathfrak{A}, x \models \varphi \iff x \in \{a, b, c, e\}$ .

Alternative Lösung, von "außen":  $\varphi := \Diamond(Q \rightarrow \Box(P))$ .

$\mathfrak{A}, x \models \varphi$ , wenn man von  $x$  aus eine Welt  $y$  erreichen kann, in der  $Q$  nicht gilt, oder falls  $Q$  in  $y$  gilt, dann gilt in allen Welten die man von  $y$  aus erreichen kann auch  $P$ .

## Tutoriumsaufgabe 3

---

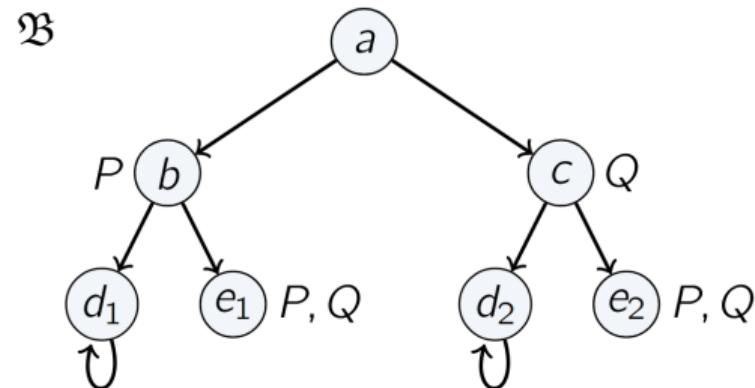
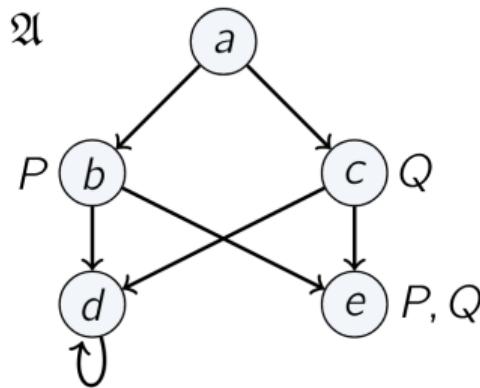
Zeigen Sie oder widerlegen Sie, dass folgende Eigenschaften von Kripkestrukturen mit ausgewählter Welt  $a$  durch eine modallogische Formel definierbar sind. Geben Sie dazu entweder eine Formel oder eine Gewinnstrategie in einem geeigneten Bisimulationsspiel an.

- a)**  $a$  ist eine Endwelt (hat keine Nachfolgerwelten).
- b)** Wenn  $a$  zwei verschiedene erreichbare Welten hat, in den  $P$  gilt, dann ist  $Q$  aus  $a$  beweisbar.
- c)**  $a$  liegt auf einem Dreieck in dem Digraphen der Kripkestruktur.
- d)** Wenn  $P$  in  $a$  möglich ist, dann ist  $Q$  aus  $a$  beweisbar.

# Tutoriumsaufgabe 3

---

Beispiel 8.47



(D) hat eine Gewinnstrategie für das Spiel  $BS(\mathfrak{A}, a, \mathfrak{B}, a)$ .

## Tutoriumsaufgabe 3 (a)

---

Im Bisimulationsspiel  $BS(\mathfrak{A}, a, \mathfrak{B}, a)$  starten der Herausforderer (H) und die Duplikatorin (D) in der Startposition  $(a, a)$ .

Nun zieht (H) in einer Struktur seiner Wahl weiter in eine benachbarte Welt. Danach spielt (D) ihren Zug in der jeweils anderen Struktur.

(H) gewinnt, wenn in einer Runde zwei Welten ausgewählt wurden, in dem ein  $P \in \sigma$  nur für eine Welt gilt (\*), oder wenn (H) im nächsten Zug noch ziehen könnte, aber (D) dann in der anderen Struktur keinen Zug mehr tätigen kann (Endwelt).

(D) gewinnt, wenn (\*) nicht gilt und (H) und (D) in der nächsten Runde keinen Zug mehr tätigen könnten (beides Endwelten), oder wenn die Partie nie endet.

Diese Erklärung ist nur intuitiv, aber nicht so präzise und formal wie die korrekte Erklärung auf Seite 8.39. Guckt euch die auf jeden Fall an!

## Tutoriumsaufgabe 3 (a)

---

Zeigen Sie oder widerlegen Sie, dass folgende Eigenschaften von Kripkestrukturen mit ausgewählter Welt  $a$  durch eine modallogische Formel definierbar sind. Geben Sie dazu entweder eine Formel oder eine Gewinnstrategie in einem geeigneten Bisimulationsspiel an.

- a)**  $a$  ist eine Endwelt (hat keine Nachfolgerwelten).
- b)** Wenn  $a$  zwei verschiedene erreichbare Welten hat, in den  $P$  gilt, dann ist  $Q$  aus  $a$  beweisbar.
- c)**  $a$  liegt auf einem Dreieck in dem Digraphen der Kripkestruktur.
- d)** Wenn  $P$  in  $a$  möglich ist, dann ist  $Q$  aus  $a$  beweisbar.

## Tutoriumsaufgabe 3 (a)

---

Kann man definieren:  $\varphi_1 := \square \perp$

$$(iv) \quad [\![\square \varphi]\!]^{\mathfrak{A}, a} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{A}, b} = 1 \text{ für alle } b \in N^{\mathfrak{A}}(a), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$[\![\diamond \varphi]\!]^{\mathfrak{A}, a} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{A}, b} = 1 \text{ für mindestens ein } b \in N^{\mathfrak{A}}(a), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

## Tutoriumsaufgabe 3 (b)

---

Zeigen Sie oder widerlegen Sie, dass folgende Eigenschaften von Kripkestrukturen mit ausgewählter Welt  $a$  durch eine modallogische Formel definierbar sind. Geben Sie dazu entweder eine Formel oder eine Gewinnstrategie in einem geeigneten Bisimulationsspiel an.

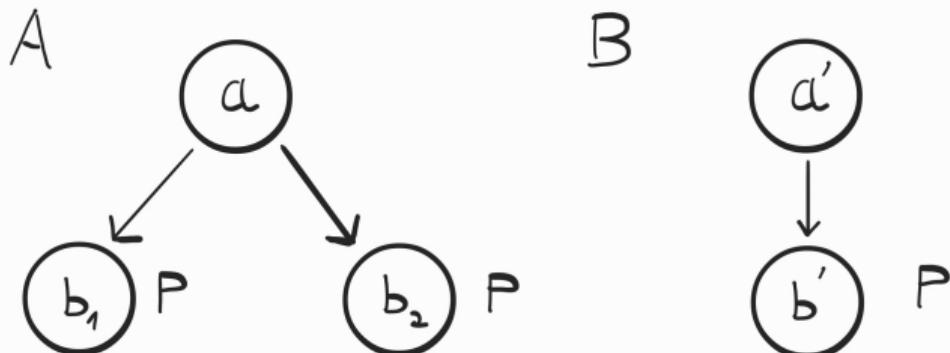
- a)**  $a$  ist eine Endwelt (hat keine Nachfolgerwelten).
- b)** Wenn  $a$  zwei verschiedene erreichbare Welten hat, in den  $P$  gilt, dann ist  $Q$  aus  $a$  beweisbar.
- c)**  $a$  liegt auf einem Dreieck in dem Digraphen der Kripkestruktur.
- d)** Wenn  $P$  in  $a$  möglich ist, dann ist  $Q$  aus  $a$  beweisbar.

## Tutoriumsaufgabe 3 (b)

---

- ▶ Unter dieser Interpretation bedeutet  $\Diamond\varphi$ :  
*Es ist möglich (d.h., mit meinem Wissen verträglich), dass  $\varphi$  gilt.*
- ▶ Es gibt eine Reihe von Varianten dieser Interpretation, in denen  $\Box\varphi$  etwa gelesen wird als:
  - ▶ Ich glaube  $\varphi$ .
  - ▶  $\varphi$  ist beweisbar.

## Tutoriumsaufgabe 3 (b)



Angenommen es gibt eine Formel  $\varphi$ , welche die geforderte Eigenschaft definiert.

Hier gilt  $(\mathfrak{A}, a) \not\models \varphi$  und  $(\mathfrak{B}, a') \models \varphi$ , jedoch hat (D) eine Gewinnstrategie, indem (D)  $b'$  auswählt, wenn (H)  $b_1$  oder  $b_2$  auswählt und (D)  $b_1$  oder  $b_2$  auswählt, wenn (H)  $b'$  ausgewählt hat. Die je zwei ausgewählten Welten haben keine Nachbarn mehr.

Dann gilt jedoch  $(\mathfrak{A}, a) \sim (\mathfrak{B}, a')$  und somit gilt  $(\mathfrak{A}, a) \models \varphi \iff (\mathfrak{B}, a') \models \varphi$  nach VL.  
Widerspruch zur Annahme!

## Tutoriumsaufgabe 3 (b)

---

### Definition 8.49

Seien  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  Kripkestrukturen und  $a \in A, b \in B$ .

- (1)  $\mathfrak{A}, a$  und  $\mathfrak{B}, b$  sind **bisimilar** (wir schreiben  $\mathfrak{A}, a \sim \mathfrak{B}, b$ ), wenn (D) eine Gewinnstrategie für das Spiel  $BS(\mathfrak{A}, a, \mathfrak{B}, b)$  hat.
- (2)  $\mathfrak{A}, a$  und  $\mathfrak{B}, b$  sind **modallogisch äquivalent**, wenn für alle  $\varphi \in ML$  gilt:

$$\mathfrak{A}, a \models \varphi \iff \mathfrak{B}, b \models \varphi.$$

### Satz 8.50

Seien  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  Kripkestrukturen und  $a \in A, b \in B$ , so dass  $\mathfrak{A}, a \sim \mathfrak{B}, b$ . Dann sind  $\mathfrak{A}, a$  und  $\mathfrak{B}, b$  modallogisch äquivalent.

Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

## Tutoriumsaufgabe 3 (c)

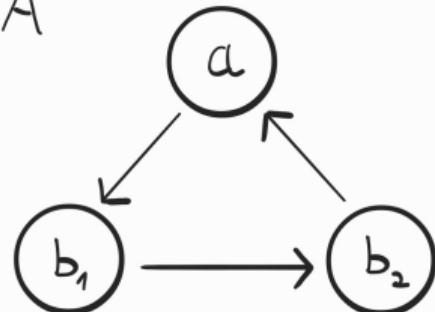
---

Zeigen Sie oder widerlegen Sie, dass folgende Eigenschaften von Kripkestrukturen mit ausgewählter Welt  $a$  durch eine modallogische Formel definierbar sind. Geben Sie dazu entweder eine Formel oder eine Gewinnstrategie in einem geeigneten Bisimulationsspiel an.

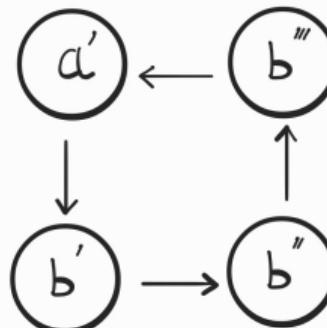
- a)**  $a$  ist eine Endwelt (hat keine Nachfolgerwelten).
- b)** Wenn  $a$  zwei verschiedene erreichbare Welten hat, in den  $P$  gilt, dann ist  $Q$  aus  $a$  beweisbar.
- c)**  $a$  liegt auf einem Dreieck in dem Digraphen der Kripkestruktur.
- d)** Wenn  $P$  in  $a$  möglich ist, dann ist  $Q$  aus  $a$  beweisbar.

## Tutoriumsaufgabe 3 (c)

A



B



Angenommen es gibt eine Formel  $\varphi$ , sodass  $(\mathfrak{A}, a) \models \varphi \iff a$  liegt auf einem Dreieck.

Hier gilt  $(\mathfrak{A}, a) \models \varphi$  und  $(\mathfrak{B}, a') \not\models \varphi$ , jedoch hat (D) eine Gewinnstrategie, da nur nach vorne gezogen werden kann und das Spiel nie endet.

Dann gilt jedoch  $(\mathfrak{A}, a) \sim (\mathfrak{B}, a')$  und somit gilt  $(\mathfrak{A}, a) \models \varphi \iff (\mathfrak{B}, a') \models \varphi$  nach VL.  
Widerspruch zur Annahme!

## Tutoriumsaufgabe 3 (c)

---

### Definition 8.49

Seien  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  Kripkestrukturen und  $a \in A, b \in B$ .

- (1)  $\mathfrak{A}, a$  und  $\mathfrak{B}, b$  sind **bisimilar** (wir schreiben  $\mathfrak{A}, a \sim \mathfrak{B}, b$ ), wenn (D) eine Gewinnstrategie für das Spiel  $BS(\mathfrak{A}, a, \mathfrak{B}, b)$  hat.
- (2)  $\mathfrak{A}, a$  und  $\mathfrak{B}, b$  sind **modallogisch äquivalent**, wenn für alle  $\varphi \in ML$  gilt:

$$\mathfrak{A}, a \models \varphi \iff \mathfrak{B}, b \models \varphi.$$

### Satz 8.50

Seien  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  Kripkestrukturen und  $a \in A, b \in B$ , so dass  $\mathfrak{A}, a \sim \mathfrak{B}, b$ . Dann sind  $\mathfrak{A}, a$  und  $\mathfrak{B}, b$  modallogisch äquivalent.

Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

## Tutoriumsaufgabe 3 (d)

---

Zeigen Sie oder widerlegen Sie, dass folgende Eigenschaften von Kripkestrukturen mit ausgewählter Welt  $a$  durch eine modallogische Formel definierbar sind. Geben Sie dazu entweder eine Formel oder eine Gewinnstrategie in einem geeigneten Bisimulationsspiel an.

- a)**  $a$  ist eine Endwelt (hat keine Nachfolgerwelten).
- b)** Wenn  $a$  zwei verschiedene erreichbare Welten hat, in den  $P$  gilt, dann ist  $Q$  aus  $a$  beweisbar.
- c)**  $a$  liegt auf einem Dreieck in dem Digraphen der Kripkestruktur.
- d)** Wenn  $P$  in  $a$  möglich ist, dann ist  $Q$  aus  $a$  beweisbar.

## Tutoriumsaufgabe 3 (d)

---

- ▶ Unter dieser Interpretation bedeutet  $\Diamond\varphi$ :  
*Es ist möglich (d.h., mit meinem Wissen verträglich), dass  $\varphi$  gilt.*
- ▶ Es gibt eine Reihe von Varianten dieser Interpretation, in denen  $\Box\varphi$  etwa gelesen wird als:
  - ▶ Ich glaube  $\varphi$ .
  - ▶  $\varphi$  ist beweisbar.

## Tutoriumsaufgabe 3 (d)

---

Kann man definieren:  $\varphi_4 := \Diamond P \rightarrow \Box Q$

# Tutoriumsaufgabe 4

---

Fassen Sie die Inhalte der Kapitel der Vorlesung knapp zusammen.

- a) **Kapitel 1** Aussagenlogik
- b) **Kapitel 2** Folgern und Beweisen in der Aussagenlogik
- c) **Kapitel 3** Strukturen
- d) **Kapitel 4** Logik der 1. Stufe
- e) **Kapitel 5** Der Vollständigkeitssatz
- f) **Kapitel 6** Die Unentscheidbarkeit der Logik der 1. Stufe
- g) **Kapitel 7** Elementare Äquivalenz
- h) **Kapitel 8** Ausblick auf weitere Logiken

**Viel Erfolg für die Klausurenphase! :)**