Mathematische Logik

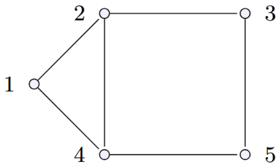
Tutorium 18 - Blatt 7

Steffen Brand
steffen.brand@rwth-aachen.de

06.06.2025

Tutoriumsaufgabe 1

Sei $\sigma = \{E/2\}$, sei $\mathfrak{G}$ die Graphstruktur, die durch den Graphen



definiert ist. Geben Sie eine Formel $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$ mit einer freien Variable an, sodass gilt

a) $\mathfrak{G} \models \varphi(v)$ genau dann, wenn $v \in \{2, 4\}$,

b) $\mathfrak{G} \models \varphi(v)$ genau dann, wenn $v = 1$,

c) $\mathfrak{G} \models \varphi(v)$ genau dann, wenn $v = 3$,

oder beweisen Sie, dass es keine solche Formel gibt.

Tutoriumsaufgabe 1

Wie beweist man, dass es keine solche Formel gibt?

Tutoriumsaufgabe 1

Lemma 4.31 (Isomorphielemma)

Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ isomorphe σ-Strukturen und $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}'$.

(1) *Für alle σ-Terme $\theta(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{T}(\sigma)$ und alle $a_1, \dots, a_n \in A$ gilt*

$$\pi\left(\theta^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)\right) \quad = \quad \theta^{\mathfrak{A}'}\left(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)\right).$$

(2) *Für alle σ-Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{L}(\sigma)$ und alle $a_1, \dots, a_n \in A$ gilt*

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A}' \models \varphi\left(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)\right).$$

Tutoriumsaufgabe 1

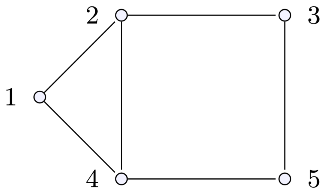
Was kann man (unter anderem) nutzen um eine Formel zu konstruieren, falls sie existiert?

Tutoriumsaufgabe 1

$$\chi_d(x) := \exists x_1 \ldots \exists x_d \Big(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq d} \neg x_i \doteq x_j \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq d} E(x, x_i) \wedge \forall y \Big(E(x, y) \to \bigvee_{1 \leq i \leq d} y \doteq x_i \Big) \Big)$$

Diese Formel besagt, dass der Knoten x den Grad d hat.

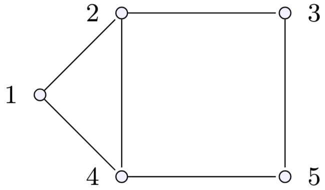
Tutoriumsaufgabe 1



Gebt eine Formel $\varphi \in L(\sigma)$ mit einer freien Variable an, sodass gilt:

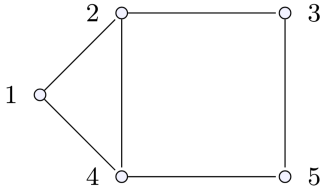
$\mathfrak{G} \models \varphi(v)$ genau dann, wenn $v \in \{2, 4\}$ oder beweist, dass so eine Formel nicht existiert.

Tutoriumsaufgabe 1



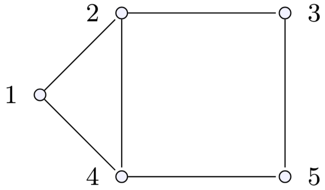
- Was fällt euch mit Bezug auf Knoten 2 und 4 auf?

Tutoriumsaufgabe 1



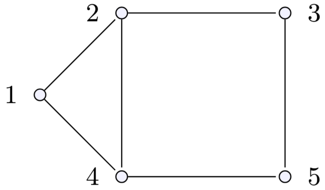
- Was fällt euch mit Bezug auf Knoten 2 und 4 auf?
- Sie sind die einzigen Knoten mit Grad 3.

Tutoriumsaufgabe 1



- Was fällt euch mit Bezug auf Knoten 2 und 4 auf?
- Sie sind die einzigen Knoten mit Grad 3.
- $\varphi(x) := \chi_3(x)$

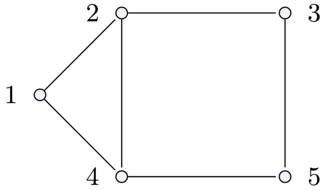
Tutoriumsaufgabe 1



Gebt eine Formel $\varphi \in L(\sigma)$ mit einer freien Variable an, sodass gilt:

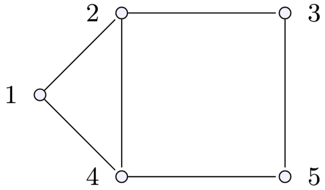
$\mathfrak{G} \models \varphi(v)$ genau dann, wenn $v = 1$ oder beweist, dass so eine Formel nicht existiert.

Tutoriumsaufgabe 1



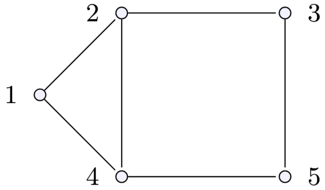
- Was fällt euch mit Bezug auf Knoten 1 auf?

Tutoriumsaufgabe 1



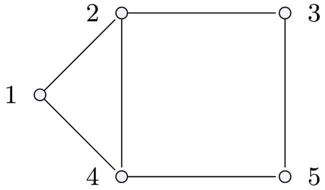
- Was fällt euch mit Bezug auf Knoten 1 auf?
- Er ist der einzige Knoten, der Grad 2 besitzt und in einem Dreieck liegt.

Tutoriumsaufgabe 1



- Was fällt euch mit Bezug auf Knoten 1 auf?
- Er ist der einzige Knoten, der Grad 2 besitzt und in einem Dreieck liegt.
- $\varphi(x) := \chi_2(x) \wedge \exists y \exists z (E(x,y) \wedge E(x,z) \wedge E(y,z))$

Tutoriumsaufgabe 1



Gebt eine Formel $\varphi \in L(\sigma)$ mit einer freien Variable an, sodass gilt:

$\mathfrak{G} \models \varphi(v)$ genau dann, wenn $v = 3$ oder beweist, dass so eine Formel nicht existiert.

Tutoriumsaufgabe 1

- Hier müssen wir nun einen Beweis über das Isomorphielemma führen
- Schritt 1: Einen Isomorphismus definieren.
- Schritt 2: Isomorphielemma anwenden, um zu zeigen, dass die Formel auch für ein anderes Element des Universums erfüllt wäre.
- Schritt 3: Schlussfolgern, dass dies gegen die g.d.w.-Beziehung verstößt!

Tutoriumsaufgabe 1

Lemma 4.31 (Isomorphielemma)

Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ isomorphe σ-Strukturen und $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}'$.

(1) *Für alle σ-Terme $\theta(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{T}(\sigma)$ und alle $a_1, \dots, a_n \in A$ gilt*

$$\pi\big(\theta^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)\big) \quad = \quad \theta^{\mathfrak{A}'}\big(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)\big).$$

(2) *Für alle σ-Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{L}(\sigma)$ und alle $a_1, \dots, a_n \in A$ gilt*

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A}' \models \varphi\big(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)\big).$$

Tutoriumsaufgabe 1

- Schritt 1: Isomorphismus: $\pi : \; G \mapsto G$ definieren:

v	1	2	3	4	5
$\pi(v)$	1	4	5	2	3

Tutoriumsaufgabe 1

- Schritt 1: Isomorphismus: $\pi : \; G \mapsto G$ definieren:

v	1	2	3	4	5
$\pi(v)$	1	4	5	2	3

- Schritt 2: Nach Isomorphielemma gilt:

$$\mathfrak{G} \models \varphi(3) \iff \mathfrak{G} \models \varphi(5)$$

Tutoriumsaufgabe 1

- Schritt 1: Isomorphismus: $\pi : \ G \mapsto G$ definieren:

v	1	2	3	4	5
$\pi(v)$	1	4	5	2	3

- Schritt 2: Nach Isomorphielemma gilt:

$$\mathfrak{G} \models \varphi(3) \iff \mathfrak{G} \models \varphi(5)$$

- Schritt 3: Also kann keine Formel existieren, für die gilt $\mathfrak{G} \models \varphi(v)$ genau dann wenn $v = 3$, da dann auch immer gelten würde $\mathfrak{G} \models \varphi(v)$ für $v = 5$.

Tutoriumsaufgabe 2

Tutoriumsaufgabe 2

Zeigen oder widerlegen Sie dass für alle endlichen $\Gamma \subset L(\sigma)$ und alle $\varphi \in L(\sigma)$ die folgenden Regeln im Sequenzenkalkül der Logik 1. Stufe korrekt sind. Sind die Regeln ableitbar?

a)

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x \varphi}{\Gamma \vdash \exists x \varphi}$$

b)

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x \varphi}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}$$

c)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \frac{x}{y}}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}$$

Tutoriumsaufgabe 2

Wie zeigt man, dass eine Regel korrekt ist?

Tutoriumsaufgabe 2

Wie zeigt man, dass eine Regel korrekt ist?

- Ableitung angeben! Ruhig die obere(n) Sequenz(en) als Annahme benutzen.

Tutoriumsaufgabe 2

Definition 5.8

Eine Sequenzenregel

$$\frac{A_1 \quad \cdots \quad A_k}{S}$$

ist ableitbar im Sequenzenkalkül, wenn es eine Ableitung von S aus $A_1, \ldots, A_k$ gibt.

Lemma 5.9

Jede ableitbare Sequenzenregel ist korrekt.

Tutoriumsaufgabe 2

Wie widerlegt man, dass eine Regel korrekt ist?

Tutoriumsaufgabe 2

Wie widerlegt man, dass eine Regel korrekt ist?

- Eine Instanziierung finden für die gilt:

Tutoriumsaufgabe 2

Wie widerlegt man, dass eine Regel korrekt ist?

- Eine Instanziierung finden für die gilt:
- Obere Sequenz ist gültig.

Tutoriumsaufgabe 2

Wie widerlegt man, dass eine Regel korrekt ist?

- Eine Instanziierung finden für die gilt:
- Obere Sequenz ist gültig.
- Untere Sequenz ist nicht gültig.

Tutoriumsaufgabe 2

Wie widerlegt man, dass eine Regel korrekt ist?

- Eine Instanziierung finden für die gilt:
- Obere Sequenz ist gültig.
- Untere Sequenz ist nicht gültig.
- Dann kann die Regel nicht korrekt sein!

Tutoriumsaufgabe 2

$$(\forall I) \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi\frac{y}{x}}{\Gamma \vdash \forall x\varphi} \quad \text{falls } y \notin \mathrm{frei}(\Gamma \cup \{\forall x\varphi\}) \qquad (\forall E) \quad \frac{\Gamma \vdash \forall x\varphi}{\Gamma \vdash \varphi\frac{\theta}{x}}$$

$$(\exists I) \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi\frac{\theta}{x}}{\Gamma \vdash \exists x\varphi} \qquad (\exists E) \quad \frac{\Gamma \vdash \exists x\varphi \qquad \Gamma, \varphi\frac{y}{x} \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi} \quad \text{falls } y \notin \mathrm{frei}(\Gamma \cup \{\exists x\varphi, \psi\}).$$

Tutoriumsaufgabe 2

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x \varphi}{\Gamma \vdash \exists x \varphi}$$

Tutoriumsaufgabe 2

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x \varphi}{\Gamma \vdash \exists x \varphi}$$

- Die Regel ist korrekt. Wir geben eine Ableitung an:

Tutoriumsaufgabe 2

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x \varphi}{\Gamma \vdash \exists x \varphi}$$

- Die Regel ist korrekt. Wir geben eine Ableitung an:
- 1. $\Gamma \vdash \forall x \varphi$ Annahme

Tutoriumsaufgabe 2

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x\varphi}{\Gamma \vdash \exists x\varphi}$$

- Die Regel ist korrekt. Wir geben eine Ableitung an:
- 1. $\Gamma \vdash \forall x \varphi$ Annahme
- 2. $\Gamma \vdash \varphi\frac{x}{x}$ ($\forall$E) auf 1 mit $\theta = x$

Tutoriumsaufgabe 2

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x \varphi}{\Gamma \vdash \exists x \varphi}$$

- Die Regel ist korrekt. Wir geben eine Ableitung an:
- 1. $\Gamma \vdash \forall x \varphi$ Annahme
- 2. $\Gamma \vdash \varphi\frac{x}{x}$ ($\forall$E) auf 1 mit $\theta = x$
- 3. $\Gamma \vdash \exists x \varphi$ ($\exists$I) auf 2 mit $\theta = x$

Tutoriumsaufgabe 2

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x \varphi}{\Gamma \vdash \exists x \varphi}$$

- Die Regel ist korrekt. Wir geben eine Ableitung an:
- 1. $\Gamma \vdash \forall x \varphi$ Annahme
- 2. $\Gamma \vdash \varphi\frac{x}{x}$ $(\forall \mathrm{E})$ auf 1 mit $\theta = x$
- 3. $\Gamma \vdash \exists x \varphi$ $(\exists \mathrm{I})$ auf 2 mit $\theta = x$
- Aufpassen! Man muss θ immer definieren!

Tutoriumsaufgabe 2

$$(\forall I) \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi\frac{y}{x}}{\Gamma \vdash \forall x\varphi} \quad \text{falls } y \notin \text{frei}(\Gamma \cup \{\forall x\varphi\}) \qquad (\forall E) \quad \frac{\Gamma \vdash \forall x\varphi}{\Gamma \vdash \varphi\frac{\theta}{x}}$$

$$(\exists I) \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi\frac{\theta}{x}}{\Gamma \vdash \exists x\varphi} \qquad (\exists E) \quad \frac{\Gamma \vdash \exists x\varphi \qquad \Gamma, \varphi\frac{y}{x} \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi} \quad \text{falls } y \notin \text{frei}(\Gamma \cup \{\exists x\varphi, \psi\}).$$

Tutoriumsaufgabe 2

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x \varphi}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}$$

Tutoriumsaufgabe 2

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x \varphi}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}$$

- Die Regel ist nicht korrekt. Gegenbeispiel:

Tutoriumsaufgabe 2

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x \varphi}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}$$

- Die Regel ist nicht korrekt. Gegenbeispiel:
- Sei $\Gamma := \emptyset$ und $\varphi := x \doteq y$.

Tutoriumsaufgabe 2

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x \varphi}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}$$

- Die Regel ist nicht korrekt. Gegenbeispiel:
- Sei $\Gamma := \emptyset$ und $\varphi := x \doteq y$.
- Dann ist $\emptyset \vdash \exists x\ x \doteq y$ gültig, weil $\exists x\ x \doteq y$ allgemeingültig ist.

Tutoriumsaufgabe 2

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x \varphi}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}$$

- Die Regel ist nicht korrekt. Gegenbeispiel:
- Sei $\Gamma := \emptyset$ und $\varphi := x \doteq y$.
- Dann ist $\emptyset \vdash \exists x \; x \doteq y$ gültig, weil $\exists x \; x \doteq y$ allgemeingültig ist.
- Aber $\emptyset \vdash \forall x \; x \doteq y$ ist nicht gültig, weil $\forall x \; x \doteq y$ nicht allgemeingültig ist.

Tutoriumsaufgabe 2

$$(\forall I) \quad \frac{\Gamma \ \vdash \ \varphi\frac{y}{x}}{\Gamma \ \vdash \ \forall x \varphi} \quad \text{falls } y \notin \text{frei}(\Gamma \cup \{\forall x \varphi\}) \qquad (\forall E) \quad \frac{\Gamma \ \vdash \ \forall x \varphi}{\Gamma \ \vdash \ \varphi\frac{\theta}{x}}$$

$$(\exists I) \quad \frac{\Gamma \ \vdash \ \varphi\frac{\theta}{x}}{\Gamma \ \vdash \ \exists x \varphi} \qquad (\exists E) \quad \frac{\Gamma \ \vdash \ \exists x \varphi \qquad \Gamma, \varphi\frac{y}{x} \ \vdash \ \psi}{\Gamma \ \vdash \ \psi} \quad \text{falls } y \notin \text{frei}(\Gamma \cup \{\exists x \varphi, \psi\}).$$

Tutoriumsaufgabe 2

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi\frac{x}{y}}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}$$

Tutoriumsaufgabe 2

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi\frac{x}{y}}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}$$

- Die Regel ist nicht korrekt. Gegenbeispiel:

Tutoriumsaufgabe 2

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi\frac{x}{y}}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}$$

- Die Regel ist nicht korrekt. Gegenbeispiel:
- Sei $\Gamma := \{x \doteq y\}$ und $\varphi := x \doteq y$.

Tutoriumsaufgabe 2

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi\frac{x}{y}}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}$$

- Die Regel ist nicht korrekt. Gegenbeispiel:
- Sei $\Gamma := \{x \doteq y\}$ und $\varphi := x \doteq y$.
- Dann ist $x \doteq y \vdash x \doteq x$ gültig.

Tutoriumsaufgabe 2

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi\frac{x}{y}}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}$$

- Die Regel ist nicht korrekt. Gegenbeispiel:
- Sei $\Gamma := \{x \doteq y\}$ und $\varphi := x \doteq y$.
- Dann ist $x \doteq y \vdash x \doteq x$ gültig.
- Aber $x \doteq y \vdash \forall x \; x \doteq y$ ist nicht gültig für $\mathfrak{I} := ((\{1, 2\}, \emptyset), \{x \mapsto 1, y \mapsto 1\})$

Tutoriumsaufgabe 3

Tutoriumsaufgabe 3

Zeigen oder widerlegen Sie dass für alle $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$ die folgenden Sequenzen im Sequenzenkalkül der Logik 1. Stufe gültig sind. Wenn Sie eine Ableitung angeben, dürfen sie die ableitbaren Regeln aus den Hausaufgaben verwenden.

a) $\forall x \exists y \varphi \ \vdash \ \exists y \forall x \varphi$

b) $\exists x \forall y \varphi \ \vdash \ \forall y \exists x \varphi$

Tutoriumsaufgabe 3

$$(\forall I) \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi\frac{y}{x}}{\Gamma \vdash \forall x\varphi} \quad \text{falls } y \notin \text{frei}(\Gamma \cup \{\forall x\varphi\}) \qquad (\forall E) \quad \frac{\Gamma \vdash \forall x\varphi}{\Gamma \vdash \varphi\frac{\theta}{x}}$$

$$(\exists I) \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi\frac{\theta}{x}}{\Gamma \vdash \exists x\varphi} \qquad (\exists E) \quad \frac{\Gamma \vdash \exists x\varphi \qquad \Gamma, \varphi\frac{y}{x} \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi} \quad \text{falls } y \notin \text{frei}(\Gamma \cup \{\exists x\varphi, \psi\}).$$

$$(\exists IA) \quad \frac{\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \vdash \psi}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \psi} \quad \textit{falls } y \notin \text{frei}(\Gamma \cup \{\exists x\varphi, \psi\}) \qquad (\forall IA) \quad \frac{\Gamma, \varphi\frac{\theta}{x} \vdash \psi}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \psi}$$

Tutoriumsaufgabe 3

$\forall x \exists y \varphi \vdash \exists y \forall x \varphi$

Tutoriumsaufgabe 3

$\forall x \exists y \varphi \vdash \exists y \forall x \varphi$

- Sei $\mathfrak{G} := (\{1,2,3\}, \{(1,2),(2,3),(3,1)\})$

Tutoriumsaufgabe 3

$\forall x \exists y \varphi \vdash \exists y \forall x \varphi$

- Sei $\mathfrak{G} := (\{1,2,3\}, \{(1,2),(2,3),(3,1)\})$
- Das ist ein gerichteter Kreis der Länge 3

Tutoriumsaufgabe 3

$\forall x \exists y \varphi \vdash \exists y \forall x \varphi$

- Sei $\mathfrak{G} := (\{1, 2, 3\}, \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\})$
- Das ist ein gerichteter Kreis der Länge 3
- Sei $\varphi := E(x, y)$

Tutoriumsaufgabe 3

$\forall x \exists y \varphi \vdash \exists y \forall x \varphi$

- Sei $\mathfrak{G} := (\{1, 2, 3\}, \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\})$
- Das ist ein gerichteter Kreis der Länge 3
- Sei $\varphi := E(x, y)$
- Es gilt $\mathfrak{G} \models \forall x \exists y \varphi$.

Tutoriumsaufgabe 3

$\forall x \exists y \varphi \vdash \exists y \forall x \varphi$

- Sei $\mathfrak{G} := (\{1,2,3\}, \{(1,2),(2,3),(3,1)\})$
- Das ist ein gerichteter Kreis der Länge 3
- Sei $\varphi := E(x,y)$
- Es gilt $\mathfrak{G} \models \forall x \exists y \varphi$.
- Aber $\mathfrak{G} \not\models \exists y \forall x \varphi$.

Tutoriumsaufgabe 3

$\forall x \exists y \varphi \vdash \exists y \forall x \varphi$

- Sei $\mathfrak{G} := (\{1, 2, 3\}, \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\})$
- Das ist ein gerichteter Kreis der Länge 3
- Sei $\varphi := E(x, y)$
- Es gilt $\mathfrak{G} \models \forall x \exists y \varphi$.
- Aber $\mathfrak{G} \not\models \exists y \forall x \varphi$.
- Die Sequenz ist also nicht gültig!

Tutoriumsaufgabe 3

$\forall x \exists y \varphi \vdash \exists y \forall x \varphi$

- Sei $\mathfrak{G} := (\{1, 2, 3\}, \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\})$
- Das ist ein gerichteter Kreis der Länge 3
- Sei $\varphi := E(x, y)$
- Es gilt $\mathfrak{G} \models \forall x \exists y \varphi$.
- Aber $\mathfrak{G} \not\models \exists y \forall x \varphi$.
- Die Sequenz ist also nicht gültig!

Intuition: Für alle Knoten verläuft zumindest eine Kante zu einem anderen Knoten. Aber es gibt keinen Knoten für den gilt, dass Kanten von allen Knoten zu diesem Knoten verlaufen.

Tutoriumsaufgabe 3

$$(\forall I) \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi\frac{y}{x}}{\Gamma \vdash \forall x \varphi} \quad \text{falls } y \notin \text{frei}(\Gamma \cup \{\forall x \varphi\}) \qquad (\forall E) \quad \frac{\Gamma \vdash \forall x \varphi}{\Gamma \vdash \varphi\frac{\theta}{x}}$$

$$(\exists I) \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi\frac{\theta}{x}}{\Gamma \vdash \exists x \varphi} \qquad (\exists E) \quad \frac{\Gamma \vdash \exists x \varphi \qquad \Gamma, \varphi\frac{y}{x} \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi} \quad \text{falls } y \notin \text{frei}(\Gamma \cup \{\exists x \varphi, \psi\}).$$

$$(\exists IA) \quad \frac{\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \vdash \psi}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \psi} \quad \textit{falls } y \notin \text{frei}(\Gamma \cup \{\exists x \varphi, \psi\}) \qquad (\forall IA) \quad \frac{\Gamma, \varphi\frac{\theta}{x} \vdash \psi}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \psi}$$

Tutoriumsaufgabe 3

$\exists x \forall y \varphi \vdash \forall y \exists x \varphi$

Tutoriumsaufgabe 3

$\exists x \forall y \varphi \vdash \forall y \exists x \varphi$

- 1. $\varphi \frac{xy}{xy} \vdash \varphi \frac{xy}{xy}$ (Vor)

Tutoriumsaufgabe 3

$\exists x \forall y \varphi \vdash \forall y \exists x \varphi$

- 1. $\varphi\frac{xy}{xy} \vdash \varphi\frac{xy}{xy}$ (Vor)
- 2. $\varphi\frac{xy}{xy} \vdash \exists x \varphi\frac{y}{y}$ $(\exists I)$ auf 1 mit $\theta = x$

Tutoriumsaufgabe 3

$\exists x \forall y \varphi \vdash \forall y \exists x \varphi$

- 1. $\varphi\frac{xy}{xy} \vdash \varphi\frac{xy}{xy}$ (Vor)
- 2. $\varphi\frac{xy}{xy} \vdash \exists x \varphi\frac{y}{y}$ ($\exists$I) auf 1 mit $\theta = x$
- 3. $\forall y \varphi\frac{x}{x} \vdash \exists x \varphi\frac{y}{y}$ ($\forall$IA) auf 2 mit $\theta = y$

Tutoriumsaufgabe 3

$\exists x \forall y \varphi \vdash \forall y \exists x \varphi$

- 1. $\varphi\frac{xy}{xy} \vdash \varphi\frac{xy}{xy}$ (Vor)
- 2. $\varphi\frac{xy}{xy} \vdash \exists x \varphi\frac{y}{y}$ ($\exists$I) auf 1 mit $\theta = x$
- 3. $\forall y \varphi\frac{x}{x} \vdash \exists x \varphi\frac{y}{y}$ ($\forall$IA) auf 2 mit $\theta = y$
- 4. $\forall y \varphi\frac{x}{x} \vdash \forall y \exists x \varphi$ ($\forall$I) auf 3

Tutoriumsaufgabe 3

$\exists x \forall y \varphi \vdash \forall y \exists x \varphi$

- 1. $\varphi\frac{xy}{xy} \vdash \varphi\frac{xy}{xy}$ (Vor)
- 2. $\varphi\frac{xy}{xy} \vdash \exists x \varphi\frac{y}{y}$ ($\exists$I) auf 1 mit $\theta = x$
- 3. $\forall y \varphi\frac{x}{x} \vdash \exists x \varphi\frac{y}{y}$ ($\forall$IA) auf 2 mit $\theta = y$
- 4. $\forall y \varphi\frac{x}{x} \vdash \forall y \exists x \varphi$ ($\forall$I) auf 3
- 5. $\exists x \forall y \varphi \vdash \forall y \exists x \varphi$ ($\exists$IA) auf 4

Tutoriumsaufgabe 3

$\exists x \forall y \varphi \vdash \forall y \exists x \varphi$

- 1. $\varphi\frac{xy}{xy} \vdash \varphi\frac{xy}{xy}$ (Vor)
- 2. $\varphi\frac{xy}{xy} \vdash \exists x \varphi\frac{y}{y}$ ($\exists$I) auf 1 mit $\theta = x$
- 3. $\forall y \varphi\frac{x}{x} \vdash \exists x \varphi\frac{y}{y}$ ($\forall$IA) auf 2 mit $\theta = y$
- 4. $\forall y \varphi\frac{x}{x} \vdash \forall y \exists x \varphi$ ($\forall$I) auf 3
- 5. $\exists x \forall y \varphi \vdash \forall y \exists x \varphi$ ($\exists$IA) auf 4
- Die Sequenz ist also gültig!

Tutoriumsaufgabe 3

- 1. $\varphi\frac{xy}{xy} \vdash \varphi\frac{xy}{xy}$ (Vor)
- 2. $\varphi\frac{xy}{xy} \vdash \exists x\varphi\frac{y}{y}$ ($\exists$I) auf 1 mit $\theta = x$
- 3. $\forall y\varphi\frac{x}{x} \vdash \exists x\varphi\frac{y}{y}$ ($\forall$IA) auf 2 mit $\theta = y$
- 4. $\forall y\varphi\frac{x}{x} \vdash \forall y\exists x\varphi$ ($\forall$I) auf 3
- 5. $\exists x\forall y\varphi \vdash \forall y\exists x\varphi$ ($\exists$IA) auf 4
- Die Sequenz ist also gültig!

Wieso diese Reihenfolge?

Tutoriumsaufgabe 3

- 1. $\varphi\frac{xy}{xy} \vdash \varphi\frac{xy}{xy}$ (Vor)
- 2. $\varphi\frac{xy}{xy} \vdash \exists x \varphi\frac{y}{y}$ ($\exists$I) auf 1 mit $\theta = x$
- 3. $\forall y \varphi\frac{x}{x} \vdash \exists x \varphi\frac{y}{y}$ ($\forall$IA) auf 2 mit $\theta = y$
- 4. $\forall y \varphi\frac{x}{x} \vdash \forall y \exists x \varphi$ ($\forall$I) auf 3
- 5. $\exists x \forall y \varphi \vdash \forall y \exists x \varphi$ ($\exists$IA) auf 4
- Die Sequenz ist also gültig!

Wieso diese Reihenfolge?

Auf Grund der freien Variablen.

Tutoriumsaufgabe 3

$\forall x \exists y \varphi \vdash \exists y \forall x \varphi$ ist nicht gültig.

$\exists x \forall y \varphi \vdash \forall y \exists x \varphi$ ist gültig.

Was bedeutet das nun für die Semantik?

Tutoriumsaufgabe 3

$\forall x \exists y \varphi \vdash \exists y \forall x \varphi$ ist nicht gültig.

$\exists x \forall y \varphi \vdash \forall y \exists x \varphi$ ist gültig.

Was bedeutet das nun für die Semantik?

Es existieren Modelle für $\forall x \exists y \varphi$, welche keine Modelle von $\exists y \forall x \varphi$ sind. Aber alle Modelle von $\exists x \forall y \varphi$ sind auch Modelle von $\forall y \exists x \varphi$. Die Formeln sind also auch nicht äquivalent.

Schöne Pfingstwoche! :)