

ELETTROMAGNETISMO: piselli, erezioni e cazzi

cit. morgante

NicoNico (PipoPipo), Michele Pisellini (michigay), Monopolo Mirolò ("io sono pazzo")

A.A. 2025/2026

Premessa

Non promettiamo rigore e assoluta correttezza nei seguenti appunti, visto che già è stato difficile cercare di seguire il buon Morgante ed i suoi giri pindarici durante le lezioni. Speriamo che tutto il nostro lavoro ed olio di gomito (stiamo copiando da appunti già esistenti e Griffiths) vi possano aiutare in questa materia, che tutt'ora non abbiamo capito se abbia o meno un ordine preciso, o se sia a libera interpretazione di chi la studia.

PS: non intendiamo in alcun modo seguire la sua notazione, ci teniamo alla vostra e soprattutto alla nostra salute mentale.

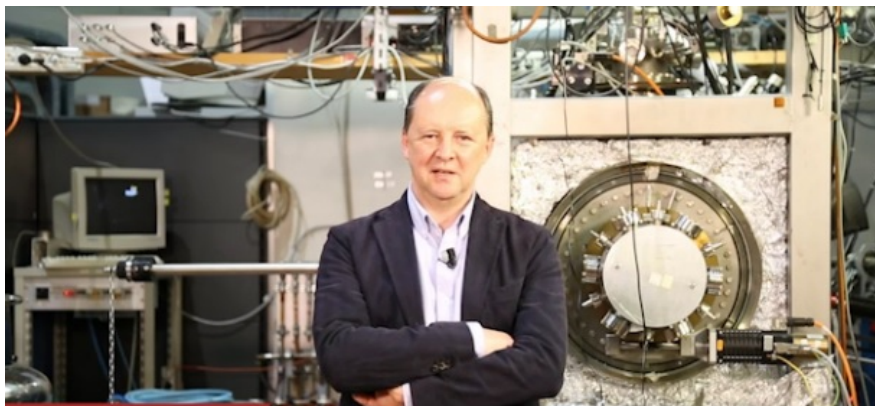


Figura 1: Smorgante

$$\underbrace{\lim_{t \rightarrow \infty} \text{percezione del tempo}(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \text{bestemmie}_i}_{\text{Legge Morgantica}}$$

Indice

1	Introduzione matematica	9
1.1	Flusso di un campo attraverso una superficie	9
1.2	Divergenza	9
1.3	Gradiente, lavoro e campi conservativi	10
1.4	Rotore	10
2	Introduzione all'elettrostatica	13
2.1	Legge di Coulomb	13
2.1.1	Principio di sovrapposizione	14
2.2	Il campo elettrico	14
2.2.1	Distribuzioni continue di cariche	14
2.3	Esempi	15
2.4	Teorema di Helmotz	15
3	Legge di Gauss	17
3.1	Linee di forza del campo elettrico	17
3.2	Legge di Gauss	17
3.2.1	Formulazione infinitesimale e I legge di Maxwell	18
3.3	Esempi	18
4	Il potenziale elettrico	19
4.1	Il rotore di \vec{E}	19
4.2	Introduzione al potenziale	19
4.3	Potenziale della carica puntiforme	20
4.4	Potenziale di una distribuzione volumetrica di carica	21
4.5	Esempi	21
4.6	Equazione di Poisson	21
4.7	Condizioni al contorno / Boundary conditions	22
5	Lavoro ed energia elettrostatica	25
5.1	Energia di un sistema discreto di cariche	25
5.2	Energia di un sistema con distribuzione continua di carica	26
5.3	Esempi	28
6	Materiali conduttori e isolanti	29
6.1	Campo elettrico in un materiale conduttore	30
6.2	Capacità e condensatori	30
6.2.1	Condensatore all'infinito	31
6.3	Energia immagazzinata in un condensatore	31
6.3.1	Condensatore piano	31
6.3.2	Condensatore sferico	32
6.3.3	Condensatore cilindrico	33
6.4	Potenziale e campo elettrico di dipolo	33

6.5	Momento di dipolo di un sistema	34
6.6	Interazioni di dipolo in un campo elettrico di stimolo	35
6.7	Forza ed energia elettrostatica	35
6.7.1	Interazione dipolo-carica	36
6.7.2	Interazioni tra due dipoli	36
7	Correnti elettriche e campo di polarizzazione	37
7.1	La densità di corrente elettrica	37
7.2	La corrente	37
7.3	Legge di conservazione della carica	38
7.3.1	Modellizziamo l'atomo	39
7.4	Carica elettrica legata e libera	39
7.5	Campo di polarizzazione	39
7.6	Densità di carica superficiale nei materiali	39
7.7	La pila di volta	39
7.8	Potenza elettrica	39
7.9	Leggi di Ohm	39
7.9.1	Legge di Ohm locale	39
7.9.2	Legge di Ohm (macroscopica)	39
8	Campi elettrici nei materiali	41
8.1	Gabbia di Faraday	41
8.2	Condensatori in serie e parallelo	41
8.2.1	In serie	41
8.2.2	In parallelo	41
8.3	Campo di spostamento dielettrico	41
8.4	Relazione costitutiva interna	41
8.5	Condensatori reali	41
8.5.1	Condensatore piano con dielettrico	41
8.5.2	Considerazioni	41
8.5.3	Condensatore piano con conduttore	41
8.6	Esempi	41
8.7	Interfaccia vuoto – dielettrico	43
8.8	Problema di Dirichlet	44
9	Interazioni e campi di risposta	45
9.1	Interazione carica-carica indotta	45
9.1.1	Caso limite $r \rightarrow r_0$	46
9.1.2	Applicazione: estrazione di un elettrone da un metallo	47
9.2	Carica superficiale indotta — Esercizio	47
9.3	Interazione carica-dipolo indotto	48
9.4	Sfere con distribuzione di carica opposta	50
9.5	Polarizzazione di una sfera dielettrica	51
10	Magnetismo	53
10.1	Introduzione	53
10.1.1	Momento di dipolo magnetico	53
10.2	Legge di Biot-Savart	53
10.3	II equazione di Maxwell	54
10.4	Forza di Lorentz	54
10.5	Campo di magnetizzazione e correnti magnetiche	55

11 Legge di Ampère–Maxwell e campo magnetico \vec{H}	57
11.1 Legge di Ampère–Maxwell e campo magnetico \vec{H}	57
11.2 IV equazione di Maxwell	58
11.3 Teorema di equivalenza di Ampère	58
11.4 Esempi	60
12 Potenziale vettore di Ampère	63
12.1 Esempi	63
12.2 Legge di Biot–Savart	63
12.3 Esempi aggiuntivi	63
12.4 Interazioni magnetiche	63
13 Come i materiali reagiscono ai campi magnetici di stimolo	65
13.1 Relazione costitutiva interna	65
13.2 Misure di suscettività magnetica	65
14 Strumenti e applicazioni	67
14.1 Amperometro	67
14.1.1 Misure stazionarie di conducibilità	67
14.2 Modello a tempo di rilassamento	67
14.3 Effetto Hall	67
14.4 Effetto Joule	67
14.5 Leggi di Kirchhoff	67
14.6 Circuito RC ed energia dissipata	67
14.7 Studio dei condensatori con dielettrico	67
14.7.1 Densità di energia elettrica	67
14.7.2 Forze che agiscono sul dielettrico	67
15 Introduzione all'elettrodinamica	69
15.1 Forza di Lorentz e moti di ciclotrone	69
15.2 Relatività del campo elettrico	69
15.3 Legge di induzione	69
15.4 III legge di Maxwell	69
15.5 Esempi	69
15.6 Forze magnetodinamiche	69
15.6.1 Esempi	69
15.7 Alternatore–Generatore di corrente monofase	69
16 Induttanza e circuiti	71
16.1 Induttanza	71
16.2 Densità di energia magnetica	71
16.3 Circuiti RCL in serie in regime transitorio	71
16.4 Circuiti RCL in regime armonico	71
16.4.1 Curva di risonanza di un circuito RCL	71
17 Materiali ferromagnetici	73
17.1 Legge di Felici	73
17.2 Ciclo di isteresi	73
17.3 Magnet permanenti	73
17.4 Campi magnetici nei materiali lineari	73
17.5 Interfaccia tra due materiali lineari	73
17.6 Esempi	73
17.7 Circuiti magnetici	73
17.8 Trasformatore	73
17.-18.0 Elettrostatica	74

17.-18.1	Correnti stazionarie	76
17.-18.2	Magnetismo	76
17.-18.3	Operatori vettoriali e trasformazioni di coordinate	77
17.-18.4	Costanti	78

Capitolo 1

Introduzione matematica

Riassumiamo in questa sezione gli strumenti matematici necessari in questo corso. Il consiglio spassionato che vi sentiamo di darvi è quello di fare Analisi 2 prima di Elettromagnetismo, fidatevi che vi si semplificheranno parecchie robe (anche perché ci rifiutiamo di rifare nei particolari tutta la parte sugli integrali della fisica che trovate comodamente sui pdf del corso di Sfecci).

1.1 Flusso di un campo attraverso una superficie

Prendiamo un generico campo vettoriale \vec{C} ed una qualsiasi superficie S . Definiamo il flusso del campo attraverso la superficie come

$$\phi_{\vec{C},S} = \int_S \vec{C}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dS$$

Se il campo considerato è uniforme, ossia ha sempre la stessa direzione, verso e modulo, e la superficie S è una superficie piana, abbiamo banalmente che

$$\phi_{\vec{C},S} = |\vec{C}| S \cos(\theta)$$

dove θ è l'angolo che il campo forma con il versore della superficie.

Nel caso in cui S sia una superficie, il suo versore normale è positivo, orientato verso l'esterno e la notazione diventa

$$\phi_{\vec{C},S} = \oint_S \vec{C}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dS$$

Il "simbolo di vettore" sui campi, è proprio per dire che stiamo considerando delle funzioni vettoriali, cioè che prendono dei vettori e li mandano in altri vettori. Per quelli (sani) che preferiscono un pizzico di rigore matematico in più, stiamo semplicemente considerando delle funzioni

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

In parole povere tutte le volte che parliamo di "campi", e vedete delle funzioni che hanno il simbolo di vettore sopra, stiamo prendendo la funzione appena scritta.

1.2 Divergenza

Definiamo la divergenza di un campo vettoriale nel seguente modo:

$$\lim_{dV \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dS}{dV} = \text{div} \vec{E}(\vec{r})$$

dove dV è il volume contenuto dalla superficie chiusa dS . Prendiamo ora questa superficie e dividiamola in 2 parti. Il flusso di 1 su 2 e di 2 su 1 si annullano tra loro. Possiamo considerare anche "infiniti" tagli su tutta la superficie, il che ci permette di ricavare

$$\int_{V_s} \text{div} \vec{C}(\vec{r}) dV = \int_{V_s} \left(\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dS \frac{1}{dV} \right) dV = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dS$$

che va sotto il nome di **teorema della divergenza**. Ovviamente questa non è in alcun modo una dimostrazione rigorosa di questo teorema, ma d'altronde siamo fisici e non matematici, perciò possiamo tranquillamente andare avanti.

Alcuni di voi si chiederanno, ma io ogni volta che devo ricavarli la divergenza di un campo devo calcolarmi un integrale di superficie? La risposta è assolutamente no, anzi la formula per calcolare la divergenza è davvero molto molto semplice. Vediamo ora come ricavarla. Vogliamo calcolare il flusso di un campo attraverso un cubo di volume infinitesimo $dV = dxdydz$. Consideriamo la faccia $dydz$, la quale ha flusso $E_x(x+dx, y, z)dydz$, mentre la faccia opposta ha flusso $-E_x(x, y, z)dydz$. La somma dei due flussi ci dà dunque come risultato

$$[E_x(x+dx, y, z) - E_x(x, y, z)] dydz = \frac{\partial E_x}{\partial x} dxdydz$$

dove nell'uguaglianza abbiamo brutalmente moltiplicato e diviso per dx (ricordo che siamo fisici e non matematici). Ripetiamo questo procedimento per tutte le facce del cubo e sommiamo:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} dxdydz + \frac{\partial E_y}{\partial y} dxdydz + \frac{\partial E_z}{\partial z} dxdydz$$

e dividiamo per dV :

$$\text{div} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

1.3 Gradiente, lavoro e campi conservativi

Consideriamo adesso una funzione della sola posizione, ossia una funzione scalare $f(\vec{r})$. Premettiamo subito per i mathematical addicted che ora stiamo considerando funzioni del tipo

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

Definiamo il gradiente di f come una quantità vettoriale che ci fornisce informazioni sulla direzione di massima variazione della funzione, e la ricaviamo come segue:

$$f(\vec{r} + d\vec{s}) - f(\vec{r}) = d\vec{s} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r}) = dx \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x} + dy \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial y} + dz \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial z}$$

perciò il gradiente è il seguente vettore

$$\text{grad } f(\vec{r}) = \vec{\nabla} f(\vec{r}) = \left(\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x}, \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial y}, \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial z} \right)$$

Infine, riprendiamo dalla dinamica la definizione di lavoro di una forza come integrale di linea:

$$L = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

1.4 Rotore

Consideriamo le circuitazioni di un campo vettoriale su una qualsiasi curva chiusa γ , ossia

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Se adesso dividiamo la curva in altre due γ_1 e γ_2 , l'integrale di linea sarà la somma dei due integrali sulle due nuove curve. I contributi sulla linea dove abbiamo diviso il cammino originale saranno ovviamente nulli, dato che la percorriamo una volta in un senso e l'altra nell'altro. Possiamo quindi suddividere il percorso in intervalli infinitesimali, ottenendo così:

$$\hat{n} \cdot \text{rot} \vec{E}(\vec{r}) = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s}}{dS}$$

dove \hat{n} è il versore normale alla superficie. Valutiamo ora come calcolare il rotore in coordinate cartesiane, considerando come prima un cubo di volume $dV = dxdydz$. Calcoliamo l'integrale di linea considerando i tratti opposti tra loro.

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z)dx - E_x(x, y + dy, z)dx &= [E_x(x, y, z) - E_x(x, y + dy, z)]dx = -\frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial y}dydx \\ E_y(x + dx, y, z)dy - E_y(x, y, z)dy &= [E_y(x + dx, y, z) - E_y(x, y, z)]dy = \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial x}dxdy \end{aligned}$$

e perciò troviamo che

$$\text{rot} \vec{E}(\vec{r})|_z = \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial y}$$

Iteriamo questo procedimento anche per le altre componenti, ricavando

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E}(\vec{r})|_x &= \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial z} \\ \text{rot} \vec{E}(\vec{r})|_y &= \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial z} - \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial x} \end{aligned}$$

Abbiamo quindi trovato il rotore:

$$\text{rot} \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

Capitolo 2

Introduzione all'elettrostatica

La materia possiede, oltre alla massa, una proprietà intrinseca detta carica elettrica, che dà luogo ad interazioni elettriche. L'elettrostatica studia queste interazioni sotto l'ipotesi ideale di condizioni stazionarie (cariche ferme). Questa è un'approssimazione valida quando le cariche non si muovono o si muovono molto lentamente rispetto alle scale temporali di interesse.

2.1 Legge di Coulomb

La carica elettrica si presenta con due segni opposti (*positivo* e *negativo*). In molti materiali, su scala macroscopica, le cariche tendono a bilanciarsi (la materia è in genere elettricamente neutra), ma è possibile separare le cariche e creare distribuzioni con eccessi locali di carica. Le cariche producono campi elettrici e, in presenza di altre cariche, questi campi danno origine a forze elettriche. Tali forze, in genere, sono di gran lunga più intense delle forze gravitazionali a scale microscopiche.

Dalle misure sperimentali compiute da Coulomb si ottiene la legge che esprime la forza elettrica che una carica puntiforme q_1 esercita su un'altra carica puntiforme q_2 . La forma vettoriale della legge di Coulomb è

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \underbrace{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}_{\text{versore}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1),$$

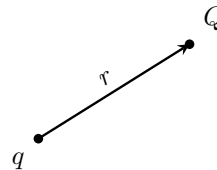
dove \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 sono le posizioni di q_1 e q_2 rispettivamente, e ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto che vale:

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

L'espressione per il modulo della forza, in funzione della distanza

$r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$, è

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r^2} \hat{r}$$



Il verso della forza dipende dai segni delle cariche: se i segni sono uguali la forza è repulsiva, se i segni sono opposti la forza è attrattiva. Il modulo della forza F_{q_1} è identico ad F_{q_2} e l'unità di misura è Coulomb: $[F] = C$. Ovviamente per quanto detto prima questa legge vale solo per cariche ferme.

2.1.1 Principio di sovrapposizione

Per un sistema di più cariche puntiformi q_1, q_2, \dots, q_n alle distanze r_1, r_2, \dots, r_n vale il **principio di sovrapposizione**: la forza totale su una carica Q è la somma vettoriale delle forze dovute a ciascuna delle altre cariche.

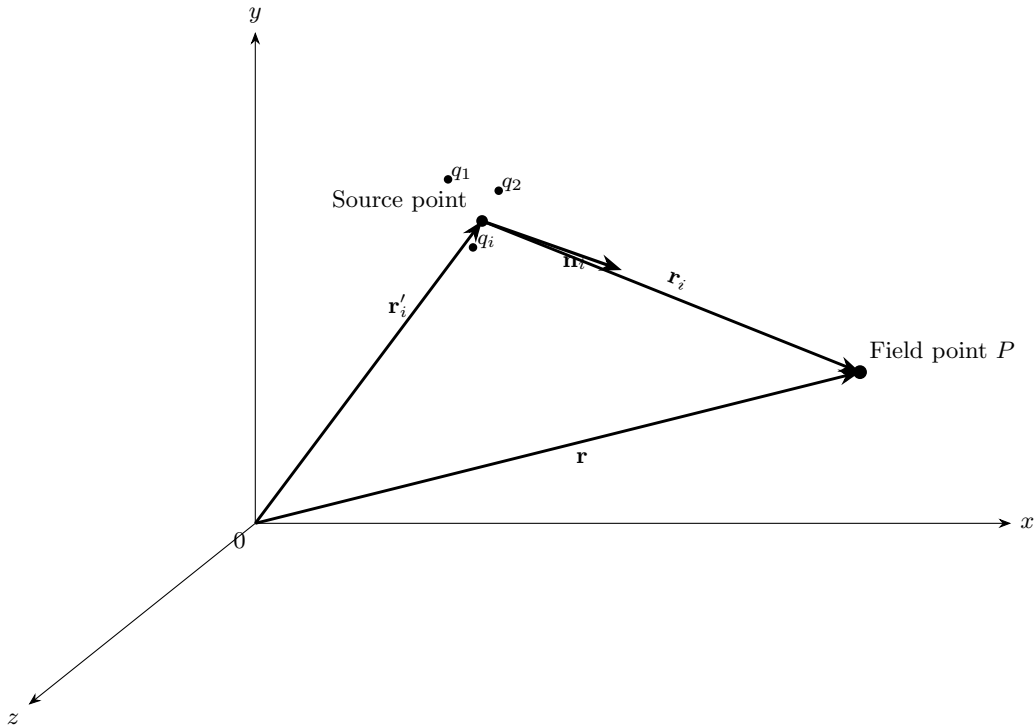
$$\vec{F}_Q = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 Q}{r_1^2} \hat{r}_1 + \frac{q_2 Q}{r_2^2} \hat{r}_2 + \dots \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1^2} \hat{r}_1 + \frac{q_2}{r_2^2} \hat{r}_2 + \dots \right)$$

2.2 Il campo elettrico

Dal Principio di sovrapposizione e legge di Coulomb siamo arrivati al seguente risultato che possiamo riscrivere in questo modo:

$$\vec{F}_Q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \left(\frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

dove $\vec{E}(\vec{r}) \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \left(\frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \right)$ viene definito come **Campo Elettrico**¹, si nota come questo è una funzione della posizione \vec{r} siccome i vettori di separazione \vec{r}_i dipendono dalla posizione del punto di campo. Quindi il **Campo Elettrico** è una quantità vettoriale che varia da punto a punto ed è determinata dalla configurazione delle cariche sorgente. Fisicamente è la forza che agisce su una carica unitaria dovuta a tutte le altre cariche presenti. La sua unità di misura è $[E] = \frac{N}{C}$.



2.2.1 Distribuzioni continue di cariche

La definizione precedente di Campo Elettrico presupponeva che la sorgente del campo sia un insieme di cariche puntiformi discrete. Se invece la carica è distribuita in modo continuo su una regione, allora il campo diventerà:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{q} \int d\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r^2} \hat{r} dq$$

¹Si sta facendo l'ipotesi di considerare un insieme discreto di cariche ferme

Supponiamo ora di avere una distribuzione di carica volumetrica di carica (e di non avere cariche esterne al di fuori del volume considerato). Definiamo quindi la **densità volumetrica di carica** come $\rho(\vec{r}) = \frac{dq}{dV}$ la cui dimensione è $[\rho] = \frac{C}{m^3}$. Per quanto visto prima il Campo Elettrico (per una densità di carica volumetrica) sarà:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho(\vec{r}') dV$$

Definiamo ora la **densità di carica superficiale** σ e **lineare** λ come:

$$\sigma(\vec{r}) = \frac{dq}{dS} \quad [\sigma] = \frac{C}{m^2}$$

$$\lambda(\vec{r}) = \frac{dq}{dl} \quad [\lambda] = \frac{C}{m}$$

Con campi elettrici:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \sigma(\vec{r}') dS \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \lambda(\vec{r}') dl$$

2.3 Esempi

2.4 Teorema di Helmotz

Nel corso della trattazione dell'elettrostatica, ci impareremo spesso in problemi del tipo: "un campo è determinato se sono date la divergenza e il rotore di esso?"

Supponiamo che $D(\vec{r})$ sia una funzione tale che $\nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) = D(\vec{r})$ dove $\vec{F}(\vec{r})$ è una funzione vettoriale. Inoltre supponiamo che $\nabla \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{C}(\vec{r})$ con $\vec{C}(\vec{r})$ con divergenza nulla (per definizione) .

Vogliamo determinare $\vec{F}(\vec{r})$ dati tali $D(\vec{r})$ e $\vec{C}(\vec{r})$, ovvero vorremmo dimostrare che:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r}) + \nabla \times \vec{W}(\vec{r}) \quad \text{dove} \quad U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{D(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau' \quad \text{e} \quad \vec{W}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{C}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau'$$

gli integrali sono su tutto lo spazio, calcoliamo divergenza e rotore di $\vec{F}(\vec{r})$:

$$\nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) = -\nabla^2 U(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int D(\vec{r}') \nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau'$$

sapendo che

$$\nabla_{\vec{r}} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \underbrace{f(\vec{R})}_{\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{R}} = \frac{\partial f}{\partial \vec{R}} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{r}} = \left(\frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \right) \cdot \mathbf{I}_3 = \left(-\frac{1}{R^2} \right) \cdot \mathbf{I}_3 = -\frac{\vec{R}}{R^3} \cdot \mathbf{I}_3 = -\frac{\vec{R}}{R^3} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Dunque valendo $\nabla \cdot \frac{1}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{1}{r^2}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} 1 = 0$ ma allo stesso tempo $\oint \frac{1}{R_0^2} \hat{r} d\vec{a} = \oint \frac{1}{R_0^2} \hat{r} R_0^2 \sin(\phi) d\theta d\phi = 4\pi$

$$-\nabla \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$$

si ottiene

$$^1 \text{Qui } \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \\ z - z' \end{pmatrix}, \text{ e } \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{r}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_3$$

$$\nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) = - \int \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') D(\vec{r}') d\tau' = D(\vec{r})$$

dunque (poichè $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{W}(\vec{r})) = 0$) abbiamo dimostrato la prima parte.
Calcoliamo ora il rotore:

$$\nabla \times \vec{F}(\vec{r}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{W}(\vec{r})) = \nabla(\nabla \cdot \vec{W}(\vec{r})) - \nabla^2 \vec{W}(\vec{r})$$

dove abbiamo utilizzato ($\nabla \times (\nabla \cdot \vec{a}) = 0$). Calcoliamo il secondo termine:

$$-\nabla^2 \vec{W}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \vec{C}(\vec{r}') \nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau' = \int \vec{C}(\vec{r}') \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') d\tau' = \vec{C}(\vec{r})$$

Rimane da dimostrare che il primo termine si annulla:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{W}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int \vec{C}(\vec{r}') \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau' = -\frac{1}{4\pi} \int \vec{C}(\vec{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau' \\ &= -\frac{1}{4\pi \int \nabla' \cdot (\vec{C}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau' + \frac{1}{4\pi} \int \vec{C}(\vec{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d\tau'} \end{aligned}$$

Capitolo 3

Legge di Gauss

3.1 Linee di forza del campo elettrico

Per rappresentare graficamente i campi elettrostatici e magnetici si utilizzano le **linee di campo** o **linee di forza**. Le **linee di forza** sono curve che, in ogni punto dello spazio, risultano tangenti al vettore campo. Su di esse si indica, mediante una freccia, il verso del campo stesso.

Consideriamo il **caso 1**, il più semplice possibile: una singola carica puntiforme q posta nell'origine. Le linee di forza del campo avranno direzione radiale. Poiché il campo diminuisce come $\frac{1}{r^2}$, i vettori si accorciano man mano che ci si allontana dall'origine. L'intensità del campo non è indicata dalla lunghezza dei vettori, ma dalla **densità** delle linee di campo: il campo è più intenso dove le linee sono più ravvicinate (in prossimità dell'origine) e più debole dove esse si diradano.

Anche se la rappresentazione avviene su una superficie bidimensionale, occorre ricordare che il campo possiede **simmetria sferica**. La densità delle linee può quindi essere espressa come:

$$\frac{n}{S}$$

dove n è il numero di linee di campo e S la superficie sulla quale esse si distribuiscono.

Passiamo ora al **caso 2**: due cariche opposte disposte sullo stesso asse. Le linee di forza risultano perpendicolari al piano equatoriale e si estendono dalla carica positiva verso quella negativa. Sebbene le linee possano, in generale, estendersi all'infinito, in questo caso esse devono necessariamente chiudersi sulla carica opposta: se infatti considerassimo il flusso del campo attraverso una superficie chiusa che le racchiude, esso risulterebbe nullo, poiché il numero di linee che esce sarebbe uguale a quello che rientra.

Inoltre, le linee di forza **non possono mai intersecarsi**, poiché ciò implicherebbe che in un punto il campo avesse due direzioni diverse, il che è fisicamente impossibile.

Infine, se supponiamo che le due cariche siano poste a una distanza r tra loro e che ci si trovi a una distanza $d \ll r$ da una delle due cariche q_1 , l'effetto dell'altra carica q_2 diventa trascurabile, e il campo risulta praticamente quello di una singola carica.

Vediamo ora il **caso 3**: due cariche uguali disposte sullo stesso asse. Lungo il piano equatoriale, il campo avrà una risultante parallela al piano stesso.

È interessante notare che, allontanandosi molto dal sistema, la distanza tra le due cariche diventa trascurabile, al punto da non poter più distinguere se si tratta di due cariche o di una sola. In tal caso, le linee di forza delle due cariche tendono asintoticamente a configurarsi come linee di forza radiali che partono dal punto centrale tra le due cariche.

3.2 Legge di Gauss

La **legge di Gauss** costituisce una delle relazioni fondamentali dell'elettrostatica e mette in relazione il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa con la carica elettrica racchiusa dalla superficie stessa.

Essa è equivalente alle equazioni di Coulomb e di Maxwell in regime elettrostatico e rivela sia una interpretazione fisica del concetto di "sorgente" del campo elettrico sia uno strumento matematico potente per il calcolo del campo in presenza di opportune simmetrie. Nel caso di una carica positiva avrò un flusso uscente (positivo), viceversa se è negativa; D'altra parte se ho una carica esterna alla superficie scelta, questa non contribuirà in alcun modo al flusso totale, poiché le sue linee di campo entrano da un lato ed escono dall'altro.

Consideriamo ora il **caso 1**: Flusso del campo elettrico di una carica puntiforme q , contenuta al centro di una sfera.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\hat{r}}{r^2} (r^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{r}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta d\theta d\phi = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Si osservi che la dipendenza dal raggio si annulla: l'area della sfera cresce come r^2 , mentre il campo elettrico diminuisce come $\frac{1}{r^2}$; il loro prodotto risulta quindi costante. Ne consegue che lo stesso numero di linee di campo attraversa qualsiasi sfera centrata nell'origine. In generale, il flusso attraverso una superficie chiusa dipende solo dalla carica racchiusa, indipendentemente dalla posizione della carica e dalla forma e dimensioni della superficie. Ciò che conta è l'angolo solido $d\Omega = \frac{dS \cos\theta}{r^2}$ che dovrà essere $\Omega = 4\pi$.

Vediamo il **caso 2**: Gruppo di cariche sparse all'interno della superficie. Possiamo sfruttare il **Principio di sovrapposizione** e scrivere:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n \left(\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{S} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\epsilon_0} q_i \right) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Dove Q_{int} è la carica interna alla superficie gaussiana considerata.

$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}}$$

3.2.1 Formulazione infinitesimale e I legge di Maxwell

Supponiamo ora di avere una carica distribuita su un volume, sia $\rho(\vec{r})$ la densità volumetrica di carica, allora si ha:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_s} \rho(\vec{r}) dV$$

Possiamo sfruttare il teorema della divergenza e scrivere:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \int_{V_s} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_s} \rho(\vec{r}) dV$$

Essendo gli integrali sullo stesso volume si trova così la **I equazione di Maxwell o Legge di Gauss**, un'equazione che lega la divergenza del campo elettrico alla densità di carica.

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho}$$

3.3 Esempi

Capitolo 4

Il potenziale elettrico

Vogliamo definire un potenziale scalare associato al campo elettrico. Per farlo, mostreremo che il campo elettrico è un campo irrotazionale, ovvero il suo rotore è nullo. Questo ci permetterà di introdurre il concetto di potenziale elettrico, grandezza scalare da cui è possibile ricavare il campo stesso.

4.1 Il rotore di \vec{E}

Il campo elettrico \vec{E} non è una funzione vettoriale qualsiasi, ma un tipo molto speciale di campo: uno il cui rotore è nullo. Sfrutteremo questa proprietà dei campi elettrostatici per ridurre un problema vettoriale (determinare \vec{E}) a un problema scalare molto più semplice.

Consideriamo l'integrale di linea lungo un percorso (da a a b) del campo elettrico generato da una carica puntiforme:

$$\begin{aligned}\int_a^b \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} &= \int_a^b \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\vec{l} \quad \text{con} \quad \hat{r} \cdot d\vec{l} = dr \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)\end{aligned}$$

Da cui segue immediatamente che, se $r_a = r_b$, l'integrale di linea è nullo. Possiamo quindi affermare che, **per campi elettrostatici**,

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

e, in base al **teorema di Stokes** (o del rotore):

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0}$$

Si deduce facilmente che anche nel caso in cui si abbiano N cariche, anche con il principio di sovrapposizione, l'integrale di linea resta nullo per l'additività dell'integrale. Di conseguenza, il teorema di Stokes risulta valido anche in questo caso.

4.2 Introduzione al potenziale

Il **potenziale elettrico** $V(\vec{r})$ è una grandezza scalare che caratterizza un campo elettrostatico $\vec{E}(\vec{r})$. Poiché, per un campo elettrostatico conservativo, l'integrale di linea è indipendente dal percorso (dipende solo dai punti iniziale e finale), si definisce

$$\boxed{V(\vec{r}) \equiv - \int_{\mathcal{O}}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{l}}$$

dove \mathcal{O} è un punto di riferimento scelto (convenzionalmente il punto in cui si assegna $V = 0$). Di conseguenza V dipende solo dalla posizione \vec{r} .

Ciò che ha significato fisico è la differenza di potenziale tra due punti a e b :

$$\Delta V_{ab} = V(b) - V(a) = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Dal teorema fondamentale del calcolo (applicato lungo una curva) si ha inoltre

$$V(b) - V(a) = \int_a^b (\nabla V) \cdot d\vec{l}.$$

Poiché le due espressioni valgono per ogni coppia di punti a, b , si ottiene la relazione locale

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}).}$$

Commenti sul potenziale

- Utilizzare il potenziale risulterà spesso più semplice per determinare il campo elettrico.
- Il punto di riferimento \mathcal{O} . Cambiare il punto di riferimento equivale ad aggiungere una costante C al potenziale. Infatti, scegliendo un altro riferimento \mathcal{O}' ,

$$V'(\vec{r}) = - \int_{\mathcal{O}'}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\mathcal{O}'}^{\mathcal{O}} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_{\mathcal{O}}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(\vec{r}) + C,$$

dove $C = - \int_{\mathcal{O}'}^{\mathcal{O}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$. Naturalmente aggiungere una costante a V non modifica né le differenze di potenziale né il gradiente ∇V .

- Principio di sovrapposizione: se $\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i$, allora

$$V(\vec{r}) = - \int_{\mathcal{O}}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\mathcal{O}}^{\vec{r}} \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^N \left(- \int_{\mathcal{O}}^{\vec{r}} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} \right) = \sum_{i=1}^N V_i(\vec{r}).$$

- Unità di misura: il potenziale si misura in Volt (V), dove

$$[V] = \text{V} = \frac{\text{J}}{\text{C}} = \frac{\text{Nm}}{\text{C}}.$$

4.3 Potenziale della carica puntiforme

Per una carica puntiforme q posta nell'origine il campo elettrico è

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}.$$

Scegliendo come riferimento il potenziale nullo all'infinito ($\mathcal{O} = \infty$) si ha

$$V(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^r \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'^2} dr' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}.$$

Quindi il potenziale di una carica puntiforme (con $V(\infty) = 0$) è

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Ora, per un sistema discreto di N cariche puntiformi $\{q_i\}$ distribuite nelle posizioni $\{\vec{r}_i\}$, il principio di sovrapposizione afferma che il campo totale è la somma dei campi individuali:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r}).$$

Ne segue che il potenziale totale, definito come

$$V(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{l},$$

si può scrivere come somma dei contributi individuali:

$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|}.$$

4.4 Potenziale di una distribuzione volumetrica di carica

Calcoliamo il potenziale generato da una distribuzione volumetrica di carica. Conoscendo il potenziale di una carica puntiforme, si divide il volume in elementi infinitesimi di carica dq e si sommano (integrando) i contributi di tutte le parti:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dq.$$

Ricordando che $dq = \rho(\vec{r}') dV'$, si ottiene

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

dove \mathcal{V} indica il dominio volumetrico occupato dalla distribuzione di carica e $\rho(\vec{r}')$ è la densità volumetrica di carica.

4.5 Esempi

4.6 Equazione di Poisson

Abbiamo trovato che il **campo elettrico** (\vec{E}) può essere scritto come il **gradiente** di una funzione scalare, il **potenziale elettrostatico** (V):

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

mentre dalla **legge di Gauss** per il campo elettrico nel vuoto si ha:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

dove ρ è la densità di carica e ϵ_0 è la permittività elettrica del vuoto. Mettendole assieme (sostituendo la prima nella seconda) si ottiene:

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}V) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

ovvero

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Si trova quindi l'**Equazione di Poisson**, dove $\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ è l'operatore **Laplaciano**. Perciò, in una regione dove non ci sono cariche, la **densità di carica è nulla** ($\rho = 0$), si ottiene:

$$\boxed{\nabla^2 V = 0}$$

Ottenendo l'**Equazione di Laplace**.

4.7 Condizioni al contorno / Boundary conditions

Determiniamo proprietà generali per il campo elettrico quando si attraversa una superficie che porta una densità di carica superficiale. In un tipico problema elettrostatico viene fornita una distribuzione di carica sorgente ρ e si desidera trovare il campo elettrico \vec{E} che essa produce. A meno che la simmetria del problema non consenta una soluzione immediata tramite la legge di Gauss, è spesso conveniente calcolare prima il potenziale elettrico come passaggio intermedio.

(1) Componente normale (perpendicolare) – discontinuità.

Supponiamo che la superficie abbia **spessore nullo**. Vogliamo capire cosa succede attraversando la superficie. Sappiamo che:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0.$$

Consideriamo una **superficie gaussiana cilindrica** di altezza trascurabile ($h \rightarrow 0$). Poiché la regione è molto piccola, possiamo considerare $\vec{E}(\vec{r})$ costante. Si ha quindi:

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \underbrace{\int_{S_{lat}} \vec{E}_l \cdot \hat{n} dS}_{(h \sim 0) \rightarrow 0} + \int_{S_{b1}} \vec{E}_1 \cdot \hat{n} dS + \int_{S_{b2}} \vec{E}_2 \cdot \hat{n} dS = \int_{S_{b1}} E_{\perp 1} dS - \int_{S_{b2}} E_{\perp 2} dS.$$

Dove S_{lat} è la superficie laterale del cilindro e S_{b1} , S_{b2} le superfici di base. In uno dei due integrali compare un segno negativo perché il versore normale è opposto. Si ottiene quindi:

$$E_1 S_b - E_2 S_b = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S_b}{\varepsilon_0},$$

e di conseguenza:

$$E_{\perp 1} - E_{\perp 2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Attraversando una qualsiasi superficie carica, la componente perpendicolare del campo elettrico presenta quindi una discontinuità pari a $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

(2) Componente tangenziale (parallela) – continuità.

Per la componente parallela alla superficie, utilizziamo invece il fatto che il rotore del campo elettrico è nullo. Consideriamo un percorso rettangolare (una superficie di Stokes) con i lati lunghi paralleli alla superficie e quelli corti perpendicolari, in modo da poter trascurare il loro contributo poiché $h \sim 0$. Applicando la circuitazione del campo elettrico si ottiene:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{l_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_{l_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = \int_l E_{\parallel 1} dl - \int_l E_{\parallel 2} dl = E_{\parallel 1} l - E_{\parallel 2} l.$$

Ne segue che attraversando una qualunque superficie carica, la componente parallela del campo elettrico non presenta discontinuità:

$$E_{\parallel 1} - E_{\parallel 2} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{\parallel 1} = E_{\parallel 2}.$$

Verifiche su casi noti

• **Piano infinito carico:**

Per un piano infinito con densità superficiale σ il campo è uniforme da entrambi i lati e si verifica

$$\Delta E_{\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad \Delta E_{\parallel} = 0.$$

• **Due piani con cariche opposte:**

Anche in questo caso valgono le stesse condizioni di discontinuità per la componente normale e continuità per la tangenziale:

$$\Delta E_{\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad \Delta E_{\parallel} = 0.$$

• **Sfera cava con carica superficiale (guscio sferico):**

Per un guscio sferico di raggio R con densità superficiale σ il campo interno è zero ($E_{\text{in}} = 0$), mentre immediatamente all'esterno della superficie si ha

$$E_{\text{out}}(R) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

quindi la componente perpendicolare presenta un salto da 0 a σ/ε_0 . La componente tangenziale è nulla poiché il campo è radiale.

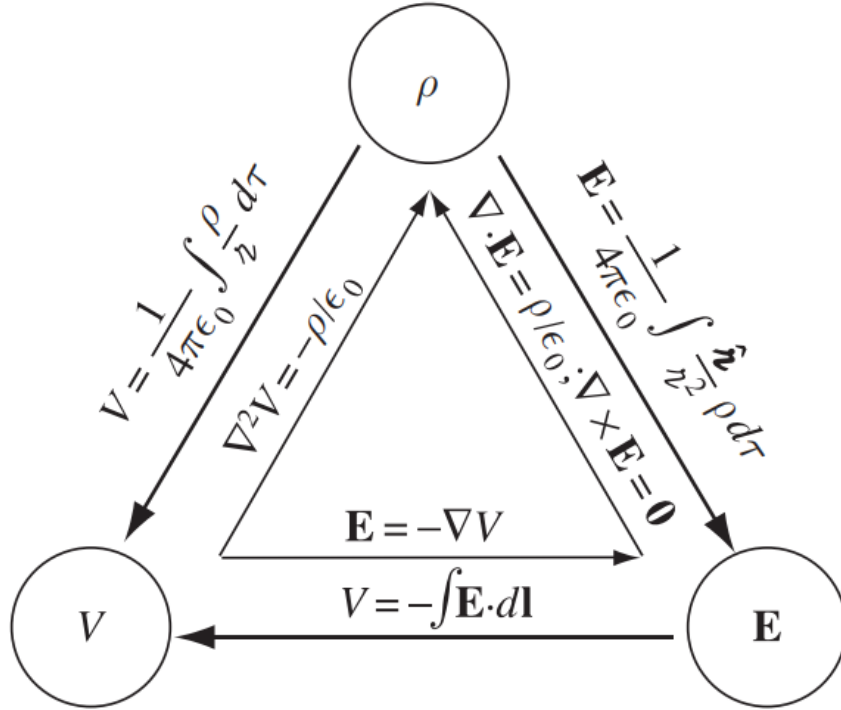


Figura 4.1: Diagramma delle relazioni tra ρ , V ed \vec{E} .

Capitolo 5

Lavoro ed energia elettrostatica

Supponiamo di avere una configurazione stazionaria di cariche e di voler spostare una carica Q dal punto a al punto b (supponendo che lo spostamento non perturb il campo elettrostatico). Quanto lavoro si compie? In ogni punto lungo il percorso la forza che agisce su Q è la forza elettrica $\vec{F}_{\text{campo}} = Q\vec{E}$; la forza che si esercita in opposizione a questa forza elettrica, quando un agente esterno muove la carica lentamente, è $\vec{F}_{\text{ext}} = -Q\vec{E}$ (analoga al sollevare un mattone: la gravità esercita una forza mg verso il basso, mentre chi solleva esercita una forza mg verso l'alto).

La forza elettrostatica è conservativa, quindi il lavoro dipende solo dai punti iniziale e finale e non dal percorso.

Lavoro compiuto dal campo

$$W_{\text{campo}} = \int_a^b \vec{F}_{\text{campo}} \cdot d\vec{l} = Q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = -Q[V(b) - V(a)] = -\Delta U,$$

dove definiamo $\Delta U = U(b) - U(a)$ come la variazione di energia potenziale elettrostatica.

Lavoro compiuto dall'agente esterno (quasi-statico)

$$W_{\text{ext}} = \int_a^b \vec{F}_{\text{ext}} \cdot d\vec{l} = -Q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = Q[V(b) - V(a)] = \Delta U.$$

Quindi si trovano i seguenti risultati:

$\Delta U = Q[V(b) - V(a)]$	e	$W_{\text{campo}} = -\Delta U, \quad W_{\text{ext}} = \Delta U.$
-----------------------------	---	--

Se scegliamo il riferimento del potenziale in modo che $V(\infty) = 0$, il lavoro necessario (dall'agente esterno) per portare la carica Q dall'infinito al punto \vec{r} è

$$W_{\text{ext}} = \Delta U = U(\vec{r}) - U(\infty) = Q[V(\vec{r}) - 0] = QV(\vec{r}).$$

Si osserva che in questo caso il potenziale elettrico V è l'energia potenziale per unità di carica.

Si osserva che in questo caso il potenziale elettrico V è l'energia potenziale per unità di carica.

5.1 Energia di un sistema discreto di cariche

Supponiamo di avere un sistema di cariche puntiformi, immaginando di portare le cariche, una alla volta, da lontano. La prima carica, q_1 , non richiede lavoro, poiché non c'è ancora un campo da contrastare. portando q_2 avremo che il lavoro di q_2 sarà:

$$W_2 = \int_{\infty}^{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \cdot d\vec{l}_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

Si nota un'importante differenza rispetto al caso gravitazionale, qua il lavoro può essere positivo o negativo, dipende anche dal segno delle cariche:

- + e -: si attraggono per cui il lavoro fatto dal campo è negativo
- + e + (o - e -) per cui per avvicinarle dobbiamo fornire energia, il sistema accumulerà energia potenziale e se non le tengo ferme le cariche tenderanno ad allontanarsi, il lavoro del campo è positivo mentre il lavoro esterno fatto sul sistema sarà negativo e quindi si dovrà fornire un'energia positiva.

Aggiungendo una terza carica si trova:

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_3 q_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} + \frac{q_3 q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} \right)$$

di conseguenza aggiungendo una quarta carica si trova:

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_4 q_3}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_3|} + \frac{q_4 q_2}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_2|} + \frac{q_4 q_1}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_1|} \right)$$

Si può quindi trovare la regola generale, considerando il lavoro complessivo per spostare tutte le cariche da distanza infinita alla loro posizione finale trovando:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

si mette $j > i$ altrimenti conteremmo la stessa coppia 2 volte, possiamo riscrivere la seguente come:

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}}.$$

Si noti che in questa forma il risultato non dipende dall'*ordine* con cui si assemblano le cariche, poiché ogni coppia compare nella somma. Infine, estraiamo il fattore q_i :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}} \right).$$

Il termine fra parentesi è il potenziale nel punto \vec{r}_i (la posizione di q_i) dovuto a tutte le altre cariche (apparte q_i). Pertanto:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V(\vec{r}_i).$$

Questo è il lavoro necessario per assemblare una configurazione di cariche puntiformi e rappresenta anche l'energia immagazzinata nella configurazione del sistema.

5.2 Energia di un sistema con distribuzione continua di carica

Estendiamo il risultato precedente considerando elementi infinitesimi di carica e integrando sulla distribuzione continua. Per la configurazione considerata si ha

$$W = \frac{1}{2} \int V(\vec{r}) dq = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) dV,$$

dove $\rho(\vec{r})$ è la densità di carica e \mathcal{V} è un volume che contiene le cariche. Usando la legge di Gauss $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ otteniamo

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\mathcal{V}} V(\vec{r}) (\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r})) dV.$$

Applichiamo ora l'identità vettoriale

$$\nabla \cdot (V \vec{E}) = V (\nabla \cdot \vec{E}) + \vec{E} \cdot \nabla V.$$

Da ciò segue

$$V (\nabla \cdot \vec{E}) = \nabla \cdot (V \vec{E}) - \vec{E} \cdot \nabla V.$$

Poiché $\nabla V = -\vec{E}$, abbiamo $\vec{E} \cdot \nabla V = \vec{E} \cdot (-\vec{E}) = -\vec{E} \cdot \vec{E}$. Sostituendo nell'integrale otteniamo

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_{\mathcal{V}} [\nabla \cdot (V \vec{E}) - \vec{E} \cdot \nabla V] dV \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (V \vec{E}) dV + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_{\mathcal{V}} \vec{E} \cdot \vec{E} dV. \end{aligned}$$

Applicando il teorema della divergenza al primo termine:

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \oint_{S_{\mathcal{V}}} V(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dS + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_{\mathcal{V}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) dV.$$

Osservazioni sulla scelta del volume di integrazione

Abbiamo ottenuto la relazione

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathcal{V}} V(\vec{r}) (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r})) dV = \frac{\varepsilon_0}{2} \oint_{S_{\mathcal{V}}} V(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dS + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathcal{V}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) dV.$$

Questa è esatta per ogni volume \mathcal{V} che contenga l'intera distribuzione di carica considerata. Di conseguenza:

- Se si sceglie di integrare su un volume \mathcal{V} più grande che contiene comunque tutte le cariche, l'integrale di volume $\int_{\mathcal{V}} \vec{E}^2 dV$ cresce (poiché l'integrando è positivo), ma il termine di superficie $\oint_{S_{\mathcal{V}}} V \vec{E} \cdot \hat{n} dS$ diminuisce in maniera tale che la somma o U_e rimanga invariata: quindi il valore di W non dipende dalla scelta del volume finché esso contiene tutta la carica e si include il relativo termine di superficie.
- Per sorgenti localizzate (cioè quando tutta la carica è contenuta in una regione finita), è utile estendere \mathcal{V} a tutto lo spazio (e quindi all'infinito). Per grandi raggi r abbiamo:

$$|\vec{E}| \sim \frac{1}{r^2}, \quad V \sim \frac{1}{r}, \quad |S| \sim r^2,$$

quindi il contributo superficiale si stima come

$$\oint_S V \vec{E} \cdot \hat{n} dS \sim V |\vec{E}| |S| \propto \frac{1}{r} \longrightarrow 0 \quad \text{per } r \rightarrow \infty.$$

In tale limite il termine di superficie si annulla e resta la forma puramente sul campo.

Se si estende l'integrazione a tutto lo spazio e si suppone che il campo e il potenziale decadano abbastanza rapidamente all'infinito (in modo che il termine di superficie vada a zero), si ricava:

$$W = U_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathcal{V}} \vec{E}^2(\vec{r}) dV$$

Densità di energia

Definiamo una nuova quantità la densità di energia elettrica:

$$u_e(\vec{r}) \equiv \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2(\vec{r}) \quad \text{cosicché} \quad U_e = \int_{\mathcal{V}} u_e(\vec{r}) dV.$$

Questa definizione è valida anche fuori dal regime puramente elettrostatico.

Equivalenza delle formulazioni (discreto vs continuo)

Le due espressioni sono equivalenti a condizione di trattare con attenzione i contributi che, nel caso ideale delle cariche puntiformi, diventano infiniti. In particolare:

- Se la distribuzione di carica è regolare (non contiene cariche ideali puntiformi) le due formule

$$\frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) d\mathcal{V} \quad \text{e} \quad \frac{\varepsilon_0}{2} \int \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) d\mathcal{V}$$

danno lo stesso risultato finito.

- Se la carica è puntiforme, la seconda formula

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \int \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) d\mathcal{V}$$

diverge perché il campo $\vec{E}(\vec{r})$ cresce senza limite nelle regioni molto vicine alla carica. Questo riflette il fatto che, idealizzando la carica come concentrata in un punto, l'energia richiesta per "costruirla" risulta infinita. Nella formulazione discreta per N cariche puntiformi si evita questa divergenza.

Principio di sovrapposizione

Infine, una nota sul principio di sovrapposizione: poiché l'energia è quadratica nel campo, l'energia totale di due sistemi non è semplicemente la somma delle energie prese singolarmente.

5.3 Esempi

Capitolo 6

Materiali conduttori e isolanti

Quasi tutti i materiali inorganici sono cristallini: gli atomi sono disposti su un reticolo periodico. Tuttavia questi materiali non si comportano tutti allo stesso modo. Nel diamante gli elettroni sono fortemente legati ai propri atomi (con carica totale nulla all'esterno). Nel rame, invece, esistono elettroni delocalizzati — non si tratta di ionizzazione, ma di elettroni che occupano bande contigue e possono spostarsi da un atomo all'altro; questi elettroni formano una specie di “fluido” mobile che porta corrente e carica nel materiale.

Possiamo quindi distinguere, in prima approssimazione, due tipi di materiale:

- **Isolanti** (o dielettrici): gli elettroni rimangono legati agli stessi atomi e non vi sono portatori liberi in grado di muoversi su scala macroscopica.
- **Conduttori**: una parte degli elettroni è libera di muoversi tra gli atomi e quindi può sostenere correnti macroscopiche.

Vedremo più avanti che questi comportamenti si rappresentano convenientemente introducendo due densità di carica: ρ_b (*bound* — carica legata) e ρ_f (*free* — carica libera). D'ora in avanti chiameremo **campi di stimolo** i campi applicati dall'esterno al sistema, e **campi di risposta** i campi generati dal moto delle cariche (in particolare dal moto degli elettroni) in risposta al campo di stimolo.

Quando gli elettroni sono liberi di muoversi, il campo di stimolo esercita su di essi una forza che li sposta: questo spostamento costituisce una corrente elettrica, cioè uno spostamento macroscopico di carica.

A grandi linee, e a livello atomico, ciò che succede in presenza di un campo di stimolo è il seguente. Il campo esterno provoca uno spostamento relativo tra il nucleo e la nube elettronica di ciascun atomo; questo crea un dipolo elettrico che produce un campo elettrico (effetto microscopico). Tale effetto è presente sia nei dielettrici sia nei conduttori, ma con esiti diversi: nei dielettrici lo spostamento è limitato, mentre nei conduttori il moto degli elettroni può risultare in una corrente macroscopica (effetto macroscopico).

Struttura elettronica e densità di carica

Si distinguono, a livello atomico, i seguenti insiemi di elettroni:

- **Elettroni di valenza**: sono gli elettroni più esterni; partecipano ai legami chimici e, quando delocalizzati, sono i principali responsabili della conduzione elettrica.
- **Elettroni di core**: sono più vicini al nucleo e fortemente legati.

Il nucleo atomico porta una carica positiva che, in prima approssimazione puntiforme, si può rappresentare con la delta di Dirac:

$$\rho_{\text{nucleo}}(\vec{r}) = Ze\delta(\vec{r}),$$

dove Z è il numero atomico ed $e > 0$ è il modulo della carica dell'elettrone. Tuttavia, a causa della presenza degli elettroni di core che schermano parzialmente la carica del nucleo, gli elettroni di valenza percepiscono spesso una carica nucleare efficace $\tilde{Z}e$: in molte semplificazioni si può dunque scrivere

$$\rho_{\text{eff}}(\vec{r}) = \tilde{Z}e\delta(\vec{r}),$$

intesa come carica positiva concentrata in prossimità del centro atomico dopo aver tenuto conto della schermatura degli elettroni interni.

Un'altra approssimazione spesso usata per modellare qualitativamente un atomo è quella della *sfera atomica*: si approssima la nube elettronica esterna come una distribuzione negativa uniforme (o comunque distribuita su una regione di raggio r) che neutralizza la carica positiva centrale. Se la carica totale della nube di valenza ha modulo $\tilde{Z}e$ e occupa un volume atomico $V_{\text{atom}} = \frac{4}{3}\pi r^3$, la densità volumetrica della nube elettronica può essere approssimata come

$$\rho_e(\vec{r}) \simeq -\frac{\tilde{Z}e}{V_{\text{atom}}} = -\frac{\tilde{Z}e}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

Nel contesto dei materiali solidi conviene tenere presente le seguenti considerazioni:

- Se gli elettroni di valenza possono spostarsi liberamente da un punto all'altro del materiale, essi costituiscono *portatori di carica* e la loro densità contribuisce a ρ_f : il materiale è un conduttore o semimetallo.
- Se gli elettroni di valenza sono localizzati sull'atomo e non partecipano al trasporto macroscopico, la loro carica è considerata *legata* e contribuisce a ρ_b : il materiale si comporta come un isolante (o dielettrico).

6.1 Campo elettrico in un materiale conduttore

Un conduttore perfetto contiene un numero infinito di cariche libere, tuttavia in natura non esistono conduttori perfetti, ma dei metalli che ci si avvicinano molto. Vediamo quindi le proprietà dei conduttori ideali:

Immergiamo una lastra di un conduttore in un campo elettrico di stimolo. Gli elettroni tendono a muoversi nella direzione del campo elettrico, con verso opposto al campo, ma si muovono sempre all'esterno non escano dal materiale.

Quindi se applico un campo elettrico ad un conduttore neutro, questo rimane complessivamente neutro. Infatti gli elettroni si spostano all'interno e avrò una faccia negativa e una positiva, ma non avrò un vuoto di carica, vediamo le proprietà elettrostatiche dei conduttori ideali:

- $E = 0$, dentro un conduttore in quanto il campo E_s generato all'interno compensa il campo di stimolo, dando una risultante nulla
- $\rho = 0$ dentro un conduttore, il che segue direttamente da Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} = 0$ e quindi le cariche si distribuiscono sulla superficie.
- Un conduttore è equipotenziale per ogni a ed b punti all'interno o sulla superficie del conduttore si ha:

$$V(b) - V(a) = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \rightarrow V(b) = V(a)$$

- La distribuzioni di carica sulla superficie hanno uno spessore talmente piccolo da poter essere considerato nullo, e quindi si avrà una distribuzione superficiale
- Il campo elettrico è perpendicolare alla superficie, valgono pertanto le considerazioni già fatte sulle superficie cariche, in particolare la discontinuità del campo che vale $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

Tutte le considerazioni valgono per una qualsiasi forma del materiale conduttore.

6.2 Capacità e condensatori

Supponiamo di avere due conduttori di carica $+Q$ e $-Q$, poichè il V è costante sulle superfici possiamo trattarne la differenza:

$$\Delta V = V = V = V^+ - V^- = \int_{-}^{+} \vec{E} d\vec{l}$$

Tale potenziale risulta essere proporzionale a Q , la costante di proporzionalità viene detta **capacità** e scriveremo:

$$C = \frac{Q}{V}$$

la sua unità di misura è il farad ($[C] = F$). Notiamo che dalla definizione C risulta sempre una quantità positiva.

Per *caricare* un condensatore dovremmo togliere elettroni dal conduttore a potenziale positivo e depositarli su quello negativo, supponendo di essere ad un potenziale $V = \frac{q}{C}$, il lavoro compiuto per fare ciò risulta:

$$dL = dqV(\vec{r}) = dq\left(\frac{q}{C}\right) \rightarrow L = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2$$

6.2.1 Condensatore all'infinito

Ogni tanto si può sentire impropriamente parlare di capacità di un singolo conduttore, in questo caso il secondo conduttore (con una carica negativa) è un'immaginario guscio sferico di raggio infinito che circonda il primo. Quindi:

$$C = \frac{Q}{V}$$

dove V è il potenziale del conduttore rispetto l'infinito (calcolato in precedenza):

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$

Quindi:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{Q} 4\pi\epsilon_0 r_0 = 4\pi\epsilon_0 r_0$$

6.3 Energia immagazzinata in un condensatore

Per trovare l'energia potenziale immagazzinata in un condensatore dovremmo trovare il lavoro necessario per portare ogni carica dalla piastra positiva a quella negativa, il lavoro infinitesimo sarà: $dL = dqV(\vec{r}) = dq\left(\frac{q}{C}\right)$ per cui il lavoro necessario per andare da $q=0$ a $q=Q$ risulta:

$$L = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2$$

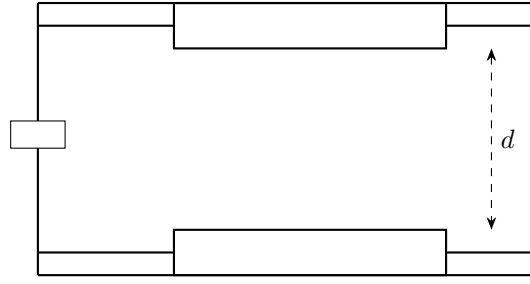
Questo sarà uguale all'energia potenziale immagazzinata:

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV$$

6.3.1 Condensatore piano

Prendiamo 2 lastre conduttrici di ugual area, poste ad una distanza d , per prima cosa dobbiamo supporre di far diminuire di molto la distanza d fra le due lastre metalliche (e che quindi la lunghezza dei piani sia $\gg d$), alla chiusura dell'interruttore il potenziale aumenta verso la lastra positiva. Si ha un campo generatosi fra le lastre di valore:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) = E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rightarrow V = Ed = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} \\ \downarrow \\ \text{supponendo } A \gg d \\ C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{\sigma d}{\epsilon_0}} = \frac{\epsilon_0 d}{\sigma} = \frac{\sigma A}{\sigma} = \frac{A\epsilon_0}{d} \end{aligned}$$



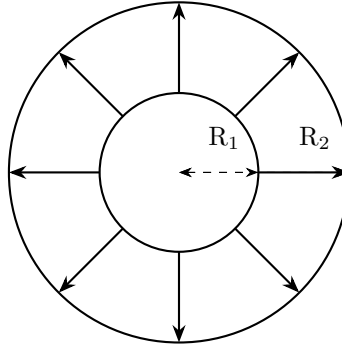
6.3.2 Condensatore sferico

Immaginiamo di avere una sfera conduttrice e un guscio sferico che la contiene anch'esso conduttore, i due oggetti (di raggio $R_1 < R_2$ e densità di carica $\sigma_1 > 0; \sigma_2 < 0$) sono inseriti in un circuito che li collega. Chiudendo l'interruttore:

- all'interno dei conduttori ($R < R_1$) ed all'esterno ($R > R_2$) $\vec{E} = 0$
- la carica totale del sistema rimane nulla
- fra le due *armature* ($R_1 < R < R_2$) vi è una d.d.p. V , dunque si crea un campo elettrostatico

Sulla parete interna del guscio si deposita una carica $-Q$ che contrasta la carica Q depositata sulla superficie della sfera interna. Dunque nello spazio fra i due materiali vi è solo il campo \vec{E} della carica Q . Il campo di una sfera uniformemente carica vale, notoriamente: $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$,

Facciamo notare che avremo, sulle superfici, una σ_1 diversa da σ_2 anche in modulo. Infatti la carica $|Q|$ viene distribuita su due aree di modulo differente.



E quindi il potenziale risulterà: $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} (\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1})$ Possiamo così calcolare la capacità:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} (\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1})} = \frac{4\pi\epsilon_0 (R_1 R_2)}{(R_2 - R_1)}$$

Possiamo usare anche l'energia immagazzinata:

$$U_e = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} Q^2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1})$$

utilizzando la densità di energia otterremo lo stesso risultato:

$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{r_1}^{r_2} E(r) dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{r_1}^{r_2} (\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}) 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} (\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1})$$

6.3.3 Condensatore cilindrico

Ora passiamo al caso di due cilindri coassiali (di raggio $R_0 < R_1$ e con densità di carica $\sigma_1 > 0; \sigma_2 < 0$ ma uguali in modulo) collegati da un circuito, come sempre all'interno delle armature $\vec{E} = 0$ e V fra di esse. Ragionando come prima avremo internamente ed esternamente ($R > R_0; R > R_1$) $E=0$ ed tra i 2 conduttori ($R_0 < R < R_2$):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

sapendo che $\sigma 2\pi R_0 = \frac{Q}{l} = \lambda$ (l lunghezza del cilindro) si ottiene:

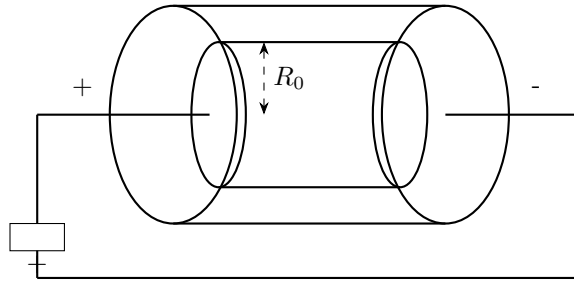
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \hat{r} = \frac{\sigma 2\pi r}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

da cui otteniamo la differenza di potenziale:

$$\Delta V = V = - \int_{R_0}^{R_1} \frac{\sigma 2\pi R_0}{2\pi\epsilon_0 r} dr = - \frac{\sigma 2\pi R_0}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right) = - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)$$

Deriviamo anche la capacità:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{1}{\frac{1}{l 2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)} = \frac{l 2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)}$$



Iniziamo a parlare di dipoli elettrici: sistemi caratterizzati da due poli (o cariche) distanziati, uno di carica positiva e uno di carica negativa.

Si introduce una nuova quantità vettoriale detta *momento di dipolo elettrico*:

$$\vec{p} = q\vec{s} \quad \text{con dimensione:} \quad [p] = \text{C m}$$

Significato fisico. Il momento di dipolo elettrico è una grandezza vettoriale che misura la separazione e l'intensità delle cariche in un sistema. Lo introduciamo perché sintetizza, in un unico vettore, come una distribuzione di carica non perfettamente simmetrica appare a grandi distanze e come reagisce a un campo esterno.

6.4 Potenziale e campo elettrico di dipolo

Calcoliamo quindi il potenziale dato da un dipolo elettrico a una distanza \vec{r} dal centro del dipolo stesso (si presti attenzione alla scelta dei segni una volta scelto il centro del dipolo come origine).

Supponendo di avere $|\vec{r}| \gg |\vec{s}|$ (dove \vec{s} è la distanza tra le due cariche) possiamo approssimare $\vec{s} \rightarrow \vec{0}$ cosicché:

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \frac{\vec{s}}{2}|} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} + \frac{\vec{s}}{2}|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \frac{\vec{s}}{2}|} - \frac{1}{|\vec{r} + \frac{\vec{s}}{2}|} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{|\vec{r} + \frac{\vec{s}}{2}| - |\vec{r} - \frac{\vec{s}}{2}|}{r^2} \right)$$

Riscrivendo $|\vec{r} + \frac{\vec{s}}{2}| - |\vec{r} - \frac{\vec{s}}{2}| = s \cos \theta$ si trova:

$$V(\vec{r}) = \frac{q s \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Sapendo inoltre che $qs \cos \theta = \vec{p} \cdot \vec{r}$ si trova:

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Nel limite di dipolo, avendo ottenuto il potenziale, utilizziamo la relazione $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$ per ottenere il campo elettrico:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{3\vec{p}\vec{r}}{r^5} \cdot \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3}$$

Analizziamo quindi le caratteristiche di questo campo (le formule trovate rappresentano bene anche dipoli reali, fintanto che non siano troppo vicini al dipolo).

Definiamo il piano equatoriale come il piano ortogonale al momento di dipolo \vec{p} e passante per il centro del dipolo. Studiamo quindi il campo elettrico in due zone particolari:

- Sul piano equatoriale abbiamo $\vec{p} \perp \vec{r}$ per cui:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{3\vec{p}\vec{r}}{r^5}}_{=0} \cdot \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{r^3}$$

È solitamente lungo l'asse z e quindi sul piano le linee di forza saranno perpendicolari al piano.

- Sull'asse z , qui $\vec{p} \parallel \vec{r}$ per cui:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{3\vec{p}\vec{r}}{r^5} \cdot \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3pr}{r^5} \cdot r - \frac{p}{r^3} \right)$$

È tutto sull'asse z , quindi:

$$\vec{E}_z(0, 0, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3pr}{r^5} \cdot r - \frac{p}{r^3} \right) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{z^3}$$

Si nota, ovviamente, che prendendo una superficie gaussiana che contenga entrambe le cariche, il flusso del campo elettrico attraverso la superficie sarà nullo.

6.5 Momento di dipolo di un sistema

Ora si estende il concetto di dipolo a un sistema di N cariche puntiformi, definendo quindi il momento di dipolo come:

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$$

Si faccia presente che, per semplificare il calcolo, è possibile decomporre il momento di dipolo come:

$$\vec{p} = \vec{p}_x + \vec{p}_y + \vec{p}_z = \sum_i q_i \vec{r}_{xi} + \sum_i q_i \vec{r}_{yi} + \sum_i q_i \vec{r}_{zi}$$

Notiamo che se $\sum_i q_i = Q \neq 0$ (ovvero il sistema non è neutro), allora, in buona approssimazione, allontanandosi dal sistema di cariche questo si comporterà come una carica puntiforme Q .

Se invece $\sum_i q_i = Q = 0$, allontanandosi il campo decade come $\frac{1}{r^3}$ (campo bipolare).

Inoltre, se si prende un'altra origine O' (diciamo traslata di un vettore \vec{a}), il momento risulta:

$$\vec{p}' = \sum_i q_i \vec{r}'_i = \sum_i q_i (\vec{r}_i + \vec{a}) = \sum_i q_i \vec{r}_i + \vec{a} \sum_i q_i$$

Quindi, se $\sum_i q_i = Q = 0$, il momento di dipolo è indipendente dalla scelta dell'origine (polo).

Si può quindi, come già fatto in precedenza, estendere il concetto a una distribuzione volumetrica di carica:

$$\vec{p} = \int_V \rho(\vec{r}) \vec{r} dV$$

Il momento di dipolo elettrico (che non dipende da \vec{r}) è quindi determinato dalla geometria della distribuzione di carica.

6.6 Interazioni di dipolo in un campo elettrico di stimolo

Vediamo come si comporta un dipolo elettrico quando è immerso nel campo elettrico di stimolo dato da una carica q_s .

Iniziamo con il vedere quanto vale l'energia potenziale ricordando che $U(\vec{r}) = qV(\vec{r})$; pertanto, in questo caso:

$$U(\vec{r}) = qV_s(\vec{r} + d\vec{s}) - q \underbrace{V_s(\vec{r})}_{\text{potenziale dato dalla carica di stimolo}} = q(V_s(\vec{r} + d\vec{s}) - V_s(\vec{r}))$$

Sviluppando al primo ordine in $d\vec{s}$ si ottiene

$$q d\vec{s} \cdot \vec{\nabla} V_s(\vec{r}) = \vec{p} \cdot \vec{\nabla} V_s(\vec{r}) = -\vec{p} \cdot \vec{E}_s(\vec{r}).$$

Il significato del risultato è che il campo elettrico di stimolo che agisce sulle cariche causa una coppia di forze che provoca la rotazione del dipolo.

Si calcola quindi il momento delle forze (\vec{C}) agente sul dipolo:

$$\begin{aligned} \vec{C} &= \vec{r} \times ((-q)\vec{E}_s(\vec{r})) + (\vec{r} + d\vec{s}) \times (q\vec{E}_s(\vec{r})) \\ &= -q\vec{r} \times \vec{E}_s(\vec{r}) + q\vec{r} \times \vec{E}_s(\vec{r}) + qd\vec{s} \times \vec{E}_s(\vec{r}) \\ &= qd\vec{s} \times \vec{E}_s(\vec{r}) = \vec{p} \times \vec{E}_s(\vec{r}). \end{aligned}$$

Quindi $|\vec{C}| = p E_s(\vec{r}) \sin \theta$.

Possiamo ora trovare il lavoro necessario per portare il dipolo da un angolo θ ad un angolo θ' :

$$L = \int_{\theta}^{\theta'} C(\theta) d\theta = \int_{\theta}^{\theta'} p E_s \sin \theta d\theta = p E_s (\cos \theta - \cos \theta') = \Delta U,$$

supponendo un campo uniforme. Ciò conferma quanto trovato per l'energia potenziale:

$$U(\theta) = -p E_s \cos \theta.$$

Vediamo alcuni casi particolari:

- **Paralleli**, $\vec{p} \parallel \vec{E}_s$:
 $U = -p E_s$; qui l'energia è minima e $\vec{C} = 0$. È quindi una configurazione di equilibrio stabile.
- **Antiparalleli** (versi opposti):
 $U = +p E_s$; qui l'energia è massima e $\vec{C} = 0$. È invece un equilibrio instabile: anche una minima perturbazione lo allontana.

Un dipolo in un campo elettrico tende a ruotare fino a raggiungere la posizione di equilibrio, quindi \vec{p} tende ad allinearsi nello stesso verso di \vec{E}_s .

6.7 Forza ed energia elettrostatica

Prima di osservare alcune interazioni ricordiamo come sono legate forza ed energia in elettrostatica:

$$\begin{aligned} U(\vec{r}) &= qV(\vec{r}) \\ \vec{F}(\vec{r}) &= q\vec{E}(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r}). \\ \vec{E}(\vec{r}) &= -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \end{aligned}$$

6.7.1 Interazione dipolo-carica

Torniamo all'interazione tra dipolo e carica, scegliendo quale campo considerare di stimolo.

- **Carica immersa nel campo di dipolo:**

$$U(\vec{r}) = qV_s(\vec{r}) = q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right)$$

dove V_s è dato dal dipolo. Possiamo quindi calcolare la forza agente sulla carica, sapendo il campo elettrico di dipolo:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) = q\vec{E}_s(\vec{r}) = q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right).$$

- **Dipolo immerso nel campo della carica:**

$$U(\vec{r}) = -\vec{p} \cdot \vec{E}_s(\vec{r}) = -\vec{p} \cdot \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = -q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}.$$

Si nota che il risultato ottenuto è uguale all'energia del caso precedente.

In questo caso non si calcola la forza netta sul dipolo puntiforme, perché per i dipoli ha più senso discutere il momento delle forze (la coppia).

6.7.2 Interazioni tra due dipoli

Vediamo come due dipoli posti a distanza r interagiscono tra loro. Consideriamo il dipolo 2 come immerso nel campo del dipolo 1. Sia quindi $\vec{E}_s(\vec{r})$ il campo generato dal dipolo 1. Per l'energia si ha:

$$U(\vec{r}) = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_s(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{3(\vec{p}_1 \cdot \vec{r})(\vec{p}_2 \cdot \vec{r})}{r^5} + \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{r^3} \right).$$

Vediamo quindi come varia l'energia in funzione della direzione e del verso dei momenti di dipolo:

- **Antiparalleli e perpendicolari a \vec{r} :**

$$U(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_1 p_2}{r^3},$$

dove il primo termine è zero e il secondo è negativo: avvicinando i due dipoli l'energia diventa più negativa, quindi i dipoli si attraggono (dato che $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$).

- **Paralleli e paralleli a \vec{r} :**

$$U(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_1 p_2}{r^3},$$

anche in questo caso si ha attrazione e l'energia è negativa.

- **Paralleli e perpendicolari a \vec{r} :**

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_1 p_2}{r^3},$$

qui l'energia aumenta avvicinando i dipoli e la forza risulta repulsiva.

- **Antiparalleli e paralleli a \vec{r} :**

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_1 p_2}{r^3},$$

quindi energia positiva e repulsione.

I dipoli sono importanti anche perché spesso atomi o molecole neutre possiedono un momento di dipolo.

Capitolo 7

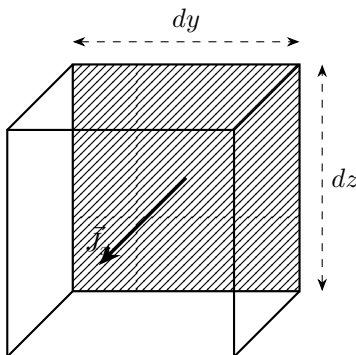
Correnti elettriche e campo di polarizzazione

7.1 La densità di corrente elettrica

Supponiamo che le cariche possano spostarsi e quindi fluire all'esterno di un volumetto definito (come un parallelepipedo). Definiremo una componente del campo **densità di corrente** tale che

$$\vec{J}_x dt dy dz = dq \rightarrow \vec{J} = \frac{dq}{dt dy dz}$$

Da cui concludiamo che esso rappresenta la quantità di carica che attraversa la superficie $dydz$ per unità di tempo $\left[\frac{C}{m^2 s}\right]$.



Per una superficie piana si ottiene: $\vec{J} \vec{S} = \vec{J} \hat{n} S = JS \cos(\theta)$.

Ovviamente se il piano è parallelo a \vec{J} , allora $\vec{J} \cdot \vec{S} = 0$.

Per una superficie definita in modo arbitrario:

1. Scomponiamo $d\vec{S} = d\vec{S}_x + d\vec{S}_y + d\vec{S}_z = d\vec{S}\hat{n}_x + d\vec{S}\hat{n}_y + d\vec{S}\hat{n}_z$
2. Da cui si ottiene $\left(\vec{J}_x d\vec{S}\hat{n}_x + \vec{J}_y d\vec{S}\hat{n}_y + \vec{J}_z d\vec{S}\hat{n}_z\right) dt = \vec{J} \cdot d\vec{S} \hat{n} dt = \vec{J} \cdot \hat{n} dS$

Se \vec{J} è costante allora vuol dire che le cariche si muovono uniformemente nella stessa direzione, ciò accade frequentemente in un filo cilindrico in cui fluisce carica.

7.2 La corrente

Nel caso in cui la superficie sia piana, di area A, e \vec{J} sia uniforme e perpendicolare alla superficie:

$$\vec{J} d\vec{S} = JA = I$$

Definiamo I come la *corrente* attraverso la superficie $[A = \frac{C}{s}]$.

Per una superficie generica si ottiene:

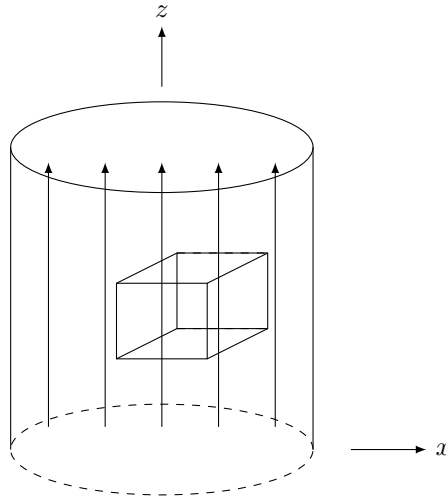
$$I = \int_S \vec{J}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dS$$

oppure definita come $I = \frac{dQ}{dt}$

7.3 Legge di conservazione della carica

Immaginando di prendere un tubo cilindrico e localizzando un volumetto parallelepipedo, supponendo che la densità di corrente sia costante, posso constatare le seguenti:

- Attraverso la superfici paralleli a \vec{J} non passerà alcuna carica (per definizione di \vec{J})
- Essendo \vec{J} costante: $\vec{J}\hat{n}_1 S_1 + \vec{J}\hat{n}_2 S_2 = \vec{J}\hat{n}S - \vec{J}\hat{n}S = 0$



In generale, per una superficie chiusa:

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint_S \vec{J}(\vec{r}, t) \hat{n} dS$$

da cui si ricava che, se vi è un flusso all'interno di un volumetto, la carica al suo interno cambia di una quantità pari al flusso di \vec{J} . Tale legge viene detta **legge di conservazione della carica in forma integrale** (per sistemi isolati).

Inoltre, riscrivendo $Q = \oint_{V_S} \rho(\vec{r}, t)$:

$$\frac{d}{dt} \oint_{V_S} \rho(\vec{r}, t) = - \oint_{S_V} \vec{J}(\vec{r}, t) \hat{n} dS = - \int_{V_S} \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) dV$$

poichè non abbiamo fatto alcuna ipotesi sul volume, si ottiene la **legge di conservazione della carica in forma locale**:

$$\frac{d}{dt} \rho(\vec{r}, t) = - \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}, t)$$

Utilizzando le leggi appena ricavate osserviamo ciò che accade all'interno di un materiale inizialmente isolato, privo di campi di stimolo (ma con una carica build-in). Si ha per $t = 0$ una specifica $\rho(\vec{r}, 0)$ che al tempo t , dopo lo stimolo diviene

$$\underbrace{\rho_C(\vec{r}, t)}_{\text{d'interesse}} = \rho_{tot}(\vec{r}, t) - \underbrace{\rho_{build-in}(\vec{r}, 0)}_{=\rho(\vec{r}, 0)}$$

che posso riformulare come

$$\rho_C(\vec{r}, t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t'} \rho(\vec{r}, t') dt' = - \int_0^t \nabla \vec{J}(\vec{r}, t') dt' = - \nabla \int_0^t \vec{J}(\vec{r}, t') dt'$$

Quindi le correnti si sono generate a causa di uno stimolo.

7.3.1 Modellizziamo l'atomo

7.4 Carica elettrica legata e libera

7.5 Campo di polarizzazione

7.6 Densità di carica superficiale nei materiali

7.7 La pila di volta

7.8 Potenza elettrica

7.9 Leggi di Ohm

7.9.1 Legge di Ohm locale

7.9.2 Legge di Ohm (macroscopica)

Capitolo 8

Campi elettrici nei materiali

8.1 Gabbia di Faraday

8.2 Condensatori in serie e parallelo

8.2.1 In serie

8.2.2 In parallelo

8.3 Campo di spostamento dielettrico

8.4 Relazione costitutiva interna

8.5 Condensatori reali

8.5.1 Condensatore piano con dielettrico

8.5.2 Considerazioni

Notiamo che se $\varepsilon_0 \gg 1$, allora $\sigma_f \sim \sigma_b$

8.5.3 Condensatore piano con conduttore

Inseriamo nel condensatore un conduttore, ma non a contatto con le armature, allora posso vederlo come più condensatori in serie. La capacità sarà quindi:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d - b}$$

8.6 Esempi

Esempio 1: dielettrici in serie

Consideriamo un condensatore piano le cui armature hanno area A e in cui sono inseriti, in serie lungo la direzione del campo, due strati dielettrici di spessori h_1 e h_2 e costanti dielettriche relative ε_1 e ε_2 . La differenza di potenziale tra le armature è V . Assumendo campi uniformi e perpendicolari alle superfici, si può scrivere

$$V = h_1 E_1 + h_2 E_2,$$

dove E_1 ed E_2 sono i moduli dei campi elettrici nei due materiali.

Se sull'interfaccia non sono presenti cariche libere ($-\sigma_{f1} + \sigma_{f2} = 0$), la componente normale del vettore \vec{D} è continua:

$$D_{\perp 1} = D_{\perp 2} = D,$$

ovvero, D è lo stesso in entrambi gli strati. Poiché $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$, si ottiene

$$E_1 = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_1}, \quad E_2 = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_2}.$$

Sostituendo in V :

$$V = D \left(\frac{h_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} + \frac{h_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} \right).$$

Poiché il campo di spostamento è dato da $D = \frac{Q}{A}$ (con Q carica sulle armature), risulta

$$V = \frac{Q}{A} \left(\frac{h_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} + \frac{h_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} \right) = Q \left(\frac{1}{\varepsilon_0 A} \left(\frac{h_1}{\varepsilon_1} + \frac{h_2}{\varepsilon_2} \right) \right).$$

Dunque la capacità totale C del sistema è

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 A}{\frac{h_1}{\varepsilon_1} + \frac{h_2}{\varepsilon_2}}.$$

Introducendo le capacità dei singoli strati, $C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 A}{h_1}$ e $C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 A}{h_2}$, si ottiene la nota relazione per condensatori in serie:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Esempio 2: dielettrici in parallelo

Consideriamo ora due dielettrici affiancati (ad esempio due rettangoli contigui) inseriti fra le armature di un condensatore piano. Le armature sono equipotenziali e la differenza di potenziale tra di esse è V ; lo spessore comune dei dielettrici è h . Poiché lo stesso potenziale viene applicato alle due regioni, il campo elettrico è lo stesso in entrambe:

$$E = \frac{V}{h}.$$

Tuttavia i materiali si polarizzano in modo diverso, quindi il vettore di spostamento normale \vec{D}_{\perp} è diverso nei due dielettrici:

$$\vec{D}_{\perp, i} = \varepsilon_0 \varepsilon_i \vec{E}, \quad i = 1, 2.$$

La carica totale sulle armature è la somma delle cariche accumulate sopra ciascuna area A_1 e A_2 :

$$Q = Q_1 + Q_2 = \vec{D}_{\perp, 1} A_1 + \vec{D}_{\perp, 2} A_2.$$

Sostituendo $\vec{D}_{\perp, i} = \varepsilon_0 \varepsilon_i \vec{E}$ e $E = V/h$ si ottiene

$$Q = \varepsilon_0 \frac{V}{h} (\varepsilon_1 A_1 + \varepsilon_2 A_2) = V \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{h} (\varepsilon_1 A_1 + \varepsilon_2 A_2)}_C.$$

Quindi la capacità totale è

$$C = \frac{\varepsilon_0}{h} (\varepsilon_1 A_1 + \varepsilon_2 A_2).$$

Definendo le capacità dei singoli “rami” come $C_i = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_i A_i}{h}$, si verifica la legge dei condensatori in parallelo:

$$C = C_1 + C_2.$$

8.7 Interfaccia vuoto – dielettrico

Vediamo cosa succede ai campi elettrici nell'interfaccia tra il vuoto e un materiale dielettrico. Indicheremo con \hat{n} il versore normale alla superficie (direzione convenzionale dal vuoto verso il dielettrico) e con α l'angolo che il vettore campo forma con la *superficie* (cioè con l'interfaccia).

Nel vuoto vale

$$\vec{D}_{\text{est}} = \varepsilon_0 \vec{E}_{\text{est}},$$

mentre nel dielettrico

$$\vec{D}_{\text{int}} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}_{\text{int}}.$$

Condizioni al contorno sull'interfaccia vuoto–dielettrico. Se indichiamo con α_{est} e α_{int} gli angoli di \vec{E}_{est} e \vec{E}_{int} rispetto all'interfaccia, allora le componenti parallela e perpendicolare di \vec{E} si esprimono come

$$E_{\parallel} = E \cos \alpha, \quad E_{\perp} = E \sin \alpha.$$

- la componente parallela di \vec{E} è continua (si conserva):

$$\vec{E}_{\text{est},\parallel} = \vec{E}_{\text{int},\parallel},$$

che in forma scalare diventa

$$E_{\text{est}} \cos \alpha_{\text{est}} = E_{\text{int}} \cos \alpha_{\text{int}}.$$

- la componente perpendicolare di \vec{D} presenta una discontinuità (non si conserva) pari alla densità di carica libera sulla superficie σ_f :

$$\vec{D}_{\text{est},\perp} - \vec{D}_{\text{int},\perp} = \sigma_f.$$

In assenza di carica libera sulla superficie ($\sigma_f = 0$) si ha quindi

$$\vec{D}_{\text{est},\perp} = \vec{D}_{\text{int},\perp},$$

che in forma scalare diventa

$$D_{\text{est}} \sin \alpha_{\text{est}} = D_{\text{int}} \sin \alpha_{\text{int}}.$$

Ora sostituiamo $D_{\text{est}} = \varepsilon_0 E_{\text{est}}$ (vuoto) e $D_{\text{int}} = \varepsilon_0 \varepsilon E_{\text{int}}$ (dielettrico) nella condizione sulla componente perpendicolare:

$$\varepsilon_0 E_{\text{est}} \sin \alpha_{\text{est}} = \varepsilon_0 \varepsilon E_{\text{int}} \sin \alpha_{\text{int}} \quad \implies \quad E_{\text{est}} \sin \alpha_{\text{est}} = \varepsilon E_{\text{int}} \sin \alpha_{\text{int}}.$$

Infine facendo il rapporto si trova:

$$\frac{E_{\text{est}} \sin \alpha_{\text{est}}}{E_{\text{est}} \cos \alpha_{\text{est}}} = \frac{\varepsilon E_{\text{int}} \sin \alpha_{\text{int}}}{E_{\text{int}} \cos \alpha_{\text{int}}}.$$

ottenendo

$$\boxed{\tan \alpha_{\text{est}} = \varepsilon \tan \alpha_{\text{int}}}.$$

Interpretazione e casi limite

- La componente perpendicolare di \vec{E} in generale non è continua (non si conserva): la sua discontinuità è causata dalle cariche sulla superficie (libere o legate).

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

Può risultare meno intuitivo che la componente parallela di \vec{D} non sia necessariamente continua. In elettrostatica si ha $\nabla \times \vec{E} = 0$, perciò \vec{E}_{\parallel} è continuo; invece

$$\nabla \times \vec{D} = \nabla \times \vec{P},$$

quindi se la polarizzazione \vec{P} ha rotore non nullo allora $\nabla \times \vec{D} \neq 0$ e la componente parallela di \vec{D} può essere discontinua.

- Se $\varepsilon > 1$, allora $\tan \alpha_{\text{int}} > \tan \alpha_{\text{est}}$, cioè $\alpha_{\text{int}} > \alpha_{\text{est}}$: all'interno del dielettrico il campo si inclina maggiormente rispetto alla normale e quindi risulta più parallelo all'interfaccia.
- Per incidenza perpendicolare ($\alpha_{\text{est}} = 0$) si ha $\alpha_{\text{int}} = 0$ (non c'è deviazione).
- Nel limite $\varepsilon \rightarrow \infty$ si ottiene $\alpha_{\text{int}} \rightarrow 90^\circ$ (campo quasi parallelo all'interfaccia).

8.8 Problema di Dirichlet

Consideriamo una disposizione di pezzi di rame (conduttori), ciascuno collegato tramite fili di rame al polo di una propria batteria. Gli altri poli delle batterie sono collegati mediante fili alla parete di una gabbia di Faraday in rame, che fa da massa (potenziale di riferimento, scelto uguale a zero).

Quando le correnti cessano (regime elettrostatico), la condizione di equilibrio (o dalla legge di Ohm si) impone che ogni conduttore sia equipotenziale: cioè ciascun pezzo di rame assume un potenziale costante su tutta la sua superficie.

Problema di Dirichlet. Determinare il potenziale elettrico $V(\vec{r})$ nella regione dello spazio esterna ai conduttori, imponendo che V assuma i valori assegnati sulle superfici dei conduttori e che sia nullo sulla massa (gabbia di Faraday).

Per ottenere il campo elettrico si calcola $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r})$. Nella regione esterna ai conduttori le cariche libere sono distribuite solo sulle superfici dei conduttori stessi: Nello spazio compreso fra le superfici dei conduttori e le pareti della gabbia non è presente una densità di carica volumetrica libera. Di conseguenza l'equazione di Poisson

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

si riduce all'equazione di Laplace

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = 0$$

nel dominio considerato (regione esterna ai conduttori e interna alla gabbia), soggetta alle condizioni al contorno di Dirichlet sopra specificate.

Dimostriamo che la soluzione è unica:

Capitolo 9

Interazioni e campi di risposta

9.1 Interazione carica-carica indotta

Consideriamo una sfera conduttrice di raggio r_0 , collegata a terra, e una carica puntiforme immobile q posta sull'asse a distanza r dal centro della sfera. Vogliamo determinare il campo elettrico in un generico punto esterno P e la forza che agisce su q a causa dell'induzione sulla sfera.

All'interno di un conduttore in equilibrio elettrostatico il campo elettrico è nullo e, poiché la sfera è collegata a terra, il suo potenziale è $V = 0$. La presenza di q induce sulla sfera una distribuzione di carica superficiale che rende il potenziale costante (nullo) sulla superficie.

Per il problema della sfera conduttrice collegata a terra si può usare il *metodo delle cariche immagine*: la regione esterna alla sfera è equivalente al campo prodotto dalla carica reale q e da una carica immagine. La *carica immagine* non è una carica fisica ma un artificio matematico: si introduce una carica fittizia (con ampiezza e posizione scelte opportunamente) in modo che la somma dei campi di q e dell'immagine riproduca esattamente il campo reale nella regione esterna e soddisfi la condizione al contorno $V = 0$ sulla superficie. Per il teorema di unicità della soluzione di Dirichlet, la soluzione così costruita è la soluzione fisica nella regione esterna. Fisicamente, l'immagine rappresenta in modo equivalente la distribuzione di carica indotta sulla superficie della sfera, ma non corrisponde a una sorgente reale nello spazio libero.

Eguagliando i potenziali sulla superficie della sfera si trova che l'immagine è una carica puntiforme

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_0} = 0$$
$$q' = -q \frac{r_0}{r}, \quad r' = \frac{r_0^2}{r},$$

posta sull'asse nella stessa direzione di q ma all'interno della sfera, a distanza r' dal centro. Quindi, nella regione esterna tutto si comporta come se ci fossero la carica reale q e la carica immagine q' puntiforme posta a distanza r_0^2/r dal centro nella direzione della carica stimolante.

Per verificarlo si può calcolare il potenziale in un generico punto esterno di coordinate (r', θ) (con $r' > r_0$) e usare il principio di sovrapposizione:

$$V(\vec{r}') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \theta}} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r'^2 + \left(\frac{r_0^2}{r}\right)^2 - 2r'\frac{r_0^2}{r} \cos \theta}}.$$

Sostituendo $q' = -qr_0/r$ si ottiene

$$V(\vec{r}') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \theta}} - \frac{r_0/r}{\sqrt{r'^2 + \frac{r_0^4}{r^2} - 2r'\frac{r_0^2}{r} \cos \theta}} \right).$$

che può essere riscritto come:

$$V(\vec{r}') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'r\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{r'^2 \frac{r^2}{r_0^2} + r_0^2 - 2r'r\cos\theta}} \right)$$

Si verifica che questa espressione soddisfa le condizioni di Dirichlet richieste:

- per $r' \rightarrow \infty$ si ha $V(\vec{r}') \rightarrow 0$;
- per $r' = r_0$ (sulla superficie) si ottiene $V(\vec{r}') = 0$.

Per il teorema di unicità, la soluzione così costruita è dunque la soluzione fisica nella regione esterna.

Possiamo ora calcolare la forza agente sulla carica q . La forza è la forza coulombiana dovuta al campo generato dalla carica immagine q' (la carica reale non esercita forza su se stessa). La distanza tra q e q' è

$$\Delta = r - r' = r - \frac{r_0^2}{r} = \frac{r^2 - r_0^2}{r}.$$

Applicando la legge di Coulomb e ricordando $q' = -qr_0/r$, l'intensità della forza radiale (attrattiva) è

$$F(r) = q \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{\Delta^2} = -\frac{q^2 r_0 r}{4\pi\epsilon_0 (r^2 - r_0^2)^2}.$$

L'energia potenziale di interazione $U(r)$ (assunta nulla a distanza infinita) si ottiene integrando la forza:

$$U(r) = -\int_{\infty}^r F(s) ds.$$

Poiché

$$F(s) = -\frac{q^2 r_0 s}{4\pi\epsilon_0 (s^2 - r_0^2)^2},$$

si usa la derivata

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2 - r_0^2} \right) = -\frac{2s}{(s^2 - r_0^2)^2},$$

e si ottiene

$$U(r) = -\frac{q^2 r_0}{8\pi\epsilon_0 (r^2 - r_0^2)}.$$

Il potenziale di risposta nel punto occupato da q (il potenziale dovuto alle cariche indotte) è

$$V_R(r) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 \Delta} = -\frac{qr_0}{4\pi\epsilon_0 (r^2 - r_0^2)}.$$

Ne segue la relazione

$$U(r) = \frac{1}{2} q V_R(r),$$

cioè l'energia non è semplicemente qV_R ma la metà. Questo fattore $\frac{1}{2}$ compare perché la distribuzione di carica indotta dipende linearmente da q e si forma progressivamente: all'infinito $q' \rightarrow 0$, mentre avvicinandosi q' cresce (in modulo).

9.1.1 Caso limite $r \rightarrow r_0$

Ponendo $z = r - r_0 \ll r_0$ (distanza dalla superficie) si ha

$$r' = \frac{r_0^2}{r} = \frac{r_0^2}{r_0 + z} \simeq r_0 - z + O\left(\frac{z^2}{r_0}\right),$$

e

$$q' = -q \frac{r_0}{r} \simeq -q \left(1 - \frac{z}{r_0}\right) \simeq -q.$$

Questo è un comportamento riconducibile ai dipoli, a metà tra le cariche nel piano equatoriale ho una superficie equipotenziale. Quando $r \simeq r_0$ la sfera "diventa un piano" che diventa per l'appunto il piano equatoriale di un dipolo. La separazione fra q e la sua immagine vale approssimativamente $\Delta \simeq 2z$ e la forza si riduce alla forza tra due cariche opposte quasi uguali separate da $2z$:

$$F(z) \simeq -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 z^2},$$

mentre l'energia potenziale, per $z \ll r_0$, vale

$$U(z) \simeq -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 z}.$$

9.1.2 Applicazione: estrazione di un elettrone da un metallo

Consideriamo un elettrone (carica $-e$) che si allontana dalla superficie di un metallo. A distanza z dalla superficie l'elettrone è attratto dalla sua immagine e, a distanze maggiori di pochi Å, l'energia potenziale è approssimata da

$$U(z) \simeq -\frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 z}.$$

Se si prolungasse questa legge fino a $z = 0$ si otterrebbe un'energia cinetica (necessaria per fare uscire l'elettrone) infinita; nella realtà, però, per distanze dell'ordine della distanza interatomica a (di alcuni Å) il modello classico non è più valido e l'energia potenziale si raccorda con l'energia di estrazione del metallo (work function) W_F . Per $z \lesssim a$ si assume un valore approssimativo $U \simeq -W_F$. Imponendo il raccordo formale

$$-\frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 a} = -W_F$$

si ricava la distanza caratteristica di raccordo

$$a = \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 W_F}.$$

Qui W_F è tipicamente dell'ordine di pochi eV ($1 \text{ eV} \simeq 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$).

9.2 Carica superficiale indotta — Esercizio

Vogliamo capire come è fatta la distribuzione di carica sulla superficie di un piano conduttore davanti al quale mettiamo una carica puntiforme.

Prendiamo un piano conduttore; sul lato opposto (il vuoto) poniamo una carica puntiforme q a distanza z_0 dal piano e adesso calcoliamo la distribuzione di carica indotta sulla superficie del conduttore.

Ricordando la relazione che lega la densità superficiale di carica alla componente normale del campo elettrico appena fuori dal conduttore:

$$\sigma = \epsilon_0 E_n,$$

dove E_n è la componente normale (alla superficie) del campo appena all'esterno (mentre all'interno del conduttore ci ricordiamo che il campo è nullo).

Ora per trovare E_n usiamo il metodo delle immagini: sostituiamo il piano conduttore con una carica immagine $-q$ posta simmetricamente a distanza z_0 dall'altro lato del piano. Consideriamo un punto sulla superficie a distanza radiale R dall'asse (coordinate cilindriche). La distanza di quel punto dalla carica reale (o dall'immagine) è:

$$r = \sqrt{R^2 + z_0^2}.$$

Quindi la componente z (normale) del campo dovuta alla carica reale q in quel punto vale:

$$E_z^{(q)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{z_0}{r} = \frac{q z_0}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z_0^2)^{3/2}}.$$

(dove la prima frazione è il modulo del campo radiale e la seconda fornisce la proiezione sull'asse z quindi il loro prodotto è il modulo della componente normale di \vec{E} .) Adesso per trovarci il campo totale sappiamo che la carica immagine $-q$ fornisce una componente z di uguale modulo e con segno tale che, subito fuori dal piano, le due componenti normali si sommano: il risultato è quindi il doppio della componente normale. Quindi la componente normale totale subito fuori dal piano è:

$$E_n = -2 \frac{q z_0}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z_0^2)^{3/2}}$$

dove il segno negativo indica che, per $q > 0$, il campo punta verso il conduttore (cioè verso il basso). Da ciò otteniamo la densità superficiale indotta:

$$\sigma(R) = \epsilon_0 E_n = - \frac{q z_0}{2\pi (R^2 + z_0^2)^{3/2}}.$$

Facciamo delle osservazioni:

- $\sigma(R)$ ha simmetria cilindrica rispetto all'asse passante per la carica.
- $|\sigma(R)|$ è massima per $R = 0$ e tende a 0 per $R \rightarrow \infty$. Infatti

$$|\sigma_{\max}| = |\sigma(0)| = \frac{q}{2\pi z_0^2}.$$

- Se $q > 0$, allora $\sigma(R) < 0$ per ogni R : la *carica di polarizzazione* è negativa (ossia di segno opposto a q), come mostra il segno negativo nella formula.

Verifichiamo la carica totale indotta (sul piano): integriamo $\sigma(R)$ su tutto il piano usando corone circolari (con elemento di area $dA = R dR d\theta$):

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \sigma(R) R dR d\theta = 2\pi \int_0^\infty \left(-\frac{q z_0}{2\pi (R^2 + z_0^2)^{3/2}} \right) R dR.$$

Semplificando:

$$Q = -q z_0 \int_0^\infty \frac{R}{(R^2 + z_0^2)^{3/2}} dR.$$

Effettuiamo il cambio di variabile $u = R^2 + z_0^2$, $du = 2R dR$ ($R dR = \frac{1}{2} du$); i limiti vanno da $u = z_0^2$ a $u \rightarrow \infty$:

$$Q = -\frac{q z_0}{2} \int_{z_0^2}^\infty u^{-3/2} du = -\frac{q z_0}{2} \left[-2u^{-1/2} \right]_{z_0^2}^\infty = -\frac{q z_0}{2} \left(0 - \left(-\frac{2}{z_0} \right) \right) = -q.$$

Quindi la carica totale indotta sul piano è $-q$, come ci si aspettava.

9.3 Interazione carica-dipolo indotto

Consideriamo una sfera metallica isolata e neutra di raggio r_0 , stimolata da una carica puntiforme positiva q posta sull'asse a distanza $r > r_0$ dal centro. La presenza di q provoca una distribuzione di carica indotta sulla superficie della sfera; all'interno del metallo il campo elettrico è nullo, mentre la sfera, essendo isolata, mantiene un potenziale costante (non necessariamente nullo).

Il potenziale al centro dovuto alla carica di stimolo è

$$V_s(0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Poiché la sfera è neutra, la carica totale indotta sulla superficie è nulla:

$$\int_S \sigma \, dS = 0.$$

Di conseguenza il potenziale dovuto esclusivamente alla carica indotta valutato al centro è

$$V_R(0) = \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 r_0} \, dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_0} \int_S \sigma \, dS = 0.$$

Per costruire la soluzione esterna si può usare il metodo delle cariche immagine, come nel caso della sfera collegata a terra, con un piccolo adattamento: introduciamo

- una carica immagine $q' = -q \frac{r_0}{r}$ collocata lungo l'asse all'interno della sfera alla distanza

$$r' = \frac{r_0^2}{r},$$

(questa è la stessa immagine che si usa per la sfera collegata a terra e garantisce che la somma dei potenziali di q e q' sia nulla sulla superficie);

- inoltre aggiungiamo una carica puntiforme al centro della sfera q'' (che contribuisce con potenziale costante sulla superficie).

Per imporre la neutralità della sfera imponiamo che la carica totale fittizia interna sia nulla, cioè scegliamo

$$q'' = -q'.$$

Con questa scelta la somma delle cariche immagine è nulla e la carica totale indotta rappresentata dalle immagini è zero (coerente con la sfera isolata e neutra).

Il potenziale di risposta (cioè il potenziale dovuto alle cariche indotte, valutato nella posizione della carica reale, o in un punto esterno) si ottiene sommando i contributi di q' e q'' . In particolare, nel punto dove si trova la carica q (a distanza r dal centro), il potenziale di risposta è

$$V_R(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q''}{r} + \frac{q'}{r - r'} \right).$$

Sostituendo $q' = -q \frac{r_0}{r}$, $q'' = -q' = q \frac{r_0}{r}$ e $r' = \frac{r_0^2}{r}$ si ottiene

$$V_R(r) = \frac{qr_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2 - r_0^2} \right) = -\frac{qr_0^3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2(r^2 - r_0^2)}, \quad r > r_0.$$

Da questo si ricava l'energia di interazione (assumendo $U(\infty) = 0$) fra la carica e la sfera:

$$U(r) = \frac{1}{2} q V_R(r) = -\frac{q^2 r_0^3}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2(r^2 - r_0^2)}.$$

Il fattore $\frac{1}{2}$ è dovuto al fatto che la distribuzione indotta dipende linearmente da q .

Limite prossimità alla superficie. Se la carica si trova molto vicina alla superficie, $z \equiv r - r_0 \ll r_0$, la carica centrale q'' dà un contributo quasi uniforme sulla calotta vicina e risulta spesso trascurabile rispetto al contributo locale della carica immagine q' . In tale limite la sfera si comporta come se fosse un conduttore in collegamento a massa (l'approssimazione del piano conduttore locale): la separazione fra la carica e la sua immagine è approssimativamente $\Delta \simeq 2z$ e si recuperano le leggi del caso piano,

$$F(z) \simeq -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 z^2}, \quad U(z) \simeq -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 z}, \quad (z \ll r_0).$$

Momento di dipolo indotto. Le cariche immagine definiscono un momento di dipolo indotto sulla sfera (la sola carica q' a distanza r' dall'origine contribuisce al dipolo, la carica q'' al centro non contribuisce). Il vettore momento di dipolo indotto vale

$$\vec{p} = q' r' \vec{r} = -q \frac{r_0}{r} \frac{r_0^2}{r} \hat{r} = -\frac{q r_0^3}{r^2} \hat{r}.$$

Si può esprimere lo stesso risultato in funzione del campo stimolante al centro della sfera,

$$\vec{E}_s(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \Rightarrow \vec{p} = 4\pi\epsilon_0 r_0^3 \vec{E}_s(0).$$

Poiché il volume della sfera è $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi r_0^3$, risulta anche la forma spesso usata

$$\vec{p} = 3\mathcal{V}\epsilon_0 \vec{E}_s(0).$$

Si osserva che \vec{p} è la somma dei campi di stimolo ed ha una validità generale anche se il campo di stimolo non è uniforme.

Campo e carica superficiale indotta (caso campo uniforme). Per un dipolo puntiforme \vec{p} posto all'origine il campo generale è

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{R}})\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{p}}{R^3} \right).$$

Nel caso particolare di una sfera conduttrice immersa in un campo uniforme \vec{E}_0 (stato di stimolo uniforme), il momento indotto è $\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 r_0^3 \vec{E}_0$ e la densità di carica superficiale indotta è

$$\sigma(\theta) = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta,$$

dove θ è l'angolo col polo in direzione di \vec{E}_0 e la componente normale del campo sul conduttore fornisce $\sigma = \epsilon_0 E_n$.

9.4 Sfere con distribuzione di carica opposta

Consideriamo ora due distribuzioni sferiche uguali e sovrapposte traslate di un vettore \mathbf{s} , con densità volumetriche ρ e $-\rho$. Il totale di carica di ciascuna sfera è

$$q = \rho \mathcal{V} = \rho \frac{4}{3}\pi r_0^3,$$

e il momento di dipolo risultante (per lo spostamento relativo \mathbf{s}) è

$$\mathbf{p} = q \mathbf{s} = \mathcal{V} \rho \mathbf{s}.$$

Un risultato generale utile è che per una sfera uniformemente polarizzata (cioè con polarizzazione per unità di volume \vec{P} costante) il campo elettrico all'interno è omogeneo e vale

$$\vec{E}_{\text{int}} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}.$$

Se la polarizzazione è collegata al momento totale come $\vec{p} = \vec{P} \mathcal{V}$, allora si può anche scrivere

$$\vec{E}_{\text{int}} = -\frac{\vec{p}}{3\epsilon_0 \mathcal{V}}.$$

Nel limite in cui lo spessore dello strato carico diventa piccolo ($s \rightarrow 0$, si passa a una superficie polarizzata) si ottiene la densità di carica di legame sulla superficie

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \rho (\mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{n}}),$$

e, usando $\vec{p} = \vec{P} \mathcal{V}$,

$$\sigma_b = \frac{\vec{p} \cdot \hat{n}}{\mathcal{V}}.$$

Questa descrizione fornisce il passaggio tra il modello di due sfere volumetriche con carica opposta e il modello limite di una superficie polarizzata (o di una sfera con momento di dipolo totale \vec{p}). Nel caso particolare della sfera conduttrice che abbiamo studiato nel paragrafo precedente, l'induzione crea proprio un momento di dipolo $\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 r_0^3 \vec{E}_s(0)$ e la corrispondente carica superficiale può essere ottenuta dalle formule precedenti nel caso di stimolo uniforme o più in generale dal derivare del potenziale sulla superficie.

Sulla superficie del conduttore è $E \cdot \hat{n} = 3E_s \cdot \hat{n}$

9.5 Polarizzazione di una sfera dielettrica

Consideriamo una distribuzione dielettrica con momento dipolare totale \vec{p} e volume \mathcal{V} . Per un dielettrico uniformemente polarizzato la densità di carica legata superficiale è

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}, \quad (9.1)$$

dove \vec{P} è il vettore di polarizzazione. Se la polarizzazione è uniforme e il momento dipolare totale è \vec{p} , allora

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}}{\mathcal{V}}, \quad (9.2)$$

e per una sfera uniformemente polarizzata il campo (campo interno dovuto alle cariche di bound) vale:

$$\vec{E}_R = -\frac{\vec{p}}{3\epsilon_0 \mathcal{V}} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}. \quad (9.3)$$

Ora prendiamo una sfera di materiale lineare, omogeneo e isotropo, con suscettività elettrica $\chi = \epsilon - 1$). Quindi si ha:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}, \quad (9.4)$$

dove \vec{E} è il campo totale all'interno della sfera. Quindi si ha che:

$$\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_R = \vec{E}_s - \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}. \quad (9.5)$$

Sostituendo con quanto trovato prima si ottiene:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \left(\vec{E}_s - \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \right) = \epsilon_0 \chi \vec{E}_s - \frac{\chi}{3} \vec{P}. \quad (9.6)$$

Raccogliendo i termini in \vec{P} :

$$\vec{P} \left(1 + \frac{\chi}{3} \right) = \epsilon_0 \chi \vec{E}_s \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E}_s \frac{\chi}{1 + \chi/3} = \epsilon_0 \vec{E}_s \frac{3\chi}{3 + \chi}. \quad (9.7)$$

Il momento dipolare totale indotto nella sfera risulta quindi (con un fattore $\frac{\chi}{3+\chi}$ in più)

$$\vec{p} = \mathcal{V} \vec{P} = \mathcal{V} \epsilon_0 \vec{E}_s \frac{3\chi}{3 + \chi}. \quad (9.8)$$

Mentre il campo interno alla sfera è

$$\vec{E} = \frac{P}{\chi \epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0 \chi} \epsilon_0 \chi \vec{E}_s \frac{3}{3 + \chi} = \vec{E}_s \frac{3}{3 + \chi}$$

che in particolare tende al risultato del conduttore ideale per $\epsilon \rightarrow \infty$.

Capitolo 10

Magnetismo

10.1 Introduzione

D'ora in poi cominceremo a considerare il problema delle cariche in moto. È noto che se avviciniamo due fili percorsi da corrente di stessa direzione essi si attraggono; se i fili sono percorsi da correnti in verso opposto, si respingono. Questo fenomeno non si spiega con forze elettriche su una carica di prova posta tra i fili, ma è dovuto alla forza magnetica associata al campo magnetico \vec{B} prodotto dalle cariche in movimento.

Inoltre i primi fenomeni magnetici osservati storicamente erano associati a dipoli (es.: bussole). Non è possibile isolare un monopolo magnetico nella materia ordinaria: questa proprietà si esprime matematicamente con la prima equazione di Maxwell per il campo magnetico

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \quad (10.1)$$

la cui forma integrale implica che il flusso magnetico uscente da qualsiasi superficie chiusa è nullo:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (10.2)$$

10.1.1 Momento di dipolo magnetico

Un dipolo magnetico possiede un momento magnetico vettoriale \vec{m} e subisce una coppia (momento delle forze) se immerso in un campo magnetico esterno \vec{B} :

$$\vec{C} = \vec{m} \times \vec{B}. \quad (10.3)$$

L'analogia con il dipolo elettrico (momento di dipolo elettrico \vec{p} e coppia $\vec{p} \times \vec{E}$) è utile ma occorre ricordare che le sorgenti magnetiche sono correnti piuttosto che cariche libere isolate.

10.2 Legge di Biot–Savart

Definiamo la *corrente stazionaria* come un flusso di cariche continuo nel tempo; essa caratterizza campi magnetici statici e questo regime prende il nome di **magnetostatica**. Le condizioni per la magnetostatica sono

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = 0,$$

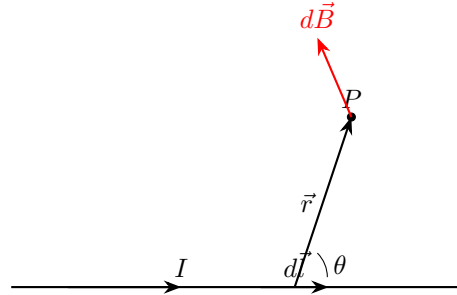
ovunque e per qualsiasi t . In magnetostatica vale inoltre l'equazione di continuità nella forma

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0.$$

Il campo magnetico generato da una corrente stazionaria (in questo caso in superfici o volumi) è dato dalla **legge di Biot–Savart**:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l}' \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \hat{r}}{r^2} d\tau', \quad (10.4)$$

dove l'integrazione lungo il filo si svolge nel verso della corrente, $d\vec{l}$ è un elemento di lunghezza del filo e \hat{r} è il versore che collega l'elemento di corrente al punto di osservazione. La costante μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto e vale $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$ (ciò impone che l'unità di misura di \vec{B} sia: tesla, $[T] = \text{N}/(\text{Am})$).



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

Per un filo rettilineo infinito si ricava l'espressione

$$B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}, \quad (10.5)$$

valida nell'approssimazione in cui la lunghezza del filo è molto maggiore della distanza R dal filo.

Ricordiamo che una singola carica **non** può costituire una corrente stazionaria, poichè, proprio a causa del suo movimento cambia le condizioni del punto considerato a istanti diversi (un attimo prima c'è, un attimo dopo no).

Infine notiamo che il campo $\vec{B}(\vec{r})$ rispetta il principio di sovrapposizione: se abbiamo una collezione di sorgenti di corrente $\vec{B}_{tot}(\vec{r})$ sarà la somma (**vettoriale**) dei singoli campi.

10.3 II equazione di Maxwell

La condizione

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (10.6)$$

enuncia l'assenza di monopoli magnetici e garantisce che le linee di campo magnetico siano sempre chiuse. La legge di Ampère, nella forma corretta di Ampère-Maxwell, mette in relazione $\nabla \times \vec{B}$ con densità di corrente e il termine di spostamento elettrico:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (10.7)$$

In magnetostatica il termine di derivata temporale si annulla e si recupera la legge di Ampère classica:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}. \quad (10.8)$$

10.4 Forza di Lorentz

Ampère osservò che un filo conduttore percorso da corrente continua, immerso in un campo magnetico esterno, è soggetto a una forza ortogonale sia al filo sia al campo magnetico. Supponiamo di avere un filo percorso da una corrente I e immerso in un campo magnetico esterno \vec{B}_s . Per un elemento di filo di lunghezza ℓ (vettore orientato nella direzione del filo) la forza magnetica vale

$$\vec{F}_{\text{mag}} = I (\vec{\ell} \times \vec{B}_s),$$

dove il verso è determinato dalla regola della mano destra. Se è presente anche un campo elettrico esterno \vec{E}_s e una carica puntiforme q posta sul filo, la forza totale sulla carica è

$$\vec{F} = q \vec{E}_s + q \vec{v} \times \vec{B}_s,$$

cioè la **forza di Lorentz**.

Se il filo ha sezione S e densità di corrente uniforme \vec{J} tale che $I = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS \approx JS$ (nel caso semplice $I = JS$), si può scrivere per il filo

$$\vec{F} = I(\vec{\ell} \times \vec{B}_s) = JS(\ell \hat{\ell} \times \vec{B}_s).$$

Notando che $S\ell$ è il volume dell'elemento di filo, si introduce la **densità di forza** (per unità di volume)

$$\boxed{\vec{f}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \vec{E}_s(\vec{r}) + \vec{J}(\vec{r}) \times \vec{B}_s(\vec{r})},$$

e la forma differenziale della forza diventa

$$d\vec{F}(\vec{r}) = dV \vec{f}(\vec{r}).$$

Se adesso consideriamo un piccolo cubetto di volume V contenente carica totale $q = \int_V \rho(\vec{r}) dV$ e portato con velocità \vec{v} , l'integrazione della densità di forza fornisce la forza totale

$$\vec{F} = q \vec{E}_s + q \vec{v} \times \vec{B}_s,$$

cioè la classica espressione della forza di Lorentz sulla carica puntiforme. Poiché il termine magnetico $\vec{v} \times \vec{B}$ è sempre perpendicolare a \vec{v} , esso non compie lavoro sulla carica puntiforme e dunque non cambia l'energia cinetica associata al moto (a meno che non intervengano altri campi non conservativi).

10.5 Campo di magnetizzazione e correnti magnetiche

Infine Ampère interpreta le forze esercitate dal campo magnetico sugli aghi magnetici attribuendole all'azione del campo sulle correnti “magnetiche” confinate negli atomi o nelle molecole degli aghi. E stabilisce inoltre l'equivalenza tra dipoli magnetici e spire circolari percorse da corrente.

Ridefiniamo quindi la densità di corrente totale come:

$$\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_b + \vec{J}_m,$$

dove \vec{J}_f sono le correnti libere, \vec{J}_b le correnti legate (bound) dovute alla polarizzazione e alla magnetizzazione, e \vec{J}_m è la densità di corrente associata alla magnetizzazione.

Ricordiamo che, dalla legge di conservazione della carica,

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Tuttavia, se la carica magnetica q_m non esiste, la distribuzione di carica magnetica è nulla. In particolare, per la sola corrente di magnetizzazione si ha

$$\nabla \cdot \vec{J}_m = 0.$$

Poiché un campo vettoriale con divergenza nulla può essere scritto come rotore di un altro campo vettoriale, definiamo la corrente di magnetizzazione tramite la magnetizzazione $\vec{M}(t, \vec{r})$:

$$\boxed{\vec{J}_m(t, \vec{r}) = \nabla \times \vec{M}(t, \vec{r})}.$$

Questo è il campo di magnetizzazione: \vec{M} rappresenta la densità di momento magnetico per unità di volume. In molti materiali \vec{M} è (quasi sempre) uniforme all'interno e risulta nullo all'esterno, in quanto non si hanno

correnti al di fuori del materiale (tuttavia può cambiare da un punto all'altro).

Possiamo pertanto definire la corrente magnetica racchiusa da una superficie S (con bordo γ_s) come

$$I_m = \int_S \vec{J}_m(\vec{r}) \cdot \hat{n} dS = \int_S (\nabla \times \vec{M}(\vec{r})) \cdot \hat{n} dS = \oint_{\gamma_s} \vec{M}(\vec{r}) \cdot d\vec{\ell}.$$

Dove \vec{J} è la densità di corrente (misurata in $[\vec{J}] = \text{A m}^{-2}$) e γ_s è il contorno della superficie. Perciò si avrà una densità di carica superficiale:

$$\sigma_m = \vec{M} \cdot \hat{n}.$$

Interpretazione ed esempi

La magnetizzazione è quindi una grandezza continua che descrive la densità di momento magnetico in ogni punto del materiale. Nel caso statico questa magnetizzazione può generare campi magnetici equivalenti a quelli che si avrebbero con certe distribuzioni finte di cariche o correnti.

Facciamo ora qualche esempio:

- Supponiamo di prendere un materiale cilindrico con un percorso di Stokes (rettangolo parallelo all'asse del cilindro) al suo interno. Dunque possiamo affermare che per qualsiasi superficie interna la circuitazione di \vec{M} sarà nulla (questo perché due lati perpendicolari non danno contributi mentre si hanno due contributi uguali ed opposti dei due lati paralleli).

Tuttavia ora se si prende un percorso di Stokes i cui due lati paralleli siano, rispettivamente, uno interno ed uno esterno al cilindro (quindi con i due lati perpendicolari metà dentro e metà fuori), la circuitazione di \vec{M} sarà

$$\oint_{\gamma} \vec{M}(\vec{r}) \cdot d\vec{\ell} = M \ell.$$

Per il teorema di Stokes si può riscrivere $M \ell$ come la corrente magnetica contornata dal percorso:

$$I_m = M \ell.$$

In questo caso la corrente superficiale risulta uscente (secondo la regola della mano destra) su un percorso e entrante sull'altro.

Si nota inoltre che, facendo tendere i due lati perpendicolari a lunghezza nulla, la corrente rimane la stessa anche se la superficie considerata tende a zero. Da ciò si può affermare che la corrente magnetica è confinata superficialmente sul materiale (con uno spessore trascurabile).

- Prendendo due cubi uno sopra l'altro con la corrente che sta sulla superficie del primo (uguale anche sul secondo di ugual materiale), le correnti sulle facce appaiate sono opposte e si annullano a vicenda, restando solo il contributo sulla superficie esterna complessiva.

Capitolo 11

Legge di Ampère–Maxwell e campo magnetico \vec{H}

11.1 Legge di Ampère–Maxwell e campo magnetico \vec{H}

Ricordiamo che

$$\nabla \cdot \vec{B}(t, \vec{r}) = 0.$$

Torniamo alla legge di Biot–Savart per un filo rettilineo infinito vale, come noto,

$$B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

Calcolando la circuitazione di \vec{B} su una circonferenza che racchiude un tratto di filo (curva γ) ottengo (la forma integrale di Ampère):

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enc}} = \int_{S_{\gamma}} (\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dS.$$

Ampère suggerì la forma locale

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J},$$

ma questa equazione risulta essere valida solo in condizioni stazionarie. Infatti $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) \equiv 0$, il che implicherebbe $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ e ciò contraddirebbe, in generale, la legge di conservazione della carica quando le densità ρ dipendono dal tempo.

Quindi Maxwell aggiunse il termine $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(\mathbf{t}, \vec{r})$ che prende il nome di **corrente di spostamento elettrico** e riscrisse la legge come

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

E si trovò così la **Legge di Ampere–Maxwell** (dove \vec{J} è la densità di corrente totale). Verificando la divergenza del membro di destra si ottiene:

$$\nabla \cdot \left(\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \left(\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}) \right) = \mu_0 \left(\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = 0,$$

(questo poiché si sta facendo la divergenza di un rotore,) trovando che è quindi compatibile con la continuità di carica.

Sapendo ora che la densità di corrente totale può essere espressa come

$$\vec{J} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \times \vec{M},$$

sostituendola nella legge di Ampère–Maxwell si trova:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_f + \mu_0 (\nabla \times \vec{M}) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}.$$

Raccogliendo i termini temporali e ricordando la definizione del campo di spostamento $\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, possiamo definire un nuovo campo vettoriale, il campo magnetico \vec{H} come

$$\vec{H}(t, \vec{r}) \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(t, \vec{r}) - \vec{M}(t, \vec{r}).$$

Dunque la **Legge di Ampère–Maxwell** con questa definizione si può riscrivere come:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Questa è anche detta la **Quarta equazione di Maxwell** ed è la forma che evidenzia le sorgenti libere \vec{J}_f e il termine di spostamento $\partial_t \vec{D}$.

Infine si ricava la relazione tra \vec{B} , \vec{H} e \vec{M} :

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}).$$

11.2 IV equazione di Maxwell

La quarta equazione di Maxwell afferma che il rotore di \vec{H} dipende solo dalle correnti libere.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Se ci si ricorda che in condizioni stazionarie i campi \vec{E} e \vec{P} non dipendono dal tempo, allora le equazioni per il campo magnetostatico $\vec{B}(\vec{r})$ sono:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad e \quad \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 (\vec{J}_f(\vec{r}) + \vec{J}_m(\vec{r}))$$

infatti se \vec{P} è costante $\rightarrow \vec{J}_b = 0$.

11.3 Teorema di equivalenza di Ampère

Il teorema di equivalenza di Ampère permette di usare soluzioni già note per problemi di elettrostatica anche in molti problemi di magnetostatica: esso infatti mostra come opportune distribuzioni di magnetizzazione siano equivalenti, dal punto di vista del campo magnetico \vec{B} o del campo \vec{H} , a distribuzioni formali di «cariche magnetiche».

Facciamo le seguenti ipotesi: ci troviamo nel regime della magnetostatica (campi e densità indipendenti dal tempo) e supponiamo che le correnti libere siano nulle, $\vec{J}_f = 0$, rimanendo quindi solo con le correnti di magnetizzazione \vec{J}_m .

Partiamo dalla legge di Ampère–Maxwell in forma generale

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Nel regime stazionario $\partial_t \vec{E} = 0$ e con $\vec{J} = \vec{J}_m$ questa si riduce a

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_m.$$

Poiché per definizione della corrente di magnetizzazione si ha

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M},$$

si ottiene

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0(\nabla \times \vec{M}) \implies \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) = \vec{0}.$$

Ricordando la relazione del campo \vec{H} con gli altri campi come

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M},$$

Si trova dunque, nelle ipotesi fatte,

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{0}.$$

Successivamente ricordando la II equazione di Maxwell $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ e prendendo la divergenza della relazione di \vec{H} che si ha con gli altri campi si ricava:

$$\nabla \cdot \vec{H} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) \implies \nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M}$$

Infine si introduce la densità di carica magnetica

$$\boxed{\rho_m(\vec{r}) \equiv -\nabla \cdot \vec{M}(\vec{r})},$$

e la densità di carica magnetica superficiale su una superficie

$$\boxed{\sigma_m = \vec{M} \cdot \hat{n}}.$$

Con queste definizioni le equazioni per \vec{H} nel caso considerato assumono la forma strettamente analoga a quelle dell'elettrostatica:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{0}, \quad \nabla \cdot \vec{H} = \rho_m.$$

Questa è l'essenza del *teorema di equivalenza di Ampère*: la magnetizzazione \vec{M} può essere sostituita da una distribuzione equivalente di carica magnetica ρ_m, σ_m (o, alternativamente, dalle correnti legate $\nabla \times \vec{M}$) e si possono utilizzare le tecniche e le soluzioni dell'elettrostatica per ricavare il campo magnetico macroscopico. Infine, si noti l'analogia esplicita con l'elettrostatica:

$$\nabla \times \vec{E} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{el}}{\varepsilon_0},$$

mentre per la magnetostatica con solo magnetizzazione abbiamo

$$\nabla \times \vec{H} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{H} = \rho_m.$$

Da integrare al testo sopra: La distribuzione di carica deve essere analoga a quella vista elettrostaticamente in un sistema elettrostatico già risolto per poter usare la soluzione analoga. Pertanto in assenza di correnti di conduzione si avrà:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_m(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{r} dV$$

Ricordando che:

$$\rho_m(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} \quad \rho_b(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot P(\vec{r})$$

e che $\sigma_b(\vec{r}) = \hat{n} \cdot \vec{P}(\vec{r})$ dunque similmente: $\sigma_m(\vec{r}) = \hat{n} \cdot \vec{M}$

11.4 Esempi

Proviamo ora a risolvere dei casi.

- Prendiamo un cilindro con magnetizzazione \vec{M} uniforme. In questo caso la distribuzione di carica magnetica risulterà $\rho_m \rightarrow \sigma_m$ (nessuna distribuzione di carica magnetica interna). La densità di carica magnetica superficiale si troverà sulle due superfici circolari (il prodotto $\hat{n} \cdot \vec{M}$ sulla superficie laterale risulterebbe nullo). Se \vec{M} è diretto verso destra, sulla superficie destra avremo $\sigma_m = M$; a sinistra $\sigma_m = -M$.

Per calcolare il campo possiamo o usare le correnti magnetiche, oppure ricondurci a un caso elettrostatico tramite l'equivalenza di Ampère, per il quale si hanno già le soluzioni.

Questo oggetto è un cilindro magnetizzato (analogo a un solenoide); i campi magnetici sono equivalenti a quelli prodotti da due dischi con densità di carica magnetica superficiale σ_m .

Chiamiamo z l'asse che passa per il centro del cilindro; poniamo l'origine al centro. La lunghezza totale è l e il raggio è R_0 .

Calcoliamo il modulo del campo H nell'origine:

$$H(0) =$$

Si nota che è il campo prodotto da due dischi di carica con densità σ uniforme sull'asse del disco. Il campo risulterà il doppio di quello dovuto a una singola distribuzione σ .

Per calcolarlo dividiamo il disco in anelli elementari di spessore dR (piccole corone circolari). Il contributo complessivo sarà lungo z perché, per ragioni di simmetria, le componenti trasversali si annullano.

Il contributo di ogni pezzetto è

$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{M 2\pi R dR}{R^2 + \frac{l^2}{4}}.$$

Per prendere la componente z moltiplichiamo per il coseno di θ :

$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{M 2\pi R dR}{R^2 + \frac{l^2}{4}} \frac{\frac{l}{2}}{(R^2 + \frac{l^2}{4})^{\frac{3}{2}}}.$$

Quindi, integrando dH sull'origine, si ottiene:

$$H(0) = 2 \frac{1}{4\pi} \int_0^{R_0} \frac{1}{4\pi} \frac{M 2\pi R dR}{(R^2 + \frac{l^2}{4})^{\frac{3}{2}}} \frac{l}{2} = \frac{l}{2} M \int_0^{R_0} \frac{R dR}{(R^2 + \frac{l^2}{4})^{\frac{3}{2}}}.$$

Eseguendo il cambio di variabile $d(R^2) = 2R dR$:

$$\frac{l}{4} M \int_0^{R_0} \frac{d(R^2)}{(R^2 + \frac{l^2}{4})^{\frac{3}{2}}} = \frac{l}{4} M (-2) \left[\frac{1}{(R^2 + \frac{l^2}{4})^{\frac{1}{2}}} \right]_0^{R_0} = -\frac{l}{2} M \left[\frac{1}{(R_0^2 + \frac{l^2}{4})^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\frac{l}{2}} \right].$$

E quindi:

$$-M \left[\frac{1}{\left(\left(\frac{R_0^2}{l} \right)^2 + 1 \right)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right]$$

Volendo trovare $H_z(0)$ e quindi anche il suo verso si dovrà fare:

$$H_z(0) = M \left[\frac{1}{\left(\left(\frac{R_0^2}{l} \right)^2 + 1 \right)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right].$$

Quindi $B_z(0)$ risulterà così, sapendo che:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}.$$

Allora:

$$B_z(0) = \mu_0 M \frac{1}{\left(\left(\frac{R_0^2}{l} \right)^2 + 1 \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Si nota che nel centro, se $l \rightarrow \infty$:

- $H \rightarrow 0$
- $B \rightarrow \mu_0 M$

Per trovarlo in altri punti bastano alcune considerazioni. Per esempio, quanto vale il campo H agli estremi della barra/cilindro: in quel caso c'è il contributo di un solo disco e questo porta a un fattore $\frac{1}{2}$, a una distanza doppia rispetto a prima. Il campo B risulterà:

$$B_z(0) = \mu_0 \frac{M}{2} \frac{1}{\left(\left(\frac{R_0^2}{l^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)}$$

Ora, se vogliamo calcolare il campo lungo tutto l'asse, possiamo dividere la barra in due pezzi di lunghezza $\frac{l}{2} + z$ e $\frac{l}{2} - z$: il campo risulterà la somma dei contributi. B in un punto qualsiasi è:

$$B(z) = \frac{\mu_0 M}{2} \left[\frac{1}{\left(\frac{R_0^2}{(\frac{l}{2}+z)^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\left(\frac{R_0^2}{(\frac{l}{2}-z)^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

Questo vale per $z < \frac{l}{2}$. Quando siamo all'interno; andando fuori aggiungo un cilindro con una \vec{M} opposta, pertanto il nostro $B(z)$ risulta:

$$B(z) = \frac{\mu_0 M}{2} \left[\frac{1}{\left(\frac{R_0^2}{z^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\left(\frac{R_0^2}{(z-l)^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}}} \right].$$

Capitolo 12

Potenziale vettore di Ampère

12.1 Esempi

12.2 Legge di Biot–Savart

12.3 Esempi aggiuntivi

12.4 Interazioni magnetiche

Capitolo 13

Come i materiali reagiscono ai campi magnetici di stimolo

13.1 Relazione costitutiva interna

13.2 Misure di suscettività magnetica

Capitolo 14

Strumenti e applicazioni

14.1 Amperometro

14.1.1 Misure stazionarie di conducibilità

14.2 Modello a tempo di rilassamento

14.3 Effetto Hall

14.4 Effetto Joule

14.5 Leggi di Kirchhoff

14.6 Circuito RC ed energia dissipata

14.7 Studio dei condensatori con dielettrico

14.7.1 Densità di energia elettrica

14.7.2 Forze che agiscono sul dielettrico

Capitolo 15

Introduzione all'elettrodinamica

15.1 Forza di Lorentz e moti di ciclotrone

15.2 Relatività del campo elettrico

15.3 Legge di induzione

15.4 III legge di Maxwell

15.5 Esempi

15.6 Forze magnetodinamiche

15.6.1 Esempi

15.7 Alternatore–Generatore di corrente monofase

Capitolo 16

Induttanza e circuiti

16.1 Induttanza

16.2 Densità di energia magnetica

16.3 Circuiti RCL in serie in regime transitorio

16.4 Circuiti RCL in regime armonico

16.4.1 Curva di risonanza di un circuito RCL

Capitolo 17

Materiali ferromagnetici

- 17.1 Legge di Felici
- 17.2 Ciclo di isteresi
- 17.3 Magneti permanenti
- 17.4 Campi magnetici nei materiali lineari
- 17.5 Interfaccia tra due materiali lineari
- 17.6 Esempi
- 17.7 Circuiti magnetici
- 17.8 Trasformatore

FORMULARIO di ELETTROMAGNETISMO

17.-18.0 Elettrostatica

Costante dielettrica assoluta: $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$.

Legge di Coulomb (vuoto): $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$.

Campo elettrico: $\vec{E} = \vec{F}/q$.

Potenziale (forma integrale): $V(P_1) - V(P_2) = \int_{P_2}^{P_1} -\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$.

Potenziale (forma differenziale): $\vec{E} = -\nabla V$.

Conservatività del campo elettrico: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$, $\nabla \times \vec{E} = 0$.

Campi generati da cariche:

Carica puntiforme: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q}{r^2} \hat{r}$, $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q}{r}$.

Distribuzione discreta: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$, $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$.

Distribuzione continua:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau', \quad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau'.$$

Dipolo elettrico:

Momento di dipolo \vec{p} , potenziale e campo a grandi distanze:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}, \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right).$$

Energia del dipolo in un campo esterno: $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$;

momento di coppia: $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$;

forza agente su un dipolo costante: $\vec{F} = -\vec{\nabla} U = \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E})$.

Multipoli:

Il potenziale generato da una distribuzione di carica, a grandi distanza dalle cariche, può venir espresso tramite uno sviluppo in serie i cui primi termini sono:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{Q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \dots \right).$$

(con Q carica totale e \vec{p} momento di dipolo della distribuzione).

Distribuzione discreta: $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$

Distribuzione continua: $\vec{p} = \left(\int \vec{r} \rho(\vec{r}) d\tau \right)$

Legge di Gauss:

Forma integrale (in una superficie chiusa Σ) e forma differenziale:

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Conduttori:

Campo interno: $\vec{E}_{\text{int}} = 0$.

Il conduttore è equipotenziale.

Campo vicino alla superficie: $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$.

Pressione superficiale: $\frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$.

Equazioni del potenziale:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{Poisson}), \quad \nabla^2 V = 0 \quad (\text{Laplace } \rho = 0).$$

Condensatori e capacità:

Definizione di capacità : $C = \frac{Q}{\Delta V}$

Capacità cond. piano : $C = \epsilon \frac{S}{d}$

Capacità cond. cilindrico : $C = 2\pi\epsilon \frac{L}{\log(r_{\text{est}}/r_{\text{int}})}$

Capacità cond. sferico : $C = 4\pi\epsilon \frac{r_{\text{int}} r_{\text{est}}}{r_{\text{est}} - r_{\text{int}}}$

Condensatori in parallelo : $C = C_1 + C_2 + \dots + C_N$

Condensatori in serie : $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N}$

Energia del condensatore : $U = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$

Forza tra armature : $F = \frac{Q^2}{2\epsilon S}$

(cond.piano)

Dielettrici:

mezzo isotropo e lineare: $\vec{P} = \epsilon_o \chi \vec{E}$

Suscettività dielettrica : χ_e

Costante dielettrica relativa: $\epsilon_r = \chi + 1$

Vettore spostamento elettrico : $\vec{D} = \epsilon_o \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_o \epsilon_r \vec{E}$

Cariche di polarizzazione : $\sigma_{\text{pol}} = \vec{P} \cdot \hat{n} \quad \rho_{\text{pol}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$

Equazioni dell'elettrostatica in presenza di dielettrici

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 & ; & \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho & ; & \int_{\Sigma} \vec{D} \cdot \hat{n} dS = Q_{\text{lib}} \end{aligned}$$

Condizioni di continuità all'interfaccia fra due mezzi

$$E_{t1} = E_{t2} \quad ; \quad D_{n1} = D_{n2}$$

Energia elettrostatica

Energia distribuzione discreta : $U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i,j,i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$

(V_i potenziale di tutte le cariche $\neq i$)

Energia distribuzione continua : $U = \frac{1}{2} \int \rho V d\tau$

Energia sistema conduttori : $U = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i$

Densità di energia del campo: $u = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \epsilon_o \epsilon_r E^2$

17.-18.1 Correnti stazionarie

Densità di corrente : $\vec{j} = nq\vec{v} = \rho\vec{v}$
 Equazione di continuità : $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ (ρ = densità di carica)
 Intensità di corrente : $i = \frac{dq}{dt} = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \hat{n} dS$
 Legge di Ohm (forma locale) : $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ (σ = conducibilità)
 per elemento finito : $V = RI$
 Resistenza conduttore di sezione costante : $R = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S} = \rho_s \frac{l}{S}$
 N resistenze in serie : $R = R_1 + R_2 + \dots + R_N$
 N resistenze in parallelo : $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}$
 Leggi di Kirchhoff - legge dei nodi : $\sum_k I_k = 0$ legge delle maglie: $\sum_k I_k R_k = \sum_k V_k$
 Effetto Joule (potenza $P = dW/dt$, W = energia) :

- in forma locale : $dP = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$
- conduttore finito : $P = VI = I^2 R$

17.-18.2 Magnetismo

Magnetostatica nel vuoto

Campo generato da una carica in moto : $\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$
 Campo generato da una corrente : $\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$
 -filo rettilineo indefinito : $\vec{B} = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{I}{r} \hat{\tau}$
 -spira circolare (sull'asse !) : $\vec{B} = \frac{\mu_o}{2} I \frac{R^2}{\sqrt{(R^2+z^2)^3}} \hat{k}$
 -interno solenoide indefinito : $B = \mu_o$ in $\left[n = \frac{N_{spire}}{L} \right]$
 Forza agente su una corrente : $\vec{F} = \int I d\vec{l} \times \vec{B}$
 Forza su carica in moto (Forza Lorentz) : $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$
 in presenza di campo elettrico: $\vec{F} = q(E + (\vec{v} \times \vec{B}))$
 Equazioni della magnetostatica nel vuoto:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \quad ; \quad \int_{\text{Echiusa}} \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_o \vec{j} \quad ; \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \sum I_{\text{conc}} \end{aligned}$$

Dipolo magnetico

Momento dipolo distrib. correnti: $\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r} \times \vec{j} d\tau$
 Per una spira piana: $\vec{m} = IS\hat{n}$
 Potenziale Vettore: $\vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$
 Campo : $\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \left[\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right]$
 Energia dipolo in campo esterno : $U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$
 Momento agente su dipolo in campo esterno : $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$
 Momento magnetico e momento angolare di una carica q , massa m , in moto circolare uniforme: $\vec{m} = \frac{q}{2m} \vec{L}$
 Precessione (di Larmor) in campo esterno:

$$\omega_L = \frac{qB}{m}$$

Potenziale vettore

Definizione : $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

Equazione del potenziale : $\nabla^2 \vec{A} = -\mu_o \vec{j}$

Potenziale generato da un dipolo: $\vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$

Proprietá magnetiche della materia

Vettore magnetizzazione : $\vec{M} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{m}}{\Delta\tau}$
(momento dipolo per unità di volume)

mezzo isotropo e lineare $\vec{M} = \frac{1}{\mu_o} \frac{\chi}{1+\chi} \vec{B} = \chi \vec{H}$

Suscettività magnetica: χ_m

Vettore campo magnetico \vec{H} : $\vec{H} = \frac{1}{\chi} \vec{M}$

Relazione fra \vec{B} e \vec{H} : $\vec{B} = \mu_o \vec{H} + \mu_o \vec{M} = \mu_o \mu_r \vec{H}$ $\mu_r = \chi + 1$

Correnti di magnetizzazione : $j_{sup} = \vec{M} \times \hat{n}$ $j_{vol} = \vec{\nabla} \times \vec{M}$

Equazioni della magnetostatica nei mezzi materiali

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \text{ libere} \quad ; \quad \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum i_{conc}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad ; \quad \int_{Echiusa} \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0$$

Condizioni di continuità all'interfaccia fra due mezzi

$$H_{t1} = H_{t2} \quad ; \quad B_{n1} = B_{n2}$$

Equazioni di Maxwell

Forma differenziale

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Forma integrale

$$\int_{\Sigma} \vec{D} \cdot \hat{n} dS = Q_{int}$$

$$\int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{n} dS$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \hat{n} dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{D} \cdot \hat{n} dS$$

Densità corrente di spostamento: $\vec{j} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Legge di Ohm(per conduttori) : $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

17.-18.3 Operatori vettoriali e trasformazioni di coordinate

Coordinate cartesiane

Elemento di volume : $d\tau = dx dy dz$

$$\text{grad } f \equiv \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{i}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{i}_z$$

$$\text{div } \vec{v} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\text{rot } \vec{v} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{v} = \left[\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right] \hat{i}_x + \left[\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] \hat{i}_y + \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right] \hat{i}_z$$

$$\text{Laplaciano} : \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Coordinate cilindriche

Trasformazione da $(x, y, z) \Leftrightarrow (\rho, \theta, z)$:
 $x = \rho \cos \theta$; $y = \rho \sin \theta$

Elemento di volume : $d\tau = \rho d\rho d\theta dz$

$$\text{grad } f \equiv \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{i}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{i}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{i}_z$$

$$\text{div } \vec{v} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho v_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} v_\theta + \frac{\partial}{\partial z} v_z$$

$$\text{rot } \vec{v} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{v} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right] \hat{i}_\rho + \left[\frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \rho} \right] \hat{i}_\theta + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial v_\rho}{\partial \theta} \right] \hat{i}_z$$

$$\text{Laplaciano : } \nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Coordinate sferiche

Trasformazione da $(x, y, z) \Leftrightarrow (\rho, \theta, \phi)$:
 $x = \rho \sin \theta \cos \phi$; $y = \rho \sin \theta \sin \phi$; $z = \rho \cos \theta$

Elemento di volume : $d\tau = \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\phi$

$$\text{grad } f \equiv \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{i}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{i}_\theta + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{i}_\phi$$

$$\text{div } \vec{v} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 v_\rho) + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

$$\text{rot } \vec{v} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{v} = \frac{1}{\rho \sin \theta} \left[\frac{\partial(v_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{i}_\rho + \frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\rho}{\partial \phi} - \frac{\partial(\rho v_\phi)}{\partial \rho} \right] \hat{i}_\theta + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial v_\rho}{\partial \theta} \right] \hat{i}_\phi$$

$$\text{Laplaciano : } \nabla^2 = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) \right] + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

Relazioni vettoriali utili

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\text{rot grad } f \equiv \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0$$

$$\text{div rot } \vec{v} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$$

$$\text{rot rot } \vec{v} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v}$$

$$\text{rot}(f\vec{v}) \equiv \vec{\nabla} \times (f\vec{v}) = f(\vec{\nabla} \times \vec{v}) - \vec{\nabla} f \times \vec{v}$$

$$\text{div}(f\vec{v}) \equiv \vec{\nabla} \cdot (f\vec{v}) = f(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \vec{\nabla} f \cdot \vec{v}$$

17.-18.4 Costanti

Costante dielettrica del vuoto : $\epsilon_o = 8.8510^{-12}$ F/m

Permeabilit  magnetica del vuoto : $\mu_o = 4\pi 10^{-7}$ H/m

Carica dell'elettrone : $e = 1.6010^{-19}$ C

Massa dell'elettrone : $m_e = 9.110^{-31}$ kg

Rapporto e/m dell'elettrone : $e/m = 1.7610^{11}$ C/kg

Massa del protone : $m_p = 1.6710^{-27}$ kg