

## Afleidingen

Academiejaar 2021 – 2022

Robbe Decapmaker

### Inleiding

De afleidingen voor trillingen en golven. De source code is te vinden op github.

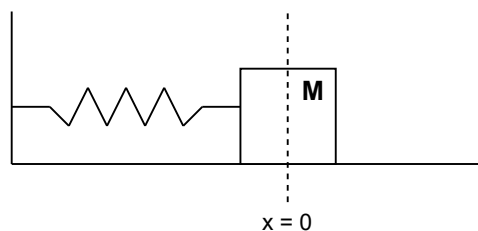
[https://github.com/debber1/Afleidingen\\_TG](https://github.com/debber1/Afleidingen_TG)

Dit document is **niet** alles wat je moet kennen van theorie voor het examen. Ik ben niet verantwoordelijk voor jou resultaat op jouw examen. Het is jouw verantwoordelijkheid om ook nog de andere onderdelen van deze cursus op een degelijke manier te verwerken.

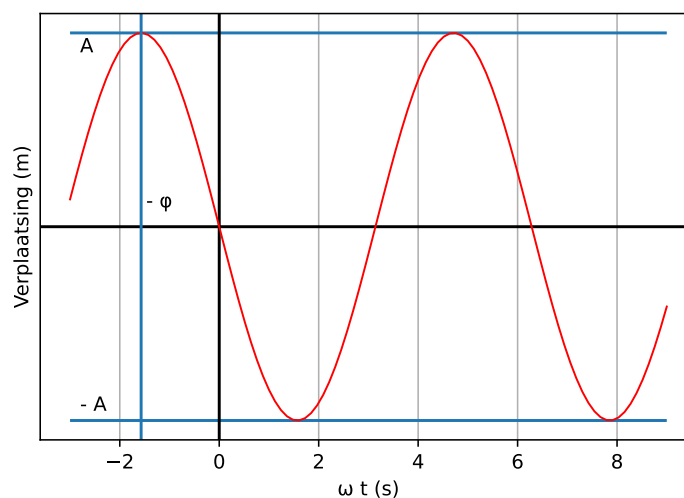
Dit document is een ‘work in progress’, dit wil zeggen dat er (ongeveer) een wekelijkse update zal zijn. De meest recente versie zal altijd op Github staan!

### 1 Afleiding 1

Afleiding van de uitdrukking voor de verplaatsing van een ongedempte trilling aan de hand van de bewegings-vergelijking



Figuur 1: Massa veer systeem



Figuur 2: Harmonische Oscillator

We stellen eerst de tweede wet van Newton op voor het blokje M uit figuur 1.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

We kijken nu enkel naar de x-component, en brengen we de kracht van de veer in rekening:

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

We hebben ook de versnelling geschreven als de tweede afgeleide van de verplaatsing. Door alle termen naar het linker lid te verplaatsen krijgen we volgende differentiaal vergelijking:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (1)$$

Deze differentiaal vergelijking moeten we oplossen aan de hand van beginvoorwaarden. Deze voorwaarden verkrijgen we experimenteel. Bij het experiment noteren we de uitwijking tegenover de tijd. Hierdoor verkrijgen we figuur 2. Wiskundig vertaalt dit zich tot:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

we kunnen vergelijking 2 afleiden om de snelheid van het blokje te verkrijgen:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \quad (3)$$

Door nogmaals vergelijking 3 nogmaals af te leiden kunnen we ook de versnelling van het blokje verkrijgen:

$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

Nu kunnen we vergelijkingen 4 en 2 invullen in vergelijking 1:

$$-\omega^2 m A \cos(\omega t + \varphi) + k A \cos(\omega t + \varphi) = 0 \quad (5)$$

Vergelijking 5 is nu een oplossing voor differentiaal vergelijking 1 als aan volgende voorwaarde voldaan is:

$$\begin{aligned} -\omega^2 m A \cos(\omega t + \varphi) + k A \cos(\omega t + \varphi) &= 0 \\ \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) A \cos(\omega t + \varphi) &= 0 \\ \frac{k}{m} - \omega^2 &= 0 \\ \frac{k}{m} &= \omega^2 \end{aligned}$$

## 2 Afleiding 2

### Afleiding van de potentiële en kinetische energie van een ongedempte trilling in functie van de plaats

Er zijn 2 vormen van energie aanwezig in een massa-veer-systeem. We hebben de potentiële energie in de veer en de kinetische energie van het blokje.

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\
 E(x) &= \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\sin^2(\omega t + \varphi) \\
 E(x) &= \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}m\frac{k}{m}A^2\sin^2(\omega t + \varphi) \\
 E(x) &= \frac{1}{2}kA^2(\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)) \\
 E(x) &= \frac{1}{2}kA^2
 \end{aligned}$$

We zien nu duidelijk dat de hoeveelheid energie niet afhankelijk is van de uitwijking van de massa. Met andere woorden, de energie blijft constant in het systeem (Figuur 3).



Figuur 3: Energie balans

### 3 Afleiding 3

Snelheid in functie van de afstand

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

We kunnen vergelijkingen 2 en 3 invullen:

$$-A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = \frac{dv}{dx} \cdot A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

Na schrappen en herschikken:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\omega \cos(\omega t + \varphi)}{\sin(\omega t + \varphi)}$$

Sinus substitutie:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= \frac{\omega \cos(\omega t + \varphi)}{\sqrt{1 - \cos^2(\omega t + \varphi)}} \\ \frac{dv}{dx} &= \frac{\pm \omega \frac{x}{A}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}} \end{aligned}$$

Nu integratie van beide leden:

$$\int dv = \int \frac{\pm \omega \frac{x}{A}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}} dx$$

De snelheid in functie van de afstand is dus:

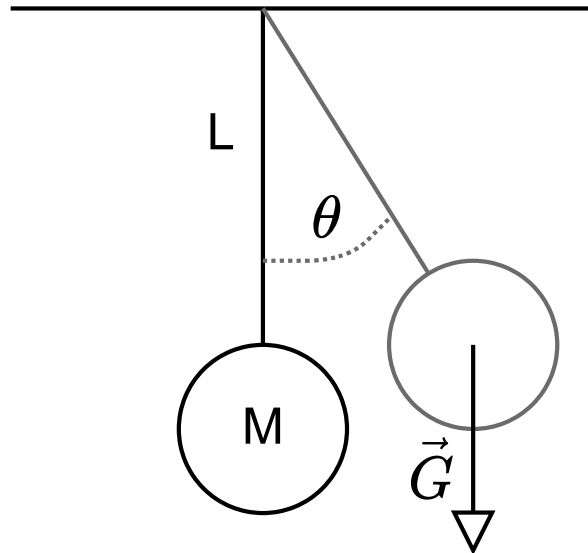
$$v(x) = \omega A \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \quad (6)$$

Uit vergelijking 6 kunnen we nu ook afleiden wat de uitdrukking is voor  $v_{\max}$ . We weten dat  $v_{\max}$  zich zal voordoen bij het evenwichtspunt oftewel als  $x = 0$ .

$$\begin{aligned} v(x) &= \omega A \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \\ v_{\max} &= \omega A \sqrt{1 - \frac{0^2}{A^2}} \\ v_{\max} &= \omega A \sqrt{1} \\ v_{\max} &= \omega A \end{aligned}$$

## 4 Afleiding 4

Afleiding van de beweging van een pendulum aan de hand van de bewegingsvergelijking De



Figuur 4: Pendulum

drijvende kracht van de pendulum is gelijk aan:

$$F = -mgsin(\theta)$$

Hiermee kunnen we de bewegingsvergelijking opstellen:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mgsin(\theta)$$

We kunnen stellen dat  $sin(\theta) \approx \theta$  voor een kleine  $\theta$ :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg\theta$$

We kunnen ook stellen dat  $x = l\theta$ :

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg\theta$$

We kunnen dit nu herschrijven naar:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

Dit geeft ons een differentiaalvergelijking. Een oplossing ziet er als volgt uit:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Hierbij zien we dat  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ .

## 5 Afleiding 5

### Gedempte harmonische trilling

We beginnen met de bewegingsvergelijking op te stellen:



Figuur 5: Gedempt massa veer systeem

$$\begin{aligned}
 m\vec{a} &= \vec{F}_{veer} + \vec{F}_{demper} \\
 m \frac{d^2x}{dt^2} &= -kx - bv \\
 m \frac{d^2x}{dt^2} &= -kx - b \frac{dx}{dt} \\
 0 &= m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx
 \end{aligned}$$

We maken gebruik van de formule van Euler  $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$  om tot een oplossing van de differentiaalvergelijking te komen:

$$\tilde{x}(t) = Ae^{(\gamma+i\omega)t+i\varphi}$$

Het reëel deel is dus:

$$x(t) = \text{Re}(\tilde{x}(t)) = Ae^{\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

We kunnen deze nu invullen in de bewegingsvergelijking:

$$m(\gamma + i\omega)^2 \tilde{x}(t) + b(\gamma + i\omega) e^{(\gamma+i\omega)t+i\varphi} + k e^{(\gamma+i\omega)t+i\varphi} = 0 \quad (7)$$

Na herordenen en het delen door m, krijgen we:

$$\gamma^2 + 2i\gamma\omega - \omega^2 + \frac{b}{m}\gamma + i\frac{\omega b}{m} + \frac{k}{m} = 0$$

We kijken nu naar het imaginair deel:

$$\begin{aligned}
 2i\gamma\omega + i\frac{\omega b}{m} &= 0 \\
 2\gamma + \frac{b}{m} &= 0 \\
 -\frac{b}{2m} &= \gamma
 \end{aligned}$$

We vullen nu deze waarde van  $\gamma$  in in het reëel deel van vergelijking 7:

$$\begin{aligned}\gamma^2 - \omega^2 + \frac{b}{m}\gamma + \frac{k}{m} &= 0 \\ \left(-\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega^2 + \frac{b}{m}\left(-\frac{b}{2m}\right) + \frac{k}{m} &= 0 \\ \frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2} &= \omega^2 \\ \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} &= \omega\end{aligned}$$

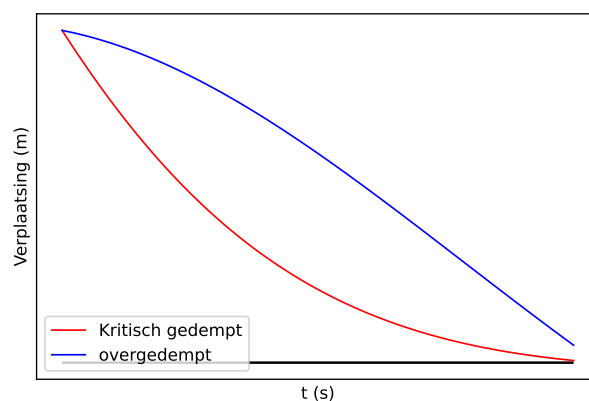
Hiermee hebben we nu de natuurlijke frequentie van het systeem gevonden. We kunnen tot slot ook nog stellen dat:

$$x(t) = \text{Re}(\tilde{x}(t)) = Ae^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \varphi)$$

We kunnen nu drie gevallen onderscheiden:



Figuur 6: Ondergedempte trilling ( $b^2 \ll 4mk$ )



Figuur 7: Kritisch ( $b^2 = 4mk$ ) en over gedempte ( $b^2 \gg 4mk$ ) trilling

## 6 Afleiding 6

### Gedwongen trillingen

We stellen eerst de bewegingsvergelijking op:

$$m \frac{d^2 \tilde{x}(t)}{dt^2} + b \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} + k\tilde{x}(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad (8)$$

Een voorstel voor de algemene oplossing van differentiaalvergelijking 8 ziet er als volgt uit:

$$\tilde{x}(t) = A e^{i(\omega t + \varphi)}$$

waarbij  $\tilde{F} = F_0 e^{i\omega t} e^{-i\varphi}$ . Dit kunnen we nu invullen in vergelijking 8:

$$\begin{aligned} m\omega^2 \tilde{x}(t) + i\omega b \tilde{x}(t) + k\tilde{x}(t) &= F_0 e^{i\omega t} e^{-i\varphi} \\ m\omega^2 A e^{i\omega t} e^{i\varphi} + i\omega b A e^{i\omega t} e^{i\varphi} + k A e^{i\omega t} e^{i\varphi} &= F_0 e^{i\omega t} e^{-i\varphi} \\ m\omega^2 A + i\omega b + k &= F_0 e^{-i\varphi} \end{aligned}$$

We kunnen dit opsplitsen in een imaginair en reëel deel:

**Imaginair:**  $\omega b A = -F_0 \sin(\varphi)$

**Reëel:**  $-m\omega A + kA = F_0 \cos(\varphi)$

Als we nu het imaginair deel delen door het reëel deel verkrijgen we voor  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} -\frac{\omega b}{k - m\omega^2} &= \tan(\varphi) \\ b \tan\left(\frac{-\omega b}{k - m\omega^2}\right) &= \varphi \end{aligned}$$

Om de amplitude te bepalen kijken we opnieuw naar het imaginair deel:

$$\begin{aligned} \omega b A &= -F_0 \sin(\varphi) \\ \omega b A &= -F_0 \frac{\tan(\varphi)}{\sqrt{1 + \tan^2(\varphi)}} \\ \omega b A &= -F_0 \frac{\tan(b \tan(\frac{-\omega b}{k - m\omega^2}))}{\sqrt{1 + \tan^2(b \tan(\frac{-\omega b}{k - m\omega^2}))}} \\ \omega b A &= -F_0 \frac{\frac{-\omega b}{k - m\omega^2}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2 b^2}{(k - m\omega^2)^2}}} \\ \omega b A &= -F_0 \frac{\frac{-\omega b}{k - m\omega^2}}{\sqrt{\frac{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 b^2}{(k - m\omega^2)^2}}} \\ A &= \frac{\frac{F_0}{k - m\omega^2}}{\sqrt{\frac{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 b^2}{(k - m\omega^2)^2}}} \\ A &= \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\frac{k}{m} - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2 b^2}{m^2}}} \\ A &= \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2 b^2}{m^2}}} \end{aligned}$$

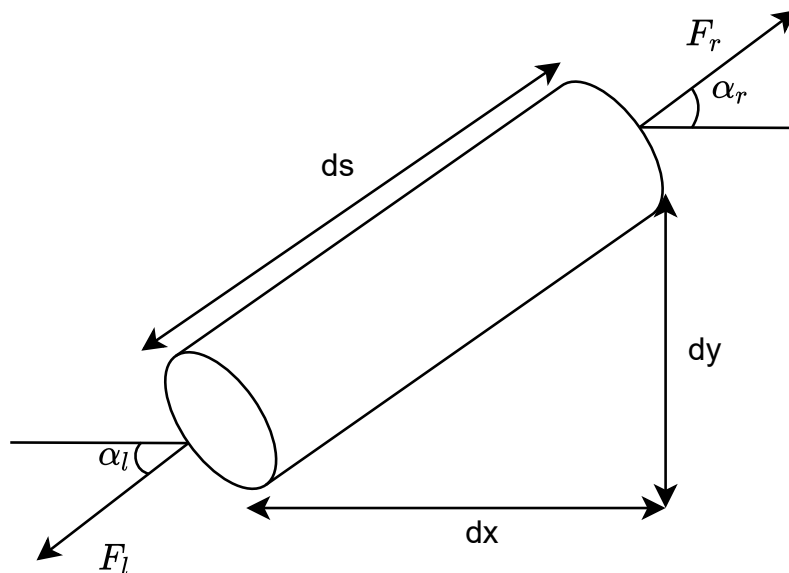
met  $\omega_0$  de natuurlijke frequentie van het systeem en  $\omega$  de gedwongen frequentie.



## 7 Afleiding 7

### Golf vergelijking

We nemen aan dat  $F_r$  en  $F_l$  uit figuur 8 gelijk zijn aan elkaar en aan de spanning in het touw  $\sigma A$ . we stellen ook dat de massa voldoet aan  $dm = \rho ds A$ .



Figuur 8: Touw

We starten met het opstellen van de wet van Newton:

$$\begin{aligned}\sum \vec{F} &= m\vec{a} \\ F_r \sin(\alpha_r) &= F_l \sin(\alpha_l) = dm a_y \\ \sigma A (\sin(\alpha_r) - \sin(\alpha_l)) &= dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ \sigma \left( \frac{dy}{dx} \Big|_r - \frac{dy}{dx} \Big|_l \right) &= \rho ds \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\end{aligned}$$

We stellen dat  $\alpha$  klein is, en dus kunnen we zeggen dat  $\sin(\alpha) \approx \tan(\alpha) = \frac{dy}{dx}$ . We nemen ook aan dat  $ds \approx dx$ .

$$\begin{aligned}\sigma \frac{\frac{dy}{dx} \Big|_r - \frac{dy}{dx} \Big|_l}{dx} &= \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ \sigma \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\end{aligned}$$

Hiermee zijn we de 1D golfvergelijking gekomen.

## 8 Afleiding 8

### Harmonische golven

Een voorstel voor de 1D golf vergelijking ziet er als volgt uit:

$$y(x, t) = y_m \sin(kx \pm \omega t + \varphi)$$

We kunnen deze oplossing invullen in de golfvergelijking:

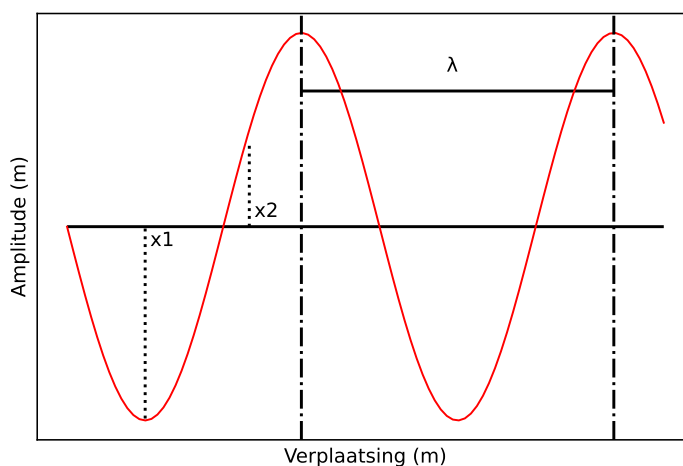
$$-\omega^2 y_m \sin(kx \pm \omega t + \varphi) = v^2 k^2 y_m \sin(kx \pm \omega t + \varphi)$$

Als we dit vereenvoudigen, krijgen we de voorwaarden waaraan een golf moet voldoen.

$$v^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$$

$$v = \pm \frac{\omega}{k}$$

We kunnen nu een analyse doen op de golfvergelijking in het tijdsdomein:



Figuur 9: Tijdsdomein analyse

We starten opnieuw met de algemene oplossing, maar dan op vaste plaats  $x_1$ :

$$y(x_1, t) = y_m \sin(kx_1 \pm \omega t + \varphi) \quad (9)$$

$$y(x_1, t) = y_m \sin(\pm \omega t + \varphi_1) \quad (10)$$

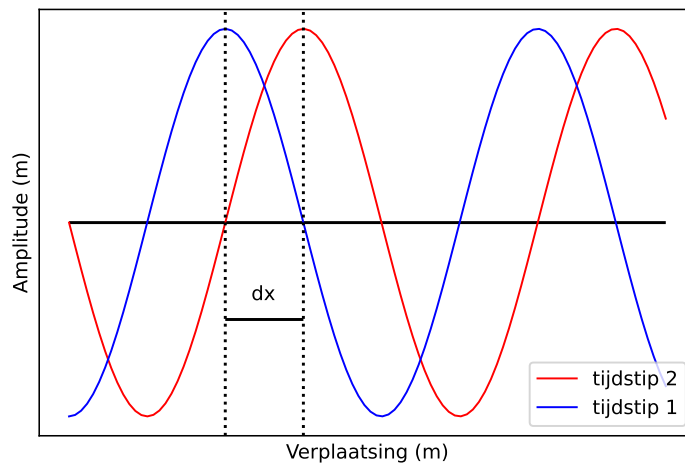
met  $\varphi_1 = kx_1 + \varphi$ . We kunnen dit opnieuw doen voor  $x_2$

$$y(x_2, t) = y_m \sin(kx_2 \pm \omega t + \varphi) \quad (11)$$

$$y(x_2, t) = y_m \sin(\pm \omega t + \varphi_2) \quad (12)$$

We zien dus uit vergelijkingen 10 en 12, dat er engels een fase verschuiving is. We vermelden ook nog dat oscillaties in fase zijn als  $2\pi = k\lambda$ .

We doen ook de analyse doen op de golfvergelijking in de ruimte:



Figuur 10: Ruimtelijke analyse

We starten opnieuw met de algemene oplossing, maar dan op vast tijdstip  $t_1$ :

$$y(x, t_1) = y_m \sin(kx \pm \omega t_1 + \varphi) \quad (13)$$

$$y(x, t_1) = y_m \sin(kx + \varphi_1) \quad (14)$$

met  $\varphi_1 = \varphi \pm \omega t_1$ . We stellen dit opnieuw op voor  $t_2$

$$y(x, t_2) = y_m \sin(kx \pm \omega t_2 + \varphi) \quad (15)$$

$$y(x, t_2) = y_m \sin(kx \underbrace{\pm \omega t_1 + \varphi}_{\varphi_1} \pm \Delta t) \quad (16)$$

$$y(x, t_2) = y_m \sin(kx + \varphi_2) \quad (17)$$

met  $\varphi_2 = \varphi_1 \pm \Delta t$ . uit de waarden van  $\varphi_1$  en  $\varphi_2$  kunnen we de voortplantingsrichting van de golf bepalen:

$\varphi_1 < \varphi_2$	Golf naar rechts
$\varphi_1 > \varphi_2$	Golf naar links

We kunnen ook iets zeggen over de voortplantingssnelheid  $v$ .

$$\begin{aligned}
 v = \frac{dx_{max}}{dt} &= \frac{d}{dt}(kx_{max} \pm \omega t + \varphi) = 0 \\
 k \frac{dx_{max}}{dt} \pm \omega &= 0 \\
 \pm \frac{\omega}{k} &= v \\
 \pm \frac{2\pi f}{\frac{2\pi}{\lambda}} &= v \\
 \pm \lambda f &= v
 \end{aligned}$$

## 9 Afleiding 9

### Superpositie

We zeggen dat de algemene oplossing  $y(x, t)$  van de golfvergelijking kan uitgedrukt worden door 2 nieuwe functies:

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

We vullen dit opnieuw in in de golfvergelijking:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 y_1(x, t) + y_2(x, t)}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2 y_1(x, t) + y_2(x, t)}{\partial x^2}\end{aligned}$$

We gebruiken de lineariteit van de afgeleide:

$$\frac{\partial^2 y_1(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y_2(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \left( \frac{\partial^2 y_1(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y_2(x, t)}{\partial x^2} \right)$$

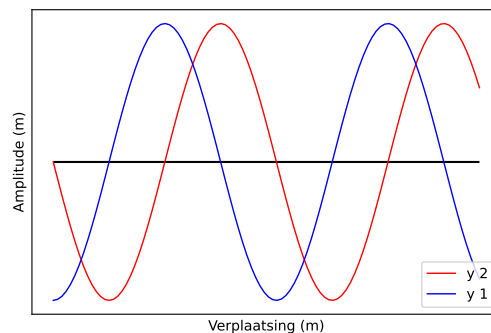
## 10 Afleiding 10

### Interferentie

Interferentie doet zich voor als er meerdere verschillende golven aanwezig zijn in 1 medium. We kunnen dit voorstellen door volgende 2 functies (zie ook figuur 11):

$$y_1 = y_m \sin(kx \pm \omega t)$$

$$y_2 = y_m \sin(kx \pm \omega t + \phi)$$



Figuur 11: Golven  $y_1$  en  $y_2$  die zullen interfereren

We bepalen nu hoe  $y_1 + y_2$  er wiskundig uit zal zien:

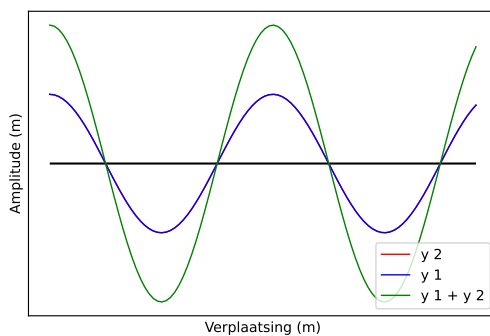
$$y = y_1 + y_2$$

$$y = y_m \sin(kx \pm \omega t) + y_m \sin(kx \pm \omega t + \phi)$$

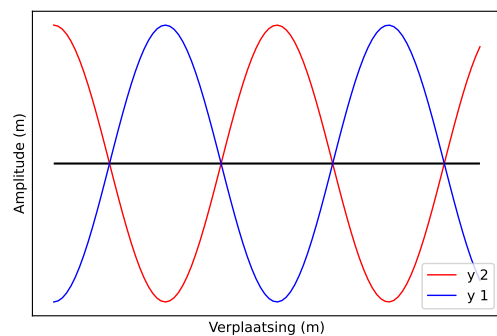
$$y = \underbrace{2y_m \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)}_{A=f(\phi)} \sin\left(kx \pm \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

Hierbij werd gebruikt gemaakt van de regels van Simpson.

De 2 uitersten van dit fenomeen krijgen een naam: destructieve- en constructieve-interferentie. Bij destructieve, zullen de golven elkaar tegen werken zodat de beweging stopt (zie figuur 12b). Constructieve interferentie zal ervoor zorgen dat de resulterende golf groter wordt (zie figuur 12a).



(a) Constructieve interferentie



(b) Destructieve interferentie

Figuur 12: Twee extreme gevallen van interferentie.

## 11 Afleiding 11

### Staande golven

Staande golven doen zich vaak voor bij muziek instrumenten zoals bijvoorbeeld de gitaar. Wiskundig kunnen we een staande golf als volgt voorstellen:

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx + \omega t)$$

$$y(x, t) = \underbrace{2y_m \sin(kx)}_{A(x)} \cos(\omega t)$$

Hierbij werd gebruikt gemaakt van de regels van Simpson. Omdat de uiteinden van de snaar (met lengte  $L$ ) ook vast gehouden worden, kunnen we ook volgende randvoorwaarden stellen:

$$y(0, t) = 0 \Rightarrow \sin(0) = 0$$

$$y(L, t) = 0 \Rightarrow \sin(kL) = 0$$

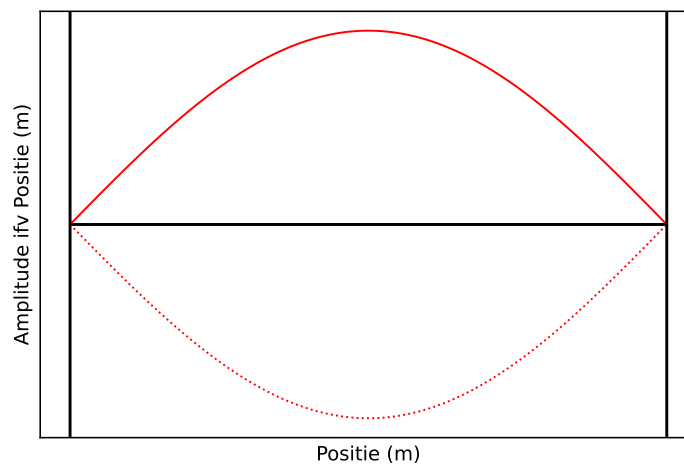
We kunnen dus algemeen zeggen dat  $k \cdot L$  altijd gelijk moet zijn aan een veelvoud van  $\pi$  oftewel:

$$kL = m\pi (m \in \mathbb{N})$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} L = m\pi$$

$$\lambda = \frac{2L}{m}$$

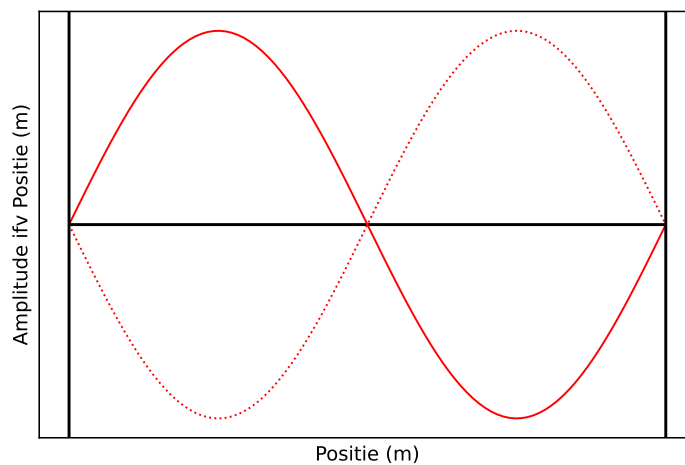
**Eerste harmonische** ( $m = 1$ )



Figuur 13: Eerste harmonische

$m = 1$  dus moet  $\lambda = 2L$ , en de frequentie is dan  $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2L}$ .

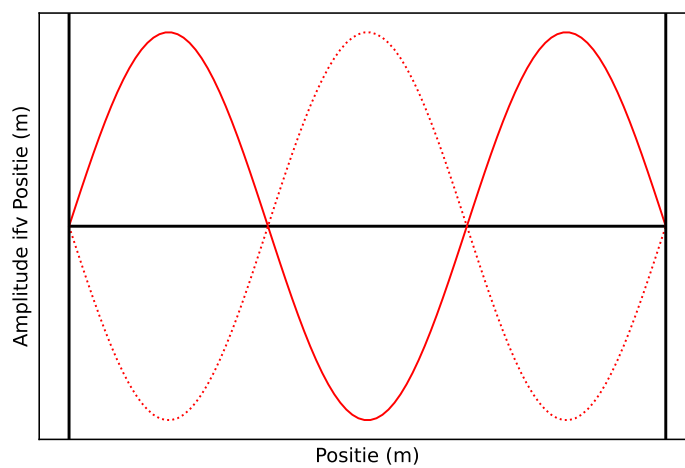
### Tweede harmonische ( $m = 2$ )



Figuur 14: Tweede harmonische

$m = 2$  dus moet  $\lambda = L$ , en de frequentie is dan  $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{L}$ .

### Derde harmonische ( $m = 3$ )

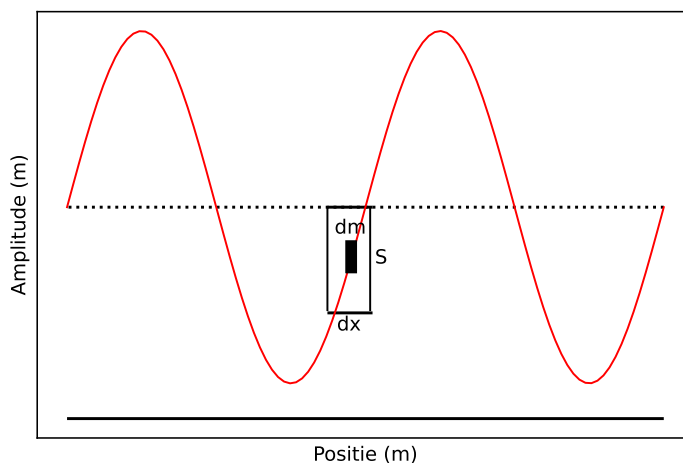


Figuur 15: Derde harmonische

$m = 3$  dus moet  $\lambda = \frac{2}{3}L$ , en de frequentie is dan  $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{3v}{2L}$ .

## 12 Afleiding 12

### Energie transport in een golf.



Figuur 16: Energie transport

De energie in een massa-veer-systeem is:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = dE = \frac{1}{2}\omega^2 dm A^2$$

We gebruiken nu het feit dat  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  en  $\omega = \pi f$ :

$$dE = 2\pi^2 f^2 dm A^2$$

We kunnen  $dm$  herschrijven als  $dm = \rho s dx = \rho s dt v$ :

$$dE = 2\pi^2 f^2 A^2 \rho s v dt$$

$$\frac{dE}{dt} = 2\pi^2 f^2 A^2 \rho s v = P$$

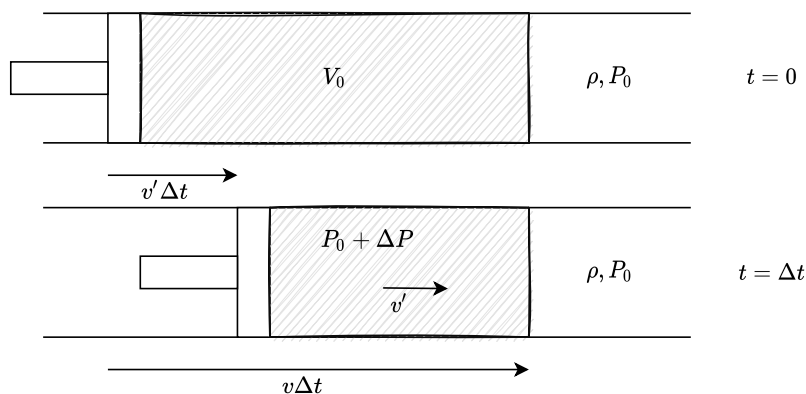
We krijgen nu dus het vermogen van de golf. We kunnen hieruit nu ook nog de intensiteit  $I$  halen:

$$I = \frac{P}{S} = 2\pi^2 f^2 A^2 \rho v$$



## 13 Afleiding 13

### Eigenschappen geluid



Figuur 17: Druk golf in een zuiger.

Met  $v'$  de snelheid van de zuiger en  $v$  de geluidssnelheid, kunnen we stellen dat:

$$V_0 = Sv\Delta t$$

$$\Delta V = -Sv'\Delta t$$

De kracht is dan:

$$F_{\text{net}} = (P_0 + \Delta P)S - P_0S$$

$$F_{\text{net}} = \Delta PS$$

Als we rekening houden met het feit dat  $dm = \rho V_0$  kunnen we met behulp van impuls berekenen dat:

$$F_{\text{net}}\Delta t = dm v'$$

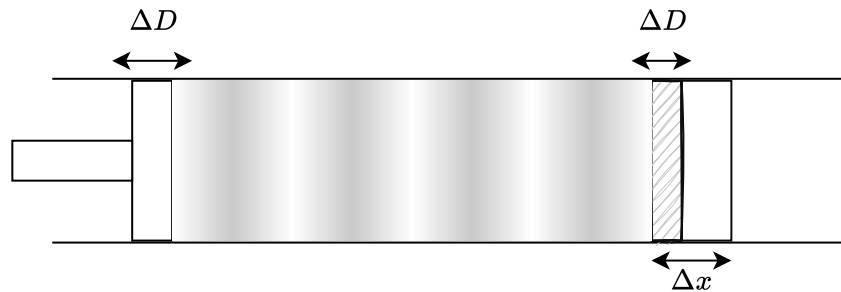
$$F_{\text{net}}\Delta t = \rho v\Delta t S v'$$

$$\Delta PS = \rho v s v'$$

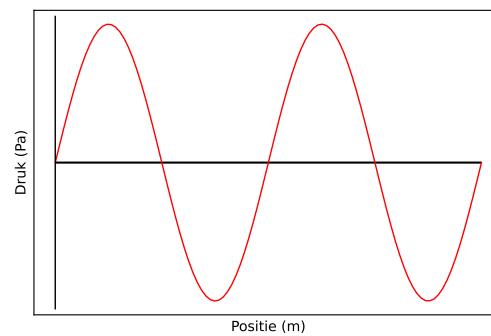
$$\Delta P = \rho v v'$$

## 14 Afleiding 14

### Wiskundige beschrijving van geluid



Figuur 18: Drukgolven in een buis.



Figuur 19: Drukgolven in een buis.

Met de compressie- of bulk-modulus  $B = \frac{\Delta P}{\frac{\Delta V}{V_0}}$  kunnen we zeggen dat:

$$\begin{aligned}\Delta P &= -B \frac{\Delta V}{dv} \\ \Delta P &= -B \frac{\Delta D S}{\Delta x S} \\ \Delta P &= -B \frac{\partial D}{\partial x}\end{aligned}$$

We geven een voorstel voor  $D$ ,  $D = \Delta \sin(kx \pm \omega t)$

$$\begin{aligned}\Delta P &= -BAk \cos(kx \pm \omega t) \\ &= -\rho v^2 Ak \cos(kx \pm \omega t) \\ &= -\rho v \omega A \cos(kx \pm \omega t) \\ &= \underbrace{-2\pi \rho v f A}_{\Delta P_m} \cos(kx \pm \omega t)\end{aligned}$$

## 15 Afleiding 15

### Trillende lucht kolommen

We modelleren de verplaatsing van lucht als:

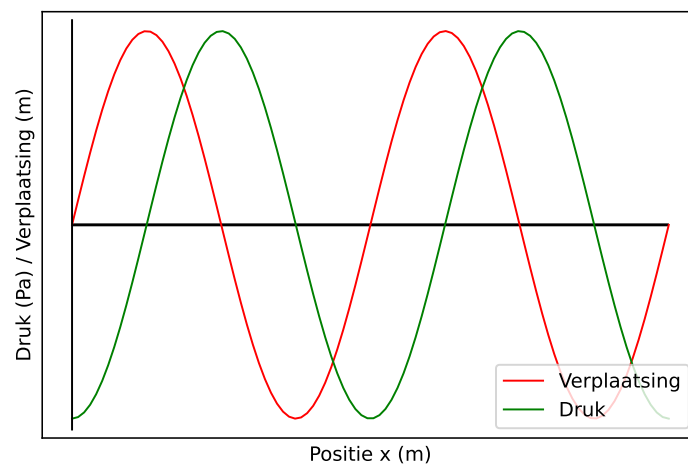
$$D = A \sin(kx \pm \omega t) \quad (18)$$

De druk kunnen we schrijven als:

$$\Delta P = -\Delta P_M \cos(kx \pm \omega t) \quad (19)$$

$$= -\Delta P_M \sin(kx \pm \omega t - \frac{\pi}{2}) \quad (20)$$

Uit vergelijking 18 en 20 kunnen we afleiden dat de druk een faseverschil van  $\frac{\pi}{2}$  heeft tegenover de verplaatsing zoals te zien is in figuur 20. We zien hier duidelijk dat de druk na ijl op de verplaatsing.



Figuur 20: Fase verschil tussen druk en verplaatsing

## 16 Afleiding 16

### Staande golven in een open buis

We veronderstellen een open buis met lengte  $L$ . Als nevenvoorwaarde stellen we dat de druk aan de uiterste kanten van de buis gelijk is aan de atmosferische druk  $P_{atm}$ . We kijken eerst naar de drukverdeling in de buis:

$$\begin{aligned}\Delta P_S(x, t) &= \Delta P_m \sin(kx + \omega t) + \Delta P_m \sin(kx - \omega t) \\ &= 2\Delta P_m \sin(kx) \cos(\omega t)\end{aligned}$$

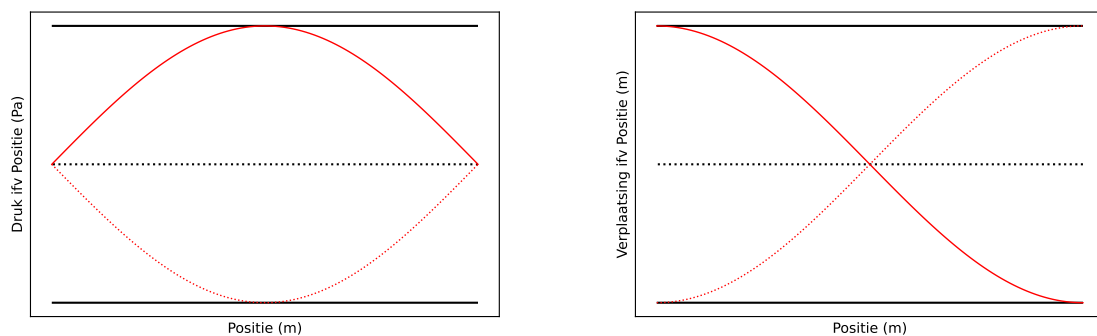
Hierbij werd gebruikt gemaakt van de regels van Simpson. Nu zullen we kijken naar de verplaatsing in de buis:

$$\begin{aligned}D_S(x, t) &= A \sin(kx + \omega t + \frac{\pi}{2}) + A \sin(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}) \\ &= 2A \sin(kx + \frac{\pi}{2}) \cos(\omega t)\end{aligned}$$

Hierbij werd gebruikt gemaakt van de regels van Simpson. Enkele oplossingen zien er als volgt uit:

#### Eerste harmonische

Hierbij is  $\lambda = 2L$  en  $f = \frac{v}{2L}$ .

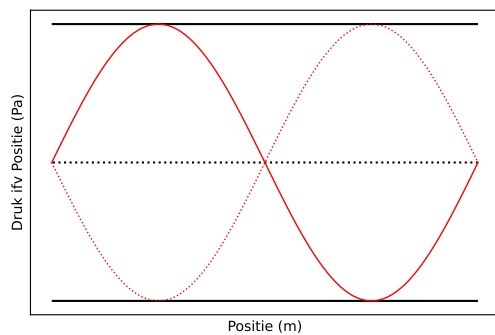


(a) Drukverdeling

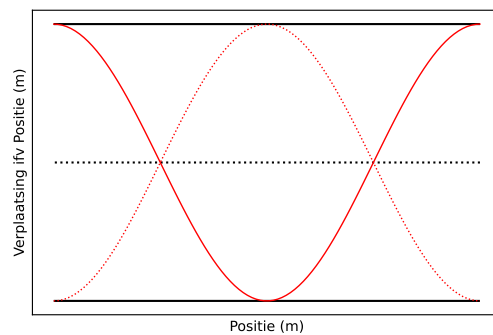
(b) Verplaatsing

Figuur 21: Druk en verplaatsing voor de eerste harmonische in een open buis

**Tweede harmonische**  
Hierbij is  $\lambda = L$  en  $f = \frac{v}{L}$ .



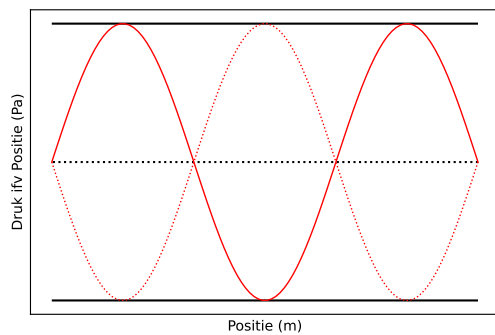
(a) Drukverdeling



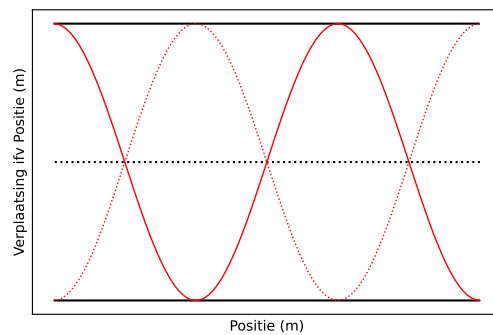
(b) Verplaatsing

Figuur 22: Druk en verplaatsing voor de tweede harmonische in een open buis

**Derde harmonische**  
Hierbij is  $\lambda = \frac{2L}{3}$  en  $f = \frac{3v}{2L}$ .



(a) Drukverdeling

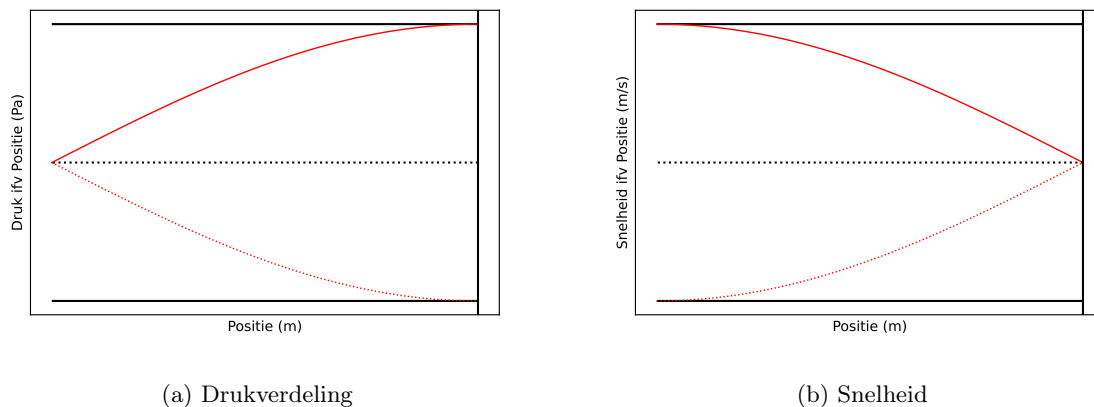


(b) Verplaatsing

Figuur 23: Druk en verplaatsing voor de derde harmonische in een open buis

## 17 Afleiding 17

### Staannde golven in een half open buis



Figuur 24: Druk en snelheid voor de eerste harmonische in een half open buis

We kunnen opnieuw enkele randvoorwaarden stellen:

$$D_s(L, t) = 0 \Rightarrow kl + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Dit wil zeggen dat:

$$k = \frac{\pi}{2L} = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 4L \wedge f = \frac{v}{4L}$$

We kunnen ook een tweede nevenvoorwaarde opstellen:

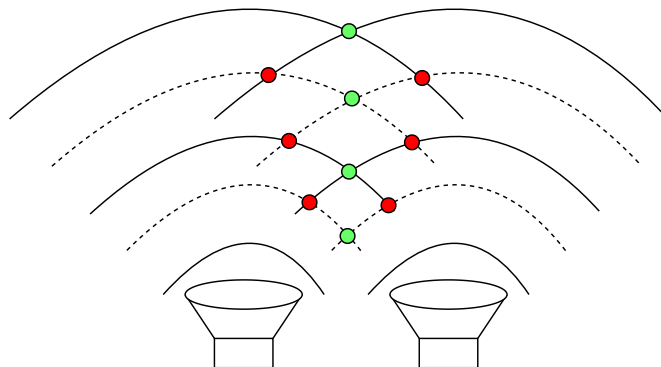
$$kL + \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

Dit wil zeggen dat:

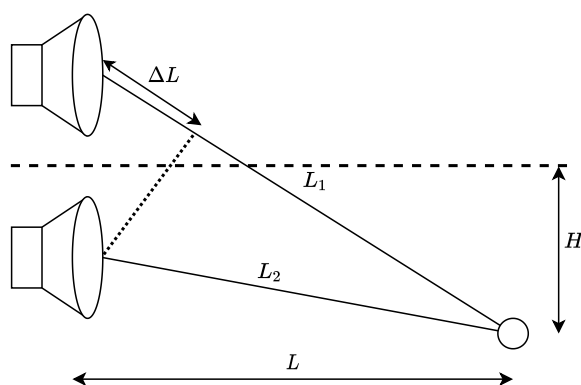
$$k = \frac{3\pi}{2L} = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{4L}{3} \wedge f = \frac{3v}{4L}$$

## 18 Afleiding 18

### Interferentie van geluids-golven



Figuur 25: Interferentie bij speakers



Figuur 26: Interferentie wiskundig

We kunnen de druk beschrijven als:

$$\Delta P_1 = \Delta P_m \sin(kL_1 \pm \omega t)$$

$$\Delta P_2 = \Delta P_m \sin(kL_2 \pm \omega t)$$

Door beiden op te tellen en de regels van Simpson toe te passen krijgen we:

$$\Delta P = 2\Delta P_m \sin\left(k \frac{L_1 + L_2}{2} \pm \omega t\right) \cos\left(k \frac{L_1 - L_2}{2}\right)$$

We onderscheiden 2 soorten interferentie zoals te zien is op figuur 25. Constructieve interferentie (groen) en destructieve interferentie (rood).

Bij constructieve interferentie is  $\frac{k\Delta L}{2} = 0, \pi, 2\pi, \dots$ . Dit wil zeggen dat  $\Delta L$  moet voldoen aan  $\Delta L = 0, \lambda, 2\lambda, \dots$ . Destructieve interferentie doet zich voor als  $\frac{k\Delta L}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$ .  $\Delta L$  moet hier dus voldoen aan  $\Delta L = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \dots$

## 19 Afleiding 19

### Kloppen van een golf

Als 2 golven een frequentie hebben die zeer dicht bij elkaar liggen, krijgen we kloppingen. We kunnen de druk van beide golven voorstellen als:

$$\begin{aligned}D_1 &= A \sin(2\pi f_1 t) \\ D - 2 &= A \sin(2\pi f_2 t)\end{aligned}$$

Door beiden op te tellen en de regels van Simpson toe te passen krijgen we:

$$D = 2A \cos(2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t) \sin(2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t)$$

Hierbij vermelden we ook nog dat als  $f_1 \approx f_2 \Rightarrow \Delta\omega = \frac{f_1 - f_2}{2} \ll 1$ .



## 20 Afleiding 20

### Doppler effect

Het doppler effect doet zich voor als de bron en waarnemer van een geluid niet stil staan tegenover elkaar. We analyseren nu het geval waarin de bron beweegt. Als de bron naar rechts beweegt, zal een waarnemer die zich links bevindt een lagere frequentie waarnemen. Een waarnemer die rechts staat, zal daarentegen een hogere frequentie waarnemen. deze nieuwe frequentie heet  $\lambda'$ . Wiskundig kunnen we  $\lambda'$  bepalen met volgende redenering:

$$\lambda' = \lambda \pm v_{bron} T = \lambda \pm v_{bron} \frac{\lambda}{v_s} = \lambda \left(1 \pm \frac{v_{bron}}{v_s}\right)$$

De nieuwe frequentie is dan  $f' = \frac{f}{1 \pm \frac{v_{bron}}{v_s}}$ .

Bron naar je toe	f ↗
Bron van je weg	f ↘