Afleidingen

Academiejaar 2021 – 2022

Robbe Decapmaker

Dedicated to Rebecca

Inleiding

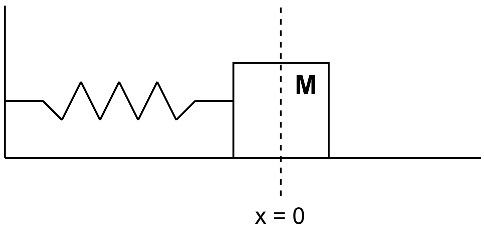
De afleidingen voor trillingen en golven. De source code is te vinden op github.
https://github.com/debber1/Afleidingen_TG
Dit document is **niet** alles wat je moet kennen van theorie voor het examen. Ik ben niet verantwoordelijk voor jouw resultaat op jouw examen. Het is jouw verantwoordelijkheid om ook nog de andere onderdelen van deze cursus op een degelijke manier te verwerken.
Dit document is een 'work in progress', dit wil zeggen dat er (ongeveer) een wekelijkse update zal zijn. De meest recente versie zal altijd op Github staan!

Contributors

Sodir Yuksel
Jonathan Valgaeren

1 Afleiding 1

Afleiding van de uitdrukking voor de verplaatsing van een ongedempte trilling aan de hand van de bewegings-vergelijking



Figuur 1: Massa veer systeem

We stellen eerst de tweede wet van Newton op voor het blokje M uit figuur 1.

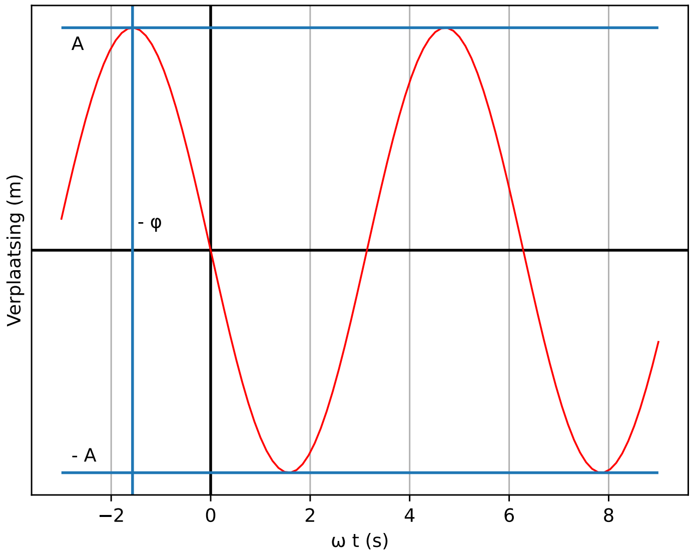
$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

We kijken nu enkel naar de x-component en brengen de kracht van de veer in rekening:

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

We hebben ook de versnelling geschreven als de tweede afgeleide van de verplaatsing. Door alle termen naar het linker lid te verplaatsen krijgen we volgende differentiaal vergelijking:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \tag{1}$$



Figuur 2: Harmonische Oscillator
als dit het punt nie over brengt, weet ik het ook niet meer :p

Deze differentiaal vergelijking moeten we oplossen aan de hand van beginvoorwaarden. Deze voorwaarden verkrijgen we experimenteel. Bij het experiment noteren we de uitwijking tegenover de tijd. Hierdoor verkrijgen we figuur 2. Wiskundig vertaalt dit zich tot:

$$x(t) = Acos(\omega t + \varphi) \tag{2}$$

We kunnen vergelijking 2 een eerste keer afleiden om de snelheid van het blokje te verkrijgen:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega Asin(\omega t + \varphi) \tag{3}$$

Door vergelijking 2 nogmaals af te leiden, kunnen we ook de versnelling van het blokje verkrijgen:

$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 Acos(\omega t + \varphi) \tag{4}$$

Nu kunnen we vergelijkingen 4 en 2 invullen in vergelijking 1:

$$-\omega^2 mAcos(\omega t + \varphi) + kAcos(\omega t + \varphi) = 0 \tag{5}$$

Vergelijking 5 is nu een oplossing voor differentiaal vergelijking 1 als aan volgende voorwaarde voldaan is:

$$\begin{aligned} -\omega^2 mAcos(\omega t + \varphi) + kAcos(\omega t + \varphi) &= 0 \\ (\frac{k}{m} - \omega^2)Acos(\omega t + \varphi) &= 0 \\ \frac{k}{m} - \omega^2 &= 0 \\ \frac{k}{m} &= \omega^2 \end{aligned}$$

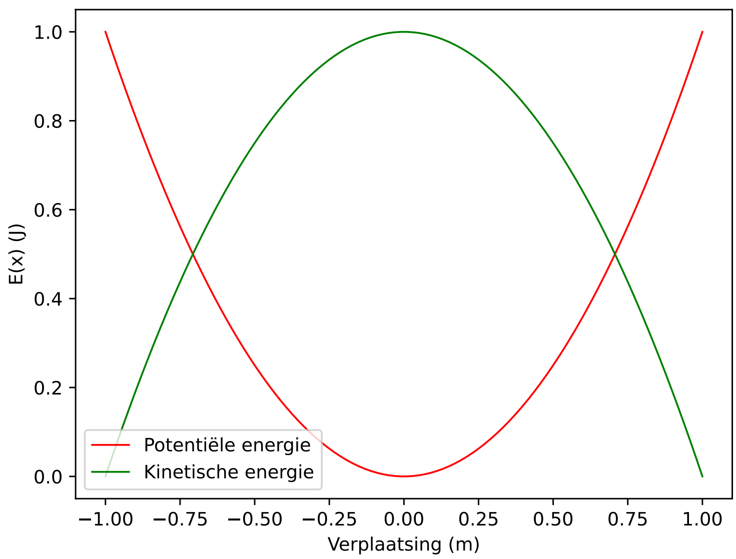
2 Afleiding 2

Afleiding van de potentiële en kinetische energie van een ongedempte trilling in functie van de plaats

Er zijn 2 vormen van energie aanwezig in een massa-veer-systeem. We hebben de potentiële energie in de veer en de kinetische energie van het blokje.

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\
E(x) &= \frac{1}{2}kA^2cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}m\omega^2A^2sin^2(\omega t + \varphi) \\
E(x) &= \frac{1}{2}kA^2cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}m\frac{k}{m}A^2sin^2(\omega t + \varphi) \\
E(x) &= \frac{1}{2}kA^2(cos^2(\omega t + \varphi) + sin^2(\omega t + \varphi)) \\
E(x) &= \frac{1}{2}kA^2
\end{aligned}$$

We zien nu duidelijk dat de hoeveelheid energie niet afhankelijk is van de uitwijking van de massa. Met andere woorden: de energie blijft constant in het systeem (figuur 3).



Figuur 3: Energie balans

3 Afleiding 3

Snelheid in functie van de afstand

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

We kunnen vergelijkingen 2 en 3 invullen:

$$-A\omega^2 cos(\omega t + \varphi) = \frac{dv}{dx} \cdot A\omega sin(\omega t + \varphi)$$

Na schrappen en herschikken:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\omega cos(\omega t + \varphi)}{sin(\omega t + \varphi)}$$

Sinus substitutie:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= \frac{\omega cos(\omega t + \varphi)}{\sqrt{1 - cos^2(\omega t + \varphi)}} \\ \frac{dv}{dx} &= \frac{\pm\omega \frac{x}{A}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}} \end{aligned}$$

Nu integratie van beide leden:

$$\int dv = \int \frac{\pm\omega \frac{x}{A}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}} dx$$

De snelheid in functie van de afstand is dus:

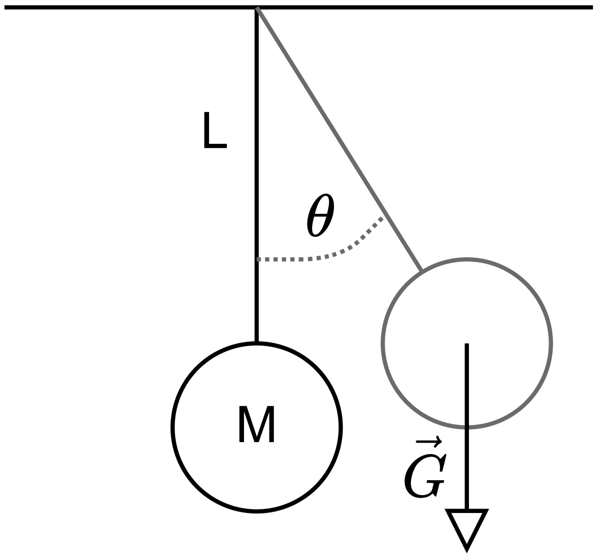
$$v(x) = \omega A \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \tag{6}$$

Uit vergelijking 6 kunnen we nu ook afleiden wat de uitdrukking is voor $v_{\max}$. We weten dat $v_{\max}$ zich zal voordoen bij het evenwichtspunt oftewel als x = 0.

$$\begin{aligned} v(x) &= \omega A \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \\ v_{\max} &= \omega A \sqrt{1 - \frac{0^2}{A^2}} \\ v_{\max} &= \omega A \sqrt{1} \\ v_{\max} &= \omega A \end{aligned}$$

4 Afleiding 4

Afleiding van de beweging van een pendulum aan de hand van de bewegingsvergelijking



Figuur 4: Pendulum

De drijvende kracht van de pendulum is gelijk aan:

$$F = -mgsin(\theta)$$

Hiermee kunnen we de bewegingsvergelijking opstellen:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mgsin(\theta)$$

We kunnen stellen dat $sin(\theta) \approx \theta$ voor een kleine θ:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\theta$$

We kunnen ook stellen dat $x = l\theta$:

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\theta$$

We kunnen dit nu herschrijven naar:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

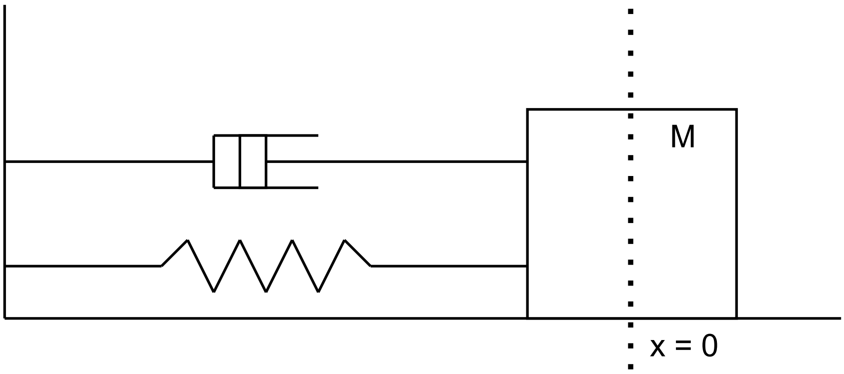
Dit geeft ons een differentiaalvergelijking. Een oplossing ziet er als volgt uit:

$$\theta(t) = \theta_0 cos(\omega t + \varphi)$$

Hierbij zien we dat $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

5 Afleiding 5

Gedempte harmonische trilling
We beginnen met de bewegingsvergelijking op te stellen:



Figuur 5: Gedempt massa-veer-systeem

$$\begin{aligned}
m\vec{a} =& \vec{F}_{veer} + \vec{F}_{demper} \\
m\frac{d^2x}{dt^2} =& -kx - bv \\
m\frac{d^2x}{dt^2} =& -kx - b\frac{dx}{dt} \\
0 =& m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx
\end{aligned}$$

We maken gebruik van de formule van Euler $e^{i\varphi} = cos(\varphi) + isin(\varphi)$ om tot een oplossing van de differentiaalvergelijking te komen:

$$\widetilde{x}(t) = Ae^{(\gamma+i\omega)t+i\varphi}$$

Het reëel deel is dus:

$$x(t) = Re(\widetilde{x}(t)) = Ae^{\gamma t}cos(\omega t + \varphi)$$

We kunnen deze nu invullen in de bewegingsvergelijking:

$$m(\gamma + i\omega)^2\widetilde{x}(t) + b(\gamma + i\omega)e^{(\gamma+i\omega)t+i\varphi} + ke^{(\gamma+i\omega)t+i\varphi} = 0 \tag{7}$$

Na herordenen en het delen door m, krijgen we:

$$\gamma^2 + 2i\gamma\omega - \omega^2 + \frac{b}{m}\gamma + i\frac{\omega b}{m} + \frac{k}{m} = 0$$

We kijken nu naar het imaginair deel:

$$\begin{aligned}
2i\gamma\omega + i\frac{\omega b}{m} &= 0 \\
2\gamma + \frac{b}{m} &= 0 \\
-\frac{b}{2m} &= \gamma
\end{aligned}$$

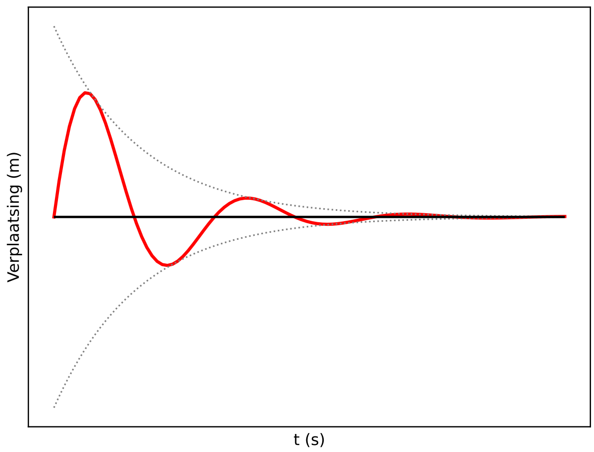
We vullen nu deze waarde van γ in in het reëel deel van vergelijking 7:

$$\gamma^2 - \omega^2 + \frac{b}{m}\gamma + \frac{k}{m} = 0$$
$$(-\frac{b}{2m})^2 - \omega^2 + \frac{b}{m}(-\frac{b}{2m}) + \frac{k}{m} = 0$$
$$\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2} = \omega^2$$
$$\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} = \omega$$

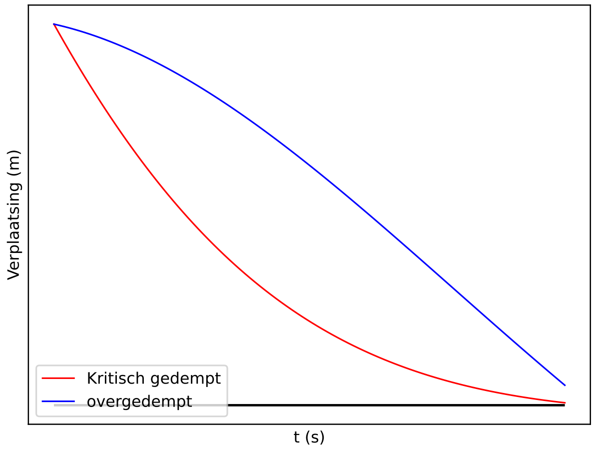
Hiermee hebben we nu de natuurlijke frequentie van het systeem gevonden. We kunnen tot slot ook nog stellen dat:

$$x(t) = Re(\widetilde{x}(t)) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}cos(\omega t + \varphi)$$

We kunnen nu drie gevallen onderscheiden:



Figuur 6: Ondergedempte trilling ($b^2 << 4mk$)



Figuur 7: Kritisch ($b^2 = 4mk$) en over gedempte ($b^2 >> 4mk$) trilling

6 Afleiding 6

Gedwongen trillingen
We stellen eerst de bewegingsvergelijking op:

$$m\frac{d^2\widetilde{x}(t)}{dt^2} + b\frac{d\widetilde{x}(t)}{dt} + k\widetilde{x}(t) = F_0 cos(\omega t) \tag{8}$$

Een voorstel voor de algemene oplossing van differentiaalvergelijking 8 ziet er als volgt uit:

$$\widetilde{x}(t) = Ae^{i(\omega t + \varphi)}$$

waarbij $\widetilde{F} = F_0 e^{i\omega t}$. Dit kunnen we nu invullen in vergelijking 8:

$$\begin{aligned} m\omega^2\widetilde{x}(t) + i\omega b\widetilde{x}(t) + k\widetilde{x}(t) &= F_0 e^{i\omega t} \\ m\omega^2 A^{i\omega t}e^{i\varphi} + i\omega bA^{i\omega t}e^{i\varphi} + kA^{i\omega t}e^{i\varphi} &= F_0 e^{i\omega t} \\ m\omega^2 A + i\omega b + k &= F_0 e^{-i\varphi} \end{aligned}$$

We kunnen dit opsplitsen in een imaginair en reëel deel:

Imaginair: $\omega bA = -F_0 sin(\varphi)$

Reëel: $-m\omega A + kA = F_0 cos(\varphi)$

Als we nu het imaginair deel delen door het reëel deel verkrijgen we voor φ:

$$\begin{aligned} -\frac{\omega b}{k - m\omega^2} &= tan(\varphi) \\ bgtan(\frac{-\omega b}{k - m\omega^2}) &= \varphi \end{aligned}$$

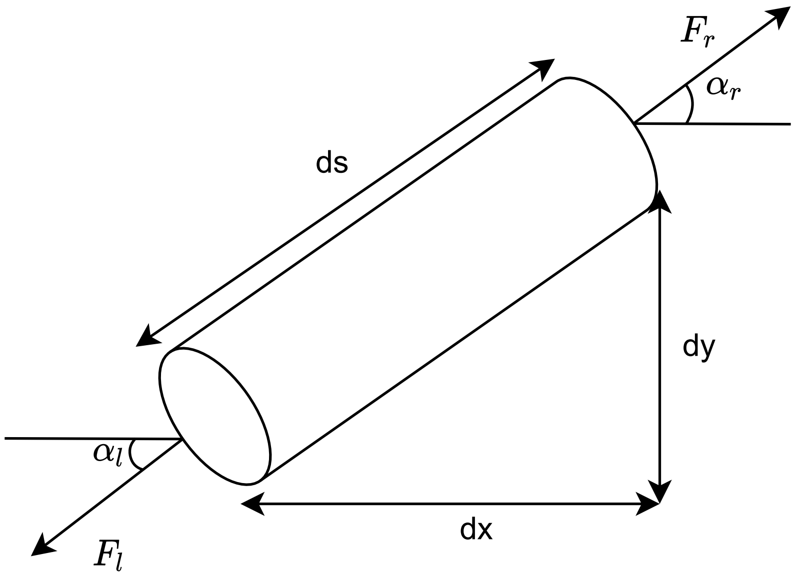
Om de amplitude te bepalen kijken we opnieuw naar het imaginair deel:

$$\omega b A = -F_0 sin(\varphi)$$
$$\omega b A = -F_0 \frac{tan(\varphi)}{\sqrt{1+tan^2(\varphi)}}$$
$$\omega b A = -F_0 \frac{tan(bgtan(\frac{-\omega b}{k-m\omega^2}))}{\sqrt{1+tan^2(bgtan(\frac{-\omega b}{k-m\omega^2}))}}$$
$$\omega b A = -F_0 \frac{\frac{-\omega b}{k-m\omega^2}}{\sqrt{1+\frac{\omega^2 b^2}{(k-m\omega^2)^2}}}$$
$$\omega b A = -F_0 \frac{\frac{-\omega b}{k-m\omega^2}}{\sqrt{\frac{(k-m\omega^2)^2+\omega^2 b^2}{(k-m\omega^2)^2}}}$$
$$A = \frac{\frac{F_0}{k-m\omega^2}}{\sqrt{\frac{(k-m\omega^2)^2+\omega^2 b^2}{(k-m\omega^2)^2}}}$$
$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\frac{k}{m}-\omega^2)^2+\frac{\omega^2 b^2}{m^2}}}$$
$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\frac{\omega^2 b^2}{m^2}}}$$

met ω_0 de natuurlijke frequentie van het systeem en ω de gedwongen frequentie.

7 Afleiding 7

Golf vergelijking
We nemen aan da F_r en F_l uit figuur 8 gelijk zijn aan elkaar en aan de spanning in het touw σA. we stellen ook dat de massa voldoet aan $dm = \rho ds A$.



Figuur 8: Touw

We starten met het opstellen van de wet van Newton:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$
$$F_r sin(\alpha_r) = F_l sin(\alpha_l) = dm a_y$$
$$\sigma A(sin(\alpha_r) - sin(\alpha_l)) = dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$
$$\sigma(\frac{dy}{dx}|_r - \frac{dy}{dx}|_l) = \rho ds \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

We stellen dat α klein is, en dus kunnen we zeggen dat $sin(\alpha) \approx tan(\alpha) = \frac{dx}{dy}$. We nemen ook aan dat $ds \approx dx$.

$$\sigma \frac{\frac{dy}{dx}|_r - \frac{dy}{dx}|_l}{dx} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$
$$\sigma \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Hiermee zijn we de 1D golfvergelijking bekomen.

8 Afleiding 8

Harmonische golven
Een voorstel voor de 1D golf vergelijking ziet er als volgt uit:

$$y(x,t) = y_m sin(kx \pm \omega t + \varphi)$$

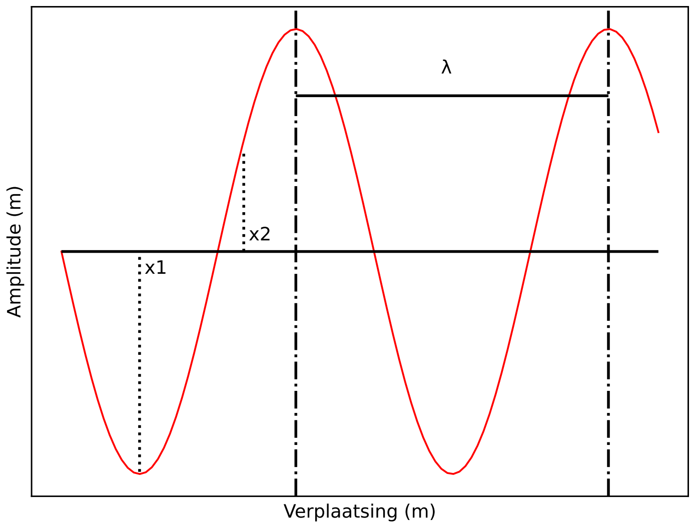
We kunnen deze oplossing invullen in de golfvergelijking:

$$-\omega^2 y_m sin(kx \pm \omega t + \varphi) = v^2 k^2 y_m sin(kx \pm \omega t + \varphi)$$

Als we dit vereenvoudigen, krijgen we de voorwaarden waaraan een golf moet voldoen.

$$v^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$$
$$v = \pm\frac{\omega}{k}$$

We kunnen nu een analyse doen op de golfvergelijking in het tijdsdomein:



Figuur 9: Tijdsdomein analyse

We starten opnieuw met de algemene oplossing, maar dan op vaste plaats x_1:

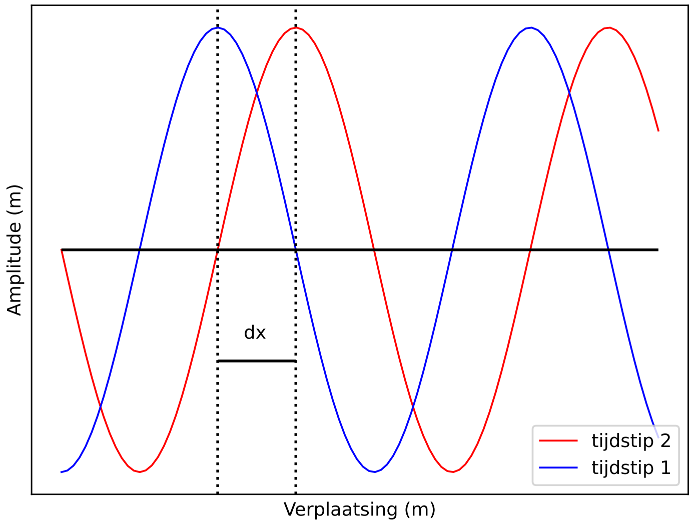
$$y(x_1,t) = y_m sin(kx_1 \pm \omega t + \varphi) \tag{9}$$
$$y(x_1,t) = y_m sin(\pm\omega t + \varphi_1) \tag{10}$$

met $\varphi_1 = kx_1 + \varphi$. We kunnen dit opnieuw doen voor x_2:

$$y(x_2,t) = y_m sin(kx_2 \pm \omega t + \varphi) \tag{11}$$
$$y(x_2,t) = y_m sin(\pm\omega t + \varphi_2) \tag{12}$$

met $\varphi_2 = kx_2 + \varphi$. Uit vergelijkingen 10 en 12 stellen we vast dat er enkel een fase verschuiving is. We vermelden ook nog dat oscillaties in fase zijn als $2\pi = k\lambda$.

We doen ook de analyse doen op de golfvergelijking in de ruimte:



Figuur 10: Ruimtelijke analyse

We starten opnieuw met de algemene oplossing, maar dan op vast tijdstip t_1:

$$y(x,t_1) = y_m sin(kx \pm \omega t_1 + \varphi) \tag{13}$$
$$y(x,t_1) = y_m sin(kx + \varphi_1) \tag{14}$$

met $\varphi_1 = \varphi \pm \omega t_1$. We stellen dit opnieuw op voor t_2

$$y(x,t_2) = y_m sin(kx \pm \omega t_2 + \varphi) \tag{15}$$
$$y(x,t_2) = y_m sin(kx \underbrace{\pm \omega t_1 + \varphi}_{\varphi_1} \pm \Delta t) \tag{16}$$
$$y(x,t_2) = y_m sin(kx + \varphi_2) \tag{17}$$

met $\varphi_2 = \varphi_1 \pm \Delta t$. Uit de waarden van φ_1 en φ_2 kunnen we de voortplantingsrichting van de golf bepalen:

$\varphi_1 < \varphi_2$	Golf naar rechts
$\varphi_1 > \varphi_2$	Golf naar links

We kunnen ook iets zeggen over de voortplantingssnelheid v.

$$\begin{aligned} v = \frac{dx_{max}}{dt} = \frac{d}{dt}(kx_{max} \pm \omega t + \varphi) &= 0 \\ k\frac{dx_{max}}{dt} \pm \omega &= 0 \\ \pm\frac{\omega}{k} &= v \\ \pm\frac{2\pi f}{\frac{2\pi}{\lambda}} &= v \\ \pm\lambda f &= v \end{aligned}$$

9 Afleiding 9

Superpositie

We zeggen dat de algemene oplossing $y(x,t)$ van de golfvergelijking kan uitgedrukt worden door 2 nieuwe functies:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

We vullen dit opnieuw in in de golfvergelijking:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 y_1(x,t) + y_2(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y_1(x,t) + y_2(x,t)}{\partial x^2}$$

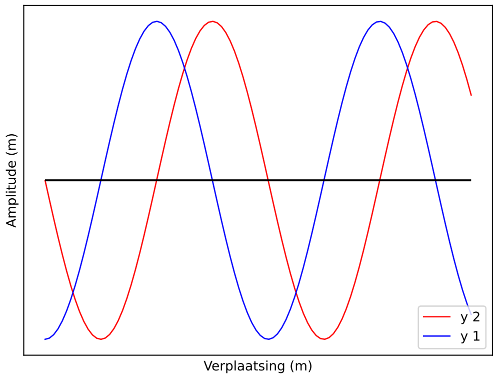
We gebruiken de lineariteit van de afgeleide:

$$\frac{\partial^2 y_1(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y_2(x,t)}{\partial t^2} = v^2 (\frac{\partial^2 y_1(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y_2(x,t)}{\partial x^2})$$

10 Afleiding 10

Interferentie
Interferentie doet zich voor als er meerdere verschillende golven aanwezig zijn in 1 medium. We kunnen dit voorstellen door volgende 2 functies (zie ook figuur 11):

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_m sin(kx \pm \omega t) \\
y_2 &= y_m sin(kx \pm \omega t + \phi)
\end{aligned}
$$



Figuur 11: Golven y_1 en y_2 die zullen interfereren

We bepalen nu hoe $y_1 + y_2$ er wiskundig uit zal zien aan de hand van de regels van Simpson:

$$
\begin{aligned}
y &= y_1 + y_2 \\
y &= y_m sin(kx \pm \omega t) y_m + sin(kx \pm \omega t + \phi) \\
y &= \underbrace{2 y_m cos(\frac{\phi}{2})}_{A=f(\phi)} sin(kx + \omega t + \frac{\phi}{2})
\end{aligned}
$$

De 2 uitersten van dit fenomeen krijgen een naam: destructieve- en constructieve-interferentie. Bij destructieve zullen de golven elkaar tegen werken zodat de beweging stopt (zie figuur 12b). Constructieve interferentie zal ervoor zorgen dat de resulterende golf groter wordt (zie figuur 12a).

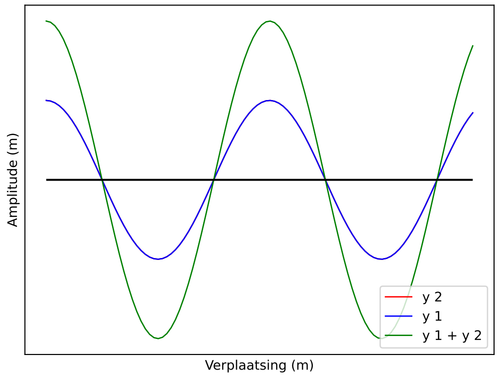
11 Afleiding 11

Staande golven
Staande golven doen zich vaak voor bij muziek instrumenten zoals de gitaar. We een staande golf als volgt wiskundig voorstellen:

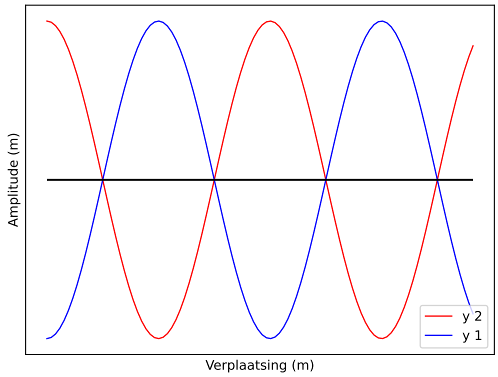
$$
\begin{aligned}
y(x,t) &= y_m sin(kx - \omega t) + y_m sin(kx + \omega t) \\
y(x,t) &= \underbrace{2 y_m sin(kx)}_{A(x)} cos(\omega t)
\end{aligned}
$$

Hierbij gebruiken we wederom de regels van Simpson. Omdat de uiteinden van de snaar (met lengte L) vast gehouden worden, kunnen we volgende randvoorwaarden stellen:

$$
\begin{aligned}
y(0,t) = 0 &\Rightarrow sin(0) = 0 \\
y(L,t) = 0 &\Rightarrow sin(kL) = 0
\end{aligned}
$$



(a) Constructieve interferentie



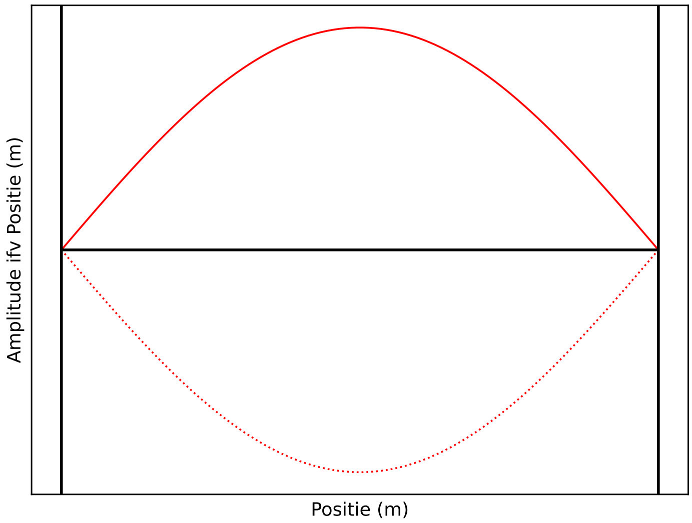
(b) Destructieve interferentie

Figuur 12: Twee extreme gevallen van interferentie.

We kunnen dus algemeen zeggen dat $k \cdot L$ altijd gelijk moet zijn aan een veelvoud van π oftewel:

$$kL = m\pi (m \in \mathbb{N})$$
$$\frac{2\pi}{\lambda} L = m\pi$$
$$\lambda = \frac{2L}{m}$$

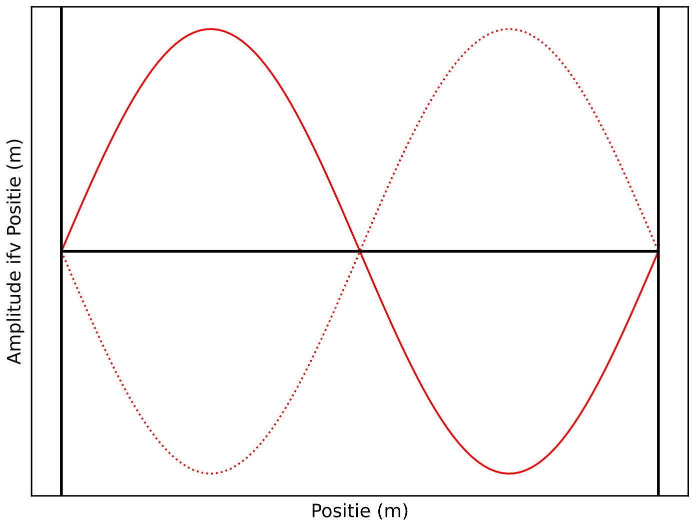
Eerste harmonische $(m = 1)$



Figuur 13: Eerste harmonische

Hierbij is $m = 1$ dus moet $\lambda = 2L$ en de frequentie is dan $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2L}$.

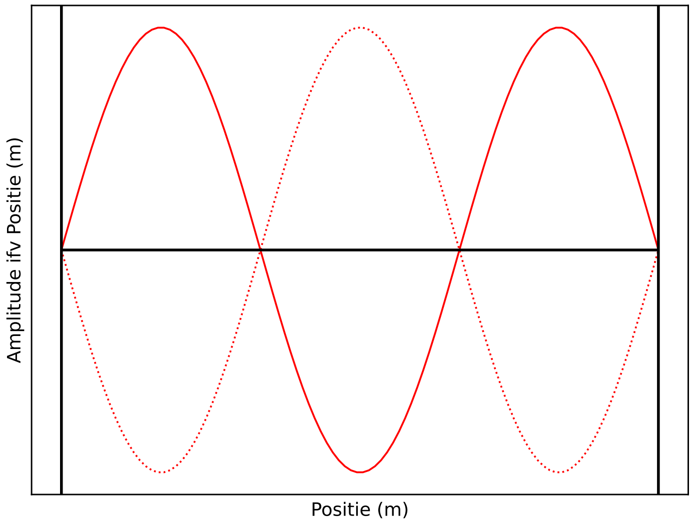
Tweede harmonische $(m = 2)$



Figuur 14: Tweede harmonische

Hierbij is $m = 2$ dus moet $\lambda = L$ en de frequentie is dan $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{L}$.
Derde harmonische $(m = 3)$

Hierbij is $m = 3$ dus moet $\lambda = \frac{2}{3}L$ en de frequentie is dan $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{3v}{2L}$.



Figuur 15: Derde harmonische

12 Afleiding 12

Energie transport in een golf

De energie in een massa-veer-systeem is:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = dE = \frac{1}{2}\omega^2 dmA^2$$

We gebruiken nu het feit dat $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ en $\omega = \pi f$:

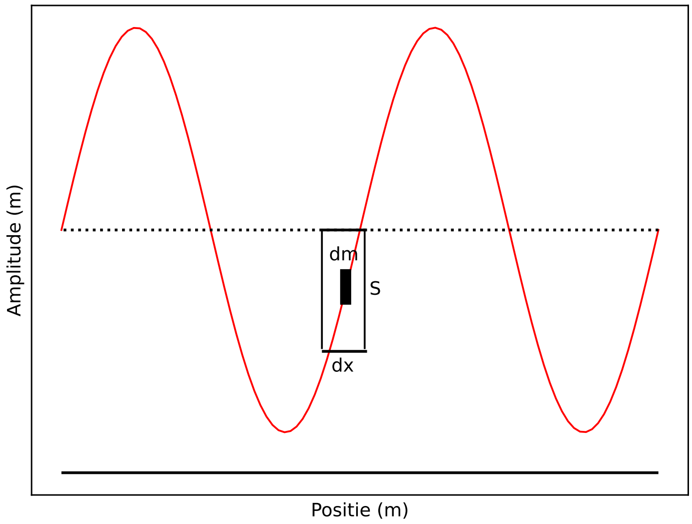
$$dE = 2\pi^2 f^2 dmA^2$$

We kunnen dm herschrijven als $dm = \rho sdx = \rho sdtv$:

$$dE = 2\pi^2 f^2 A^2 \rho Svdt$$
$$\frac{dE}{dt} = 2\pi^2 f^2 A^2 \rho Sv = P$$

We bekomen het vermogen van de golf. We kunnen hieruit vervolgens de intensiteit I halen:

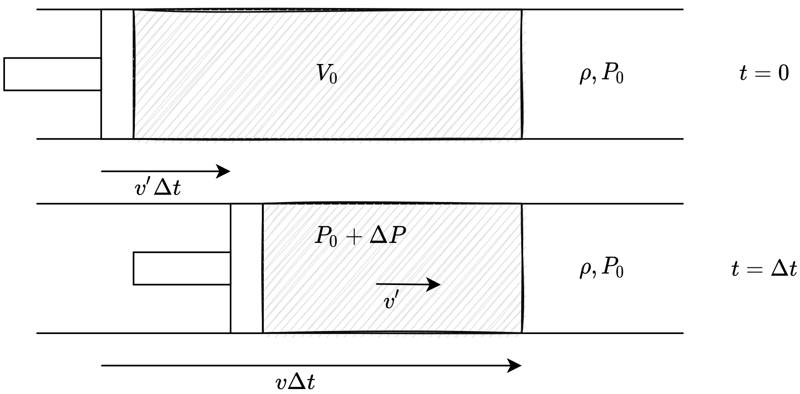
$$I = \frac{P}{S} = 2\pi^2 f^2 A^2 \rho v$$



Figuur 16: Energie transport

13 Afleiding 13

Eigenschappen geluid



Figuur 17: Drukgolf in een zuiger

Met v' de snelheid van de zuiger en v de geluidsnelheid kunnen we stellen dat:

$$V_0 = Sv\Delta t$$
$$\Delta V = -Sv'\Delta t$$

De kracht is dan:

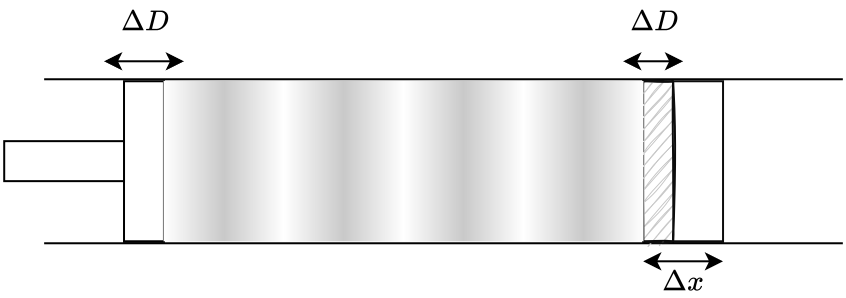
$$F_{\text{net}} = (P_0 + \Delta P)S - P_0 S$$
$$F_{\text{net}} = \Delta P S$$

Als we rekening houden met het feit dat $dm = \rho V_0$ kunnen we met behulp van impuls berekenen dat:

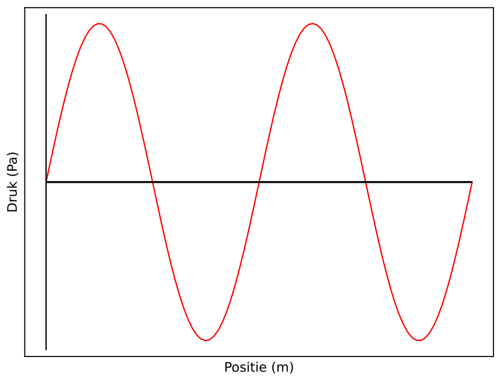
$$F_{\text{net}}\Delta t = dmv'$$
$$F_{\text{net}}\Delta t = \rho v \Delta t S v'$$
$$\Delta P S = \rho v s v'$$
$$\Delta P = \rho v v'$$

14 Afleiding 14

Wiskundige beschrijving van geluid



Figuur 18: Drukgolven in een buis



Figuur 19: Drukgolven in een buis

Met de compressie- of bulk-modulus $B = \frac{\Delta P}{\frac{\Delta V}{V_0}}$ kunnen we zeggen dat:

$$\Delta P = -B\frac{\Delta V}{dv}$$
$$\Delta P = -B\frac{\Delta DS}{\Delta xS}$$
$$\Delta P = -B\frac{\partial D}{\partial x}$$

We geven een voorstel voor D: $D = \Delta sin(kx \pm \omega t)$

$$\begin{aligned}\Delta P &= -BAkcos(kx \pm \omega t)\\ &= -\rho v^2 Akcos(kx \pm \omega t)\\ &= -\rho v\omega Acos(kx \pm \omega t)\\ &= \underbrace{-2\pi\rho v f A}_{\Delta P_m} cos(kx \pm \omega t)\end{aligned}$$

15 Afleiding 15

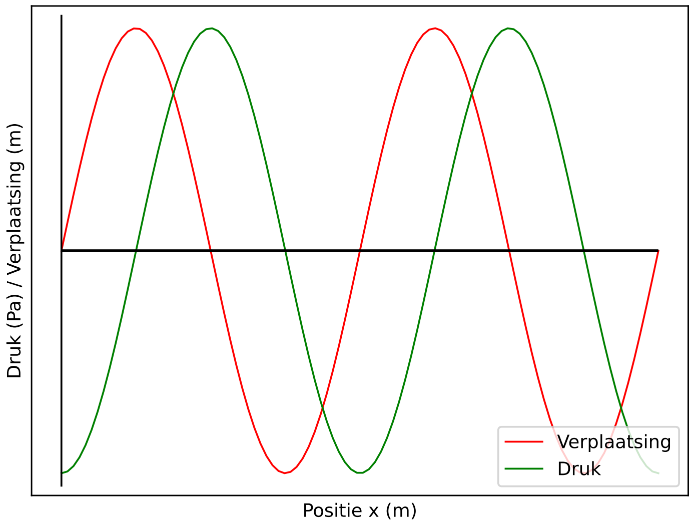
Trillende lucht kolommen
We modelleren de verplaatsing van lucht als:

$$D = Asin(kx \pm \omega t) \tag{18}$$

De druk kunnen we schrijven als:

$$\Delta P = -\Delta P_M cos(kx \pm \omega t) \tag{19}$$
$$= -\Delta P_M sin(kx \pm \omega t - \frac{\pi}{2}) \tag{20}$$

Uit vergelijking 18 en 20 kunnen we afleiden dat de druk een faseverschil van $\frac{\pi}{2}$ heeft tegenover de verplaatsing zoals te zien is in figuur 20. We zien hier duidelijk dat de druk na ijlt op de verplaatsing.



Figuur 20: Fase verschil tussen druk en verplaatsing

16 Afleiding 16

Staande golven in een open buis
We veronderstellen een open buis met lengte L. Als nevenvoorwaarde stellen we dat de druk aan de uiterste kanten van de buis gelijk is aan de atmosferische druk P_{atm}. We kijken eerst naar de drukverdeling in de buis:

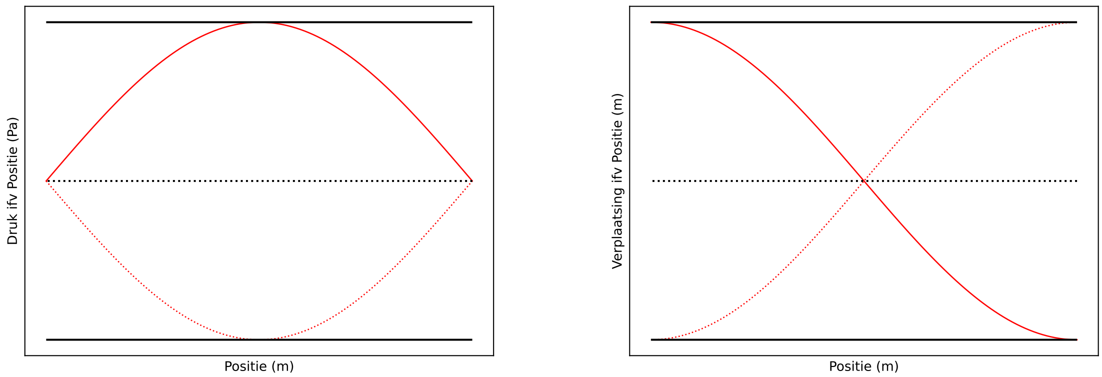
$$\begin{aligned}\Delta P_S(x,t) &= \Delta P_m sin(kx+\omega t) + \Delta P_m sin(kx-\omega t)\\ &= 2\Delta P_m sin(kx)cos(\omega t)\end{aligned}$$

Hierbij gebruiken we de regels van Simpson. Vervolgens kijken we naar de verplaatsing in de buis:

$$\begin{aligned}D_S(x,t) &= Asin(kx+\omega t+\frac{\pi}{2}) + Asin(kx-\omega t+\frac{\pi}{2})\\ &= 2Asin(kx+\frac{\pi}{2})cos(\omega t)\end{aligned}$$

Hierbij gebruiken we nogmaals de regels van Simpson.
Enkele oplossingen zien er als volgt uit:

Eerste harmonische
Hierbij is $\lambda = 2L$ en $f = \frac{v}{2L}$.



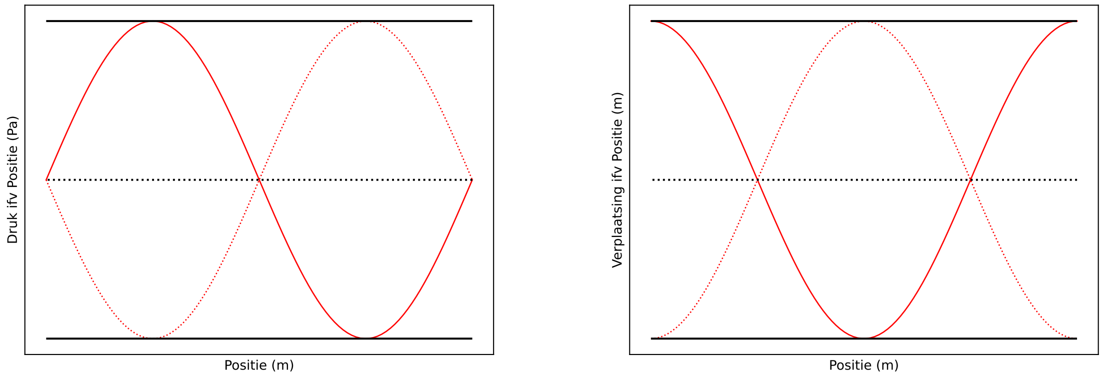
(a) Drukverdeling

(b) Verplaatsing

Figuur 21: Druk en verplaatsing voor de eerste harmonische in een open buis

Tweede harmonische

Hierbij is $\lambda = L$ en $f = \frac{v}{L}$.



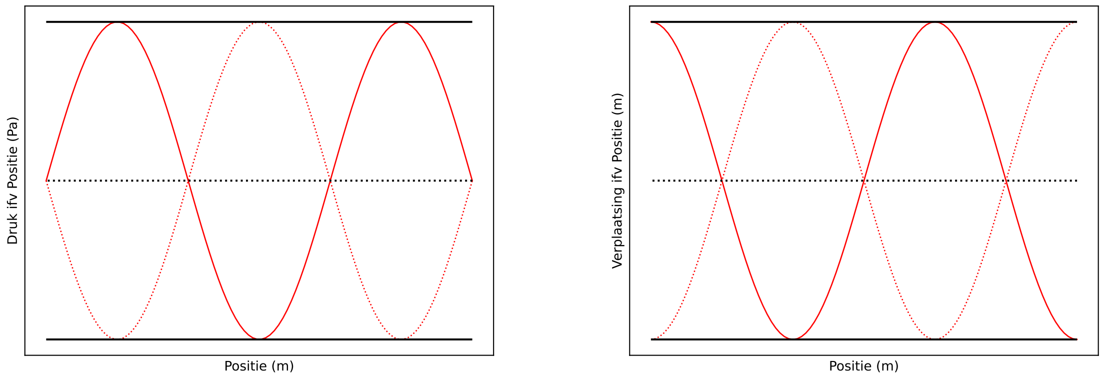
(a) Drukverdeling

(b) Verplaatsing

Figuur 22: Druk en verplaatsing voor de tweede harmonische in een open buis

Derde harmonische

Hierbij is $\lambda = \frac{2L}{3}$ en $f = \frac{3v}{2L}$.



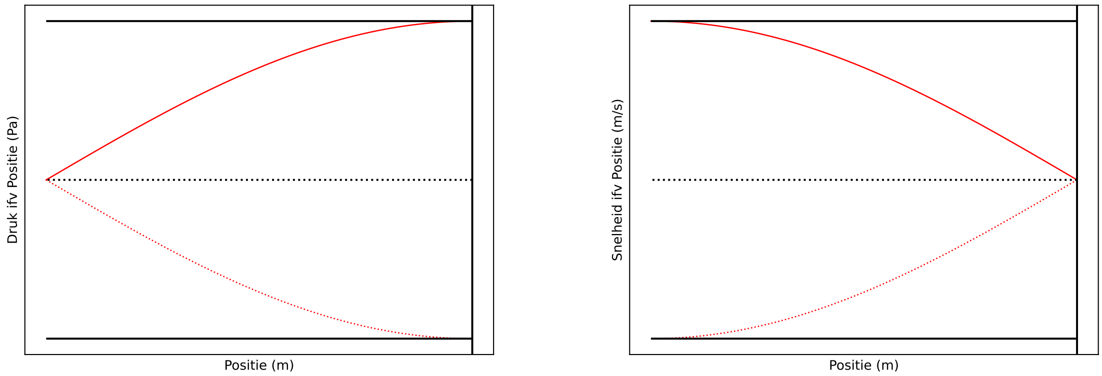
(a) Drukverdeling

(b) Verplaatsing

Figuur 23: Druk en verplaatsing voor de derde harmonische in een open buis

17 Afleiding 17

Staande golven in een half open buis



(a) Drukverdeling (b) Snelheid

Figuur 24: Druk en snelheid voor de eerste harmonische in een half open buis

We kunnen opnieuw enkele randvoorwaarden stellen:

$$D_s(L,t) = 0 \Rightarrow kl + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Dit wil zeggen dat:

$$k = \frac{\pi}{2L} = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 4L \wedge f = \frac{v}{4L}$$

We kunnen ook een tweede nevenvoorwaarde opstellen:

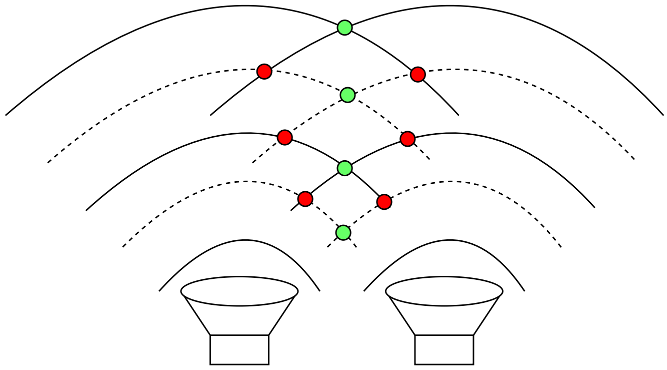
$$kL + \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

Dit wil zeggen dat:

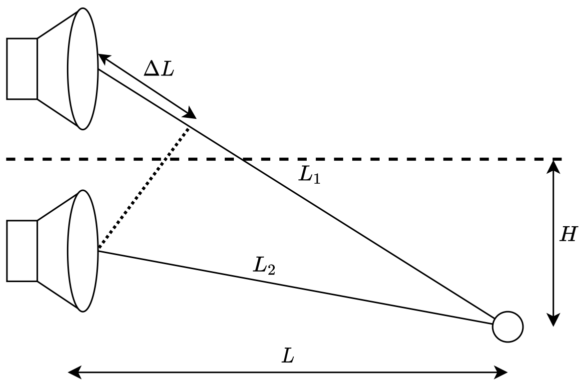
$$k = \frac{3\pi}{2L} = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{4L}{3} \wedge f = \frac{3v}{4L}$$

18 Afleiding 18

Interferentie van geluidsgolven



Figuur 25: Interferentie bij speakers



Figuur 26: Interferentie wiskundig

We kunnen de druk beschrijven als:

$$\Delta P_1 = \Delta P_m sin(kL_1 \pm \omega t)$$
$$\Delta P_2 = \Delta P_m sin(kL_2 \pm \omega t)$$

Door beide op te tellen en de regels van Simpson toe te passen krijgen we:

$$\Delta P = 2\Delta P_m sin(k\frac{L_1 + L_2}{2} \pm \omega t)cos(k\frac{L_1 - L_2}{2})$$

We onderscheiden 2 soorten interferentie zoals te zien in figuur 25. Constructieve interferentie (groen) en destructieve interferentie (rood).

Bij constructieve interferentie is $\frac{k\Delta L}{2} = 0, \pi, 2\pi, \ldots$ Dit wil zeggen dat ΔL moet voldoen aan $\Delta L = 0, \lambda, 2\lambda, \ldots$. Destructieve interferentie doet zich voor als $\frac{k\Delta L}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$. ΔL moet hier dus voldoen aan $\Delta L = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \ldots$.

19 Afleiding 19

Kloppen van een golf
Als 2 golven frequenties hebben die zeer dicht bij elkaar liggen, krijgen we kloppingen. We kunnen de druk van beide golven voorstellen als:

$$D_1 = Asin(2\pi f_1 t)$$
$$D - 2 = Asin(2\pi f_2 t)$$

Door beide op te tellen en de regels van Simpson toe te passen krijgen we:

$$D = 2Acos(2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t) sin(2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t)$$

Hierbij vermelden we ook nog dat als $f_1 \approx f_2 \Rightarrow \Delta\omega = \frac{f_1 - f_2}{2} << 1$.

20 Afleiding 20

Doppler effect

Het doppler effect doet zich voor als de bron en waarnemer van een geluid in beweging zijn tegenover elkaar. We analyseren nu het geval waarin de bron beweegt: als de bron naar rechts beweegt, zal een waarnemer die zich links bevindt een lagere frequentie waarnemen. Een waarnemer die rechts staat, zal daarentegen een hogere frequentie waarnemen. De nieuwe frequentie heet λ'. Wiskundig kunnen we λ' bepalen met volgende redenering:

$$\lambda' = \lambda \pm v_{bron}T = \lambda \pm v_{bron}\frac{\lambda}{v_s} = \lambda(1 \pm \frac{v_{bron}}{v_s})$$

De nieuwe frequentie is dan $f' = \frac{f}{1 \pm \frac{v_{bron}}{v_s}}$.

Bron naar je toe	f $\nearrow$
Bron van je weg	f $\searrow$

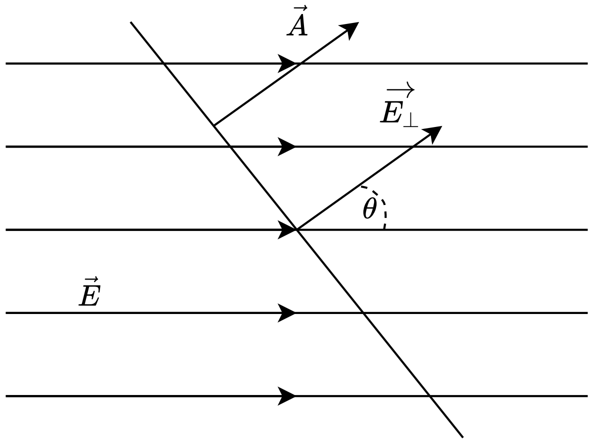
21 Afleiding 21

Basiswetten voor elektromagnetische golven

Wet van Ampère

$$\oint \vec{B}\vec{dl} = \mu I_{\text{lus}} + \mu_0\epsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}$$

waarbij Φ_E de elektrische flux is:



Figuur 27: Elektrisch veld

$$\begin{aligned}\Phi_E &= E_\perp A\\ &= Ecos(\theta)A\\ &= \vec{E}\cdot\vec{A}\quad \text{(Scalair product)}\end{aligned}$$

Wetten van maxwell

$$\oint \vec{E}d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{21}$$

$$\oint \vec{B}d\vec{A} = 0 \tag{22}$$

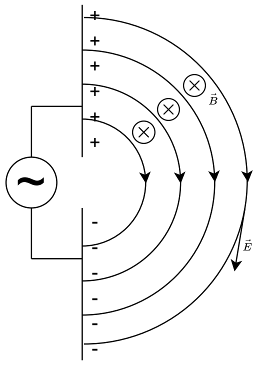
$$\oint \vec{E}\vec{dl} = -\frac{\partial\Phi_B}{\partial t} \tag{23}$$

$$\oint \vec{B}\vec{dl} = \mu\epsilon_0\frac{\partial\Phi_E}{\partial t} \tag{24}$$

waarbij vergelijking 23 en 24 invloed hebben op elektromagnetische golven.

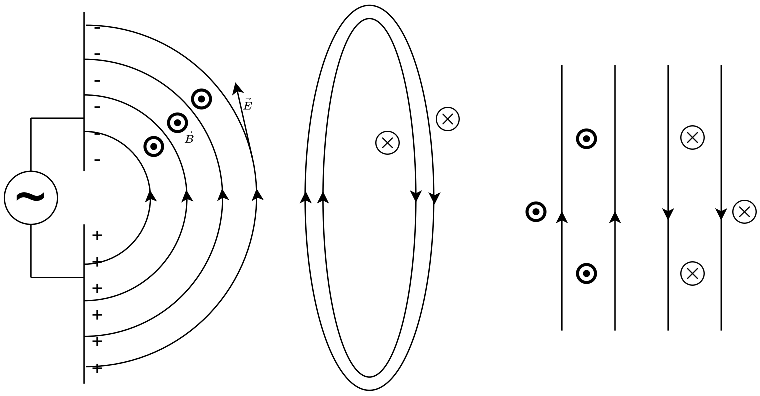
22 Afleiding 22

Generatie EM golven
Men kan elektromagnetische golven genereren door twee platen naast elkaar te zetten met een wisselspanningsbron zoals in figuur 28:



Figuur 28: Generatie EM golf

Als de spanningsbron van polariteit veranderd, veranderen ook de velden van richting zoals in figuur 29. Hier kunnen we tevens ook zien hoe de golf zich voortplant in de ruimte: na verloop van tijd zullen de golven een lineair karakter krijgen.

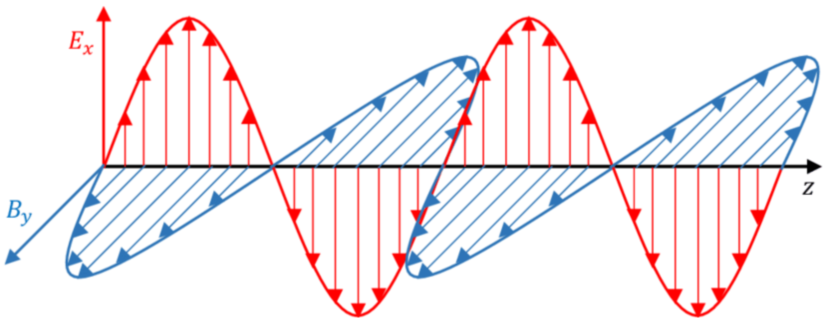


Figuur 29: Generatie en voortplanting EM golf

23 Afleiding 23

Elektromagnetische velden
Eerst enkele eigenschappen van elektromagnetische golven

1. $\vec{B}$ en $\vec{E}$ staan loodrecht op de voortplantingsrichting (transversale golven)
2. $\vec{B}$ staat loodrecht op $\vec{E}$
3. $\vec{B} \times \vec{E}$ geeft de voortplantingsrichting van de golf
4. $\vec{B}$ en $\vec{E}$ zijn harmonische golven met $\Delta\Phi = 0$



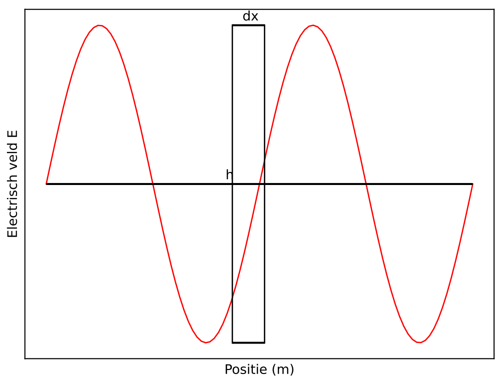
Figuur 30: Elektromagnetische golf

In figuur 30 kunnen we stellen dat:

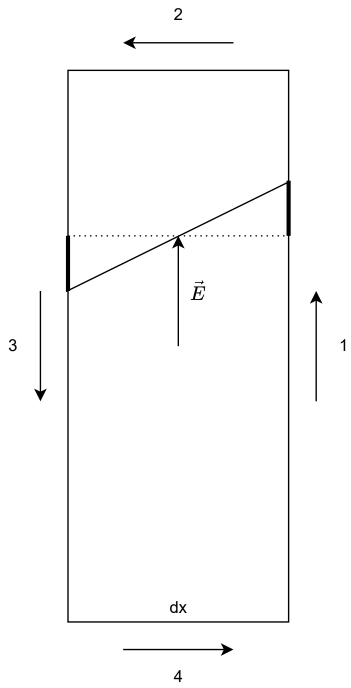
$$\vec{E} = E_m sin(kx - \omega t)\vec{j}$$
$$\vec{B} = B_m sin(kx - \omega t)\vec{k}$$

24 Afleiding 24

Opstellen van de golfvergelijking van een elektromagnetische golf
Wet van Faraday



(a) Elektrische golf



(b) Uitvergroting

Figuur 31: Wet van Faraday

We berekenen de verandering in het elektrische flux van een golf. We definiëren hiervoor een gesloten kring zoals te zien is in figuur 31a. We nemen dx zo klein mogelijk, zodat we de golf op dit kleine interval als lineair kunnen aannemen. We zien deze linearisering in figuur 31b. Hierdoor wordt het effectief elektrisch veld gereduceerd tot de twee dikke lijnen op de linker en rechter zijde van de rechthoek. Deze zijn respectievelijk gelijk aan:

$$\vec{E_L} = \vec{E} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial x}\frac{dx}{2}$$
$$\vec{E_R} = \vec{E} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial x}\frac{dx}{2}$$

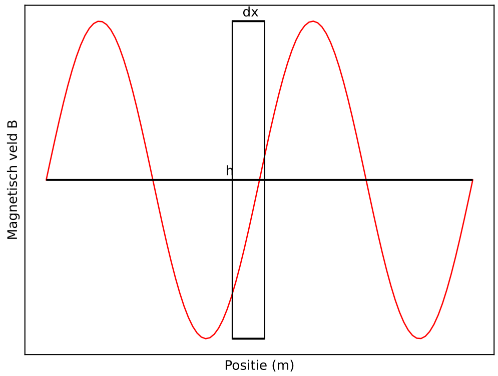
Door de wet van Faraday $-\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$ toe te passen op alle 4 de zijden van de rechthoek:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \underbrace{E + \frac{\partial E}{\partial x}\frac{dx}{2}h}_{1} + \underbrace{0}_{2} + \underbrace{E - \frac{\partial E}{\partial x}\frac{dx}{2}h}_{3} + \underbrace{0}_{4}$$

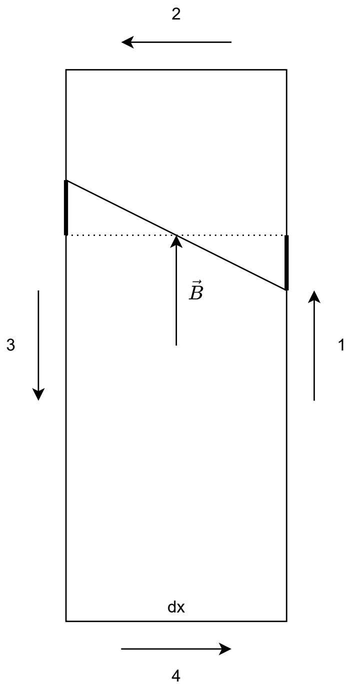
Hierbij zijn de scalaire producten voor zijde 2 en 4 gelijk aan nul omdat de vectoren loodrecht op elkaar staan. We kunnen deze uitdrukking verder vereenvoudigen tot (met de wet van Faraday):

$$\frac{\partial E}{\partial x} h dx = -\frac{\partial B}{\partial t} h dx \tag{25}$$
$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{26}$$

Wet van Maxwell
We maken opnieuw dezelfde redenering als voor de afleiding met de wet van Faraday, we merken wel op



(a) Magnetische golf



(b) Uitvergroting

Figuur 32: Wet van Maxwell

dat we nu met een magnetisch veld werken en dat we gebruik maken van de wet van Maxwell ($\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\Phi_E}{\partial t} = \oint\vec{B}\cdot d\vec{S}$). De twee dikke lijnen kunnen we hierdoor definiëren als:

$$\vec{B_L} = \vec{B} - \frac{\partial\vec{B}}{\partial x}\frac{dx}{2}$$
$$\vec{B_R} = \vec{B} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial x}\frac{dx}{2}$$

We passen de wet van Maxwell toe op de randen van de gesloten kring:

$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{S} = \underbrace{B - \frac{\partial B}{\partial x}\frac{dx}{2}h}_{1} + \underbrace{0}_{2} + \underbrace{B + \frac{\partial B}{\partial x}\frac{dx}{2}h}_{3} + \underbrace{0}_{4}$$

Hierbij zijn de scalaire producten voor zijde 2 en 4 gelijk aan nul omdat de vectoren loodrecht op elkaar staan. We kunnen deze uitdrukking verder vereenvoudigen tot (met de wet van Maxwell):

$$-\frac{\partial E}{\partial x}hdx = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}hdx \quad (27)$$
$$-\frac{\partial E}{\partial x} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial B}{\partial t} \quad (28)$$

Opstellen van de golfvergelijking met de inductie wetten

We werken nu verder met vergelijking 26 en 28. We leiden eerst vergelijking 26 af naar de tijd om volgende uitdrukking te krijgen:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \tag{29}$$

We leiden nu ook vergelijking 28 af maar dit keer naar de ruimte:

$$-\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial x} \tag{30}$$

We kunnen nu vergelijking 29 en 30 samenbrengen om de golfvergelijking op te stellen:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

Hierbij vermelden we nog dat $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$.

25 Afleiding 25

Energie van een elektromagnetische golf
We definiëren de energie dichtheid van het elektrisch en magnetisch veld als volgt:

$$U_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$
$$U_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$

We stellen dat de totale energie dichtheid van een elektromagnetische golf gegeven wordt door de som van deze dichtheden:

$$U_{\text{tot}} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$

We kunnen nu de individuele bijdrage van elk veld bepalen door gebruik te maken van de wet van Faraday, meer bepaald vergelijking 26:

$$\frac{\partial}{\partial x}(E_m sin(kx - \omega t)) = -\frac{\partial}{\partial t}(B_m sin(kx - \omega t))$$
$$E_m kcos(kx - \omega t) = B_m \omega cos(kx - \omega t)$$
$$\frac{E_m}{B_m} = \frac{\omega}{k} = c$$

Hieruit volgt dat:

$$E_m = cB_m$$

Als we de verkregen relatie tussen E en B in de totale energiedichtheid invullen krijgen we:

$$U_{\text{tot}} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$
$$U_{\text{tot}} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{E^2}{\mu_0 c^2}$$
$$U_{\text{tot}} = \underbrace{\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2}_{50\%} + \underbrace{\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2}_{50\%}$$

De totale energie valt ook makkelijk te berekenen als:

$$U_{\text{tot}} = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 cEB = \frac{EB}{\mu_0}$$

We kijken nu ook naar de relatie tussen energie dichtheid en vermogen. We kijken naar de hoeveelheid energie die een elektromagnetische golf kan afzetten op een volume:

$$dU = \epsilon_0 E^2 dV = \epsilon_0 E^2 Acdt$$

We gaan nu van energie over naar vermogen door deze afzetting te bekijken over een klein tijdsinterval dt:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\epsilon_0 E^2 Acdt}{dt} = \epsilon_0 E^2 Ac$$

Het vermogen per oppervlakte wordt dan:

$$S = \frac{\epsilon_0 E^2 Ac}{A} = \epsilon_0 E^2 c = \frac{EB}{\mu_0}$$

We kijken nu naar de Poynting vector $\vec{S}$:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

Tot slot definiëren we ook nog de intensiteit, het gemiddelde van het vermogen per oppervlakte:

$$\begin{aligned} S &= \frac{EB}{\mu_0} \\ &= \frac{E^2}{\mu_0 c} \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} E_m^2 sin^2(kx - \omega t) \\ &= \frac{E_m^2}{\mu_0 c} (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} cos(2(kx - \omega t))) \end{aligned}$$

We nemen nu het gemiddelde van $\vec{S}$:

$$\vec{S} = \frac{1}{T} \int_0^T S dt = \frac{E_m^2}{2\mu_0 c} = \frac{E_{\text{RMS}} B_{\text{RMS}}}{\mu_0}$$

26 Afleiding 26

Bewijs de gelijkheid van de lichtsnelheid via eenheden
We zullen bewijzen dat de volgende gelijkheid klopt met betrekking tot de eenheden:

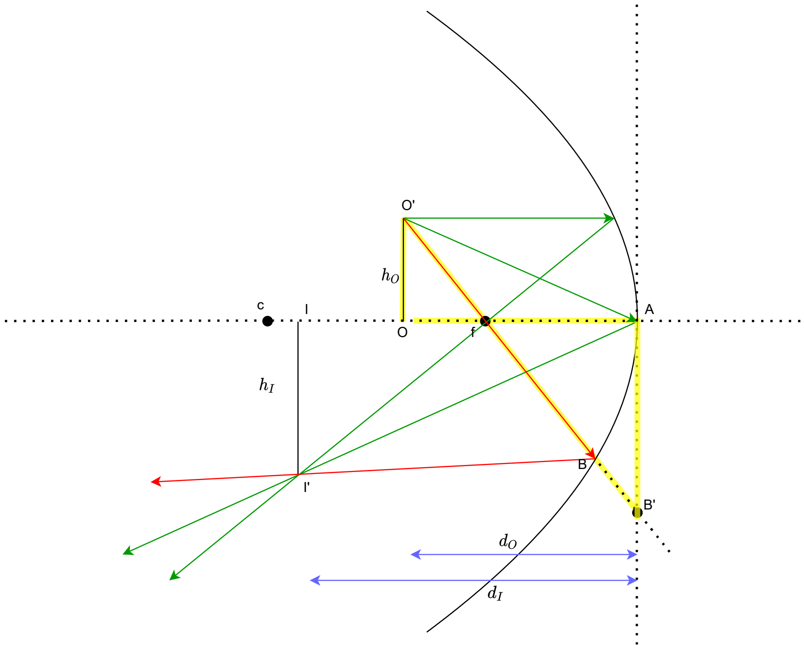
$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

We vullen de eenheden in van alle constanten en werken dan verder:

$$\frac{m}{s} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{N}{A^2})(\frac{C^2}{N \cdot m^2})}}$$
$$\frac{m}{s} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{s^2}{C^2})(\frac{C^2}{m^2})}}$$
$$\frac{m}{s} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{s^2}{m^2})}}$$
$$\frac{m}{s} = \frac{1}{\frac{s}{m}}$$
$$\frac{m}{s} = \frac{m}{s}$$

27 Afleiding 27

Afleiding van de werking van een sferische spiegel voor verschillende posities van het object
We bespreken eerst de situatie waarbij een object tussen C en f staat, zoals te zien is in figuur 33.



Figuur 33: Object tussen C en f

We zoeken een waarde voor d_I, daarvoor gebruiken we de geometrie van de driehoeken O'OA en IAI'. We weten dus dat:

$$\Delta O'OA \Rightarrow tan(\theta) = \frac{|OO'|}{d_O}$$
$$\Delta IAI' \Rightarrow tan(\theta) = \frac{|II'|}{d_I}$$

Hieruit leiden we af dat de versterking m gelijk is aan :

$$\frac{h_O}{d_O} = \frac{h_I}{d_I} = |m|$$

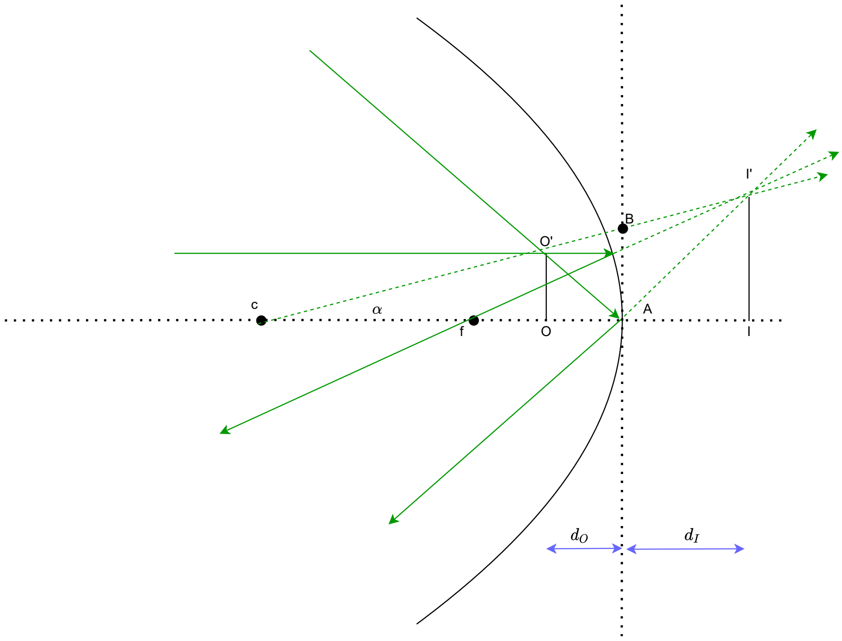
Om nu de afstand d_I te vinden kunnen de twee congruente driehoeken die in het geel aangeduid staan op figuur 33 gebruiken. Voor deze driehoeken geldt dat:

$$\frac{|OO'|}{|Of|} = \frac{|AB'|}{|Af|} \approx \frac{|AB'|}{f} \Rightarrow \frac{h_O}{d_0 - f} = \frac{h_I}{f}$$

Dit kunnen we verder uitwerken tot:

$$\frac{h_O}{h_I} = \frac{d_O - f}{f} = \frac{d_O}{d_I} \Rightarrow \frac{1}{f} - \frac{1}{d_O} = \frac{1}{d_I}$$

We bespreken nu de situatie waarbij het object tussen f en de spiegel staat, zoals te zien is in figuur 34.



Figuur 34: Object tussen f en spiegel

We proberen opnieuw om de afstand d_I te bepalen aan de hand van driehoeken.

$$\Delta fBA \Rightarrow tan(\theta) = \frac{|AB|}{f} \approx \frac{h_O}{f}$$
$$\Delta fII' \Rightarrow tan(\theta) = \frac{h_I}{f + d_I}$$

Hieruit volgt dat:

$$\frac{h_0}{h_I} = \frac{f}{f + d_I}$$

We kijken nog naar 2 andere driehoeken

$$\Delta CII' \Rightarrow tan(\theta) = \frac{h_I}{2f + d_I}$$
$$\Delta COO' \Rightarrow tan(\theta) = \frac{h_O}{2f - d_O}$$

Hieruit volgt dat:

$$\frac{h_0}{h_I} = \frac{2f - d_O}{2f + d_I}$$

We kunnen dus stellen dat:

$$\frac{f}{f + d_I} = \frac{2f - d_O}{2f + d_I}$$
$$\frac{1}{d_O} = \frac{1}{f} + \frac{1}{d_I}$$