Afleidingen

Academiejaar 2021 – 2022

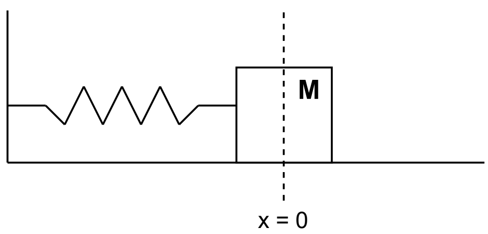
Robbe Decapmaker

Inleiding

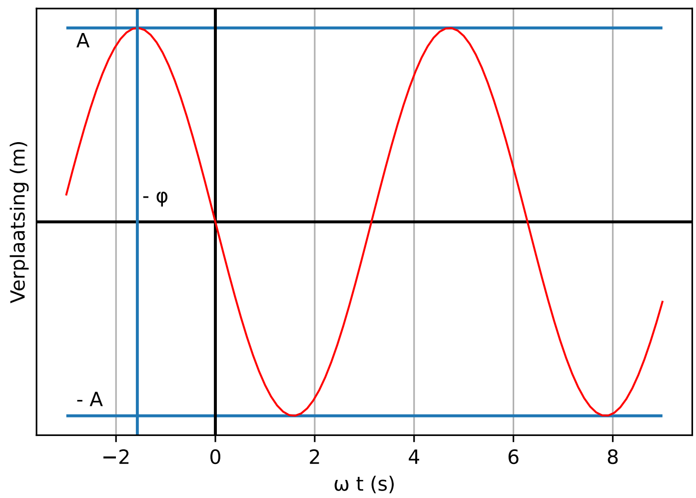
De afleidingen voor trillingen en golven. De source code is te vinden op github.
Dit document is een 'work in progress', dit wil zeggen dat er (ongeveer) een wekelijkse update zal zijn. De meest recente versie zal altijd op Github staan!

1 Afleiding 1

Afleiding van de uitdrukking voor de verplaatsing van een ongedempte trilling aan de hand van de bewegings-vergelijking



Figuur 1: Massa veer systeem



Figuur 2: Harmonische Oscillator

We stellen eerst de tweede wet van Newton op voor het blokje M uit figuur 1.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

We kijken nu enkel naar de x-component, en brengen we de kracht van de veer in rekening:

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

We hebben ook de versnelling geschreven als de tweede afgeleide van de verplaatsing. Door alle termen naar het linker lid te verplaatsen krijgen we volgende differentiaal vergelijking:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \tag{1}$$

Deze differentiaal vergelijking moeten we oplossen aan de hand van beginvoorwaarden. Deze voorwaarden verkrijgen we experimenteel. Bij het experiment noteren we de uitwijking tegenover de tijd. Hierdoor verkrijgen we figuur 2. Wiskundig vertaalt dit zich tot:

$$x(t) = Acos(\omega t + \varphi) \tag{2}$$

we kunnen vergelijking 2 afleiden om de snelheid van het blokje te verkrijgen:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega Asin(\omega t + \varphi) \tag{3}$$

Door nogmaals vergelijking 3 nogmaals af te leiden kunnen we ook de versnelling van het blokje verkrijgen:

$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 Acos(\omega t + \varphi) \tag{4}$$

Nu kunnen we vergelijkingen 4 en 2 invullen in vergelijking 1:

$$-\omega^2 mAcos(\omega t + \varphi) + kAcos(\omega t + \varphi) = 0 \tag{5}$$

Vergelijking 5 is nu een oplossing voor differentiaal vergelijking 1 als aan volgende voorwaarde voldaan is:

$$\begin{aligned}
-\omega^2 mAcos(\omega t + \varphi) + kAcos(\omega t + \varphi) &= 0 \\
(\frac{k}{m} - \omega^2)Acos(\omega t + \varphi) &= 0 \\
\frac{k}{m} - \omega^2 &= 0 \\
\frac{k}{m} &= \omega^2
\end{aligned}$$

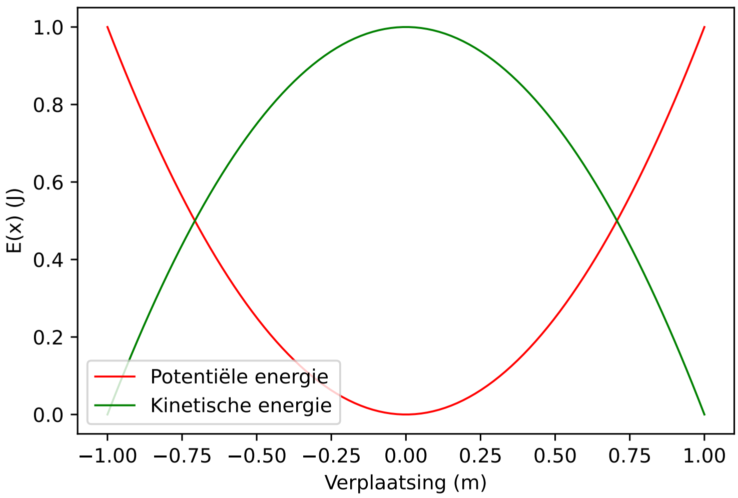
2 Afleiding 2

Afleiding van de potentiële en kinetische energie van een ongedempte trilling in functie van de plaats

Er zijn 2 vormen van energie aanwezig in een massa-veer-systeem. We hebben de potentiële energie in de veer en de kinetische energie van het blokje.

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\
E(x) &= \frac{1}{2}kA^2cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}m\omega^2A^2sin^2(\omega t + \varphi) \\
E(x) &= \frac{1}{2}kA^2cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}m\frac{k}{m}A^2sin^2(\omega t + \varphi) \\
E(x) &= \frac{1}{2}kA^2(cos^2(\omega t + \varphi) + sin^2(\omega t + \varphi)) \\
E(x) &= \frac{1}{2}kA^2
\end{aligned}
$$

We zien nu duidelijk dat de hoeveelheid energie niet afhankelijk is van de uitwijking van de massa. Met andere woorden, de energie blijft constant in het systeem (Figuur 3).



Figuur 3: Energie balans

3 Afleiding 3

Snelheid in functie van de afstand

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

We kunnen vergelijkingen 2 en 3 invullen:

$$-A\omega^2 cos(\omega t + \varphi) = \frac{dv}{dx} \cdot A\omega sin(\omega t + \varphi)$$

Na schrappen en herschikken:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\omega cos(\omega t + \varphi)}{sin(\omega t + \varphi)}$$

Sinus substitutie:

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dx} =& \frac{\omega cos(\omega t + \varphi)}{\sqrt{1 - cos^2(\omega t + \varphi)}} \\
\frac{dv}{dx} =& \frac{\pm\omega \frac{x}{A}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}}
\end{aligned}$$

Nu integratie van beide leden:

$$\int dv = \int \frac{\pm\omega \frac{x}{A}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}} dx$$

De snelheid in functie van de afstand is dus:

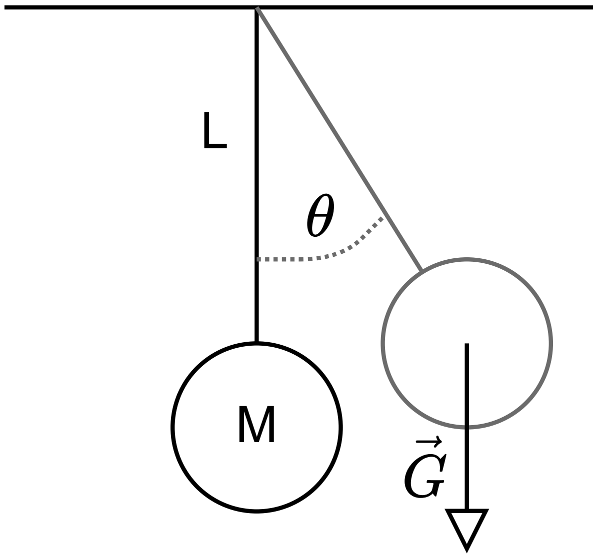
$$v(x) = \omega A \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \tag{6}$$

Uit vergelijking 6 kunnen we nu ook afleiden wat de uitdrukking is voor $v_{\max}$. We weten dat $v_{\max}$ zich zal voordoen bij het evenwichtspunt oftewel als x = 0.

$$\begin{aligned}
v(x) =& \omega A \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \\
v_{\max} =& \omega A \sqrt{1 - \frac{0^2}{A^2}} \\
v_{\max} =& \omega A \sqrt{1} \\
v_{\max} =& \omega A
\end{aligned}$$

4 Afleiding 4

Afleiding van de beweging van een pendulum aan de hand van de bewegingsvergelijking De



Figuur 4: Pendulum

drijvende kracht van de pendulum is gelijk aan:

$$F = -mgsin(\theta)$$

Hiermee kunnen we de bewegingsvergelijking opstellen:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mgsin(\theta)$$

We kunnen stellen dat $sin(\theta) \approx \theta$ voor een kleine θ:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\theta$$

We kunnen ook stellen dat $x = l\theta$:

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\theta$$

We kunnen dit nu herschrijven naar:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

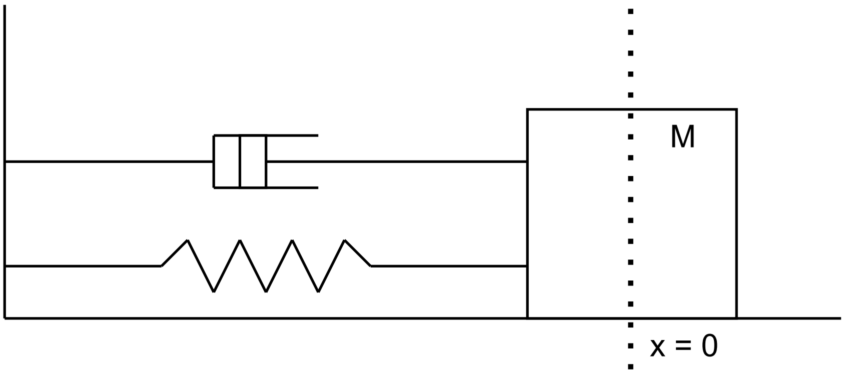
Dit geeft ons een differentiaalvergelijking. Een oplossing ziet er als volgt uit:

$$\theta(t) = \theta_0 cos(\omega t + \varphi)$$

Hierbij zien we dat $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

5 Afleiding 5

Gedempte harmonische trilling
We beginnen met de bewegingsvergelijking op te stellen:



Figuur 5: Gedempt massa veer systeem

$$\begin{aligned}
m\vec{a} =& \vec{F}_{veer} + \vec{F}_{demper} \\
m\frac{d^2x}{dt^2} =& -kx - bv \\
m\frac{d^2x}{dt^2} =& -kx - b\frac{dx}{dt} \\
0 =& m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx
\end{aligned}$$

We maken gebruik van de formule van Euler $e^{i\varphi} = cos(\varphi) + isin(\varphi)$ om tot een oplossing van de differentiaalvergelijking te komen:

$$\widetilde{x}(t) = Ae^{(\gamma+i\omega)t+i\varphi}$$

Het reëel deel is dus:

$$x(t) = Re(\widetilde{x}(t)) = Ae^{\gamma t}cos(\omega t + \varphi)$$

We kunnen deze nu invullen in de bewegingsvergelijking:

$$m(\gamma + i\omega)^2\widetilde{x}(t) + b(\gamma + i\omega)e^{(\gamma+i\omega)t+i\varphi} + ke^{(\gamma+i\omega)t+i\varphi} = 0 \tag{7}$$

Na herordenen en het delen door m, krijgen we:

$$\gamma^2 + 2i\gamma\omega - \omega^2 + \frac{b}{m}\gamma + i\frac{\omega b}{m} + \frac{k}{m} = 0$$

We kijken nu naar het imaginair deel:

$$\begin{aligned}
2i\gamma\omega + i\frac{\omega b}{m} &= 0 \\
2\gamma + \frac{b}{m} &= 0 \\
-\frac{b}{2m} &= \gamma
\end{aligned}$$

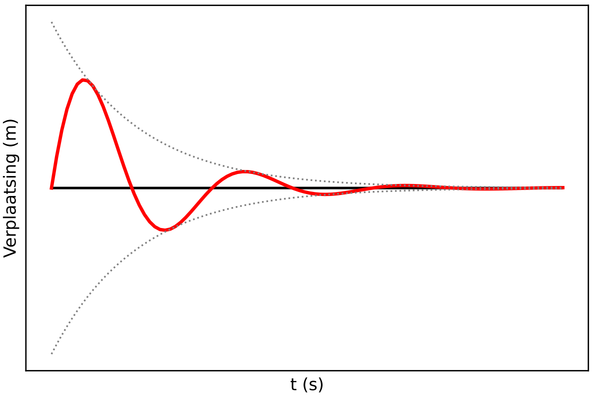
We vullen nu deze waarde van γ in in het reëel deel van vergelijking 7:

$$\begin{aligned}
\gamma^2 - \omega^2 + \frac{b}{m}\gamma + \frac{k}{m} &= 0 \\
(-\frac{b}{2m})^2 - \omega^2 + \frac{b}{m}(-\frac{b}{2m}) + \frac{k}{m} &= 0 \\
\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2} &= \omega^2 \\
\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} &= \omega
\end{aligned}$$

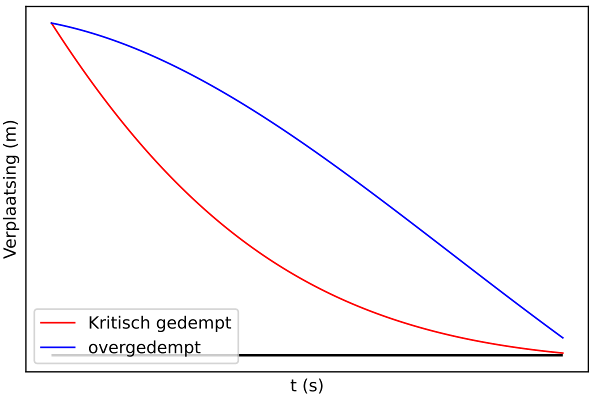
Hiermee hebben we nu de natuurlijke frequentie van het systeem gevonden. We kunnen tot slot ook nog stellen dat:

$$x(t) = Re(\widetilde{x}(t)) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}cos(\omega t + \varphi)$$

We kunnen nu drie gevallen onderscheiden:



Figuur 6: Ondergedempte trilling ($b^2 << 4mk$)



Figuur 7: Kritisch ($b^2 = 4mk$) en over gedempte ($b^2 >> 4mk$) trilling

6 Afleiding 6

Gedwongen trillingen
We stellen eerst de bewegingsvergelijking op:

$$m\frac{d^2\widetilde{x}(t)}{dt^2} + b\frac{d\widetilde{x}(t)}{dt} + k\widetilde{x}(t) = F_0 cos(\omega t) \tag{8}$$

Een voorstel voor de algemene oplossing van differentiaalvergelijking 8 ziet er als volgt uit:

$$\widetilde{x}(t) = Ae^{i(\omega t + \varphi)}$$

waarbij $\widetilde{F} = F_0 e^{i\omega t} e^{-i\varphi}$. Dit kunnen we nu invullen in vergelijking 8:

$$\begin{aligned} m\omega^2\widetilde{x}(t) + i\omega b\widetilde{x}(t) + k\widetilde{x}(t) &= F_0 e^{i\omega t}e^{-i\varphi} \\ m\omega^2 A^{i\omega t}e^{i\varphi} + i\omega b A^{i\omega t}e^{i\varphi} + kA^{i\omega t}e^{i\varphi} &= F_0 e^{i\omega t}e^{-i\varphi} \\ m\omega^2 A + i\omega b + k &= F_0 e^{-i\varphi} \end{aligned}$$

We kunnen dit opsplitsen in een imaginair en reëel deel:

Imaginair: $\omega b A = -F_0 sin(\varphi)$

Reëel: $-m\omega A + kA = F_0 cos(\varphi)$

Als we nu het imaginair deel delen door het reëel deel verkrijgen we voor φ:

$$\begin{aligned} -\frac{\omega b}{k - m\omega^2} &= tan(\varphi) \\ bgtan(\frac{-\omega b}{k - m\omega^2}) &= \varphi \end{aligned}$$

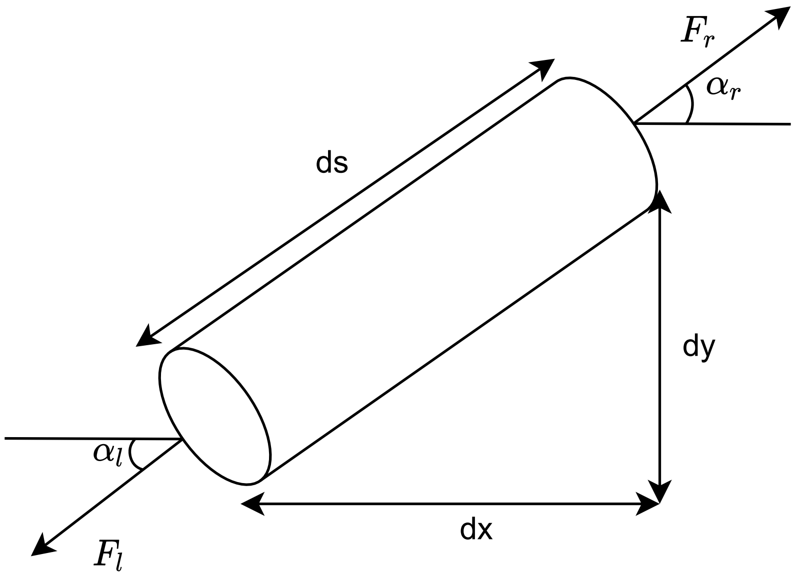
Om de amplitude te bepalen kijken we opnieuw naar het imaginair deel:

$$\begin{aligned} \omega b A &= -F_0 sin(\varphi) \\ \omega b A &= -F_0 \frac{tan(\varphi)}{\sqrt{1 + tan^2(\varphi)}} \\ \omega b A &= -F_0 \frac{tan(bgtan(\frac{-\omega b}{k - m\omega^2}))}{\sqrt{1 + tan^2(bgtan(\frac{-\omega b}{k - m\omega^2}))}} \\ \omega b A &= -F_0 \frac{\frac{-\omega b}{k - m\omega^2}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2 b^2}{(k - m\omega^2)^2}}} \\ \omega b A &= -F_0 \frac{\frac{-\omega b}{k - m\omega^2}}{\sqrt{\frac{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 b^2}{(k - m\omega^2)^2}}} \\ A &= \frac{\frac{F_0}{k - m\omega^2}}{\sqrt{\frac{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 b^2}{(k - m\omega^2)^2}}} \\ A &= \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\frac{k}{m} - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2 b^2}{m^2}}} \\ A &= \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2 b^2}{m^2}}} \end{aligned}$$

met ω_0 de natuurlijke frequentie van het systeem en ω de gedwongen frequentie.

7 Afleiding 7

Golf vergelijking
We nemen aan da F_r en F_l uit figuur 8 gelijk zijn aan elkaar en aan de spanning in het touw σA. we stellen ook dat de massa voldoet aan $dm = \rho ds A$.



Figuur 8: Touw

We starten met het opstellen van de wet van Newton:

$$\begin{aligned}\sum \vec{F} &= m\vec{a} \\ F_r sin(\alpha_r) = F_l sin(\alpha_l) &= dm a_y \\ \sigma A(sin(\alpha_r) - sin(\alpha_l)) &= dm\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ \sigma(\frac{dy}{dx}|_r - \frac{dy}{dx}|_l) &= \rho ds \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\end{aligned}$$

We stellen dat α klein is, en dus kunnen we zeggen dat $sin(\alpha) \approx tan(\alpha) = \frac{dx}{dy}$. We nemen ook aan dat $ds \approx dx$.

$$\begin{aligned}\sigma\frac{\frac{dy}{dx}|_r - \frac{dy}{dx}|_l}{dx} &= \rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ \sigma\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\end{aligned}$$

Hiermee zijn we de 1D golfvergelijking bekomen.

8 Afleiding 8

Harmonische golven
Een voorstel voor de 1D golf vergelijking ziet er als volgt uit:

$$y(x,t) = y_m sin(kx \pm \omega t + \varphi)$$

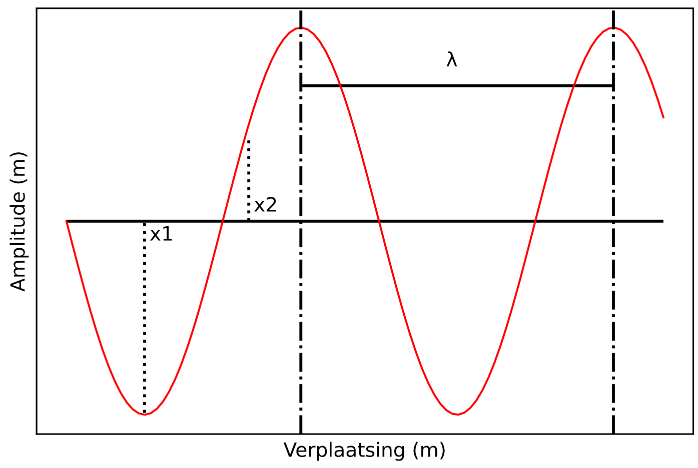
We kunnen deze oplossing invullen in de golfvergelijking:

$$-\omega^2 y_m sin(kx \pm \omega t + \varphi) = v^2 k^2 y_m sin(kx \pm \omega t + \varphi)$$

Als we dit vereenvoudigen, krijgen we de voorwaarden waaraan een golf moet voldoen.

$$v^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$$
$$v = \pm\frac{\omega}{k}$$

We kunnen nu een analyse doen op de golfvergelijking in het tijdsdomein:



Figuur 9: Tijdsdomein analyse

We starten opnieuw met de algemene oplossing, maar dan op vaste plaats x_1:

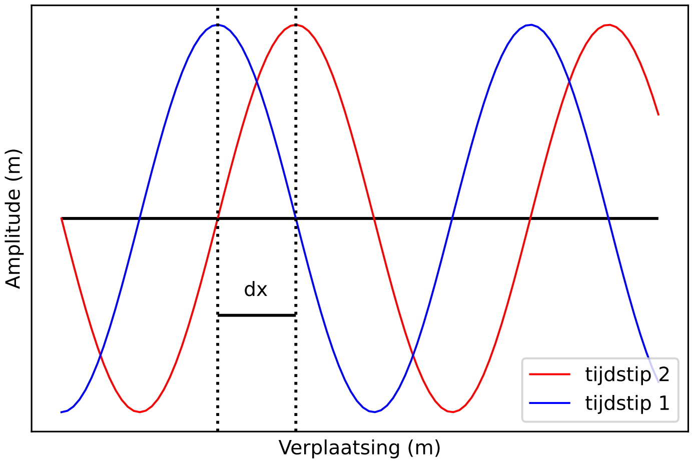
$$y(x_1,t) = y_m sin(kx_1 \pm \omega t + \varphi) \tag{9}$$
$$y(x_1,t) = y_m sin(\pm\omega t + \varphi_1) \tag{10}$$

met $\varphi_1 = kx_1 + \varphi$. We kunnen dit opnieuw doen voor x_2

$$y(x_2,t) = y_m sin(kx_2 \pm \omega t + \varphi) \tag{11}$$
$$y(x_2,t) = y_m sin(\pm\omega t + \varphi_2) \tag{12}$$

We zien dus uit vergelijkingen 10 en 12, dat er engel een fase verschuiving is. We vermelden ook nog dat oscillaties in fase zijn als $2\pi = k\lambda$.

We doen ook de analyse doen op de golfvergelijking in de ruimte:



Figuur 10: Ruimtelijke analyse

We starten opnieuw met de algemene oplossing, maar dan op vast tijdstip t_1:

$$y(x,t_1) = y_m sin(kx \pm \omega t_1 + \varphi) \tag{13}$$
$$y(x,t_1) = y_m sin(kx + \varphi_1) \tag{14}$$

met $\varphi_1 = \varphi \pm \omega t_1$. We stellen dit opnieuw op voor t_2

$$y(x,t_2) = y_m sin(kx \pm \omega t_2 + \varphi) \tag{15}$$
$$y(x,t_2) = y_m sin(kx \underbrace{\pm \omega t_1 + \varphi}_{\varphi_1} \pm \Delta t) \tag{16}$$
$$y(x,t_2) = y_m sin(kx + \varphi_2) \tag{17}$$

met $\varphi_2 = \varphi_1 \pm \Delta t$. uit de waarden van φ_1 en φ_2 kunnen we de voortplantingsrichting van de golf bepalen:

$\varphi_1 < \varphi_2$	Golf naar rechts
$\varphi_1 > \varphi_2$	Golf naar links

We kunnen ook iets zeggen over de voortplantingssnelheid v.

$$\begin{aligned} v = \frac{dx_{max}}{dt} = \frac{d}{dt}(kx_{max} \pm \omega t + \varphi) &= 0 \\ k\frac{dx_{max}}{dt} \pm \omega &= 0 \\ \pm\frac{\omega}{k} &= v \\ \pm\frac{2\pi f}{\frac{2\pi}{\lambda}} &= v \\ \pm\lambda f &= v \end{aligned}$$

9 Afleiding 9

Superpositie
We zeggen dat de algemene oplossing $y(x,t)$ van de golfvergelijking kan uitgedrukt worden door 2 nieuwe functies:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

We vullen dit opnieuw in in de golfvergelijking:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial^2 y_1(x,t) + y_2(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y_1(x,t) + y_2(x,t)}{\partial x^2}$$

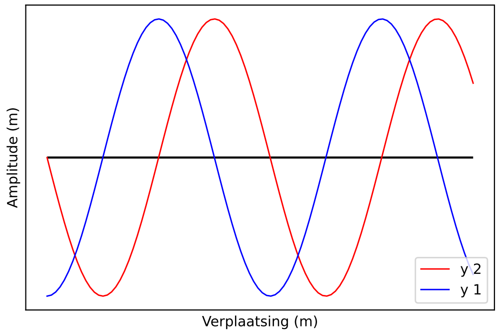
We gebruiken de lineariteit van de afgeleide:

$$\frac{\partial^2 y_1(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y_2(x,t)}{\partial t^2} = v^2 (\frac{\partial^2 y_1(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y_2(x,t)}{\partial x^2})$$

10 Afleiding 10

Interferentie
Interferentie doet zich voor als er meerdere verschillende golven aanwezig zijn in 1 medium. We kunnen dit voorstellen door volgende 2 functies (zie ook figuur 11):

$$y_1 = y_m sin(kx \pm \omega t)$$
$$y_2 = y_m sin(kx \pm \omega t + \phi)$$



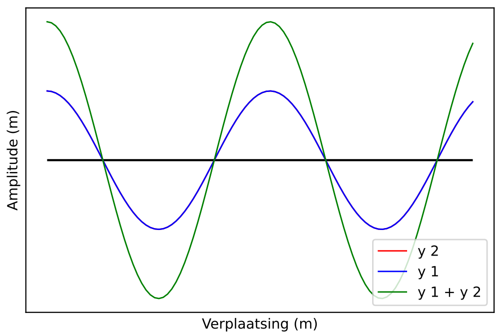
Figuur 11: Golven y_1 en y_2 die zullen interfereren

We bepalen nu hoe $y_1 + y_2$ er wiskundig uit zal zien:

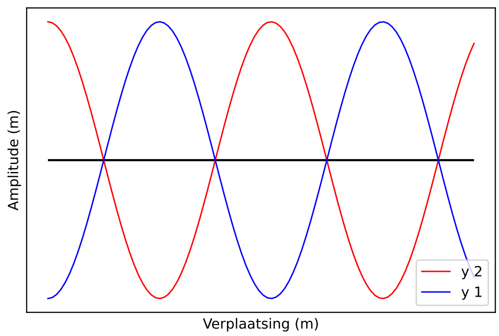
$$y = y_1 + y_2$$
$$y = y_m sin(kx \pm \omega t) y_m + sin(kx \pm \omega t + \phi)$$
$$y = \underbrace{2y_m cos(\frac{\phi}{2})}_{A=f(\phi)} sin(kx + \omega t + \frac{\phi}{2})$$

Hierbij werd gebruikt gemaakt van de regels van Simpson.

De 2 uitersten van dit fenomeen krijgen een naam: destructieve- en constructieve-interferentie. Bij destructieve, zullen de golven elkaar tegen werken zodat de beweging stopt (zie figuur 12b). Constructieve interferentie zal ervoor zorgen dat de resulterende golf groter wordt (zie figuur 12a).



(a) Constructieve interferentie



(b) Destructieve interferentie

Figuur 12: Twee extreme gevallen van interferentie.

11 Afleiding 11

Staande golven
Staande golven doen zich vaak voor bij muziek instrumenten zoals bijvoorbeeld de gitaar. Wiskundig kunnen we een staande golf als volgt voorstellen:

$$y(x,t) = y_m sin(kx - \omega t) + y_m sin(kx + \omega t)$$
$$y(x,t) = \underbrace{2y_m sin(kx)}_{A(x)} cos(\omega t)$$

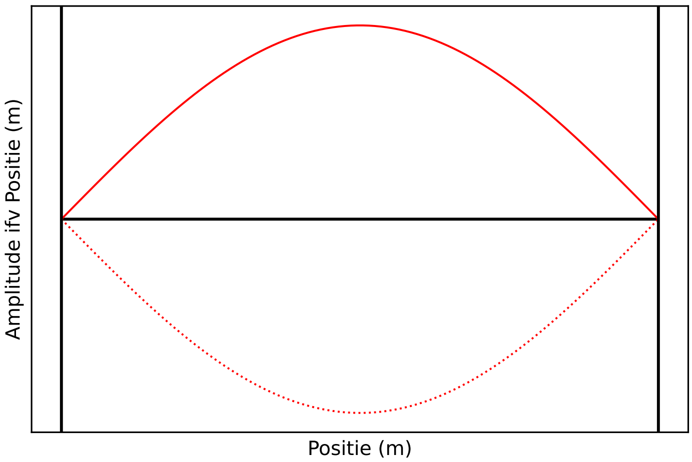
Hierbij werd gebruikt gemaakt van de regels van Simpson. Omdat de uiteinden van de snaar (met lengte L) ook vast gehouden worden, kunnen we ook volgende randvoorwaarden stellen:

$$y(0,t) = 0 \Rightarrow sin(0) = 0$$
$$y(L,t) = 0 \Rightarrow sin(kL) = 0$$

We kunnen dus algemeen zeggen dat $k \cdot L$ altijd gelijk moet zijn aan een veelvoud van π oftewel:

$$kL = m\pi (m \in \mathbb{N})$$
$$\frac{2\pi}{\lambda} L = m\pi$$
$$\lambda = \frac{2L}{m}$$

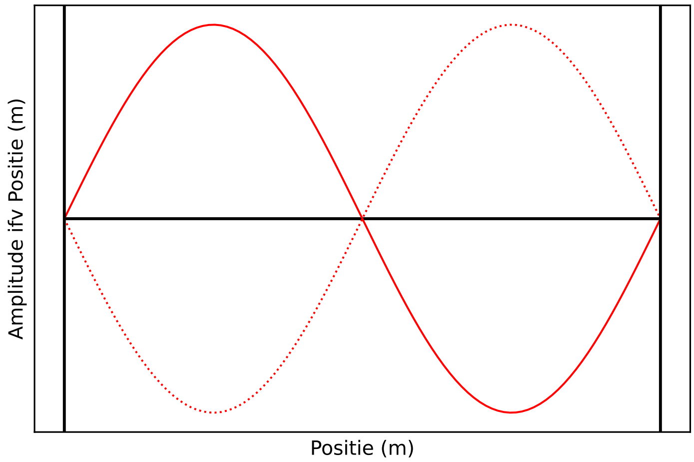
Eerste harmonische $(m = 1)$



Figuur 13: Eerste harmonische

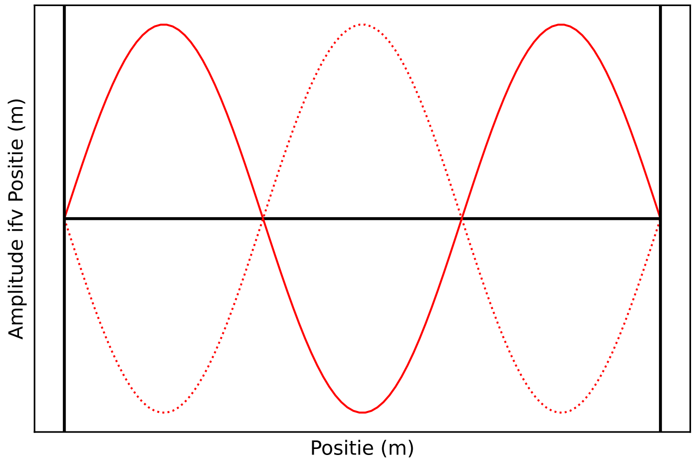
$m = 1$ dus moet $\lambda = 2L$, en de frequentie is dan $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2L}$.

Tweede harmonische $(m = 2)$



Figuur 14: Tweede harmonische

$m = 2$ dus moet $\lambda = L$, en de frequentie is dan $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{L}$.
Derde harmonische $(m = 3)$

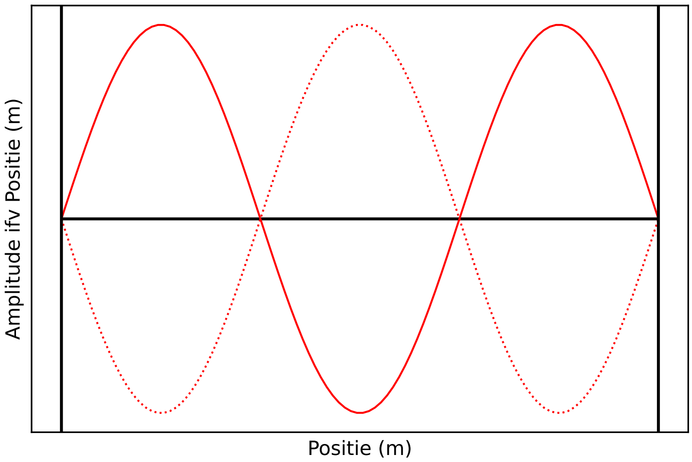


Figuur 15: Derde harmonische

$m = 3$ dus moet $\lambda = \frac{2}{3}L$, en de frequentie is dan $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{2v}{3L}$.

12 Afleiding 12

Energie transport in een golf.
PLACEHOLDER



Figuur 16: Energie transport

De energie in een massa-veer-systeem is:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = dE = \frac{1}{2}\omega^2 dmA^2$$

We gebruiken nu het feit dat $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ en $\omega = \pi f$:

$$dE = 2\pi^2 f^2 dmA^2$$

We kunnen dm herschrijven als $dm = \rho sdx = \rho sdtv$:

$$dE = 2\pi^2 f^2 A^2 \rho Svdt$$
$$\frac{dE}{dt} = 2\pi^2 f^2 A^2 \rho Sv = P$$

We krijgen nu dus het vermogen van de golf. We kunnen hieruit nu ook nog de intensiteit I halen:

$$I = \frac{P}{S} = 2\pi^2 f^2 A^2 \rho v$$