Die Verknüpfung von Raum-Zeit Koordinaten

Vasilios Qesku

18-03-2022

Zusammenfassung

Die Lorentz-Transformation ist der Prozess der Transformation eines Koordinatensystems in ein anderes, um die Relevanz experimenteller Messwerte in vier Dimensionen zu überprüfen. Es handelt sich um eine lineare Transformation, die in der Regel bei der Untersuchung des Elektromagnetismus verwendet wird. In diesem Dokument erkläre ich die Verknüpfung von Raum-Zeit Koordinaten und gehe im späteren Verlauf auf die Lorentz Gruppe ein. Außerdem präsentiere ich eine Einführung in die ersten Konsequenzen der speziellen Relativitätstheorie (Längenkontraktion, Gleichzeitigkeit und Kausalität), die mit Hilfe von Lorentz-Transformationen und den überlagerten Minkowski-Diagrammen für zwei Beobachter dargestellt werden.

Inhaltsverzeichnis

1 Lorentz-Transformation **2**

2 Die Verknüpfung von Raum-Zeit Koordinaten und Lorentz-Boost **3**

2.1 Inverser Lorentz Boost 7

3 Lorentz-Gruppe **7**

4 Längenkontraktion **9**

5 Gleichzeitigkeit und Kausalität **10**

1 Lorentz-Transformation

In der Lorentz-Transformation bewegen sich zwei Inertialsysteme relativ zueinander. Es gibt zwei Koordinatensysteme, welche dreidimensional sind. Sie haben die Achsen x, y und z. Das Inertialsystem I ist ein ruhendes Bezugssystem. Das Inertialsystem I' bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit in Richtung x-Achse. Während I' sich mit der konstanten Geschwindigkeit v von I entfernt, bewegt sich I relativ mit der konstanten Geschwindigkeit $-v$ zu I'. Zu dem Zeitpunkt $t = t' = 0$ sind die Inertialsysteme deckunsgleich. Ein Lichtblitz wird zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ von O_I und $O_{I'}$ ausgesandt. Der Lichtblitz erreicht nach einer kurzen Zeit den Punkt P. Aus der Perspektive des Inertialsystems I hat der Punkt P den Ortsvektor $\vec{r}(t)$. Aus der Perspektive des Inertialsystems I' hat der Punkt P den Ortsvektor $\vec{r'}(t')$. Der Punkt P wird in beiden Fällen durch einen Ortsvektor und einer entsprechenden Zeit t oder t' beschrieben. Der Lichtblitz breitet sich kugelförmig mit der Lichtgeschwindigkeit aus. In dem Inertialsystem I kann man den Abstand von dem O_I bis zu dem Punkt P berechnen, indem man die jeweiligen Achsen quadriert und miteinander addiert. Die Lichtwelle erreicht mit Lichtgeschwindigkeit an einem Zeitpunkt den Punkt P. Dabei muss die Lichtwelle eine Strecke ct zurücklegen.

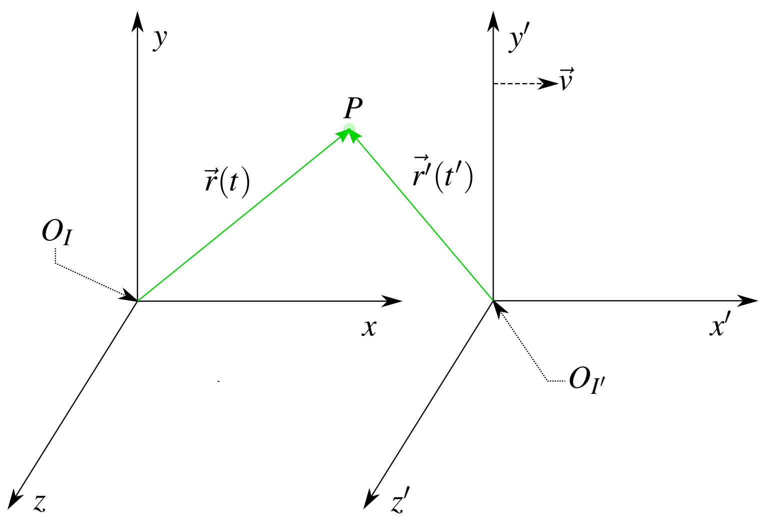

Abbildung 1: Lorentz-Transformation

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2 \tag{1}$$

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2 \tag{2}$$

Die Gleichungen zeigen den Zusammenhang zwischen der Zeit t oder t' und den Koordinaten. Man könnte anhand der Koordinaten die erforderliche Zeit t und t' berechnen , welche der Lichtblitz bis zu den Punkt P braucht. [1]

2 Die Verknüpfung von Raum-Zeit Koordinaten und Lorentz-Boost

Man sucht eine Verknüpfung der Raum-Zeit Koordinaten (x,y,z,t) und (x',y',z',t') von dem Punkt P, welche den Satz der Gleichungen 1 und 2 erfüllen soll. Diese Verknüpfung muss einer linearen Transformation entsprechen. Die Raum-Zeit Koordinaten kann man in einem Spaltenvektor zusammenfassen.

Spaltenvektoren:

$$I \leftarrow \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \rightarrow I' \tag{3}$$

Damit man von den Raum-Zeit Koordinaten aus dem Inertialsystem I zu den entsprechenden Raum-Zeit Koordinaten in dem Inertialsystem I' hinübergehen kann, wendet man eine lineare Transformation an $\rightarrow A \cdot \vec{x} = \vec{x}'$. Der Spaltenvektor aus dem Inertialsystem I wird in diesem Fall mit einer 4×4 Matrix multipliziert.

lineare Transformation:

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \Lambda_{4\times 4} \times \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{4}$$

Die Umwandlung von den Raum-Zeit Koordinaten in dem Inertialsystem I nach den Raum-Zeit Koordinaten in dem Inertialsystem I' muss eine lineare Transformation sein. Dies kann man sich durch eine gleichförmige geradlinige Bewegung erklären, welche in dem Inertialsystem I stattfindet. Man hat eine Masse, die sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Außerdem soll sich auch in dem Inertialsystem I' eine gleichförmige geradlinige Bewegung befinden. Denn das zweite Einsteinsche

Postulat besagt, dass die Naturgesetze unabhängig davon sind in welchem Intertialsystem man sich befindet.

gleichförmige Bewegung in dem Inertialsystem I:

$$x = vt + x_0 \tag{5}$$

gleichförmige Bewegung in dem Inertialsystem I':

$$x' = v't' + x'_0 \tag{6}$$

Das Inertialsystem I' bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit $v = v_x \hat{e}_x$ in x-Richtung am Inertialsystem I vorbei. Da sich das Inertialsystem I' nur in x-Richtung bewegt, bleiben alle die zur Bewegungsrichtung senkrechten Abstände $y = y'$ und $z = z'$ unverändert. Das sagt aus, dass das t' und x' unabhängig von y und z sind. Durch diese Unabhängigkeit muss die 4×4 Matrix eine bestimmte Struktur haben.

$$\Lambda_{4\times 4} = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Wenn man sich am Ursprung des Inertialsystems I' befindet, sieht man, dass das Inertialsystem I ein Strecke zurücklegt. Währenddessen hinterlegt man selber keine Strecke. Dies würde umgekehrt sein, wenn man sich in dem Inertialsystem I' befinden würde.

$$ct' = a \cdot ct + b \cdot x \tag{8}$$

$$x' = d \cdot ct + e \cdot x \tag{9}$$

$$y' = y \tag{10}$$

$$z' = z \tag{11}$$

Wenn man sich in dem Inertialsystem I befindet, hinterlegt der $O_{I'}$ eine Strecke. Es gilt $x = vt$. Man selbst hinterlegt keine Strecke, da die x

$$O_{I'} : x = vt \longleftrightarrow x' = 0 \tag{12}$$

$$O_I : x = 0 \longleftrightarrow x' = vt' \tag{13}$$

Daraus folgen Gleichungen, welche die Ortskoordinaten x und x' als einen linearen Zusammenhang darstellen.

$$x' = A(x - vt) \tag{14}$$

$$x = \tilde{A}(x - vt) \tag{15}$$

Die linearen Zusammenhänge müssen die beiden Bedingungen $x' = 0$ und $x = 0$ erfüllen. In dem Inertialsystem I' muss $x - vt = 0$ sein. Dieser Term muss mit einer Konstanten multipliziert werden, damit die Gleichung ein linearer Zusammenhang ist. In dem Inertialsystem I muss $x' - vt' = 0$ gelten. Hier wird der auch mit einer Konstanten multipliziert. Man kann die Gleichung 14 in die Gleichung 15 einsetzen.

$$x = \tilde{A}(Ax - Avt + vt') \tag{16}$$

Umformung nach t':

$$t' = \frac{(1 - \tilde{A}A)x}{\tilde{A}v} + At \tag{17}$$

Die Gleichung sagt aus, dass t' linear von x und t abhängig ist. In der Gleichung kann man anstelle der Konstanten $\tilde{A}$ eine andere Variable einführen. Es gilt $D = \tilde{A}$.

$$t' = At - Dx \tag{18}$$

Man setzt die Gleichungen 14 und 17 in die Gleichung 2 ein.

$$A^2(x - vt)^2 + y'^2 + z'^2 = c^2(At - Dx) \tag{19}$$

Durch ein bestimmtes Umformen der Gleichung kann man die jeweiligen Koeffizienten der Raum-Zeit Koordinaten identifizieren.

$$x^2 \underbrace{(A^2 - c^2D^2)}_{Term\,1} - 2xt \underbrace{(A^2v - c^2AD)}_{Term\,2} + y^2 + z^2 = t^2 \underbrace{(c^2A^2 - v^2A^2)}_{Term\,3} \tag{20}$$

Die Gleichung 20 sollte der Gleichung 1 entsprechen, da man eine Transformation sucht, welche die Verknüpfung der Raum-Zeit Koordinaten darstellt. Der mathematische Rechenweg zeigt den Übergang von dem einen Inertialsystem zu dem anderen Inertialsystem. Da die Gleichung 20 der Gleichung 1 entsprechen muss, bestimmt man die jeweiligen Terme nach den Raum-Zeit Koordinaten. Der Term 2 muss null sein, weil die Gleichung 1 den ungleichartigen Term $2xt$ nicht enthält.

$$A^2 v - c^2 AD = 0 \longleftrightarrow D = \frac{v}{c^2} A \tag{21}$$

Der Term 3 muss c^2 sein, weil die Gleichung 1 das Ergebnis $(ct)^2$ hat.

$$A^2(c^2 - v^2) = c^2 \longleftrightarrow A = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{22}$$

Die Gleichung 22 ist der sogenannte Lorentzfaktor γ. Es gilt $A = \gamma$

Der Term 1 muss gleich 1 sein, da in der Gleichung 1 das x^2 vorkommt.

$$A^2 - c^2 D^2 = 1 = A^2(1 - c^2 \cdot \frac{v^2}{c^4}) \tag{23}$$

$$\text{Gleichsetzung der Größen} \qquad \begin{cases} D = \frac{v}{c^2} \\ A = \gamma \end{cases} \tag{24}$$

Mit den vorherigen Gleichungen kann man nun die Gleichungen der Lorentz-Transformationen aufstellen.

$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2} \cdot x) \tag{25}$$

$$x' = \gamma(t - \frac{v}{c} \cdot ct) \tag{26}$$

$$y' = y \tag{27}$$

$$z' = z \tag{28}$$

Transformation als Matrix Notation:

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{29}$$

Die Matrix stellt den Lorentz-Boost oder die spezielle Lorentz-Transformation von dem Inertialsystem I' in x-Richtung mit Geschwindigkeit v dar. [2]

2.1 Inverser Lorentz Boost

Damit man von den Raum-Zeit Koordinaten des Inertialsystems I' hinüber zu den Raum-Zeit Koordinaten des Inertialsystems I gehen kann, muss man die inverse Lorentz-Transformation. Man braucht die inverse Matrix zu $\Lambda(v)$.

$$\Lambda(-v) = \Lambda^{-1}(v) = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{30}$$

Dabei verändert sich das Vorzeichen von β, welches $\frac{v}{c}$ entspricht. Das Vorzeichen bei dem Lorentzfaktor bleibt gleich, da die Geschwindigkeit zum Quadrat ist. [2] [3]

$$\begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \tag{31}$$

3 Lorentz-Gruppe

In der Lorentz-Gruppe wird das Invariante Intervall oder das Abstandsquadrat betrachtet. Dieses Abstandsquadrat ist im vierdimensionalen Raum, da es drei Raumdimensionen und eine Zeitdimension gibt.

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = S^2 \tag{32}$$

Bei der Herleitung der Lorentz Transformation wurde gefordert, dass $s^2 = 0$ ist. In dem Inertialsystem I' müsste $S'^2 = 0$ gelten. Die Lorentz-Gruppe ist die Menge von allen linearen vierdimensionalen Transformation, welche die Größe S^2 lassen. Wenn die Größe S^2 ungleich null ist, gilt es ebenfalls. Man kann ein beliebiges S^2 nutzen.

$$S^2 = 0 \tag{33}$$

$$S^2 > 0 \tag{34}$$

$$S^2 < 0 \tag{35}$$

Die Größe S^2 ist invariant, da es nicht von einem bestimmten Inertialsystem abhängig ist. Das Abstandsquadrat ist in den beiden Inertialsystemen gleich. Durch die Invarianz von S^2 folgt, dass die Lorentz-Gruppe die Menge von allen speziellen Lorentz-Transformationen in beliebiger Achsenrichtung ist. Außerdem gilt für die Lorentz-Gruppe die Menge von allen Rotationen im dreidimensionalen Raum. Denn der Betrag eines Vektors ändert sich nicht durch eine beliebige Rotation und beeinflusst nicht die Größe S^2. Die Invarianz der Größe S^2 kann man durch die Anwendung der Gleichungen von dem Lorentz-Boost beweisen.

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) \longleftrightarrow (ct')^2 = \gamma^2[(ct)^2 + \beta^2 x^2 - 2\beta ctx] \tag{36}$$

$$x' = \gamma(t - \beta ct) \longleftrightarrow (x')^2 = \gamma^2[-\beta^2(ct)^2 - x^2 + 2\beta ctx] \tag{37}$$

Die beiden Gleichungen stellen die beiden Raum-Zeit Koordinaten $(ct')^2$ und $-(x')^2$ im Inertialsystem I' dar. Man erhält dadurch die Gleichung des Abstandsquadrats in dem Inertialsystem I'. [3]

$$\begin{aligned} S'^2 = (ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 &= \frac{1}{1-\beta^2}[(1-\beta^2)(ct)^2 - (1-\beta^2)x^2] - y^2 - z^2 \\ &= (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = S^2 \end{aligned} \tag{38}$$

4 Längenkontraktion

Das Phänomen Längenkontraktion kann man sich anhand eines Versuches erklären. In dem Inertialsystem I' wird die Länge eines ruhenden Stabes gemessen. Der ruhende Stab soll die Strecke repräsentieren. Die Eigenlänge l_0 des ruhenden Stabes kann durch das Anlegen von geeichten Maßstäben bestimmt werden. Der Stab liegt in dem Inertialsystem I' entlang der x-Achse. Außerdem hat dieser Stab einen Anfangspunkt und einen Endpunkt. Bei dem Anfangspunkt gilt $x_1' = 0$ und bei dem Endpunkt gilt $x_2' = l_0$. Nun kann man den ruhenden Stab aus der Sicht des Inertialsystems I. Dabei bewegt sich das Inertialsystem I' mit konstanter Geschwindigkeit relativ zu dem Inertialsystem I. Der Abstand zwischen O_I und $O_{I'}$ muss gleich vt sein. Zu dem Zeitpunkt $t = t' = 0$ sind die beiden Inertialsysteme deckungsgleich. Dies bedeutet, dass der Anfangspunkt des Stabes in dem Inertialsystem I bei $x_1 = 0$ liegt. Für die Messung der Länge von dem Stab in dem Inertialsystem I wären Beobachter nötig. Man bräuchte zwei Beobachter in dem Inertialsystem I, welche gleichzeitig die Positionen des Anfangspunktes und Endpunktes von dem Stab auf der x-Achse markieren würden. Man hat in dem Experiment zwei Ereignisse, welche die Raum-Zeit Punkte sind. Das erste Ereignis ist der Anfangspunkt des Stabes in dem Inertialsystem I bei x_1 zu dem Zeitpunkt $t_1 = 0$. Das zweite Ereignis ist der Endpunkt des Stabes in dem Inertialsystem I bei x_2 zu dem Zeitpunkt $t_2 = 0$. Man kann die einzelnen Raum-Zeit Koordinaten in der Gleichung 26 einsetzen

$$x_2' = \gamma(x_2 - vt_2) = l_0 \rightarrow x_2 = \frac{l_0}{\gamma} = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{39}$$

$$l = x_2 - x_1 = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < 0 \tag{40}$$

Wenn die Geschwindigkeit $v \neq 0$ ist, wird die Länge des Körpers verkürzt. [3]

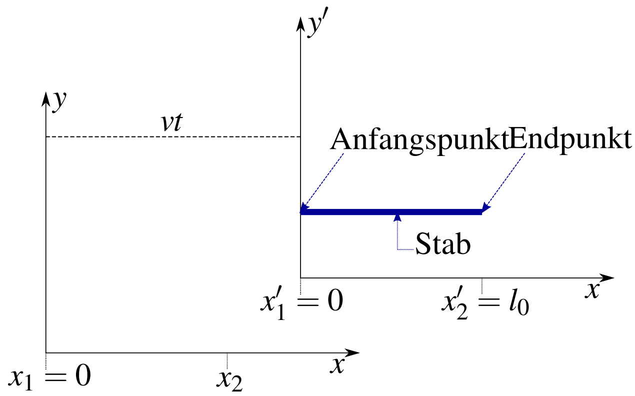

Abbildung 2: Längenkontraktion

5 Gleichzeitigkeit und Kausalität

Die Kausalität beschreibt die Beziehung von Ursache und Wirkung. Dies bedeutet, dass ein Ereignis nur dann die Ursache für ein zweites Ereignis sein kann, wenn es zeitlich vor ihm eingetreten ist.Im Allgemeinem sind Ursache und Wirkung abhängig, da die Reihenfolge von den Ereignissen vom Beobachter abhängt. Man hat zwei punktförmige Ereignisse und vergleicht diese jeweils in dem Inertialsystem I und Inertialsystem I'. Man untersucht den Einfluss des einen Ereignispunkt auf den anderen Ereignispunkt . Bei dem ersten Ereignispunkt sind alle Raum-Zeit Koordinaten gleich null, da beide Inertialsysteme deckungsgleich sind.

$$\text{Ereignispunkt 1} \qquad \begin{cases} x_1 = 0, t_1 = 0; y_1 = z_1 = 0 \\ x'_1 = 0, t'_1 = 0; y'_1 = z'_1 = 0 \end{cases} \tag{41}$$

Bei dem zweiten Ereignispunkt haben die beiden Inertialsystem einen Abstand zueinander. Die Bedingung, dass die Inertialsysteme deckungsgleich sind, fällt dadurch weg.

$$\text{Ereignispunkt 2} \qquad \begin{cases} x_2 = x, t_2 = t; t_2 - t_1)^2 \\ x'_2 = x', t'_2 = t'; y'_1 = z'_1 = 0 \end{cases} \tag{42}$$

Das Prinzip der Gleichzeitigkeit kann durch die Lorentz-Transformation aufgehoben werden. Dies kann man anhand eines Versuches darlegen. Ein Beobachter befindet sich in dem Inertialsystem I. Dieser befindet zu dem Zeitpunkt $t = 0$ bei $x \neq 0$. Daraus folgt, dass der erste Ereignispunkt und der zweite Ereignispunkt gleichzeitig an verschiedene Orte stattfinden. In dem Inertialsystem I' befindet sich auch ein Beobachter. Bei diesem Beobachter muss t' der Gleichung aus der speziellen Lorentz-Transformation entsprechen.

$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2} \cdot x) = \gamma \frac{v}{c^2} \neq 0 \tag{43}$$

Die Gleichung sagt aus, dass der erste Ereignispunkt und der zweite Ereignispunkt nicht gleichzeitig in dem Inertialsystem I' stattfinden. Man kann nun das Abstandsquadrat der beiden Ereignispunkte untersuchen. In der Gleichung des Abstandsquadrates müssen in diesem Fall der Zeitunterschied und die räumliche Distanz vorkommen.

$$S_{1,2}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2 \tag{44}$$

Außerdem gilt in dem Versuch $y = z = 0 = y' = z'$. Man weiß auch, dass das Abstandsquadrat invariant ist. Denn es hängt nicht von einem bestimmten Inertialsystem ab.

$$S_{1,2}^2 = c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2 \tag{45}$$

Die beiden Ereignispunkte kann man mit einem Signal verbinden, welches fiktiv ist. Ein Signal bedeutet, dass ein Ereignis ein anderes Ereignis beeinflussen kann. Als Signal kann man eine elektromagnetische Welle aussenden. In diesem Fall bewegt sich das Signal mit Lichtgeschwindigkeit. Man kann sich aber ein beliebiges Signal, welches sich mit einer beliebigen Geschwindigkeit V bewegt, auswählen. Daraus folgt, dass das Signal eine Strecke von dem ersten Ereignispunkt bis zu dem zweiten Ereignispunkt hinterlegen muss. Es gilt $x = Vt$. [4]

$$S_{1,2}^2 = (c^2t^2 - x^2) - (c^2 - V^2)t^2 \tag{46}$$

$$V = c \longrightarrow S_{1,2}^2 = 0 : lichtartig \tag{47}$$
$$V > c \longrightarrow S_{1,2}^2 < 0 : raumartig \quad (46)$$
$$V < c \longrightarrow S_{1,2}^2 > 0 : zeitartig \quad (47)$$

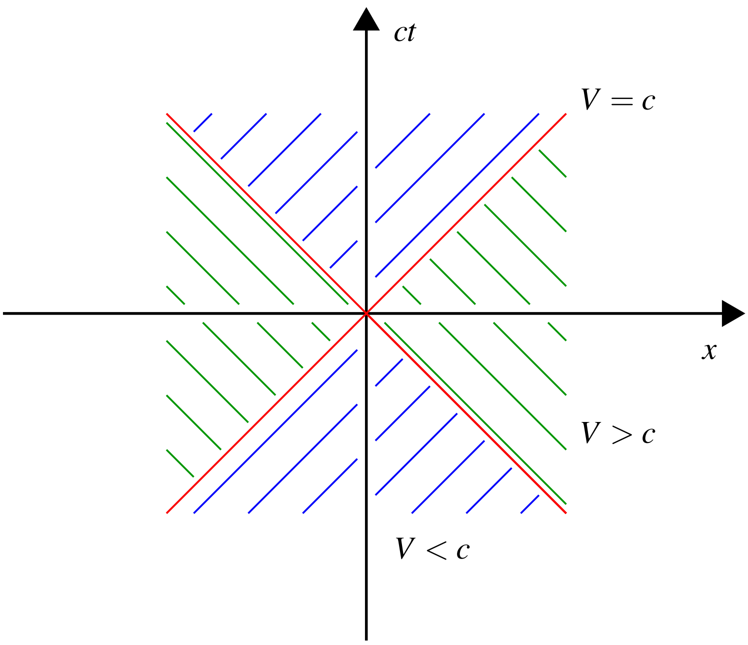

Abbildung 3: Minkowski-Diagramm [5]

Quellenverzeichnis

[1] Josef Jochum and Thomas Gutsche. Vorlesung physik grundkurs 2 (elektromagnetismus), 69. stunde, Jul 2019. `https://timms.uni-tuebingen.de:443/tp/UT_20190717_002_physgk2_0001` (Zugriff am 16. März 2022).

[2] Josef Jochum and Thomas Gutsche. Vorlesung physik grundkurs 2 (elektromagnetismus), 70. stunde, Jul 2019. `https://timms.uni-tuebingen.de:443/tp/UT_20190717_002_physgk2_0001` (Zugriff am 16. März 2022).

[3] Josef Jochum and Thomas Gutsche. Vorlesung physik grundkurs 2 (elektromagnetismus), 71. stunde, Jul 2019. `https://timms.uni-tuebingen.de:443/tp/UT_20190718_001_physgk2_0001` (Zugriff am 16. März 2022).

[4] Josef Jochum and Thomas Gutsche. Vorlesung physik grundkurs 2 (elektromagnetismus), 72. stunde, Jul 2019. `https://timms.uni-tuebingen.de:443/tp/UT_20190718_002_physgk2_0001` (Zugriff am 16. März 2022).

[5] Josef Jochum and Thomas Gutsche. Vorlesung physik grundkurs 2 (elektromagnetismus), 73. stunde, Jul 2019. `https://timms.uni-tuebingen.de:443/tp/UT_20190718_002_physgk2_0001` (Zugriff am 16. März).

Ich versichere, dass ich diese Facharbeit selbst angefertigt, keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt, und die Stellen der Facharbeit, die im Wortlaut oder im wesentlichen Inhalt aus anderen Werken entnommen wurden, mit genauer Quellenangabe kenntlich gemacht habe.

Datum: ________________ Unterschrift: ________________________________